প্রাক্‌কথন

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের স্নাতক শ্রেণির জন্য যে পাঠক্রম প্রবর্তিত হয়েছে, তার লক্ষণীয় বৈশিষ্ট্য হ'ল প্রতিটি শিক্ষার্থীকে তাঁর পছন্দমতো কোন বিষয়ে সাম্মানিক (honours) স্তরে শিক্ষাগ্রহণের সুযোগ করে দেওয়া। এক্ষেত্রে ব্যক্তিগতভাবে তাঁদের গ্রহণক্ষমতা আগে থেকেই অনুমান করে না নিয়ে নিয়ত মূল্যায়নের মধ্য দিয়ে সেটা স্থির করাই যুক্তিযুক্ত। সেই অনুযায়ী একাধিক বিষয়ে সাম্মানিক মানের পাঠ-উপকরণ রচিত হয়েছে ও হচ্ছে—যার মূল কাঠামো স্থিরীকৃত হয়েছে একটি সুচিন্তিত পাঠক্রমের ভিত্তিতে। কেন্দ্র ও রাজ্যের অগ্রগণ্য বিশ্ববিদ্যালয়সমূহের পাঠক্রম অনুসরণ করে তার আদর্শ উপকরণগুলির সমন্বয়ে রচিত হয়েছে এই পাঠক্রম। সেইসঙ্গে যুক্ত হয়েছে অধ্যেতব্য বিষয়ে নতুন তথ্য, মনন ও বিশ্লেষণের সমাবেশ।

দূরসঞ্চারী শিক্ষাদানের স্বীকৃত পদ্ধতি অনুসরণ করেই এইসব পাঠ-উপকরণ লেখার কাজ চলছে। বিভিন্ন বিষয়ের অভিজ্ঞ পণ্ডিতমণ্ডলীর সাহায্য এ কাজে অপরিহার্য এবং যাঁদের নিরলস পরিশ্রমে লেখা, সম্পাদনা তথা বিন্যাসকর্ম সুসম্পন্ন হচ্ছে তাঁরা সকলেই ধন্যবাদের পাত্র। আসলে, এঁরা সকলেই অলক্ষ্যে থেকে দূরসঞ্চারী শিক্ষাদানের কার্যক্রমে অংশ নিচ্ছেন ; যখনই কোন শিক্ষার্থী এই পাঠ্যবস্তুনিচয়ের সাহায্য নেবেন, তখনই তিনি কার্যত একাধিক শিক্ষকমণ্ডলীর পরোক্ষ অধ্যাপনার তাবৎ সুবিধা পেয়ে যাচ্ছেন।

এইসব পাঠ-উপকরণের চর্চা ও অনুশীলনে যতটা মনোনিবেশ করবেন কোনও শিক্ষার্থী, বিষয়ের গভীরে যাওয়া তাঁর পক্ষে ততই সহজ হবে। বিষয়বস্তু যাতে নিজের চেষ্টায় অধিগত হয়, পাঠ-উপকরণের ভাষা ও উপস্থাপনা তার উপযোগী করার দিকে সর্বস্তরে নজর রাখা হয়েছে। এরপর যেখানে যতটুকু অস্পষ্টতা দেখা দেবে, বিশ্ববিদ্যালয়ের বিভিন্ন পাঠকেন্দ্রে নিযুক্ত শিক্ষা-সহায়কগণের পরামর্শে তাঁর নিরসন অবশ্যই হ'তে পারবে। তার ওপর প্রতি পর্যায়ের শেষে প্রদত্ত অনুশীলনী ও অতিরিক্ত জ্ঞান অর্জনের জন্য গ্রন্থ-নির্দেশ শিক্ষার্থীর গ্রহণ-ক্ষমতা ও চিন্তাশীলতা বৃদ্ধির সহায়ক হবে।

এই অভিনব আয়োজনের বেশ কিছু প্রয়াসই এখনও পরীক্ষামূলক —অনেক ক্ষেত্রে একেবারে প্রথম পদক্ষেপ। স্বভাবতই ত্রুটি-বিচ্যুতি কিছু কিছু থাকতে পারে, যা অবশ্যই সংশোধন ও পরিমার্জনার অপেক্ষা রাখে। সাধারণভাবে আশা করা যায়, ব্যাপকতর ব্যবহারের মধ্য দিয়ে পাঠ-উপকরণগুলি সর্বত্র সমাদৃত হবে।

অধ্যাপক (ড.) শুভ শঙ্কর সরকার
উপাচার্য

চতুর্থ পুনর্মুদ্রণ ঃ জানুয়ারি, 2020

বিশ্ববিদ্যালয় মঞ্জুরি কমিশনের দূরশিক্ষা ব্যুরোর বিধি অনুযায়ী মুদ্রিত।
Printed in accordance with the regulations of the Distance Education Bureau of the University Grants Commission.

পরিচিতি

বিষয় ঃ পদার্থবিদ্যা **সাম্মানিক স্তর**

পাঠক্রম : পর্যায় :

EPH : 11 : 01 & 02

	রচনা	সম্পাদনা
একক 1-2	ড. প্রতীপকুমার চৌধুরী	অধ্যাপক সুব্রত দত্ত
একক 3-4	ড. দেবতোষ মজুমদার	ড. প্রদীপ কুমার ঘোষ
একক 5-6	ড. গঙ্গাব্রত মুখোপাধ্যায়	ড. দেবতোষ মজুমদার
একক 7	ড. প্রতীপকুমার চৌধুরী	ড. দেবতোষ মজুমদার
একক 8-9	ড. দেবতোষ মজুমদার	ড. প্রদীপ কুমার ঘোষ
একক 10-11	ড. প্রতীপকুমার চৌধুরী	ড. প্রদীপ কুমার ঘোষ
একক 12-13	অধ্যাপিকা নন্দিতা দত্ত	ড. প্রদীপ কুমার ঘোষ

প্রজ্ঞাপন

এই পাঠ সংকলনের সমুদয় স্বত্ব নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের দ্বারা সংরক্ষিত। বিশ্ববিদ্যালয় কর্তৃপক্ষের লিখিত অনুমতি ছাড়া এর কোন অংশের পুনর্মুদ্রণ বা কোনভাবে উদ্ধৃতি সম্পূর্ণ নিষিদ্ধ।

মোহন কুমার চট্টোপাধ্যায়
নিবন্ধক

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

EPH - 11

আপেক্ষিকতা ও উচ্চতর বলবিদ্যা

এবং

কোয়ান্টাম বলবিদ্যা

(স্নাতক পাঠক্রম)

পর্যায়

1

একক 1 ❐	আপেক্ষিকতার পরীক্ষাগত ভিত্তি	7–27
একক 2 ❐	নির্দেশাঙ্কের লরেন্ৎসীয় পরিবর্তন	28–44
একক 3 ❐	আপেক্ষকীয় সৃতিবিদ্যা	45–73
একক 4 ❐	আপেক্ষকীয় গতিবিদ্যা	74–134
একক 5 ❐	ল্যাগ্রাঞ্জীয় এবং হ্যামিল্টনীয় পদ্ধতি	135–161
একক 6 ❐	জড়তা ভ্রামক, জড়তা গুণক ও লাট্টুর গতি	162–197
একক 7 ❐	অতি অল্প বিস্তারের কম্পন	198–232

পর্যায়

2

একক 8 ❐	কণা ও তরঙ্গের দ্বিচারিতা	233–269
একক 9 ❐	অনিশ্চয়তার নীতি	270–285
একক 10 ❐	শ্রোডিংগার সমীকরণ	286–314
একক 11 ❐	শ্রোডিংগার সমীকরণের প্রয়োগ—মুক্ত অবস্থা	315–335
একক 12 ❐	শ্রোডিংগার সমীকরণের প্রয়োগ—আবদ্ধ অবস্থা	336–377
একক 13 ❐	হাইড্রোজেন পরমাণু	378–403

একক 1 ❑ আপেক্ষিকতার পরীক্ষাগত ভিত্তি

গঠন

1.1 প্রস্তাবনা

উদ্দেশ্য

1.2 আপেক্ষিকতার সনাতন তত্ত্ব

1.3 সনাতন আপেক্ষিকতা ও তড়িৎচুম্বকীয় ঘটনাবলি

1.4 মাইকেলসন-মর্লি পরীক্ষা—ইথারের অনুসন্ধান

1.4.1 লরেনৎস্—ফিৎসগেরাল্ড সংকোচন প্রকল্প

1.4.2 ইথার টানের প্রকল্প

1.5 গতিশীল ঘন মাধ্যমে আলোক সঞ্চারণ — ফিজোর পরীক্ষা

1.5.1 ফিজোর পরীক্ষা

1.6 বিকিরণ প্রকল্প

1.7 সারাংশ

1.8 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

1.9 উত্তরমালা

1.1 প্রস্তাবনা

আপেক্ষিকতা শব্দটির সঙ্গে যে বিজ্ঞানীর নাম ওতপ্রোতভাবে যুক্ত, তিনি হলেন অ্যালবার্ট আইনস্টাইন। আপেক্ষিকতার বিশেষ তত্ত্ব (Special Theory of Relativity) ও সাধারণ তত্ত্বের (General Theory of Relativity) জনক আইনস্টাইন হলেও আপেক্ষিকতা বিষয়টির ইতিহাস অনেক পুরানো। পদার্থ বিজ্ঞানের অন্যান্য শাখার সঙ্গে সমন্বয় রক্ষার জন্য আপেক্ষিকতার ধারণায় বিবর্তন ঘটাতে হয়েছে। বিশেষ করে তড়িৎচুম্বকীয় তত্ত্ব, আলোকের বেগ ও অণু-পরমাণু মৌলকণার গতি সম্বন্ধীয় অনুসন্ধান চালাতে গিয়ে আপেক্ষিকতার সনাতন ধারণার অক্ষমতা বার বার ধরা পড়েছে।

আপেক্ষিকতার সঠিক ও সম্পূর্ণ তত্ত্ব প্রতিষ্ঠা করার লক্ষ্যে নানা প্রকল্প গ্রহণ করা হয়েছে। বিজ্ঞানীরা এমন এক বিশেষ জড়ত্বীয় ফ্রেম কল্পনা করেছেন যেটিতে ম্যাক্সওয়েলের তড়িৎচুম্বকীয় সমীকরণগুলি খাটে। এমনকি তাঁরা 'ইথার' নামে একটি মাধ্যমও কল্পনা করেছিলেন, যা ঐ বিশেষ জড়ত্বীয় ফ্রেমে স্থির থাকে এবং যার মধ্যে আলোকতরঙ্গ তার নির্দিষ্ট বেগ c নিয়ে অগ্রসর হয়। অন্যদিকে এমন মতও অনেকে পোষণ করতেন যে নিউটনীয় গতিবিদ্যার ক্ষেত্রে ব্যবহৃত এক নির্দেশতন্ত্র থেকে অন্য

নির্দেশতন্ত্রে যাওয়ার সমীকরণগুলি কেবলমাত্র স্বল্পগতির ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য, আলোর বেগের সঙ্গে তুলনীয় গতির ক্ষেত্রে সেগুলির সংশোধন আবশ্যক।

এই প্রকল্পগুলির কোনটি সঠিক ও গ্রহণযোগ্য তা নির্ণয়ের জন্য বিজ্ঞানীরা বেশ কিছু পরীক্ষা করেছিলেন। এগুলির মধ্যে উল্লেখযোগ্য হল ইথার-প্রবাহ লক্ষ করার জন্য মাইকেলসন-মর্লি পরীক্ষা, তারকার আপাত কৌণিক চ্যুতি (aberration) পরিমাপের জন্য ব্রাড্‌লির পরীক্ষা এবং গতিশীল মাধ্যম দ্বারা কল্পিত ইথারের পরিবহন সংক্রান্ত ফিজোর পরীক্ষা। এই পরীক্ষাগুলির ফলাফল বিজ্ঞানীদের সঠিক সিদ্ধান্তে আসতে সাহায্য করেছে এবং আপেক্ষিকতার বিশেষ তত্ত্বের ভিত্তিকে দৃঢ় করেছে।

এই এককে আমরা উল্লিখিত পরীক্ষাগুলির পশ্চাৎপট আলোচনা করব এবং পরীক্ষাগুলির ফলাফল থেকে কীভাবে সিদ্ধান্ত গ্রহণ করা হয়েছে তা ব্যাখ্যা করব।

উদ্দেশ্য ঃ

এই এককটি পড়ার পর আপনি যে কাজগুলি করতে পারবেন সেগুলি হল ঃ

- আপেক্ষিকতার সনাতন একটি ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- দেখাতে পারবেন যে সাধারণ বলবিদ্যার ক্ষেত্রে গ্যালিলিও রূপান্তরণ সমীকরণ কার্যকরী হয় কিন্তু তড়িৎচুম্বকীয় ঘটনাবলির ক্ষেত্রে তা হয় না।
- মাইকেলসন-মর্লি পরীক্ষার পশ্চাৎপট, যান্ত্রিক ব্যবস্থা ও ফলাফল বর্ণনা করতে পারবেন।
- ইথার টানের প্রকল্প ও বিকিরণ প্রকল্প প্রস্তাবনার কারণ ব্যাখ্যা করতে পারবেন এবং সেগুলি বর্জনের কারণগুলি বিশ্লেষণ করতে পারবেন।

1.2 আপেক্ষিকতার সনাতন তত্ত্ব

পদার্থবিদ্যায় ঘটনা বলতে আমরা বুঝি যা নির্দিষ্ট স্থানে ও নির্দিষ্ট মুহূর্তে সংঘটিত হয়। আকাশে একটি পটকার বিস্ফোরণ, খেলার মাঠে ব্যাট ও বলের সংঘর্ষ, ক্যামেরার ফ্লাশগানের মুহূর্তের জন্য জ্বলে ওঠা, এগুলি এক একটি ঘটনা। যে কোনো ঘটনার স্থান ও কালের নির্দেশ দিতে আমাদের একটি নির্দেশতন্ত্র বা ফ্রেম-এর প্রয়োজন হয়। আপনি যদি সমকোণী কার্টেজীয় নির্দেশতন্ত্র ব্যবহার করতে চান তবে আপনাকে পরস্পর সমকোণে থাকা তিনটি অক্ষ x, y ও z নির্বাচন করতে হবে। উপরন্তু সময়ের বর্ণনা দেওয়ার জন্য আপনি ঠিক কোন্ মুহূর্তটিকে সময়ের শূন্য $(t = 0)$ ধরবেন সেটিও ঠিক করতে হবে।

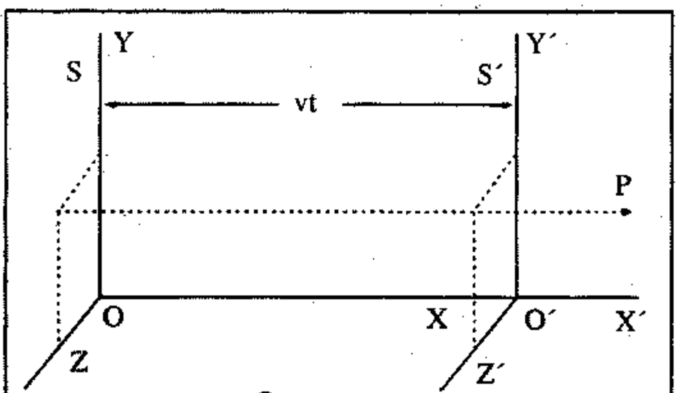
ঘটনার অবস্থানটি আপনি একটি ত্রিমাত্রিক ভেক্টর $\vec{r}$ দিয়েও নির্দেশ করতে পারেন। সেক্ষেত্রে আপনাকে অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}\ (= \vec{i}.x + \vec{j}.y + \vec{k}.z$; $\vec{i}, \vec{j}$ ও $\vec{k}$ যথাক্রমে x, y ও z অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর) ও t রাশিগুলিকে বিবৃত করতে হবে।

আপনি ইতিপূর্বে জড়ত্বীয় ফ্রেম বলতে কী বোঝায় তা জেনে থাকবেন। জড়ত্বীয় ফ্রেম হল এমন একটি ফ্রেম, যেটিতে নিউটনের গতিসূত্রগুলি কার্যকরী হয়। অর্থাৎ m ভরের কোনো বস্তুকণার অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}$ এবং তার ওপর ক্রিয়াশীল বল $\vec{F}$ হলে নিউটনের গতিসূত্র থেকে,

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\frac{d^2\vec{u}}{dt} = m\vec{a} \qquad (1.1)$$

যেখানে বস্তুকণার বেগ = $\vec{u}$ বা $\frac{d\vec{r}}{dt}$ এবং ত্বরণ = $\vec{a}$ বা $\frac{d\vec{u}}{dt}$

বলা বাহুল্য, $\vec{F} = 0$ হলে $\vec{a} = 0$ হয় এবং কণাটি স্থিতিশীল থাকে অথবা সমবেগে সরলরেখায় চলতে থাকে। এই জড়ত্বীয় ফ্রেমটিকে S ফ্রেম নামে নির্দেশ করা যাক। ধরুন এই ফ্রেমের মূল বিন্দুটি O (চিত্র 1.1)।



চিত্র 1.1

এবার আপনি আরও একটি ফ্রেম S′ কল্পনা করুন, যার x′, y′ ও z′ অক্ষগুলি যথাক্রমে x, y ও z অক্ষগুলির সমান্তরাল। S ও S′ ফ্রেম দুটিতে সময়ের পরিমাপ একই সঙ্গে শুরু হলে t = t′। ধরে নিন t = t′ = 0 মুহূর্তে S ও S′ ফ্রেমগুলি সম্পাতিত ছিল, অর্থাৎ ঐ মুহূর্তে x = x′, y = y′ এবং z = z′। এবার কল্পনা করুন S′ ফ্রেমটি S′ ফ্রেমের সাপেক্ষে x বা x′ অক্ষ অভিমুখে V সমবেগে চলনশীল। কোনো একটি ঘটনা যদি S ফ্রেমে x, y, z বিন্দুতে t সময়ে ঘটে থাকে, তবে S′ ফ্রেমে ঘটনাটির স্থানকালাঙ্ক কী হবে? 1.1 চিত্র থেকে বোঝা যায়, যেহেতু S′ ফ্রেমটি t সময়ে S-এর সাপেক্ষে x-অভিমুখে Vt-দূরত্ব অগ্রসর হয়েছে, x′ এর মান x অপেক্ষা সমপরিমাণ কম হবে। y′ ও z′ এর মান যথাক্রমে y এবং z থেকে পৃথক হবে না এবং আমাদের অঙ্গীকার অনুযায়ী t ও t′ সমমান। এখন আমরা S′ ও S ফ্রেমের স্থানকালাঙ্কের রূপান্তরণ সমীকরণগুলি লিখতে পারি ঃ

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t \qquad (1.2)$$

S ফ্রেমে (x, y, z) স্থানাঙ্কে P বিন্দুতে অবস্থিত m ভরের একটি বস্তুকণা যদি $\vec{u}$ বেগে চলনশীল হয় তবে S′ ফ্রেমে তার বেগ ও ত্বরণ কত হবে? 1.2 সম্পর্কগুলি থেকে পাবেন

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - V = u_x - V$$

$$u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt} = u_y, \quad u'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{dt} = u_z$$

এখানে S ফ্রেমে বস্তুকণার বেগ $\vec{u}$-এর উপাংশগুলি u_x, u_y ও u_z এবং S′ ফ্রেমে বেগ $\vec{u}'$-এর উপাংশগুলি u'_x, u'_y ও u'_z।

এবার বস্তুকণাটির ত্বরণের হিসাব নেওয়া যাক। S ও S′ ফ্রেমে ত্বরণ যথাক্রমে $\vec{a}$ ও $\vec{a}'$ হলে ত্বরণের উপাংশগুলির মধ্যে সম্পর্ক ঃ

$$a'_x = \frac{du'_x}{dt'} = \frac{du_x}{dt} = a_x, \text{ কেননা } V = \text{ধ্রুবক}$$

একই উপায়ে, $a'_y = a_y, a'_z = a_z$। অর্থাৎ $\vec{a}' = \vec{a}$।

এখন 1.1 সমীকরণ ব্যবহার করে $\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{a}'$

অর্থাৎ, S′ ফ্রেমেও নিউটনের গতিসূত্র সমানভাবে প্রযোজ্য। এ থেকে আমরা এই সিদ্ধান্তে পৌঁছোতে পারি যে একটি জড়ত্বীয় ফ্রেমের সাপেক্ষে সমবেগে চলনশীল অন্য যে কোনো ফ্রেমও জড়ত্বীয়।

আপনি প্রশ্ন করতে পারেন, যে বল $\vec{F}$ কি এক ফ্রেম থেকে অন্য ফ্রেমে রূপান্তরণের ফলে পরিবর্তিত হয়, অর্থাৎ S ফ্রেমে বল $\vec{F}$ যদি S′ ফ্রেমে $\vec{F}'$ বলে মনে হয় তবে কি $\vec{F} = \vec{F}'$ বলা যায়? আমরা জানি সকল বলই দূরত্ব, আপেক্ষিক বেগ ও সময়ের অবকাশের উপর নির্ভরশীল। ধরুন P ও Q দুটি বিন্দু যাদের স্থানাঙ্ক S ফ্রেমে যথাক্রমে $\vec{r}_P(x_P, y_P, z_P)$ এবং $\vec{r}_Q(x_Q, y_Q, z_Q)$ এবং S′ ফ্রেমে যথাক্রমে $\vec{r}'_P(x'_P, y'_P, z'_P)$ ও $\vec{r}'_Q(x'_Q, y'_Q, z'_Q)$। P থেকে Q-এর দূরত্ব S′ ফ্রেমে

$$\vec{r}'_Q - \vec{r}'_P = \vec{i}(x'_Q - x'_P) + \vec{j}(y'_Q - y'_P) + \vec{k}(z'_Q - z'_P)$$

$$= \vec{i}(x_Q - Vt - x_P + Vt) + \vec{j}(y_Q - y_P) + \vec{k}(z_Q - z_P)$$

$$= \vec{i}(x_Q - x_P) + \vec{j}(y_Q - y_P) + \vec{k}(z_Q - z_P)$$

$= \vec{r}_Q - \vec{r}_P$ অর্থাৎ S ও S′ ফ্রেমে বিন্দু দুটির দূরত্ব সমান। অনুরূপ যুক্তি দিয়ে দেখানো যায় যে দুটি মুহূর্তের মধ্যে সময়ের ব্যবধানও দুই ফ্রেমে সমান। এবং P ও Q বিন্দুর মধ্যে আপেক্ষিক বেগ, যা S′ ফ্রেমে $\frac{d}{dt}(\vec{r}'_Q - \vec{r}'_P)$ এবং S ফ্রেমে $\frac{d}{dt}(\vec{r}_Q - \vec{r}_P)$, দিক ও মানের দিক দিয়ে সমান। সুতরাং S ও S′ ফ্রেমে রূপান্তরণের ফলে বলও অপরিবর্তিত থাকে। 1.2 সমীকরণগুলির দ্বারা রূপান্তরণকে গ্যালিলিয়ো রূপান্তরণ বলে।

এখন আমরা সনাতন আপেক্ষিকতার মূলনীতিটি লিখতে পারি ঃ

বলবিদ্যার মূলসূত্রগুলি সব জড়ত্বীয় ফ্রেমে একই রূপে লেখা যায়। যে সূত্র একটি জড়ত্বীয় ফ্রেমে সত্য হয় সেটি অন্য জড়ত্বীয় ফ্রেমে একইভাবে সত্য হয়।

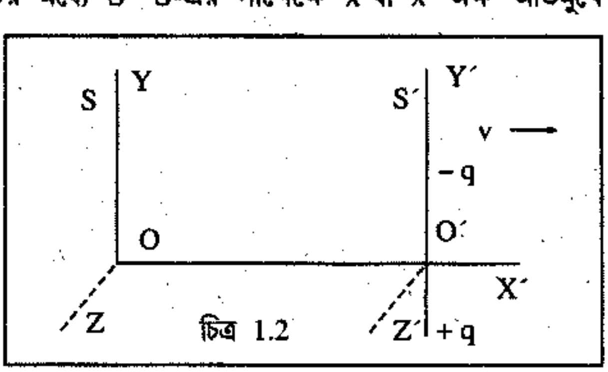
উপরের মূলনীতিটি গ্যালিলিয়োর আপেক্ষিকতা তত্ত্ব নামে পরিচিত। একটি উদাহরণ থেকে নীতিটি স্পষ্ট হবে। ধরুন একটি গাছ থেকে একটি ফল মাটিতে পড়ল। মাটিতে দাঁড়িয়ে থাকা পর্যবেক্ষকের কাছে মনে হবে ফলটির প্রাথমিক বেগ শূন্য এবং সেটি 'g' ত্বরণে উল্লম্ব সরলরেখায় মাটিতে পৌছোল। অপর দিকে কোনো পর্যবেক্ষক যদি সমবেগে চলতে থাকা গাড়িতে বসে থাকেন, তাঁর মনে হবে ফলটি গাড়ির বেগের ঠিক বিপরীত বেগে অনুভূমিক দিকে যাত্রা শুরু করে অধিবৃত্তাকার পথে মাটিতে এসে পড়ল। উভয়ক্ষেত্রেই নিউটনের গতিসূত্র যথাযথভাবে পালিত হল।

আপনি নিশ্চয়ই বুঝতে পারছেন যে সব জড়ত্বীয় ফ্রেমের গতিসূত্রগুলি একইভাবে পালিত হয়, অর্থাৎ কোনো জড়ত্বীয় ফ্রেমকেই আলাদা করে পরম জড়ত্বীয় ফ্রেম বলা যায় না। অপরদিকে পরম জড়ত্বীয় ফ্রেম বলে কিছু না থাকায় পরম স্থিতি বা পরম গতি বলেও কিছু হয় না। বস্তুত, কোনো জড়ত্বীয় ফ্রেমের মধ্যে থেকে সেটি স্থির আছে না সমবেগে চলছে, তা বোঝাও সম্ভব নয়, কেননা স্থির থাকা বা গতিশীল থাকা কেবলমাত্র অন্য কোনো ফ্রেমের সাপেক্ষেই তাৎপর্যপূর্ণ হতে পারে।

1.3 সনাতন আপেক্ষিকতা ও তড়িৎচুম্বকীয় ঘটনাবলি

আগের অংশটিতে আপনি দেখেছেন যান্ত্রিক ঘটনাবলির ক্ষেত্রে সনাতন আপেক্ষিকতা সঠিক বলে মনে হয়। এখন দেখা যাক তড়িৎচুম্বকীয় ঘটনাবলির ক্ষেত্রেও সনাতন আপেক্ষিকতার ধারণা প্রযোজ্য হয় কিনা।

ধরা যাক আগের মতো S ও S´ ফ্রেম দুটির মধ্যে S´ S-এর সাপেক্ষে x বা x´ অক্ষ অভিমুখে গতিশীল। s´ ফ্রেমে y´ অক্ষের উপর $y' = a$ ও $y' = -a$ বিন্দু দুটিতে যথাক্রমে $-q$ ও q তড়িৎ আধান রাখা আছে (চিত্র 1.2)। S´ ফ্রেমে স্থির আছেন এমন কোনো পর্যবেক্ষক O´ বিন্দুতে y´ অক্ষ অভিমুখী একটি তড়িৎক্ষেত্র লক্ষ করবেন। কিন্তু S ফ্রেমে স্থির আছেন এমন পর্যবেক্ষকের কাছে আধান দুটি গতিশীল মনে হবে অর্থাৎ $+q$ আধানটি x´ অভিমুখে এবং $-q$ আধানটি তার বিপরীত দিকে, অর্থাৎ $-x'$ অভিমুখে তড়িৎপ্রবাহ সৃষ্টি করবে। এই দুটি তড়িৎপ্রবাহের ফলে z´ দিক অভিমুখে একটি চৌম্বকক্ষেত্র লক্ষ করা যাবে। স্পষ্টই বোঝা



চিত্র 1.2

যায় যে S´ ও S ফ্রেমে স্থির আছেন এমন দুই পর্যবেক্ষক সম্পূর্ণ ভিন্ন ভৌত অবস্থা লক্ষ করবেন। অর্থাৎ সনাতন আপেক্ষিকতার তত্ত্ব এক্ষেত্রে খাটবে না।

আর একটি উদাহরণ হিসাবে তড়িৎচুম্বকীয় তরঙ্গের সমীকরণের উপর গ্যালিলিয়ো রূপান্তরণের প্রভাব লক্ষ করা যেতে পারে। এই সমীকরণটির রূপ ঃ

$$\nabla^2 f - \frac{1}{c^2}\frac{\delta^2 f}{\delta t^2} = \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 f}{\delta z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\delta^2 f}{\delta t^2} = 0 \qquad (1.3)$$

1.2 সমীকরণ ব্যবহার করে পাবেন

$$\frac{\delta f}{\delta x} = \frac{\delta f}{\delta x'}\cdot\frac{\delta x'}{\delta x} + \frac{\delta f}{\delta y'}\cdot\frac{\delta y'}{\delta x} + \frac{\delta f}{\delta z'}\cdot\frac{\delta z'}{\delta x} + \frac{\delta f}{\delta t'}\cdot\frac{\delta t'}{\delta x} = \frac{\delta f}{\delta x};$$ অনুরূপভাবে

$$\frac{\delta f}{\delta y} = \frac{\delta f}{\delta y'},\ \frac{\delta f}{\delta z} = \frac{\delta f}{\delta z'}$$ ।

$$\frac{\delta f}{\delta t} = \frac{\delta f}{\delta x'}\ \frac{\delta x'}{\delta t} + \frac{\delta f}{\delta y'}\ \frac{\delta y'}{\delta t} + \frac{\delta f}{\delta z'}\ \frac{\delta z'}{\delta t} + \frac{\delta f}{\delta t'}\ \frac{\delta t'}{\delta t}$$

$$= -V\frac{\delta f}{\delta x'} + \frac{\delta f}{\delta t'}$$

$$\therefore\ \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} = \frac{\delta^2 f}{\delta x'^2},\ \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} = \frac{\delta^2 f}{\delta y'^2},\ \frac{\delta^2 f}{\delta z^2} = \frac{\delta^2 f}{\delta z'^2},\ \frac{\delta^2 f}{\delta t^2} = V^2\frac{\delta^2 f}{\delta x'^2} + \frac{\delta^2 f}{\delta t'^2} - 2V\frac{\delta^2 f}{\delta x'\delta t'}$$

সুতরাং তরঙ্গ সমীকরণটির রূপ হবে ঃ

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x'^2} + \frac{\delta^2 f}{\delta y'^2} + \frac{\delta^2 f}{\delta z'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\delta^2 f}{\delta t'^2} - \frac{1}{c^2}\left(V^2\frac{\delta^2 f}{\delta x'^2} - 2V\frac{\delta^2 f}{\delta x'\delta t'}\right) = 0$$

বা, $$\nabla'^2 f - \frac{1}{c^2}\frac{\delta^2 f}{\delta t'^2} = \frac{1}{c^2}\left(V^2\frac{\delta^2 f}{\delta x'^2} - 2V\frac{\delta^2 f}{\delta x'\delta t'}\right) \qquad (1.4)$$

উপরের সমীকরণটির ডান দিক শূন্য নয়, অর্থাৎ গ্যালিলিয়ো রূপান্তরণের ফলে তড়িৎচুম্বকীয় তরঙ্গের রূপ বদলে যায়।

গ্যালিলিয়ো রূপান্তরণ সূত্রগুলিকে যদি তড়িৎচুম্বকীয় ঘটনাবলির ক্ষেত্রে যথাযথ বলে মানা হয় তবে নিশ্চয়ই এমন একটি বিশেষ ফ্রেম থাকবে যাতে ম্যাক্সওয়েলের তড়িৎচুম্বকীয় সমীকরণগুলি (যেগুলির সম্বন্ধে আপনি EPH 09-এর দশম এককে পড়েছেন) সত্য হবে এবং তার ফলে তড়িৎচুম্বকীয় তরঙ্গের সমীকরণও (1.3) প্রযোজ্য হবে। এই বিশেষ নির্দেশতন্ত্রে আলোকের বেগ শূন্য মাধ্যমে $(\varepsilon_0\mu_0)^{-\frac{1}{2}} = c$

হতে দেখা যাবে এবং এই নির্দেশতন্ত্রের (S) সাপেক্ষে যদি অন্য কোনও নির্দেশতন্ত্রের (S′) বেগ υ হয় তবে ওই S নির্দেশতন্ত্রে আলোকের শূন্য মাধ্যমে বেগ হবে $c - \upsilon$ (এখানে c ও υ ভেক্টর রাশি) যার মান $c' = (c^2 + \upsilon^2 - 2c\upsilon \cos \theta)^{\frac{1}{2}}$, θ = S ফ্রেমে আলোকের বেগ ও S′ ফ্রেমের বেগের মধ্যে কোণ। এই বিশেষ নির্দেশতন্ত্রটি হবে সমগ্র বিশ্বের পরম নির্দেশতন্ত্র বা পরম ফ্রেম (absolute frame of reference)।

তড়িৎচুম্বকীয় তরঙ্গের তত্ত্ব প্রতিষ্ঠিত হওয়ার আগে বিজ্ঞানীরা শব্দ তরঙ্গের মতো স্থিতিস্থাপক তরঙ্গের সঙ্গেই পরিচিত ছিলেন। এ ধরনের তরঙ্গ সঞ্চারিত হতে একটি স্থিতিস্থাপক মাধ্যমের প্রয়োজন। বিজ্ঞানীরা কল্পনা করলেন আলোক তরঙ্গও কোনো এক সর্বব্যাপী, স্বচ্ছ ও অত্যন্ত লঘু মাধ্যমে স্থিতিস্থাপক তরঙ্গ হিসাবেই সঞ্চারিত হয়। এই কাল্পনিক মাধ্যমের নাম দেওয়া হয়েছিল আলোকবাহী ইথার (luminiferous ether)। এই মাধ্যমের ঘনত্ব অত্যন্ত কম এবং স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক অত্যন্ত বেশি হওয়া প্রয়োজন কেননা আলোকতরঙ্গের বেগ আমাদের জানা অন্যান্য স্থিতিস্থাপক তরঙ্গের বেগের তুলনায় বহুগুণ বেশি। আপনি নিশ্চয়ই উপলব্ধি করছেন যে কাল্পনিক মাধ্যমটি আমাদের পরিচিত জগতের সব উপাদান থেকে একেবারেই আলাদা ধর্মের। এই ইথার মাধ্যমকেই সেই পরম ফ্রেম বলে ধরা হল, যে ফ্রেমে আলোর বেগ c।

ইথার মাধ্যমের অস্তিত্ব কীভাবে প্রতিপন্ন করা যায়? পৃথিবী যখন বার্ষিক গতিতে সূর্যের চারিদিকে ঘোরে তখন ইথার মাধ্যমের সাপেক্ষে পৃথিবীর গতি থাকাই স্বাভাবিক। যদি এমনও হয় যে কোনো মুহূর্তে পৃথিবী ইথারের সাপেক্ষে স্থির অবস্থায় এসেছে তবে ছয় মাস পরে যখন বার্ষিক গতির ফলে পৃথিবীর বেগ ঠিক বিপরীতমুখী হবে তখন ইথারের সাপেক্ষে পৃথিবীর বেগ বার্ষিক গতির বেগের দ্বিগুণ হবে। ইথারের সাপেক্ষে আপেক্ষিক বেগের ফলে ভূপৃষ্ঠস্থ পর্যবেক্ষকের কাছে আলোর বেগে তারতম্য দেখা যাবে। এই তারতম্য লক্ষ করার জন্য বিজ্ঞানীরা যে সব পরীক্ষা করেছিলেন, 1887 খ্রিস্টাব্দে মাইকেলসন ও মর্লির পরীক্ষা সেগুলির মধ্যে সবচেয়ে বিখ্যাত। পরবর্তী অংশে আমরা এই পরীক্ষার পদ্ধতি ও ফলাফল নিয়ে আলোচনা করব। তার আগে নীচের অনুশীলনীটির উত্তর দিতে চেষ্টা করুন।

অনুশীলনী 1

নীচের কোন্ কোন্ নির্দেশতন্ত্রকে জড়ত্বীয় ফ্রেম বলা যায়?

[i] সমগতিতে সরলরেখায় চলনশীল ট্রেনের কামরা,

[ii] স্থির অবস্থা থেকে নামতে থাকা লিফ্‌ট,

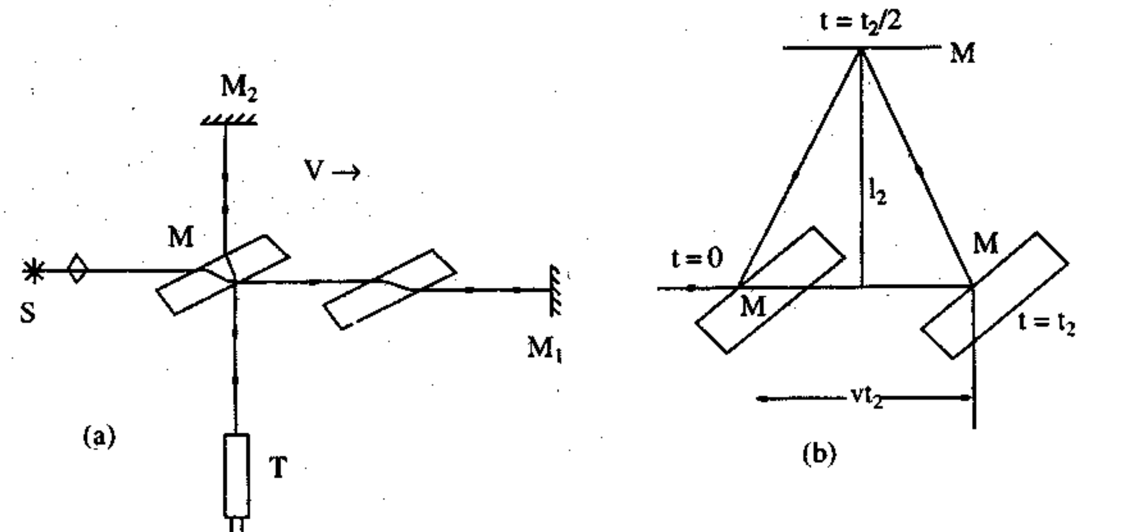
[iii] সমান বিস্তারে দুলতে থাকা দোলনা,

[iv] পৃথিবী থেকে চন্দ্রে সমগতিতে গমনরত মহাকাশযান।

1.4 মাইকেলসন-মর্লি পরীক্ষা — ইথারের অনুসন্ধান

আপনি নিশ্চয়ই জানেন যে আলোর বেগ নির্ণয় করতে হলে নির্দিষ্ট দুই বিন্দুর মধ্যে আলোর যাতায়াতের মোট সময় নির্ণয় করতে হয় এবং উভয় দিকে মোট অতিক্রান্ত দূরত্বকে ওই মোট সময় দিয়ে ভাগ করতে হয়। আলোর গতি যদি ইথারের মধ্যে পৃথিবীর গতিবেগের সমান্তরাল হয় তবে নির্দিষ্ট দূরত্ব যাতায়াতে যে সময় লাগে, আলোর গতি পৃথিবীর গতিবেগের সঙ্গে সমকোণে থাকলে যাতায়াতের মোট সময় তার থেকে ভিন্ন হবে। এবং এই দুই সময়ের পার্থক্য পরিমাপ করে ইথারের মধ্যে পৃথিবীর বেগ নির্ণয় করা যাবে। মাইকেলসন-মর্লি পরীক্ষায় এই সময়ের পার্থক্যটি নির্ণয়ের চেষ্টা করা হয়েছিল।

পরীক্ষায় ব্যবহৃত যান্ত্রিক ব্যবস্থাটি মূলত একটি মাইকেলসন ইন্টার-ফেরোমিটার (চিত্র 1.3a)। একবর্ণী আলোর উৎস S থেকে একটি সমান্তরাল রশ্মিগুচ্ছ কাচের আয়তফলক M-এর উপর 45° কোণে আপতিত



চিত্র 1.3

হয়। আয়তফলকের পিছনের তল অর্ধপ্রতিফলক সমতল দর্পণ হিসাবে কাজ করে। এর ফলে আপতিত রশ্মির অর্ধেক তীব্রতার একটি অংশ M_1 দর্পণে আপতিত হয় এবং M_1-এ প্রতিফলনের পর আবার M ফলকে প্রতিলিত হয়ে পর্যবেক্ষকের টেলিস্কোপে T প্রবেশ করে। আপতিত রশ্মির অপর অংশ M_2 দর্পণ আপতিত ও প্রতিফলিত হওয়ার পর M ফলকের মধ্য দিয়ে সঞ্চারিত হয়ে টেলিস্কোপে পৌঁছোয়। M_1 ও M_2-তে প্রতিফলিত হওয়া রশ্মিগুচ্ছগুলি মিলিত হয়ে টেলিস্কোপের ফোকাসতলে ব্যতিচার পটি

(interference fringe) সৃষ্টি করে। দেখা যাক, M ফলকের প্রতিফলক তল থেকে আলোকরশ্মির M_1 অথবা M_2 দর্পণে যেতে এবং ফিরে আসতে কত সময় লাগে।

ধরা যাক ইন্টারফেরোমিটার যন্ত্রটি MM_1 রশ্মির সমান্তরালে V বেগে ইথারের মধ্য দিয়ে ছুটে চলেছে। ইথার মাধ্যমের সাপেক্ষে আলোর বেগ c ধরে নেওয়া হয়েছে। সুতরাং যন্ত্রটির সাপেক্ষে আলোর বেগ M থেকে M_1-এ যাওয়ার সময় $c-V$ এবং M_1 থেকে M-এ ফিরে আসার সময় $c+V$ হবে। যদি MM_1 দূরত্ব $= l_1$ হয় তবে মোট সময় লাগবে

$$t_1 = \frac{l_1}{c-V} + \frac{l_1}{c+V} = l_1 \cdot \frac{2c}{c^2 - V^2} = \frac{2l_1}{c}\left(\frac{1}{1 - V^2/c^2}\right) \qquad [\text{চিত্র } 1.5]$$

এবার দেখা যাক আলোকরশ্মির M থেকে M_2-তে গিয়ে ফিরে আসতে কত সময় লাগে। ধরুন এই সময়টি হল t_2 এবং MM_2 দূরত্ব $= l_2$। যদি আলোকরশ্মি $t = 0$ সময়ে M ফলকে প্রতিফলিত হয় তবে সেটি $t_2/2$ সময়ে M_2 দর্পণে পৌঁছাবে (চিত্র 1.3b)। এই সময়ে $t = 0$ মুহূর্তের অবস্থানের তুলনায় $Vt_2/2$ পরিমাণ সরে যাবে এবং আলোকরশ্মিকে মোট $\left[l_2^2 + \left(\frac{Vt_2}{2}\right)^2\right]^{1/2}$ পরিমাণ পথ অতিক্রম করতে হবে। M_2 থেকে M ফলকে ফিরে আসতেও একই দৈর্ঘ্যের পথ অতিক্রম করতে হবে। তবে এই পথগুলি V-এর লম্ব অভিমুখে হওয়ায় আলোকের বেগ c থাকবে; ইথারের মধ্যে ইন্টারফেরোমিটারের গতির কোনো প্রভাব থাকবে না। সুতরাং এক্ষেত্রে, মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব

$$ct_2 = 2\left[l_2^2 + \left(\frac{Vt_2}{2}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$\therefore \quad (ct_2)^2 = 4l_2^2 + (Vt_2)^2 \quad \text{বা,} \quad t_2 = \frac{2l_2}{\sqrt{c^2 - V^2}} = \frac{2l_2}{c}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \qquad [\text{চিত্র } 1.6]$$

লক্ষ করুন t_1 ও t_2 যথাক্রমে $\frac{2l_1}{c}$ ও $\frac{2l_1}{c}$ থেকে পৃথক হলেও পার্থক্যগুলি $\frac{V}{c}$-এর দ্বিতীয় ঘাতের সঙ্গে সমানুপাতী। তবে l_1 ও l_2 সমান হলেও t_1 ও t_2 সমান হত না। দুই আলোকরশ্মির যাতায়াতের সময় দুটির মধ্যে পার্থক্য

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2}{c}\left[\frac{l_2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - \frac{l_1}{1 - \frac{V^2}{c^2}}\right] \qquad [\text{চিত্র } 1.7]$$

এখন যদি ইন্টারফেরোমিটার যন্ত্রটিকে 90° কোণে ঘোরানো হয় তবে l_1 ও l_2 দৈর্ঘ্য দুটি ভূমিকার অদল-বদল ঘটবে, অর্থাৎ l_1 হবে বেগের অভিলম্ব দিকে, এবং l_2 হবে বেগের অভিমুখে M ফলক থেকে দর্পণের দূরত্ব। এখন দুটি আলোকরশ্মির যাতায়াতের সময়ের পার্থক্য হবে

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{2}{c}\left[\frac{l_2}{1-\frac{V^2}{c^2}} - \frac{l_1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right] \qquad \text{[চিত্র 1.8]}$$

আপনি বুঝতেই পারছেন যে Δt এবং $\Delta t'$ সমান নয়। যন্ত্রটির 90° ঘূর্ণনের ফলে দুই আলোকরশ্মির যাতায়াতের সময়ের পার্থক্যের যে পরিবর্তন হয় তা হল

$$\Delta t' - \Delta t = \frac{2}{c}\left[\frac{l_2 + l_1}{1-\frac{V^2}{c^2}} - \frac{l_2 + l_1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right]$$

$$= \frac{2(l_1 + l_2)}{c}\left[(1-\beta^2)^{-1} - (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}\right] \quad \text{যেখানে } \beta = \frac{V}{c} << 1$$

$$= \frac{2(l_1 + l_2)}{c}\left[1 + \beta^2 - 1 - \frac{1}{2}\beta^2\right]$$ [দ্বিপদ সূত্র অনুযায়ী, β রাশির উচ্চতর ঘাত উপেক্ষা করে]

$$= \frac{l_1 + l_2}{c}.\beta^2$$

সময়ের এই পার্থক্যের ফলে ব্যতিচারী আলোকরশ্মি দুটির দশাপার্থক্যও পরিবর্তিত হবে, অর্থাৎ ব্যতিচার পটিগুলি কিছুটা সরে যাবে। কতগুলি ব্যতিচার পটি সরে যাবে, তার একটি হিসাব করা যাক। আপতিত আলোকের তড়িৎচুম্বকীয় কম্পনের পর্যায়কাল = T, তরঙ্গদৈর্ঘ্য = λ হলে সরে যাওয়া ব্যতিচার পটির সংখ্যা হবে $n = \frac{l_1 + l_2}{cT}.\beta^2 = \frac{l_1 + l_2}{\lambda}\beta^2$ । [চিত্র 1.9]

পৃথিবী $365\frac{1}{4}$ দিনে 1.496×10^8 km ব্যাসার্ধের কক্ষপথে সূর্যকে প্রদক্ষিণ করে। সুতরাং কক্ষপথে পৃথিবীর বেগ $V = \frac{2\pi \times 1.496 \times 10^8}{365.25 \times 24 \times 60 \times 60} \approx 30$ km/s

$$\therefore \quad \beta = \frac{V}{c} = \frac{30}{3 \times 10^5} = 10^{-4}$$

মাইকেলসন ও মর্লির 1887 খ্রিস্টাব্দের পরীক্ষায় $(l_1 + l_2)$-এর মান ছিল 22 m। আলোর সুসঙ্গতি (coherence) বজায় রাখার জন্য $l_1 = l_2 \simeq 11$ m নেওয়া হয়েছি।

ব্যবহৃত একবর্ণী আলোর তরঙ্গদৈর্ঘ্য ছিল 550 nm। এই মানগুলি 1.9

সমীকরণে বসালে পাওয়া যায় ঃ

$$n = \frac{22}{550 \times 10^{-9}} \times 10^{-8} = 0.4$$

অর্থাৎ একটি ব্যতিচার পটির 0.4 অংশ সরে যাওয়া প্রত্যাশিত ছিল। এটি খুব বেশি না হলেও মাইকেলসন-মর্লির যন্ত্রটিতে ব্যতিচার পটির 0.01 অংশের বেশি সরলেই তা ধরা পড়ত। কিন্তু বিজ্ঞানীরা আশ্চর্যের সঙ্গে লক্ষ করলেন যে ব্যতিচার পটির কোনো সরণ ঘটল না।

আপনি নিশ্চয়ই এই প্রশ্ন তুলতে পারেন যে হয়তো ঠিক পরীক্ষার সময়টিতেই ইন্টারফেরোমিটার যন্ত্রটি ইথারের সাপেক্ষে স্থির ছিল। এবং সেজন্যই ব্যতিচার পটির কোনো সরণ দেখা যায়নি। বিজ্ঞানীরা এই বিষয়টি অনুসন্ধানের জন্য দিনে-রাতে এবং বিভিন্ন ঋতুতে পরীক্ষাটি করে দেখেছিলেন, কেননা পৃথিবীর আহ্নিক গতির জন্য যন্ত্রটির বেগ মধ্যাহ্নে ও মধ্যরাত্রে বিপরীত হবে এবং পৃথিবীর বার্ষিক গতির জন্য ওই বেগ শীত-গ্রীষ্মের মতো দুই বিপরীত ঋতুতে বিপরীত হবে। কিন্তু কোনো সময়েই ব্যতিচার পটির কোনো সরণ দেখা গেল না।

পরবর্তীকালে এই পরীক্ষাটি আরও সূক্ষ্মভাবে করা হয়েছে। $(l_1 + l_2)$ দৈর্ঘ্যের মান বাড়িয়ে, দৃশ্যমান আলোর পরিবর্তে মাইক্রোওয়েভ ব্যবহার করে বিজ্ঞানীরা সুনিশ্চিত হয়েছেন যে ব্যতিচার পটির কোনো সরণ ঘটে না।

মাইকেলসন-মর্লি পরীক্ষার এই নঞর্থক ফল কীভাবে ব্যাখ্যা করা যায়? এর একটি ব্যাখ্যা হতে পারে, সমস্ত জড়ত্বীয় ফ্রেমে শূন্য মাধ্যমে আলোর বেগ সব দিকেই সমান বলে ধরে নেওয়া। কিন্তু এতে গ্যালিলিয়ো রূপান্তরণকে অস্বীকার করতে হয়, ইথার ফ্রেমের বৈশিষ্ট্যও বজায় থাকে না। এজন্য এই ব্যাখ্যা বিজ্ঞানীদের কাছে গ্রহণযোগ্য হয়নি। এবার আমরা আর একটি ব্যাখ্যা সম্বন্ধে আলোচনা করব।

1.4.1 লরেন্ৎস্-ফিৎস্গেরাল্ড সংকোচন প্রকল্প (Lorentz-Fitggerald Contraction Hypothesis)

মাইকেলসন্-মর্লি পরীক্ষার নঞর্থক ফল ব্যাখ্যা করার জন্য ফিৎস্গেরাল্ড (1891) ও লরেন্ৎস একটি প্রকল্প উপস্থাপিত করেন। এটি হল স্থিতিশীল ইথারের মধ্য দিয়ে V বেগে গতিশীল যে কোনো বস্তুর বেগের দিক বরাবর দৈর্ঘ্য $\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$ গুণ সংকুচিত হয়। বেগের দিকের লম্ব বরাবর কোনো দৈর্ঘ্য অবশ্য

পরিবর্তিত হয় না। এই প্রকল্প মেনে নিলে 1.5 সমীকরণে l_1 দৈর্ঘ্যের স্থানে $l_1\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$ বসাতে হবে। t_1-এর পরিবর্তিত মান হবে $\frac{2l_1}{c\sqrt{1-\beta^2}}\left(\beta=\frac{V}{c}\right)$। t_2 সময়ের কোনো পরিবর্তন হবে না কেননা l_2 দৈর্ঘ্যটিকে আমরা ইথারের মধ্যে ইন্টারফেরোমিটারের বেগের অভিলম্ব দিকে নিয়েছি। সুতরাং $\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2}{c}\frac{l_2-l_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$। ইন্টারফেরোমিটারটিকে 90° কোণে ঘোরানো হলে l_2 দৈর্ঘ্যের সংকোচন ঘটবে কিন্তু l_1 অপরিবর্তিত থাকবে। $\Delta t'$-এর মান হবে $\frac{2}{c}\frac{l_2-l_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, অর্থাৎ Δt-এর সমান। সুতরাং যন্ত্রটিকে 90° কোণে ঘোরানো হলে ব্যতিচার পটির কোনো সরণ দেখা যাবে না।

আপাতদৃষ্টিতে লরেন্ৎস-ফিৎসগেরাল্ড সংকোচন ধরে নিয়ে মাইকেলসন-মর্লি পরীক্ষার ফলের ব্যাখ্যা করা গেলেও এটির বিরুদ্ধে সুস্পষ্ট প্রমাণ দেখা গেল। আপনি আগেই দেখেছেন দুটি আলোকরশ্মি টেলিস্কোপে এসে পৌঁছোনোর মধ্যে সময়ের প্রভেদ $\Delta t = \frac{2}{c}\frac{l_2-l_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

যেহেতু $\beta^2 << 1$, আমরা লিখতে পারি $\Delta t = \frac{2(l_2-l_1)}{c}\left(1+\frac{1}{2}\beta^2\right)$

যদি কোনো কারণে ইথারের মধ্যে যন্ত্রটির বেগের পরিবর্তন হয় তবে Δt-এর মানেও পরিবর্তন ঘটবে। ধরে নিন ঐ বেগ V' হলে সময়ের প্রভেদ $\Delta t'$ হয়। সেক্ষেত্রে

$$\Delta t' = \frac{2(l_2-l_1)}{c}\left(1+\frac{1}{2}\beta'^2\right),\ \left(\beta'=\frac{V'}{c}\right)$$

Δt ও $\Delta t'$ পৃথক হওয়ায় $\Delta n = c\frac{\Delta t' - \Delta t}{\lambda}$ সংখ্যক ব্যতিচার পটির সরণ ঘটবে।

Δt ও $\Delta t'$-এর মান বসিয়ে পাবেন ঃ

$$\Delta n = \frac{c}{\lambda}\cdot\frac{2(l_2-l_1)}{c}\left(1+\frac{\beta^2}{2}-1-\frac{\beta'^2}{2}\right)$$

$$= \frac{l_2-l_1}{\lambda}(\beta^2-\beta'^2)$$ [চিত্র 1.10]

মাইকেলসন-মর্লির পরীক্ষায় ব্যতিচার পটির এ জাতীয় সরণ লক্ষ করা সম্ভব ছিল না কেননা তাঁদের ব্যবহৃত ইন্টারফেরোমিটারে l_1 ও l_2 প্রায় সমান ছিল। কেনেডি ও থর্নডাইক (1932) এমন একটি ইন্টারফেরোমিটার ব্যবহার করে পরীক্ষাটির পুনরাবৃত্তি করেন যার বাহুগুলি অসমান ছিল এবং দুই

ব্যতিচারী রশ্মির পথ-পার্থক্য ছিল প্রায় 16 সেমি। এর চেয়ে বেশি পথ-পার্থক্য রাখা সম্ভব ছিল না কেননা তাহলে দুই ব্যতিচারী রশ্মির মধ্যে সুসঙ্গতির (coherence) অভাব ঘটত এবং পটিগুলি অস্পষ্ট হত। কিন্তু কেনেডি-থর্নডাইক পরীক্ষাতেও 12 ঘন্টার তফাতে পর্যবেক্ষণ করে ব্যতিচার পটির কোনো সরণ দেখা গেল না। এর ফলে লরেন্ৎস-ফিৎস্‌গেরাল্ড সংকোচন প্রকল্পটি সঠিক নয় বলে প্রমাণিত হল।

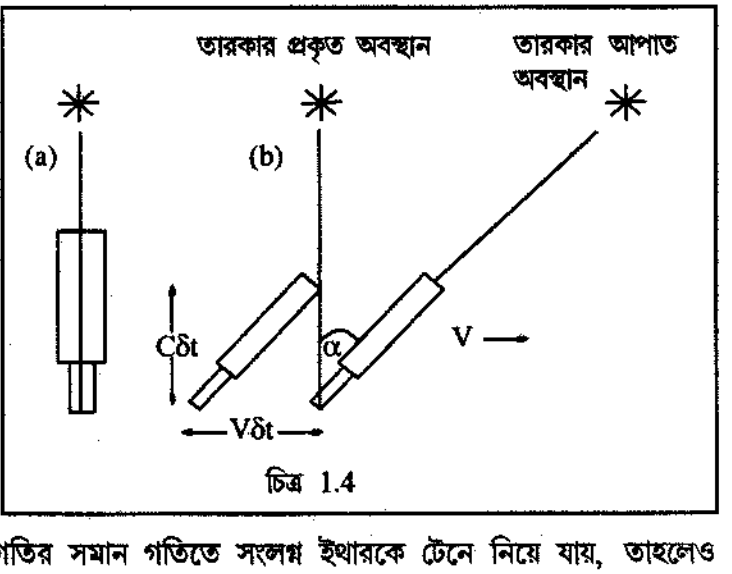
ইথারের ধারণাকে বাঁচিয়ে রাখার জন্য বিজ্ঞানীরা এবার তার ওপর ভিন্ন একটি ধর্ম আরোপ করলেন। পরবর্তী অংশে আপনি সেটির সম্বন্ধে জানতে পারবেন।

1.4.2 ইথার-টানের (Ether drag) প্রকল্প

মাইকেলসন-মর্লি পরীক্ষার নঞর্থক ফল ব্যাখ্যা করার জন্য বিজ্ঞানীরা একটি বিকল্প প্রস্তাব উপস্থাপিত করেন। আপনি জানেন যে রেলগাড়ি বেগে চললেও কামরার মধ্যে উপবিষ্ট যাত্রী বিপরীতমুখী ঝড় অনুভব করেন না। এর কারণ রেলগাড়ির কামরা তার মধ্যস্থ বাতাসকে সমবেগে বহন করে চলে। বিজ্ঞানীরা কল্পনা করলেন যে, যে কোনো বস্তু তার সংলগ্ন ইথারকে তার সঙ্গে টেনে নিয়ে চলে। এই প্রকল্প অনুযায়ী মাইকেলসন ইন্টারফেরোমিটারটি সব সময়ই তার সংলগ্ন স্থানীয় ইথারের সাপেক্ষে স্থির থাকবে এবং লক্ষিত ফল, অর্থাৎ ব্যতিচার পটির শূন্য সরণই প্রত্যাশিত হবে। আপাত দৃষ্টিতে এই প্রকল্প সঠিক মনে হলেও অন্য একটি পরীক্ষার ফলের ভিত্তিতে এটি গ্রহণযোগ্য হল না। এই পরীক্ষাটি হল তারকার আপাত স্থানচ্যুতির (aberration) পরিমাপ, যা জ্যোতির্বিজ্ঞানী ব্র্যাডলে (Bradley) 1727 খ্রিস্টাব্দে প্রথম করেছিলেন। এই পরীক্ষাটি সম্বন্ধে সংক্ষেপে আলোচনা করা যাক।

তারকার আপাত স্থানচ্যুতির পরীক্ষা ঃ

ব্র্যাডলে দেখেছিলেন এক বৎসর সময়ে আকাশের তারাগুলি 41 সেকেন্ড কৌণিক ব্যাসের বৃত্তাকার পথে একবার পরিভ্রমণ করে। কীভাবে এই কৌণিক গতির ব্যাখ্যা দেওয়া যায়? ধরে নিন আপনি টেলিস্কোপের সাহায্যে সোজাসুজি মাথার ওপরের একটি তারকা লক্ষ করছেন। যদি পৃথিবী ইথারের মধ্যে স্থির থাকত তাহলে আপনাকে টেলিস্কোপের অক্ষটি উল্লম্ব রাখতে হত। এমনকি, পৃথিবী যদি তার নিজগতির সমান গতিতে সংলগ্ন ইথারকে টেনে নিয়ে যায়, তাহলেও



চিত্র 1.4

টেলিস্কোপের অক্ষ উল্লম্ব রেখে তারকাটি দেখা যেত কেননা তারকা থেকে আসা আলোকরশ্মি টেলিস্কোপে প্রবেশ করার পর টেলিস্কোপের সংলগ্ন ইথারের মধ্য দিয়ে অক্ষ বরাবর সঞ্চালিত হত (চিত্র 1.4a)।

এবার দেখা যাক পৃথিবী ইথারের মধ্য দিয়ে গতিশীল হলে এবং ইথারকে টেনে নিয়ে যাওয়ার প্রকল্প সঠিক না হলে কী ঘটত ? এক্ষেত্রে টেলিস্কোপের অক্ষ উল্লম্ব রাখা হলে তারকা থেকে আসা আলোকরশ্মি টেলিস্কোপে প্রবেশ করার পর টেলিস্কোপের নলের গায়ে এসে পড়বে। তারকাটি দেখতে হলে টেলিস্কোপের অক্ষ পৃথিবীর গতির দিক অভিমুখে, ধরুন α কোণে, হেলিয়ে রাখতে হবে [চিত্র 1.4b]। ধরুন $t = 0$ সময়ে তারকা থেকে একটি আলোকরশ্মি টেলিস্কোপের নলে প্রবেশ করল। ওই রশ্মি যেমন c বেগে নীচের দিকে অগ্রসর হবে টেলিস্কোপটিকেও V বেগে অগ্রসর হতে হবে যাতে $t = \delta t$ সময়ে আলোকরশ্মিটি টেলিস্কোপের অভিনেত্রে এসে পড়ে। চিত্র থেকে বোঝা যায় $\tan\alpha = \frac{V\delta t}{c\delta t} = \frac{V}{c}$ ।

আমরা আগেই দেখেছি পৃথিবীর সূর্য প্রদক্ষিণ করার বেগ 30 km/s। সুতরাং $\tan\alpha = \frac{30}{3\times10^5} = 10^{-4}$। অর্থাৎ $\alpha \approx 20.6$ সেকেন্ড। পৃথিবীর বার্ষিক গতির ফলে তারকার এই পরিমাণ আপাত কৌণিক স্থানচ্যুতি দেখা যাবে। পৃথিবী সর্বদাই গতিশীল হওয়ায় এই স্থানচ্যুতি সরাসরি মাপা যাবে না। কিন্তু বার্ষিক গতির ফলে পৃথিবী যখন প্রায় বৃত্তাকার কক্ষপথে ঘোরে তখন তার বেগের দিকও পরিবর্তিত হয় এবং সেই সঙ্গে তারকার কৌণিক স্থানচ্যুতির দিকও পরিবর্তিত হবে। ফলে তারকাটিকে 20.6 সেকেন্ড কৌণিক ব্যাসার্ধের বা 41 সেকেন্ড কৌণিক ব্যাসের একটি বৃত্তাকার পথে বছরে একবার ঘুরে আসতে দেখা যাবে।

তারকার এ ধরনের কৌণিক স্থানচ্যুতি ব্রাডলে ও অন্যান্যদের পর্যবেক্ষণের সঙ্গে পুরোপুরি মিলে যায়। এর ফলে পৃথিবী বা টেলিস্কোপ তার সংলগ্ন ইথারকে টেনে নিয়ে যায়, এমন কোনো প্রকল্প গ্রহণযোগ্য থাকে না।

আপনি হয়তো লক্ষ করেছেন যে এ পর্যন্ত আমরা যে পরীক্ষাগুলি সম্বন্ধে আলোচনা করেছি সেগুলিতে আলো বায়ুমাধ্যমেই যাতায়াত করেছে, যা প্রায় শূন্য মাধ্যমের সমতুল। আলো যখন কোনো স্বচ্ছ ঘনতর মাধ্যমের মধ্য দিয়ে যায় তখন ঐ মাধ্যম ইথারকে টেনে নিয়ে যায় কিনা তা দেখার জন্যও বিজ্ঞানীরা পরীক্ষা করেছেন। পরের অংশে আমরা এই বিষয়টি আলোচনা করব। তার আগে একটি অনুশীলনীর উত্তর দিন।

অনুশীলনী 2

(ক) ইথারের সাপেক্ষে পৃথিবীর বেগ শূন্য থেকে 30 km/s-এর মধ্যে পরিবর্তিত হলে লরেৎস্-ফিৎস্‌গেরাল্ড সংকোচন প্রকল্প অনুযায়ী কেনেডি থর্নডাইক পরীক্ষায় কতগুলি ব্যতিচার পটির সরণ ঘটত ? ধরে নিন ব্যবহৃত আলোর তরঙ্গদৈর্ঘ্য = 500 nm।

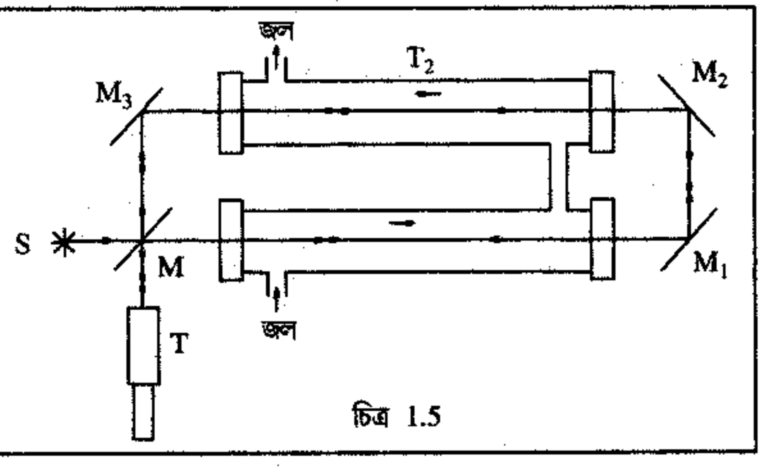
(খ) মাইকেলসন-মর্লি পরীক্ষাটি শব্দ তরঙ্গের ক্ষেত্রে করা হলে ফল কী হত ?

1.5 গতিশীল ঘন মাধ্যমে আলোক সঞ্চারণ-ফিজোর (Fizeau) পরীক্ষা

আলোক তরঙ্গ যখন কোনো গতিশীল, স্বচ্ছ ঘনমাধ্যমের মধ্য দিয়ে সঞ্চারিত হয় তখন মাধ্যমের গতি কি আলোকের বেগকে প্রভাবিত করে? 1817 খ্রিস্টাব্দে ফ্রেনেল (Fresnel) তত্ত্বগতভাবে দেখান যে মাধ্যমের প্রতিসরাঙ্ক যদি μ হয় তবে মাধ্যমের বেগের $\left(1-\frac{1}{\mu^2}\right)$ অংশ ঐ মাধ্যমে আলোকের স্বাভাবিক বেগের সঙ্গে যুক্ত হয়। এই তত্ত্ব যদি সঠিক হয় তবে বহমান জলের মধ্যে স্রোতের অভিমুখে ও স্রোতের বিপরীতে আলোকের বেগের তুলনা করে সেটিকে প্রতিপন্ন করা যাবে। 1851 খ্রিস্টাব্দে ফিজো এজন্য একটি পরীক্ষা করেন।

1.5.1 ফিজোর পরীক্ষা

1.5 চিত্রে আপনি ফিজোর পরীক্ষায় ব্যবস্থাটি দেখতে পাবেন। T_1 ও T_2 দুটি সমান প্রস্থচ্ছেদের নল। এগুলির প্রান্তে সমতল কাঁচের পাত আটকানো আছে এবং একটি নল দিয়ে দুটিকে যুক্ত করা হয়েছে। T_1 নলের একপ্রান্ত দিয়ে নির্দিষ্ট বেগে জল ঢোকে এবং T_1 ও T_2 নল বরাবর দুই বিপরীত দিকে প্রবাহিত হয়ে T_2 নলের একপ্রান্তে বেরিয়ে যায়। S একটি একবর্ণী আলোর উৎস। S থেকে আসা আলোকরশ্মির সঙ্গে 45° কোণে হেলানো রূপার অর্ধপ্রলেপিত দর্পণ M আলোকরশ্মিকে দুইভাগে ভাগ করে। সোজাভাবে নির্গত প্রথম রশ্মিটি T_1 নলের মধ্যে দিয়ে যাওয়ার পর M_1 ও M_2 দর্পণে প্রতিফলিত হয় এবং T_2 নল অতিক্রম করে M_3 দর্পণে প্রতিফলিত হয়ে M দর্পণ ভেদ করে টেলিস্কোপ T-তে প্রবেশ করে। অপরপক্ষে M দর্পণে প্রতিফলিত দ্বিতীয় রশ্মিটি M_3 দর্পণ, T_2 নল, M_2 ও M_1 দর্পণ, T_1 নল হয়ে M দর্পণে পুনরায় প্রতিফলিত হয়ে টেলিস্কোপে প্রবেশ করে। লক্ষ করুন, প্রথম রশ্মিটি T_1 ও T_2 নলে জলের প্রবাহের অভিমুখে যায় কিন্তু দ্বিতীয় রশ্মিটি ঐ দুই নলে জলের প্রবাহের বিপরীতে যায়। এখন প্রশ্ন হল, গতিশীল জলের মধ্যে এই দুই আলোকরশ্মির বেগ কত?



চিত্র 1.5

জলের প্রতিসরাঙ্ক μ হলে স্থির জলে আলোর বেগ $\frac{c}{\mu}$। নলের মধ্যে জলস্রোতের বেগ যদি u হয়

তবে ফ্রেনেলের সূত্র অনুযায়ী বহমান জল ইথারকে $\left(1-\frac{1}{\mu^2}\right)$ বেগে টেনে নিয়ে যাবে। আলোকরশ্মি জলস্রোতের অভিমুখে গেলে এই বেগ আলোর স্বাভাবিক বেগের সঙ্গে যোগ হবে। বিপরীতে গেলে এই বেগ আলোর স্বাভাবিক বেগ থেকে বিয়োগ করতে হবে। T_1 ও T_2 নলের প্রতিটির মধ্যে আলোর রশ্মিপথের দৈর্ঘ্য যদি L হয় তবে মোট 2L দৈর্ঘ্যের পথ অতিক্রম করতে প্রথম রশ্মির সময় লাগবে

$$T_1 = \frac{2L}{\frac{c}{\mu}+ud} \quad \text{(যেখানে } d = 1-\frac{1}{\mu^2}\text{, টানের গুণাঙ্ক)}$$

এবং দ্বিতীয় রশ্মির লাগবে

$$T_2 = \frac{2L}{\frac{c}{\mu}-ud}$$

$$\therefore\ \Delta T = T_2 - T_1 = \frac{2L}{\frac{c}{\mu}-ud} - \frac{2L}{\frac{c}{\mu}+ud}$$

$$= \frac{2L\mu}{c}\left[\left(1-\mu\frac{u}{c}.d\right)^{-1} - \left(1+\mu\frac{u}{c}d\right)^{-1}\right]$$

$$= \frac{2L\mu}{c}\left[\left(1+\mu\frac{u}{c}d\right) - \left(1-\mu\frac{u}{c}d\right)\right]$$

[দ্বিপদ সূত্র ব্যবহার করে এবং $\frac{u}{c}$ রাশির উচ্চতর ঘাত উপেক্ষা করে]

$$\text{বা, } \Delta T = \frac{4L\mu^2 ud}{c^2}$$

ব্যবহৃত আলোর তরঙ্গদৈর্ঘ্য যদি λ হয় তবে তার পর্যায়কাল $T = \frac{\lambda}{c}$। সুতরাং ΔT সময়ের ব্যবধানের ফলে প্রথম রশ্মিটি দ্বিতীয় রশ্মির চেয়ে যে সংখ্যক তরঙ্গদৈর্ঘ্যে পেছিয়ে যাবে সেটি হল

$$n = \frac{\Delta T}{T} = \frac{4L\mu^2 ud}{c\lambda}$$

প্রথম ও দ্বিতীয় রশ্মি টেলিস্কোপের ফোকাস তলে ব্যতিচার পটি সৃষ্টি করে। নল দুটিতে যখন জল প্রবাহ থাকে না ; $(u=0)$ সেই অবস্থার তুলনায় যখন জল u বেগে প্রবাহিত হয় এমন অবস্থায় ব্যতিচার

পটিগুলির n সংখ্যক পটি সরে যাবে। ফ্রেনেলের সূত্র অনুযায়ী যে সংখ্যক পটি সরে যাওয়া উচিত ফিজোর পরীক্ষায় ঠিক ততগুলি পটিই সরতে দেখা গিয়েছিল। অর্থাৎ গতিশীল ঘন মাধ্যম তার গতির একটি ভগ্নাংশ গতিতে আলোকরশ্মিকে টেনে নিয়ে যায়। এটিই পরীক্ষার দ্বারা সঠিক তত্ত্ব হিসাবে প্রতিভাত হয়েছিল।

আপনি আগের অংশে তারকার আপাত স্থানচ্যুতি সংক্রান্ত পরীক্ষা সম্বন্ধে জেনেছেন। টেলিস্কোপের নলের মধ্যে জল ভরে এই পরীক্ষাটি করে দেখা গিয়েছে সেক্ষেত্রেও ঘন মাধ্যমে। অর্থাৎ জল, আলোকরশ্মিকে আংশিকভাবে টেনে নিয়ে যায়, এটিই সমর্থিত হয়। মোটের উপর, কোনো পরীক্ষাই ইথারের অস্তিত্ব প্রমাণ করে না, আবার ইথার সংক্রান্ত কোনো প্রকল্পই সব পরীক্ষার ফল ব্যাখ্যা করতে পারে না।

অনুশীলনী 3

ফিজোর পরীক্ষায় প্রতিটি নলের দৈর্ঘ্য 2m, জলের প্রতিসরাঙ্ক = 1.33, ব্যবহৃত আলোকের তরঙ্গদৈর্ঘ্য = 500 nm এবং জলস্রোতের বেগ = 5 m/s হলে ফ্রেনেলের সূত্র অনুযায়ী জলের গতির ফলে কটি ব্যতিচার পটিকে সরতে দেখা যাবে?

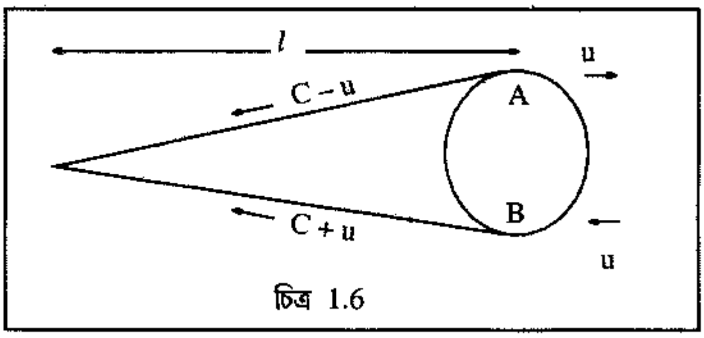
এবার আমরা আলোকের বেগ সম্বন্ধীয় এমন একটি প্রকল্প সম্বন্ধে আলোচনা করব যেটিতে ইথার নামে কোনো বস্তু কল্পনা করা হয়নি।

1.6 বিকিরণ প্রকল্প (Emission Theory)

আপনি হয়তো ভেবে দেখেছেন যে আলোর বেগ সব জড়ত্বীয় ফ্রেমেই সমান। এটি ধরে নিলে মাইকেলসন-মর্লি পরীক্ষার নঞর্থক ফল স্বাভাবিক বলেই মনে হত। কিন্তু সনাতন আপেক্ষিকতায় বিশ্বাসী বিজ্ঞানীমহল এরকম একটি বিরুদ্ধ ধারণা মেনে নিতে মোটেই প্রস্তুত ছিলেন না। এজন্য অনেকেই আর একটি বিকল্প প্রস্তাব পেশ করেছিলেন যার মধ্যে ইথারের কল্পনা ছিল না কিন্তু ধরে নেওয়া হয়েছিল যে শূন্যে আলোর বেগ তার উৎসের সাপেক্ষে c, অর্থাৎ 3×10^8 m/s। এই ধারণা থেকে মাইকেলসন-মর্লি পরীক্ষার ফলের ব্যাখ্যা সহজেই মেলে কেননা সেখানে আলোর উৎস, ইন্টারফেরোমিটার ও পর্যবেক্ষক পরস্পরের সাপেক্ষে স্থির, সুতরাং আলোর বেগ এগুলির সাপেক্ষে c-এর সমান। কিন্তু আরও কিছু পরীক্ষা এই প্রকল্পকেও সমালোচনার সম্মুখীন করল। এই পরীক্ষাগুলি সম্বন্ধে সংক্ষেপে আলোচনা করে নেওয়া যাক।

ডি সিটারের (W. De Sitter, 1913) পরীক্ষা : এই পরীক্ষাটি বুঝতে হলে যুগ্ম তারা কাকে বলে তা জানা দরকার। মহাকাশে এমন অনেক তারকাযুগ্মের সন্ধান পাওয়া গেছে যেগুলি তাদের সাধারণ ভরকেন্দ্রকে কেন্দ্র করে ঘোরে। ধরা যাক পৃথিবী এমন একটি তারার বৃত্তাকার কক্ষপথের তলে অবস্থিত

[চিত্র 1.6] এবং কক্ষপথের ব্যাস তারকা থেকে পৃথিবীর পর্যবেক্ষক O-এর দূরত্বের তুলনায় উপেক্ষণীয়। A ও B কক্ষপথের উপর দুই বিপরীত বিন্দু, O থেকে l দূরত্বে অবস্থিত। ধরুন $t = 0$ সময়ে তারকাটি যখন A বিন্দুতে, তখন তারকাটি থেকে আলোক বিকীর্ণ হয়ে t_1 সময়ে পর্যবেক্ষকের কাছে পৌঁছোল। A বিন্দুতে তারকার বেগ পর্যবেক্ষকের বিপরীত দিকে u, সুতরাং এক্ষেত্রে আলোর বেগ c - u। সুতরাং $t_1 = \frac{l}{c-u}$ ।



চিত্র 1.6

তারকার কক্ষপথ প্রদক্ষিণের সময় যদি T হয় তবে $t = \frac{T}{2}$ সময়ে তারকাটি B বিন্দুতে এসে পৌঁছোবে। তখন তারকা থেকে যে আলোক বিকীর্ণ হবে তা c + u বেগে $t_2 = \frac{T}{2} + \frac{l}{c+u}$ সময়ে পর্যবেক্ষকের কাছে পৌঁছোবে। সুতরাং পর্যবেক্ষকের হিসাবে A থেকে B-তে আসতে তারকার সময় লাগবে

$$T_1 = t_2 - t_1 = \frac{T}{2} + \frac{l}{c+u} - \frac{l}{c-u} = \frac{T}{2} - \frac{2lu}{c^2 - u^2}$$

একইভাবে গণনা করে দেখানো যায় যে B থেকে A-তে যেতে তারকার যে সময় লাগবে তা পর্যবেক্ষকের হিসাবে $T_2 = \frac{T}{2} + \frac{2lu}{c^2 - u^2}$ ।

T_1 ও T_2-এর এই অসমতা তারকার কক্ষপথের উৎকেন্দ্রিকতার নিদর্শন। কিন্তু সরাসরি মেপে কক্ষপথের কোনো উৎকেন্দ্রিকতা লক্ষিত হয় না। সুতরাং এই পরীক্ষা থেকে এটাই প্রমাণ হয় যে আলোর বেগের উপর উৎসের বেগের কোনো প্রভাব নেই।

বহির্জগতীয় আলোক উৎস ব্যবহার করে মাইকেলসন-মর্লি পরীক্ষার পুনরাবৃত্তি : মাইকেলসন-মর্লি পরীক্ষায় আলোর উৎস ইন্টারফেরোমিটার বা পর্যবেক্ষকের সাপেক্ষে স্থির ছিল। উৎসটি গতিশীল হলে এবং উৎসের গতি পরিবর্তিত হতে থাকলে ইন্টারফেরোমিটারের সাপেক্ষে আলোর বেগ কম বেশি হতে থাকবে, যার ফলে ব্যতিচার পটিরও পরিবর্তন হতে থাকবে। এই পরীক্ষা সাফল্যের সঙ্গে করতে হলে উচ্চগতিসম্পন্ন আলোক উৎস প্রয়োজন। কিন্তু গবেষণাগারে এমন উৎস পাওয়া সম্ভব নয়। এজন্য টোম্যাশেক (Tomaschek, 1924) ও মিলার (Miller, 1925) যথাক্রমে তারকার আলো ও সূর্যালোক ব্যবহার করে মাইকেলসন-মর্লি পরীক্ষার পুনরাবৃত্তি করেন। কিন্তু তাঁরা কেউই ব্যতিচার পটির কোনো পরিবর্তন লক্ষ করেননি।

বিকিরণ প্রকল্পের অসাফল্য থেকে সমস্ত জড়ত্বীয় ফ্রেমে আলোকের বেগের সমতা, তথা তড়িৎচুম্বকীয় সমীকরণগুলির সত্যতা প্রতিপন্ন হল। আপনি আগেই দেখেছেন কীভাবে ইথার প্রকল্পও পরীক্ষার ফলাফল দ্বারা সমর্থিত না হয়ে বর্জিত হয়েছে। সনাতন আপেক্ষিকতার সীমাবদ্ধতা, আলোকের বেগের সমতা প্রভৃতি বিষয়ে বিজ্ঞানীদের মধ্যে যে অস্বচ্ছতা ছিল তা দূর করতে বিষয়টির উপর যিনি উজ্জ্বল আলোর সম্প্রপাত ঘটিয়েছিলেন তিনি হলেন অ্যালবার্ট আইনস্টাইন। আপেক্ষিকতার পরবর্তী অধ্যায় সম্বন্ধে আপনি পরবর্তী এককে জানার সুযোগ পাবেন।

এবার একটি অনুশীলনীর উত্তর দিন।

অনুশীলনী 4

বিকিরণ প্রকল্প সত্য ধরে নিয়ে দেখান যে ডি সিটারের পরীক্ষায় নির্দিষ্ট কোন্ অবস্থায় যুগ্ম তারকার একটিকে একই সঙ্গে A ও B বিন্দুতে [চিত্র 1.6] দেখা যেতে পারে।

1.7 সারাংশ

এই এককটির প্রথম অংশে সনাতন আপেক্ষিকতার তত্ত্ব তথা গ্যালিলিয়ো রূপান্তরণের বিবৃতি ও ব্যাখ্যা দেওয়া হয়েছে। দেখা গেছে যে নিউটনীয় বলবিদ্যার সূত্রগুলি সব জড়ত্বীয় নির্দেশতন্ত্রে সমভাবে প্রযোজ্য থাকে। সুতরাং কোনো একটি জড়ত্বীয় নির্দেশতন্ত্র স্থির এবং অন্যগুলি গতিসম্পন্ন, এমন বলা যায় না। কিন্তু তড়িৎচুম্বকীয় ঘটনাবলীর বেলায় সব জড়ত্বীয় নির্দেশতন্ত্রে সূত্রগুলি মোটেই এক থাকে না। এজন্য ইথার নামে একটি মাধ্যম কল্পনা করা হয় যার সাপেক্ষে আলো c, অর্থাৎ $3 \times 10^8\ ms^{-1}$ বেগে চলে।

সর্বব্যাপী ইথারের অস্তিত্ব এবং তার আরোপিত ধর্মগুলি প্রতিপন্ন করার জন্য অনেক পরীক্ষা-নিরীক্ষা করা হয়েছে। এর মধ্যে মাইকেলসন-মর্লি পরীক্ষায় ইথারের মধ্যে পৃথিবীর গতি অথবা পৃথিবীর সাপেক্ষে ইথারের স্রোত লক্ষ করার চেষ্টা ব্যর্থ হয়েছিল। পৃথিবী সংলগ্ন ইথারকে টেনে নিয়ে যায়, এমন একটি ধারণাও পরীক্ষার ফলাফল দ্বারা সমর্থিত হয়নি। বরং পরীক্ষার দ্বারা প্রমাণিত হয় যে গতিশীল ঘন মাধ্যম আলোকরশ্মিকে আংশিকভাবে টেনে নিয়ে যায়। শেষ পর্যন্ত ইথার মাধ্যমের কল্পনা বিজ্ঞানীরা বর্জন করেন।

আলোক তার উৎসের সাপেক্ষে c বেগে চলে এমন একটি প্রকল্পও প্রস্তাবিত হয়েছিল। কিন্তু কয়েকটি পরীক্ষায় লব্ধ ফল এই প্রকল্পকে সমর্থন যোগায়নি। বিভিন্ন পরীক্ষার ফলাফল ক্রমশ আপেক্ষিকতার সঠিক তত্ত্বের দিকে পথনির্দেশ করেছিল। এই সঠিক তত্ত্বের প্রবক্তা ছিলেন আইনস্টাইন।

1.8 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

(ক) জড়ত্বীয় ফ্রেম কাকে বলে? দেখান যে, কোন্ জড়ত্বীয় ফ্রেমের সাপেক্ষে সমবেগে চলমান ফ্রেমও জড়ত্বীয় হবে।

(খ) মাইকেলসন-মর্লি পরীক্ষার উদ্দেশ্য কী ছিল? পরীক্ষাটির যন্ত্রব্যবস্থা বর্ণনা করুন। এই পরীক্ষার প্রত্যাশিত ফল কী ছিল?

(গ) মাইকেলসন-মর্লি পরীক্ষায় পরিদৃষ্ট ফলের তাৎপর্য ব্যাখ্যা করুন।

(ঘ) ইথার টানের প্রকল্পটি ব্যাখ্যা করুন। তারকার কৌণিক চ্যুতি সংক্রান্ত পরীক্ষা এই প্রকল্পকে সমর্থন করে কিনা, আলোচনা করুন।

(ঙ) ফিজোর পরীক্ষার বর্ণনা দিন এবং এই পরীক্ষার ফলাফল বিশ্লেষণ করুন।

(চ) আলোর বিকিরণ প্রকল্পটি ব্যাখ্যা করুন। এই প্রকল্প কেন গ্রহণযোগ্য বলে বিবেচিত হয়নি?

1.9 উত্তরমালা

অনুশীলনী 1. (i) ও (iv) নির্দেশতন্ত্র দুটিকে জড়ত্বীয় ফ্রেম বলা যায়।

অনুশীলনী 2. (ক) 1.10 সূত্র অনুযায়ী সরে যাওয়া পটির সংখ্যা $\Delta n = \frac{l_2 - l_1}{\lambda}(\beta^2 - \beta'^2)$

$$l_2 - l_1 = 16 \text{ cm}, \lambda = 500 \text{ nm}, \beta = \frac{30}{3 \times 10^5} = 10^{-4}, \beta' = 0 \text{ মান বসিয়ে}$$

$$\Delta n = \frac{0.16}{500 \times 10^{-9}} (10^{-8} - 0) = .0032$$

(খ) যেহেতু শব্দতরঙ্গ বায়ু দ্বারা বাহিত হয়, গতিশীল বায়ুতে শব্দের বেগ স্থির বায়ুতে শব্দের বেগ ও বায়ুর বেগের ভেক্টর যোগফল।

সুতরাং এক্ষেত্রে 1.9 সমীকরণটি প্রযোজ্য হবে। তবে এক্ষেত্রে ইন্টারফেরোমিটারের আকার শব্দের তরঙ্গদৈর্ঘ্যের তুলনায় বড়ো হতে হবে। উপযুক্ত অংশপ্রতিফলক ও দর্পণ ব্যবহার করতে হবে এবং শব্দতরঙ্গের ব্যতিচার লক্ষ করার জন্য উপযুক্ত তীব্রতামাপকের ব্যবস্থা করতে হবে।

অনুশীলনী 3

1.11 সূত্র অনুযায়ী সরে যাওয়া ব্যতিচার পটির সংখ্যা $n = 4L\mu^2 ud / c\lambda$। এখানে $L = 2m$, $\mu = 1.33$, $d = 1 - \mu^{-2} = 0.435$, $u = 5$ m/s, $c = 3 \times 10^8$ m/s, $\lambda = 500 \times 10^{-9}$ m। মানগুলি বসিয়ে

$$n = 4.2.(1.33)^2 . 5 \times 0.435 / 3 \times 10^8 \times 500 \times 10^{-9}$$

$= 0.2$ প্রায়।

অনুশীলনী 4

তারকাটির A থেকে B বিন্দুতে আসতে সময় লাগে পর্যবেক্ষকের হিসাবে $T_1 = \frac{T}{2} - \frac{2lu}{c^2 - u^2}$। যদি $T_1 = 0$ হয়, তবে তারকাটিকে একই সঙ্গে A ও B বিন্দুতে দেখা যাবে। ∴ নির্ণেয় শর্ত $T_1 = \frac{T}{2} - \frac{2lu}{c^2 - u^2}$ বা, $T = \frac{\Delta lu}{c^2 - u^2}$

সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

(ক) 1.2 অংশ দেখুন।

(খ) 1.4 অংশ দেখুন।

(গ) মাইকেলসন-মর্লি পরীক্ষার ফল থেকে এই সিদ্ধান্তে আসা যায় যে ইথার নামে অভিহিত কোনো সর্বব্যাপী মাধ্যম আছে এবং আলো এই মাধ্যমেই সঞ্চারিত হয় এমন ধারণা সমর্থন করা যায় না। সুতরাং হয় (1) আলো শূন্য মাধ্যমে সব জড়ত্বীয় ফ্রেমে সমান বেগে (c) সঞ্চারিত হয়। অথবা (2) লরেনৎস্-ফিৎস্‌গেরাল্ড সংকোচন বা ইথারের টান বা বিকিরণ প্রকল্প এর কোনো একটির দ্বারা ইথারের মধ্যে আলোর সঞ্চারণ প্রক্রিয়া বা উৎস থেকে আলোর বিকিরণ প্রক্রিয়াকে পরিবর্তিত রূপ দিতে হবে। অন্যান্য পরীক্ষার দ্বারা দ্বিতীয় বিকল্পের ধারণাগুলি ভুল বলে প্রমাণিত হয়েছিল।

(ঘ) 1.4.2 অংশটি দেখুন।

(ঙ) 1.5 অংশ দেখুন।

(চ) 1.6 অংশ দেখুন।

একক 2 □ নির্দেশাঙ্কের লরেন্‌ৎসীয় পরিবর্তন

গঠন

2.1 প্রস্তাবনা

উদ্দেশ্য

2.2 আপেক্ষিকতার বিশেষ তত্ত্বের মূল অঙ্গীকার

2 .3 লরেন্‌ৎসীয় পরিবর্তন সূত্র

2.4 লরেন্‌ৎসীয় পরিবর্তনের প্রয়োগ

2.4.1 দৈর্ঘ্যের লরেন্‌ৎসীয় প্রয়োগ

2.4.2 সময়ের দীর্ঘায়ন

2.5 আপেক্ষিকতার বিশেষ তত্ত্বের আলোকে মাইকেলসন-মর্লি পরীক্ষা

2.6 দুই যমজের রহস্য

2.7 সারাংশ

2.8 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

2.9 উত্তরমালা

2.1 প্রস্তাবনা

বর্তমান পাঠক্রমের প্রথম এককে আপনি গ্যালিলিয়ো পরিবর্তন ও আপেক্ষিকতার সনাতন তত্ত্বের পরিচয় পেয়েছেন। আপনি দেখেছেন যে বলবিদ্যার সাধারণ ঘটনাগুলি যদি কোনো একটি নির্দেশতন্ত্রে নিউটনীয় গতিবিদ্যাসূত্র মেনে চলে তবে ঐ নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে সমবেগে চলনশীল কোনো নির্দেশতন্ত্রেও যেগুলি নিউটনীয় গতিসূত্র প্রতিপালন করে। এই নির্দেশতন্ত্রগুলিকে আমরা জড়ত্বীয় ফ্রেম নামে অভিহিত করেছি।

বিভিন্ন জড়ত্বীয় ফ্রেমের মধ্যে কোনো একটি ফ্রেম পরম স্থির এবং অন্যগুলি ঐ বিশেষ ফ্রেমের সাপেক্ষে গতিশীল এরূপ একটি ধারণা বিজ্ঞানীদের মধ্যে তৈরি হয়েছিল। এবং তার ফলে তাঁরা ঐ পরম স্থির ফ্রেমের সাপেক্ষে স্থির থাকে এমন একটি মাধ্যম কল্পনা করেছিলেন। এই কল্পিত মাধ্যমের নাম দেওয়া হয়েছিল ইথার। যার সাপেক্ষে শূন্য মাধ্যমে আলোর বেগ c অর্থাৎ 3×10^8 মি/সে। ইথার মাধ্যমের অস্তিত্ব প্রমাণের জন্য নানা পরীক্ষা করা হয়েছিল কিন্তু পরীক্ষার ফল ইথারের অস্তিত্বকে সমর্থন না করায় শেষ পর্যন্ত ইথার প্রকল্পটিকে বর্জন করা হয়।

অন্যদিকে এও দেখা যায় যে ম্যাক্সওয়েলের তড়িৎচুম্বকীয় সমীকরণগুলি নির্দেশাঙ্কের গ্যালিলিয়ো রূপান্তরণে ভিন্ন রূপ গ্রহণ করে। অর্থাৎ সেগুলি এক জড়ত্বীয় ফ্রেমে সত্য হলে অন্য জড়ত্বীয় ফ্রেমে সত্য থাকে না।

বিভিন্ন পরীক্ষা-নিরীক্ষার ফলাফল এবং অ্যালবার্ট আইনস্টাইনের অসামান্য বিশ্লেষণ ক্ষমতা ও অন্তর্দৃষ্টি, এই দুই-এর মিলনে 1905 খ্রিস্টাব্দে প্রকাশিত হয়েছিল আইনস্টাইনের আপেক্ষিকতার বিশেষ তত্ত্ব। এই তত্ত্ব বিভিন্ন পরীক্ষার ফল, তথা তড়িৎচুম্বকীয় ঘটনাবলী ও আলোর বেগ সম্বন্ধীয় যাবতীয় জটিলতার সম্পূর্ণ ব্যাখ্যা দিতে সমর্থ হয়েছিল।

এই এককে আমরা আপেক্ষিকতার বিশেষ তত্ত্বের অঙ্গীকারগুলি কীভাবে আমাদের নির্দেশতন্ত্রের গ্যালিলিয়ো পরিবর্তনের একটি উপযুক্ত বিকল্পে উপনীত করে সেটি আলোচনা করব। নির্দেশতন্ত্রের এই আপেক্ষিকতাবাদী পরিবর্তনই হল লরেন্ৎসীয় পরিবর্তন। এই পরিবর্তনের সমীকরণগুলি ব্যবহার করে আমরা দৈর্ঘ্য ও সময়ের অন্তরাল বিভিন্ন জড়ত্বীয় ফ্রেমে কীভাবে পরিবর্তিত হয় সেগুলির লক্ষ করব। মোটের ওপর আপনার কাছে এই এককটি হবে আপেক্ষিকতার বিশেষ তত্ত্বের সিংহদ্বার।

উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়লে আপনার যে সমস্ত কাজ করার ক্ষমতা জন্মাবে সেগুলি হল—

- আপেক্ষিকতার বিশেষ তত্ত্বের মূল অঙ্গীকারগুলি বিবৃত ও ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- লরেন্ৎসীয় পরিবর্তন সূত্রগুলি লিখতে পারবেন এবং সেগুলি গাণিতিকভাবে প্রতিষ্ঠিত করতে পারবেন।
- দৈর্ঘ্যের লরেন্ৎসীয় সংকোচন ও সময়ের দীর্ঘায়ন ব্যাখ্যা করতে পারবেন এবং এগুলির সূত্র প্রতিষ্ঠিত করতে পারবেন।
- মাইকেলসন-মর্লি পরীক্ষার নঞর্থক ফলের প্রকৃত আপেক্ষিকতাবাদী ব্যাখ্যা দিতে পারবেন।
- দুই যমজের রহস্যটি বিবৃত করতে ও তার ব্যাখ্যা দিতে পারবেন।

2.2 আপেক্ষিকতার বিশেষ তত্ত্বের মূল অঙ্গীকার

এই পাঠক্রমের প্রথম এককে আপনি দেখেছেন, গতিবিদ্যার সাধারণ সূত্রগুলি কোনো একটি নির্দেশতন্ত্রে সত্য হলে গ্যালিলিয়ো পরিবর্তনের মাধ্যমে লব্ধ অন্য নির্দেশতন্ত্রেও সত্য থাকে। এজন্য এই দুটি নির্দেশতন্ত্রকেই আমরা জড়ত্বীয় ফ্রেম বলে থাকি। কিন্তু ম্যাক্সওয়েলের তড়িৎচুম্বকীয় সমীকরণগুলির উপর গ্যালিলিয়ো পরিবর্তন আরোপ করলে সেগুলির রূপ একেবারেই বদলে যায়, অর্থাৎ একটি ফ্রেমে c বেগে সঞ্চারিত আলোকতরঙ্গের সমীকরণ পাওয়া গেলেও অন্য ফ্রেমে তা পাওয়া যায় না। গ্যালিলিয়ো

পরিবর্তন, অর্থাৎ সনাতন আপেক্ষিকতা-তত্ত্ব যদি সত্য হত তবে আমরা নানা ফ্রেমে আলোর বেগের পরিমাপ করে কোন্ ফ্রেমে সেটির মান c হয় তা বার করতে পারতাম এবং তা থেকে কোন্ ফ্রেমটি পরম স্থির সেটিও জানতে পারতাম। আপনি আগেই জেনেছেন, এই পরম স্থির ফ্রেমের অনুসন্ধান ব্যর্থতায় পর্যবসিত হয়েছিল।

1905 খ্রিস্টাব্দে আইনস্টাইন "On the Electrodynamics of Moving Bodies" বা 'গতিশীল বস্তুর তড়িতীয় গতিবিদ্যা' নামের গবেষণাপত্রে যে আপেক্ষিকতা তত্ত্ব উপস্থাপন করেন তা দুটি মৌলিক অঙ্গীকারের উপর প্রতিষ্ঠিত। এগুলি হল ঃ

● **প্রথম অঙ্গীকার ঃ** পদার্থবিদ্যার সমস্ত নিয়ম সব জড়ত্বীয় ফ্রেমে সমানভাবে প্রযোজ্য।

এই অঙ্গীকারকে আমরা 'আপেক্ষিকতার নীতি' বলব। বলা বাহুল্য এখানে তড়িৎচুম্বকীয় ঘটনাবলীর সূত্রগুলিও পদার্থবিদ্যার নিয়মের অন্তর্ভুক্ত, যার ফলে গ্যালিলিয়ো পরিবর্তন সূত্রগুলি গ্রহণযোগ্য থাকে না।

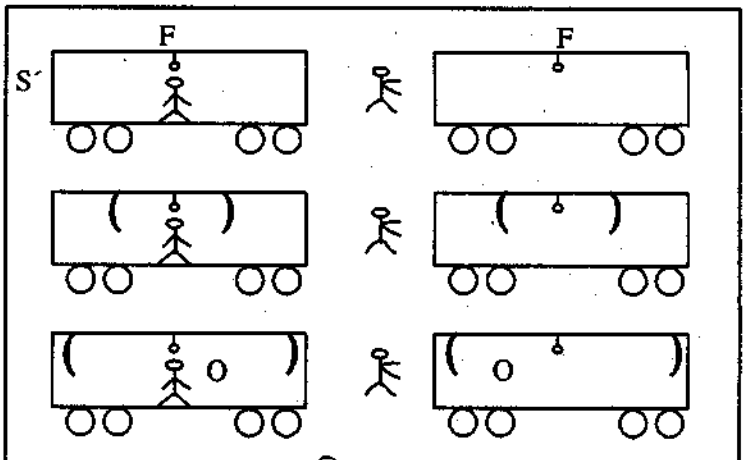
● **দ্বিতীয় অঙ্গীকার ঃ** শূন্যে আলোকের বেগ সব জড়ত্বীয় ফ্রেমেই সমান। এর অর্থ শূন্যে আলোকের বেগ c একটি ধ্রুবরাশি এবং শূন্যে আলোকের বেগের পরিমাপ করে কোনো একটি জড়ত্বীয় ফ্রেমকে অন্য একটি থেকে পৃথক করা যাবে না।

আপেক্ষিকতা-তত্ত্বের অঙ্গীকার দুটির তাৎপর্য বুঝতে নিশ্চয়ই আগ্রহী হবেন। প্রথম অঙ্গীকারটিতে পদার্থবিদ্যার নিয়ম বলতে কী বোঝানো হয়েছে? ধরা যাক কোনো একটি জড়ত্বীয় ফ্রেমে সমকোণী কার্টেজীয় নির্দেশতন্ত্রে x, y ও z কোন একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক। ঐ বিন্দুতে যদি t সময়ে কোনো ঘটনা ঘটে তবে x, y, z, t, এই রাশিগুলি ঐ ঘটনার স্থানকাল নির্দেশ করবে। অনুরূপভাবে অন্য একটি জড়ত্বীয় S´ ফ্রেমে ঐ একই ঘটনার স্থানকাল ধরুন x´, y´, z´, t´। লক্ষ করুন, আমরা শুধু স্থানাঙ্কই নয়, সময়কেও দুই জড়ত্বীয় ফ্রেমে স্বতন্ত্র রাশি t ও t´ দিয়ে নির্দেশ করেছি। দুই জড়ত্বীয় ফ্রেমে কোনো বস্তুর দৈর্ঘ্য, ভর, বেগ, ভরবেগ, গতিশক্তি প্রভৃতি ভিন্ন হতে পারে, কেননা এগুলি ঐ বস্তুর ধর্ম, পদার্থবিদ্যার কোনো নিয়ম নয়। যদি দুই ফ্রেমে কোনো বস্তুর দৈর্ঘ্য পরিমাপ করে ভিন্ন মান পাওয়া যায় তাহলেও ফ্রেম দুটির কোনো একটি স্থির এবং অন্যটি গতিশীল এমন বলা যাবে না। কেননা বস্তুটির পরম স্থির ফ্রেমে "প্রকৃত দৈর্ঘ্য" বলে কোনো রাশি আমাদের কাছে অজ্ঞাত। কিন্তু ভরবেগের সংরক্ষণ, স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষে গতিশক্তির সংরক্ষণ, দুটি তড়িৎ আধানের মধ্যে কুলম্ব আকর্ষণ বা বিকর্ষণ, এগুলি পদার্থবিদ্যার নিয়ম এবং দুই জড়ত্বীয় ফ্রেমেই এগুলি প্রতিপালিত হতে দেখা যাবে।

দ্বিতীয় অঙ্গীকার থেকে বোঝা যায় যে শূন্যে আলোকতরঙ্গের চরিত্র বায়ুতে শব্দতরঙ্গ বা জলের উপর ঢেউ থেকে সম্পূর্ণ আলাদা। মাইকেলসন-মর্লি পরীক্ষার প্রত্যাশিত গণনায় (একক 1) আমরা ইথার মাধ্যমে আলোর বেগ $c \pm V$ ধরেছিলাম। বর্তমান অঙ্গীকার অনুযায়ী এটি একেবারেই ভুল।

গ্যালিলিয়ো নির্দেশতন্ত্র পরিবর্তনের সূত্রের মধ্যে আরও একটি গুরুত্বপূর্ণ ত্রুটি ছিল। S এবং S´ এই দুই জড়ত্বীয় ফ্রেমে কোনো একটি ঘটনার সময় আমরা যথাক্রমে t ও t´ ধরেছি এবং t = t´ ধরে নিয়েছি। যদি S ফ্রেমে দুটি ঘটনা t_1 ও t_2 সময়ে ঘটে তবে $t_1 = t_2$ হলে সে দুটিকে সমকালীন (simultaneous) বলে মনে করা হবে। S´ ফ্রেমে যদি ঘটনা দুটি t_1' ও t_2' সময়ে ঘটে, তবে যেহেতু $t_1' = t_1$ এবং $t_2' = t_2$, অতএব $t_1' = t_2'$ হবে অর্থাৎ S´ ফ্রেমেও ঘটনা দুটিকে সমকালীন বলে ধরতে হবে। কিন্তু বাস্তবে তা হয় কিনা সেটি পরীক্ষা করা যাক।

ধরে নিন একটি ট্রেনের কামরার মধ্যে দুই প্রান্তের দেওয়াল থেকে সমদূরত্বে একটি ফ্লাশগান F রয়েছে [চিত্র 2.1]। ট্রেনের কামরায় পর্যবেক্ষক O´ এবং কামরার বাইরে প্ল্যাটফর্মে দাঁড়ানো পর্যবেক্ষক O, দুজনেই ফ্ল্যাশগান থেকে বার হওয়া আলোর অবস্থান লক্ষ করতে সক্ষম। ফ্ল্যাশগান থেকে একটি অতি স্বল্পস্থায়ী আলোর ঝলক হলে O´ পর্যবেক্ষক আলোক তরঙ্গকে c বেগে সমান দূরত্ব অতিক্রম করে একই সময়ে কামরার সামনের ও পিছনের দেওয়ালে আপতিত হতে দেখবেন। অর্থাৎ দুই দেওয়ালে আলোর আপতিত হওয়ার ঘটনা দুটি O´-এর কাছে সমকালীন (simultaneous) বলে মনে হবে। ধরে নিন আলোর ঝলক নির্গত হওয়ার মুহূর্তে O ও O´ একই স্থানে ছিলেন।



চিত্র 2.1

প্ল্যাটফর্মে দাঁড়ানো পর্যবেক্ষক O-এর কাছেও আলোর বেগ c বলেই মনে হবে। কিন্তু তার কাছে কামরার পিছনের দেওয়াল কিছুটা এগিয়ে আসার ফলে এবং সামনের দেওয়াল ফ্ল্যাশগান থেকে দূরে সরে যাওয়ার ফলে আলোকতরঙ্গ পিছনের দেওয়ালে অপেক্ষাকৃত আগে আপতিত হল বলে মনে হবে। অর্থাৎ O-এর কাছে আলো দুই দেওয়ালে আপতিত হওয়ার ঘটনা দুটি সমকালীন বলে মনে হবে না।

উপরের আলোচনা থেকে নিশ্চয়ই বুঝতে পারছেন যে সমকালীনতা (simultaneity) বিষয়টি আপেক্ষিক এবং এক পর্যবেক্ষকের কাছে দুটি ঘটনা সমকালীন মনে হলেও অন্য জড়ত্বীয় ফ্রেমের পর্যবেক্ষকের কাছে সেগুলি সমকালীন নাও হতে পারে। সাধারণভাবে বলা যায় যে দুটি জড়ত্বীয় ফ্রেমে সময় t ও t´-কে সমমান বলে ধরে নেওয়া যায় না। গ্যালিলিয়ো নির্দেশতন্ত্র পরিবর্তনের সূত্রের কোনো সঠিক বিকল্প প্রতিষ্ঠা করতে হলে সেখানে t ও t´-কে স্বতন্ত্র ধরতে হবে। পরবর্তী অংশে আমরা এই বিকল্প সূত্র সম্বন্ধে আলোচনা করব।

2.3 লরেন্‌ৎসীয় পরিবর্তন সূত্র

পূর্ববর্তী এককের মতো ধরে নিন S ও S′ দুটি সমকোণী কার্তেজীয় নির্দেশতন্ত্র। তাদের অক্ষগুলি যথাক্রমে x, y, z ও x′, y′, z′ এবং সেগুলি পরস্পর সমান্তরাল। S এবং S′ দুটিই জড়ত্বীয় এবং S-এর সাপেক্ষে S′ x অথবা x′ অক্ষ বরাবর υ বেগে গতিশীল। দুই নির্দেশতন্ত্রেই সময়ের পরিমাপ করার ব্যবস্থা আছে এবং দুই নির্দেশতন্ত্রে সময়ের মান যথাক্রমে t ও t′। প্রাথমিক অবস্থায় দুই নির্দেশতন্ত্র সমাপতিত অবস্থায় ছিল এবং সেই মুহূর্তে t ও t′ পরিমাপের ঘড়ি দুটি মেলানো হয়েছিল। যাতে $t = t' = 0$ হয়। এখন প্রশ্ন, পরবর্তীকালে x, y, z, t রাশিগুলির সঙ্গে x′, y′, z′, t′ রাশিগুলির সম্পর্ক কী হবে?

এই সম্পর্কের সূত্রগুলি কেমন হবে সে সম্পর্কে আমাদের ইতিমধ্যেই কিছুটা ধারণা আছে। এ সম্বন্ধে আগেই আলোচনা করে নেওয়া যাক।

1. আপেক্ষিকতার অঙ্গীকার অনুযায়ী শূন্যে আলোর বেগ সব জড়ত্বীয় ফ্রেমেই c।

যদি $t = t' = 0$ মুহূর্তে S ও S′-এর মূলবিন্দুতে (O অথবা O′) একটি আলোর ঝলক সৃষ্টি করা হয় তবে S ফ্রেমে পরবর্তী t সময়ে আলোর তরঙ্গমুখটি সবদিকেই ct দূরত্ব অতিক্রম করবে। অর্থাৎ ঐ তরঙ্গমুখটি হবে ct ব্যাসার্ধের একটি গোলক যার সমীকরণ :

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0 \qquad (2.1)$$

কিন্তু S′ ফ্রেমেও ঐ তরঙ্গমুখটি c বেগে অগ্রসর হবে এবং t′ সময়ে সেটি ct′ দূরত্ব পার হবে। সুতরাং S′ ফ্রেমে তরঙ্গমুখটি ct′ ব্যাসার্ধের একটি গোলক রচনা করবে, যার সমীকরণ

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0 \qquad (2.2)$$

আপনি নিশ্চয়ই বুঝতে পারছেন যে নির্দেশতন্ত্রের পরিবর্তন সূত্রগুলি এমন হতে হবে যাতে 2.1 ও 2.2 সমীকরণ দুটির যে কোনো একটি থেকে অন্যটিতে উপনীত হওয়া যায়।

2. নির্দেশতন্ত্র পরিবর্তনের সমীকরণগুলিকে রৈখিক (linear) হতে হবে। এর অর্থ কী? ধরুন কেউ প্রস্তাব করলেন $x' = x^2$ সমীকরণটি ব্যবহার করা যাক। এবার একটি মিটার স্কেলকে x বা x′ অক্ষের সঙ্গে সমান্তরালভাবে রাখা হল যাতে তার প্রান্তগুলি $x_1 = 0$ m এবং $x_2 = 1$ m স্থানাঙ্কে থাকে। S′ ফ্রেমে স্কেলটির দৈর্ঘ্য হবে $\quad x_2' - x_1' = (x_2)^2 - (x_1)^2 = 1^2 - 0^2 = 1$ m

কিন্তু এবার যদি স্কেলটিকে সরিয়ে রাখা হয় যাতে $x_1 = -0.5$ m ও $x_2 = 0.5$ m হয় তাহলে S′ ফ্রেমে সেটির দৈর্ঘ্য হবে $\quad x_2' - x_1' = (x_2)^2 - (x_1)^2 = (0.5)^2 - (-0.5)^2 = 0$ m

অর্থাৎ S′ ফ্রেমের পর্যবেক্ষকের কাছে স্কেলটির দৈর্ঘ্য নির্ভর করবে S ফ্রেমে সেটির অবস্থানের উপর। একইভাবে আপনি দেখাতে পারবেন যে t ও t′ সময়ের মধ্যে সম্পর্ক $t' = t^2$ হয় তবে একই ঘড়ির

টিক্-টিক্ শব্দের অন্তরাল S ফ্রেমে ঠিক সমান থাকলেও S´ ফ্রেমে এক এক সময়ে এক এক স্থায়িত্বের বলে মনে হবে। আমাদের সাধারণ অভিজ্ঞতা থেকে আমরা জানি যে একটি মিটার স্কেলের দৈর্ঘ্য যেমন স্কেলটি কোথায় রাখা হয়েছে তার উপর নির্ভর করে না, তেমনিই ঘড়ির টিক্-টিক্ সর্বদাই সময়ের সমান অন্তরালে শোনা যায়।

3. পরিবর্তনের সমীকরণগুলি নিশ্চয়ই এমন হবে যাতে υ, অর্থাৎ S ফ্রেমে S´ ফ্রেমের বেগ যখন শূন্যে আলোর বেগের তুলনায় খুবই ক্ষুদ্র তখন সেগুলি গ্যালিলিয়ো পরিবর্তনের সূত্রে পরিণত হবে। বিশেষত, যদি $\upsilon = 0$ হয় তবে S ও S´ ফ্রেম দুটি সমাপতিত অবস্থায় থাকবে এবং সূত্রগুলি হবে

$$x' = x,\ y' = y,\ z' = z,\ t' = t \qquad (2.3)$$

এবার আমরা নির্দেশতন্ত্র পরিবর্তনের সাধারণ রৈখিক সমীকরণগুলি লিখতে পারি।

$$\begin{aligned} x' &= A_1x + A_2y + A_3z + A_4t \quad &(\text{ক})\\ y' &= B_1x + B_2y + B_3z + B_4t \quad &(\text{খ})\\ z' &= C_1x + C_2y + C_3z + C_4t \quad &(\text{গ})\\ t' &= D_1x + D_2y + D_3z + D_4t \quad &(\text{ঘ}) \end{aligned} \qquad (2.4)$$

এখানে A, B, C ও D রাশিগুলি স্থির মানের সহগ, তবে সেগুলি υ-এর উপর নির্ভরশীল হতে পারে। 2.4 সমীকরণগুলিতে মোট ষোলোটি সহগ থাকলেও এগুলির অনেকটা সরলীকরণ সম্ভব। আগেই ধরে নেওয়া হয়েছে যে x ও x´ অক্ষ দুটি সর্বদাই পরস্পর সংলগ্ন থাকে। অর্থাৎ $y = z = 0$ হলে $y' = z' = 0$ হবে। এই অবস্থায় 2.4(খ) ও (গ) সমীকরণ থেকে $B_1x + B_4t = 0$ এবং $C_1x + C_4t = 0$। যেহেতু x ও t-এর যে কোনও মানের জন্য এগুলি সত্য, অতএব B_1, B_4, C_1 ও C_4-এর মান শূন্য। সুতরাং (খ) ও (গ) সমীকরণ দুটির রূপ দাঁড়াল ঃ

$$y' = B_2y + B_3z$$
$$z' = C_2y + C_3z$$

আবার দেখুন, যেহেতু xy তল $(z = 0)$ ও $x'y'(z' = 0)$ তল সর্বদাই পরস্পর সংলগ্ন থাকে, $z = 0$ হলে $z' = 0$ হবে। একইভাবে xz তল $(y = 0)$ ও $x'z'$ তলও $(y' = 0)$ সর্বদা পরস্পর সংলগ্ন থাকে। যার ফলে $y = 0$ হলে $y' = 0$ হবে। এ থেকে বোঝা যায় যে B_3 ও C_2-এর মান শূন্য, অর্থাৎ $y' = B_2y,\ z' = C_3z$।

B_2 ও C_3 রাশি দুটির মান কত? ধরুন S ফ্রেমে y-অক্ষ বরাবর একটি মিটার স্কেল রাখা আছে। S ফ্রেমে স্থির পর্যবেক্ষকের কাছে তার দৈর্ঘ্য 1 মিটার হলেও, S´ ফ্রেমের স্থির পর্যবেক্ষকের কাছে সেটির দৈর্ঘ্য $\Delta y' = B_2\Delta y = B_2$ মিটার। অন্যদিকে স্কেলটি যদি y´ অক্ষ বরাবর রাখা থাকে, তবে S ফ্রেমে স্থির

পর্যবেক্ষকের কাছে তার দৈর্ঘ্য হবে $\Delta y = \frac{1}{B_2}\Delta y' = \frac{1}{B_2}$ মিটার। যেহেতু S ও S′ ফ্রেমে স্থির দুই পর্যবেক্ষক পরস্পরের সাপেক্ষে একই বেগে গতিশীল, এই দুই দৈর্ঘ্য ভিন্ন হতে পারে না। সুতরাং $B_2 = \frac{1}{B_2}$ বা, $B_2 = 1$। একইভাবে আপনি দেখাতে পারবেন যে $C_3 = 1$। সুতরাং 2.4 (খ) ও (গ) সমীকরণগুলি সরলীকৃত হয়ে দাঁড়াল : $y' = y$ ও $z' = z$।

এবার 2.4(খ) সমীকরণটির দিকে নজর দিন। S′ ফ্রেমে পরিমাপ করা সময় t′ কি y-এর উপর নির্ভর করতে পারে ? যদি S′ ফ্রেমে $y' = 1$ মিটার এবং $y' = -1$ মিটার স্থানাঙ্কে দুটি ঘড়ি রাখা থাকে তবে সে দুটির x স্থানাঙ্কও 1 মিটার ও -1 মিটার হবে, সুতরাং দুটির ক্ষেত্রে t′-এর মান ভিন্ন হবে। কিন্তু দুটি ঘড়িই S′ ফ্রেমে স্থির থাকায় এই ভিন্নতা অসম্ভব। সুতরাং D_2 সহগটির মান নিশ্চয়ই শূন্য। একই যুক্তি থেকে বলা যায় যে D_3 সহগটির মানও শূন্য। অর্থাৎ (ঘ) সমীকরণটির সরলীকৃত রূপ : $t' = D_1 x + D_4 t$.

সবশেষে 2.4(ক) সমীকরণটি লক্ষ করা যাক। যেহেতু S′ ফ্রেম S ফ্রেমের সাপেক্ষে υ বেগে x অক্ষের অভিমুখে চলমান S′ ফ্রেমের মূলবিন্দুকে $x' = 0$ এবং $x = \upsilon t$ দুই সমীকরণ দিয়েই নির্দেশ করা যায়, সুতরাং (ক) সমীকরণটির রূপ হবে : $x' = A_1(x - \upsilon t) = A_1 x - A_1 \upsilon t$

এর অর্থ, $A_2 = A_3 = 0$ এবং $A_4 = -A_1\upsilon$।

এখন আমরা 2.4(ক)-(ঘ) সমীকরণগুলির সরলীকৃত রূপগুলি লিখতে পারি :

$$\begin{aligned} x' &= A_1 x - A_1 \upsilon t \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= D_1 x + D_4 t \end{aligned} \qquad (2.5)$$

2.5 সমীকরণগুলিতে মোট তিনটি অজ্ঞাত রাশি আছে—A_1, D_1 ও D_4। এখন আমরা বিভিন্ন জড়ত্বীয় ফ্রেমে শূন্যে আলোর বেগের সমতার নীতিটি ব্যবহার করব। 2.2 সমীকরণে 2.5 সমীকরণের স্থানাঙ্ক পরিবর্তনটি বসিয়ে পাওয়া যায় :

$$(A_1 x - A_1 \upsilon t)^2 + y^2 + z^2 - c^2(D_1 x + D_4 t^2) = 0$$

বা, $$(A_1{}^2 - c^2 D_1^2)x^2 + y^2 + z^2 + (A_1^2 \upsilon^2 - c^2 D_4^2)t^2 - (2A_1{}^2\upsilon + 2c^2 D_1 D_4)xt = 0$$

এই সমীকরণটির সঙ্গে 2.1 সমীকরণের সরাসরি তুলনা করে পাওয়া যায় :

$$\begin{aligned} A_1^2 - c^2 D_1^2 &= 1 \\ A_1^2 \upsilon^2 - c^2 D_4^2 &= -c^2 \\ A_1^2 \upsilon + c^2 D_1 D_4 &= 0 \end{aligned}$$

উপরের তিনটি সমীকরণের সাহায্যে তিনটি অজ্ঞাত রাশির মান নির্ণয় করা যেতে পারে। প্রথম ও দ্বিতীয় সমীকরণ থেকে যথাক্রমে $c^2D_1^2 = A_1^2 - 1, c^2D_4^2 = A_1^2\upsilon^2 + c^2$,

দুটিকে গুণ করে, $c^4D_1^2D_4^2 = (A_1^2 - 1)(A_1^2\upsilon^2 + c^2)$

তৃতীয় সমীকরণ থেকে $c^2D_1D_4 = A_1^2\upsilon$, বা, $c^4D_1{}^2D_4^2 = A_1^4\upsilon^2$

$\therefore$ $c^4D_1^2D_4^2$ রাশির দুই মান থেকে $(A_1^2 - 1)(A_1^2\upsilon^2 + c^2) = A_1^4\upsilon^2$

সরল করে $A_1 = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, যেখানে $\beta = \dfrac{\upsilon}{c}$ ।

2.6 সমীকরণগুলির দ্বিতীয়টি থেকে,

$$c^2D_4^2 = A_1^2\upsilon^2 + c^2 = \frac{\upsilon^2}{1-\beta^2} + c^2 = \frac{c^2}{1-\beta^2} \quad \text{বা,} \quad D_4 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

2.6 সমীকরণগুলির তৃতীয়টি থেকে, $D_1 = -\dfrac{A_1^2\upsilon}{c^2D_4} = -\dfrac{\upsilon/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$

2.5 সমীকরণগুলিকে এখন লেখা যেতে পারে ঃ $x' = A_1(x - \upsilon t) = \dfrac{x - \upsilon t}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = \frac{-\upsilon/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}.x + \frac{t}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{t - \upsilon x/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

উপরের সমীকরণগুলিকে লরেন্‌ৎসীয় পরিবর্তন সমীকরণ বলা হয়। S ফ্রেমটি যেহেতু S′ ফ্রেমের সাপেক্ষে $-\upsilon$ বেগে গতিশীল, উপরের সমীকরণগুলিতে υ-এর স্থলে $-\upsilon$ লিখে বিপরীত পরিবর্তন সমীকরণগুলি পাওয়া যায়। নীচে লরেন্‌ৎসীয় সমীকরণগুলিকে সারণিবদ্ধভাবে লেখা হল। এখানে $\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ রাশিটিকে γ চিহ্ন দিয়ে নির্দেশ করা হয়েছে।

$x' = \gamma(x - \upsilon t)$	$x = \gamma(x' + \upsilon t')$	
$y' = y$	$y = y'$	(2.7)
$z' = z$	$z = z'$	
$t' = \gamma(t - \frac{\upsilon x}{c^2})$	$t = \gamma(t' + \frac{\upsilon x'}{c^2})$	

একটি উদাহরণ থেকে আপনি সমীকরণগুলির ব্যবহার বুঝতে পারবেন।

উদাহরণ ঃ একটি ট্রেন 1.8×10^5 km/s বেগে যখন একটি স্টেশন পার হল তখন ট্রেনের ড্রাইভার ও প্ল্যাটফর্মে দাঁড়ানো স্টেশনমাস্টার, উভয়ের ঘড়িতে সময় বেলা 12টা। ড্রাইভার তাঁর ঘড়ির 10 s সময়ে একটি বিস্ফোরণ ঘটালেন। স্টেশনমাস্টারের কাছে ঐ বিস্ফোরণ কখন এবং কোথায় ঘটেছিল বলে মনে হবে ?

এক্ষেত্রে S ফ্রেমটি প্ল্যাটফর্মের ও S′ ফ্রেমটি ট্রেনের সংলগ্ন বলে ধরা যাক। বিস্ফোরণটির $x' = 0$, $t' = 10$ s এবং $\beta = \frac{1.8 \times 10^5}{3.0 \times 10^5} = 0.6, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - .36}} = \frac{1}{0.8} = 1.25$ ।

$$\therefore \quad x = \gamma(x' + \upsilon t') = 1.25(0 + 1.8 \times 10^5 \times 10) = 2.25 \times 10^6 \text{ km}$$

$$\text{এবং } t = \gamma\left(t + \frac{\upsilon x'}{c^2}\right) = 1.25(10 + 0) = 12.5\text{s}$$

সুতরাং স্টেশন মাস্টারের কাছে বিস্ফোরণটি 2.25×10^6 km দূরে, 1.25s সময়ে ঘটেছে বলে মনে হবে।

এবার আপনি একটি অনুশীলনীর সমাধান করুন।

অনুশীলনী 1. লরেন্‌ৎসীয় সমীকরণ ব্যবহার করে দেখান যে 2.1 ও 2.2 সমীকরণ দুটির একটি পালিত হলে অন্যটিও প্রতিপালিত হবে।

2.4 লরেন্‌ৎসীয় পরিবর্তন প্রয়োগ

দুটি জড়ত্বীয় ফ্রেমের একটি যখন অপর একটির সাপেক্ষে শূন্যে আলোকের বেগের তুলনায় ক্ষুদ্র বেগে গতিশীল থাকে, তখন দুই ফ্রেমে স্থান কালের পরিমাপে কোনো পার্থক্য থাকে না। অর্থাৎ চলমান ট্রেনের একটি কামরার দৈর্ঘ্য কামরায় উপবিষ্ট যাত্রী এবং প্ল্যাটফর্মে দণ্ডায়মান ব্যক্তি — উভয়ের কাছেই সমান হবে যতক্ষণ ট্রেনের বেগ $\upsilon << c$। আবার চলমান কামরায় যদি স্প্রিং দিয়ে ঝোলানো একটি ভর এক সেকেন্ড পর্যায়কালে ওঠানামা করে তবে প্ল্যাটফর্মে দাঁড়ানো ব্যক্তির কাছেও তখন পর্যায়কাল এক সেকেন্ড বলেই মনে হবে। ট্রেনের বেগ c-এর সঙ্গে তুলনীয় হলে বেগের সমান্তরাল দৈর্ঘ্য এবং সময়ের অন্তরালের পরিমাপ দুই জড়ত্বীয় ফ্রেমে এক থাকে না। এই অংশে আমরা লরেন্‌ৎসীয় সমীকরণগুলি ব্যবহার করে দুই জড়ত্বীয় ফ্রেমে দৈর্ঘ্য ও সময়ের অন্তরালের পরিমাপের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করব।

2.4.1 দৈর্ঘ্যের লরেন্‌ৎসীয় সংকোচন (Lorentz Contraction) ঃ

ধরে নিন l_0 দৈর্ঘ্যের একটি দণ্ড S′ ফ্রেমে x′ অক্ষের সমান্তরালে স্থিরভাবে রাখা আছে। দণ্ডটির দুই প্রান্তের x-স্থানাঙ্ক যদি x_1' ও x_2' হয় তবে $l_0 = x_2' - x_1'$। S নির্দেশতন্ত্রে স্থির আছেন, এমন কোনো

পর্যবেক্ষক যদি দণ্ডটির দৈর্ঘ্য মাপতে চান তবে তাঁকে একই সময়ে S ফ্রেমে দণ্ডটির দুই প্রান্তের x-স্থানাঙ্ক, অর্থাৎ x_1 ও x_2 মাপতে হবে। তিনি যদি $t = t_0$ সময়ে এই পরিমাপ করেন তবে লরেন্‌ৎসীয় সমীকরণ ব্যবহার করে লেখা যায়,

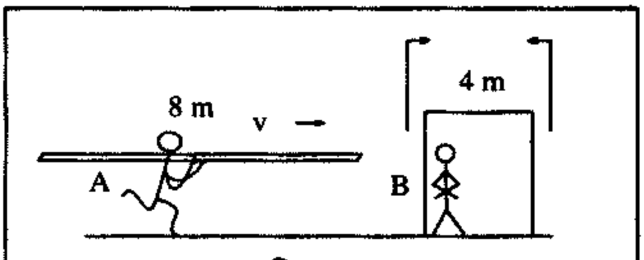
$$x_1' = \gamma (x_1 - \upsilon t_0)$$

$$\text{ও} \quad x_2' = \gamma (x_2 - \upsilon t_0)$$

$\therefore$ দ্বিতীয়টি থেকে প্রথমটি বিয়োগ করে, $x_2' - x_1' = \gamma (x_2 - x_1)$

কিন্তু $x_2 - x_1 =$ S ফ্রেমে পরিমাপ করা দণ্ডের দৈর্ঘ্য, l।

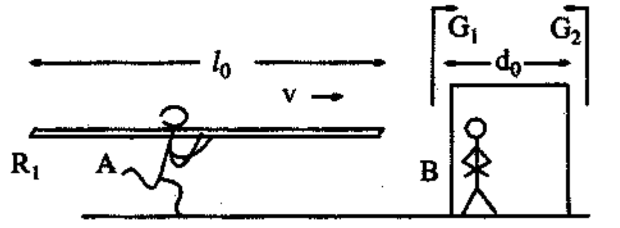
সুতরাং $l_0 = \gamma l$ বা, $l = \frac{l_0}{\gamma}$ 2.8



চিত্র 2.2

যেহেতু $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, এর মান 1-এর চেয়ে বড়ো এবং $l < l_0$। সুতরাং S ফ্রেমে দণ্ডটির দৈর্ঘ্য, দণ্ডটির সাপেক্ষে স্থির পর্যবেক্ষক যে প্রকৃত দৈর্ঘ্য লক্ষ করবেন তার চেয়ে কম (চিত্র 2.2)। প্রকৃত দৈর্ঘ্যের তুলনায় আপাত দৈর্ঘ্যের এই হ্রাসকেই লরেন্‌ৎসীয় দৈর্ঘ্য সংকোচন বলা হয়।

আপনি নিশ্চয়ই বুঝতে পেরেছেন যে দণ্ডটি যদি x অক্ষের সঙ্গে সমকোণে রাখা থাকত তবে কোনো দৈর্ঘ্য সংকোচন ঘটত না। আবার সেটি যদি x অক্ষের সঙ্গে α কোণে অবনত থাকত তাহলে তার দৈর্ঘ্যের x-উপাংশ, অর্থাৎ $l_0 \cos \alpha$, S ফ্রেমের পর্যবেক্ষকের কাছে সংকুচিত হয়ে $l_0 \cos \alpha/\gamma$ বলে মনে হত যদিও x অক্ষের লম্বমুখে উপাংশ $l_0 \sin \alpha$-এর কোনো সংকোচন হত না [চিত্র 2.3]।



চিত্র 2.3

2.4.2 সময়ের দীর্ঘায়ন (Time Dilation)

এবার আমরা দেখব দৈর্ঘ্যের পরিমাপের মতো সময়ের অন্তরালের পরিমাপও বিভিন্ন জড়ত্বীয় ফ্রেমে স্থির রয়েছেন এমন পর্যবেক্ষকদের কাছে ভিন্ন হয় কিনা।

ধরা যাক S' ফ্রেমে একটি ঘড়ি রয়েছে যা নির্দিষ্ট সময় অন্তর একটি করে আলোর ঝলক বার হয়। যে পর্যবেক্ষক S' ফ্রেমে স্থির আছেন তিনি পর পর দুটি ঝলক t_1' ও t_2' সময়ে দেখলেন এবং তাঁর কাছে দুটি ঝলকের মধ্যে সময়ের অন্তরাল $t_2' - t_1' = \Delta t_0$, ধরুন।

এবার দেখা যাক, S ফ্রেমের পর্যবেক্ষক সময়ের ওই অন্তরাল কত দীর্ঘ বলে মনে করবেন। ধরুন ঘড়িটি S' ফ্রেমে সব সময়েই $x' = x_0'$ স্থানাঙ্কে রয়েছে। S ফ্রেমে স্থির থাকা পর্যবেক্ষক যদি যথাক্রমে t_1 ও t_2 সময়ে ঝলক দুটি লক্ষ করেন তবে লরেন্ৎসীয় পরিবর্তন সূত্র ব্যবহার করে :

$$t_1 = \gamma\,(t_1' + \upsilon x_0'/c^2)$$
$$t_2 = \gamma\,(t_2' + \upsilon x_0'/c^2)$$

অর্থাৎ ঐ পর্যবেক্ষকের কাছে দুই ঝলকের মধ্যে সময়ের অন্তরাল

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma\,(t_2' - t_1') = \gamma\,\Delta t_0 \qquad (2.9)$$

যেহেতু $\gamma > 1$, S ফ্রেমের পর্যবেক্ষকের কাছে সময়ের অন্তরালটি γ-গুণ দীর্ঘায়িত হয়েছে বলে মনে হবে। Δt_0 যদি এক সেকেন্ড হয় তবে তিনি মনে করবেন আলোর ঝলকগুলি γ সেকেন্ড অন্তর বার হচ্ছে, অর্থাৎ তাঁর সাপেক্ষে গতিশীল ঘড়িটি স্লো যাচ্ছে।

এবার আমরা একটি বাস্তব উদাহরণ সম্পর্কে আলোচনা করব, যা আপনাকে সময়ের দীর্ঘায়ন ও দৈর্ঘ্যের সংকোচন বিষয়গুলি বুঝতে সাহায্য করবে।

উদাহরণ :

পৃথিবীর বাতাবরণের উর্ধ্বস্তরে কসমিক রশ্মির বিক্রিয়ার ফলে যে μ (মিউ)-কণার সৃষ্টি হয় তার প্রকৃত গড় আয়ু (অর্থাৎ গবেষণাগারে স্থির অবস্থায় থাকলে যে গড় আয়ু পরিদৃষ্ট হয়, 2.3×10^{-6} s। μ-কণাগুলির নিম্নমুখী বেগ যদি 0.99 c হয় তবে সেগুলির কত শতাংশ 10,000 m দূরত্ব অতিক্রম করে সমুদ্রতলের সমান উচ্চতায় এসে পৌঁছোবে ?

আমরা দুভাবে অবস্থাটির বিশ্লেষণ করতে পারি।

1. পৃথিবীতে স্থির পর্যবেক্ষকের দৃষ্টিভঙ্গী থেকে :

এক্ষেত্রে μ-কণার $\beta = 0.99, \gamma = (1 - 0.99^2)^{-1/2} = 7.09$

$\therefore$ সময়ের দীর্ঘায়নের ফলে μ-কণাগুলির আপাত গড়-আয়ু $\tau = 7.09 \times 2.3 \times 10^{-6}$ s

10,000 m দূরত্ব অতিক্রম করতে সময় লাগে $\dfrac{10{,}000}{0.99 \times 3 \times 10^8} = 3.367 \times 10^{-5}$ s

সুতরাং μ কণার যে অংশ ঐ দূরত্ব অতিক্রম করে সমুদ্রতলের উচ্চতায় পৌঁছোবে সেটি হল exp-$(3.367 \times 10^{-5} / 1.63 \times 10^{-5}) = 0.126.$ বা, 12.6 শতাংশ।

2. μ কণার সঙ্গে গতিশীল পর্যবেক্ষকের দৃষ্টিভঙ্গী থেকে :

এই পর্যবেক্ষকের কাছে 10,000 m দূরত্ব দৈর্ঘ্য সংকোচনের ফলে $1000/\gamma = 1000/7.09$ বা 1411 মিটার মনে হবে। μ কণার 1411 m অতিক্রম করতে $1411\text{m}/.99 \times 3 \times 10^8$ বা, 4.75×10^{-6} s সময় লাগবে। সময়ের এই অন্তরালের পর μ-কণাগুলির যে অংশ অবশিষ্ট থাকবে তা হল—

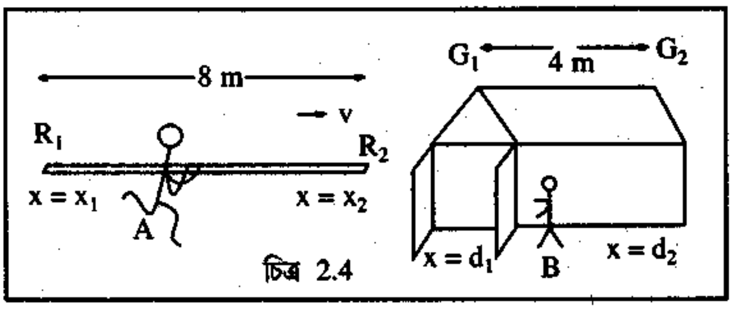
$$\exp - (4.75 \times 10^{-6} / 2.3 \times 10^{-6}) = 0.126 \quad \text{বা,} \quad 12.6 \text{ শতাংশ।}$$

অনুশীলনী 2

(ক) একটি মিটার স্কেলের দৈর্ঘ্য কোনও একটি গতিশীল নির্দেশতন্ত্রে 50 cm হতে দেখা গেল। ঐ নির্দেশতন্ত্রের বেগ স্কেলটির সাপেক্ষে কত ছিল?

(খ) 40 m দীর্ঘ একটি সুপারসনিক বিমান পৃথিবীর সাপেক্ষে 600 m/s বেগে উড়ে যাচ্ছে। পৃথিবীর উপর স্থির এমন পর্যবেক্ষকের কাছে বিমানটির দৈর্ঘ্য প্রকৃত দৈর্ঘ্য অপেক্ষা কতটা ছোটো বলে মনে হবে? পৃথিবীর ঘড়ির তুলনায় বিমানের ঘড়ি 1 μs পেছিয়ে পড়তে কত সময় লাগবে?

(গ) 4 m লম্বা একটি চালাঘরের দুই প্রান্তের দরজা তোলা আছে। এক ব্যক্তি (A) 8 m লম্বা একটি দণ্ড অনুভূমিকভাবে তার গতির দিক বরাবর ধরে নীচে এত বেশি বেগে ঐ চালাঘরের মধ্য দিয়ে দৌড়ে যাচ্ছেন যে দণ্ডটির দৈর্ঘ্য লরেন্‌ৎসীয় সংকোচনের ফলে চালাঘরের পাশে দাঁড়ানো ব্যক্তি B-এর কাছে 4 m মনে হচ্ছে। B কি চালাঘরের দুই দরজা নামিয়ে বন্ধ করে A-কে দণ্ডসমেত চালাঘরের মধ্যে আটকে ফেলতে পারবেন? (চিত্র 2.4)



চিত্র 2.4

(ঘ) লরেন্‌ৎসীয় পরিবর্তন সূত্রগুলি প্রতিষ্ঠা করতে গিয়ে আমরা A_1-এর নেগেটিভ মান অর্থাৎ $\left(-1/\sqrt{1-\beta^2}\right)$-কে বর্জন করেছি। এর কারণ কী?

2.5 আপেক্ষিকতার বিশেষ তত্ত্বের আলোকে মাইকেলসন-মর্লি পরীক্ষা

এই পাঠক্রমের প্রথম এককে আপনি মাইকেলসন-মর্লি পরীক্ষা সম্বন্ধে পড়েছেন। আপনি দেখেছেন যে ইথার নামে আলোর এক মাধ্যম কল্পনা করে ঐ পরীক্ষার যে ফল আশা করা গিয়েছিল, বাস্তবে তা

দেখা যায়নি। দেখা যাক, আপেক্ষিকতার বিশেষ তত্ত্ব অনুযায়ী আমরা ঐ পরীক্ষার কী ফল আশা করি।

আমরা জেনেছি, যে কোনো জড়ত্বীয় ফ্রেমে আলোর বেগ শূন্য মাধ্যমে সব দিকেই c-এর সমান। সুতরাং গবেষণাগারের ফ্রেমে আলোর রশ্মি বিভাজক থেকে দুই দর্পণে যেতে ও ফিরে আসতে যথাক্রমে $\frac{2l_1}{c}$ ও $\frac{2l_2}{c}$ সময় লাগবে, যেখানে l_1 ও l_2 যথাক্রমে রশ্মিবিভাজক থেকে প্রথম ও দ্বিতীয় দর্পণের দূরত্ব। এই সময়ের পার্থক্য সর্বদাই $\frac{2}{c}(l_1 - l_2)$ হবে, যার ফলে ব্যতিচার পটির কোনো সরণ ঘটবে না।

অপরপক্ষে, যদি এমন কোনো পর্যবেক্ষক পরীক্ষাটি লক্ষ করেন যিনি সূর্যের সাপেক্ষে স্থির আছেন এবং যাঁর নির্দেশতন্ত্র পৃথিবী তথা ইন্টারফেরোমিটারটি υ বেগে ধাবমান, তবে তাঁর কাছে ইন্টারফেরোমিটারের বেগের সমান্তরাল বাহুটি γ অনুপাতে সংকুচিত মনে হবে। ফলে তিনিও মাইকেলসন-মর্লি পরীক্ষায় কোনো পটির সরণ লক্ষ করবেন না।

2.6 দুই যমজের রহস্য

এবার আমরা সময়ের দীর্ঘায়নের ফলে সৃষ্ট একটি আপাত রহস্যের বিষয়ে আলোচনা করব। আমরা সকলেই জানি, দুই যমজের বয়স সর্বদাই এক থাকে। কিন্তু কল্পনা করুন, দুই যমজ ভাই-এর একজন, যার নাম মধু সে রইল পৃথিবীতে আর অন্যজন, যার নাম রতন, সে রকেটে চলে গেল মহাকাশ ভ্রমণে। রকেট মধুর হিসাবে দশ বছর 0.8 c বেগে সরলরেখায় চলে, তাপপর বেগের দিক বিপরীত করে আরও দশ বছর পরে পৃথিবীতে এসে পৌঁছোল। মধুর বয়স ইতিমধ্যে কুড়ি বছর বেড়ে গিয়েছে। কিন্তু রকেটের ঘড়ি সময়ের দীর্ঘায়নের ফলে ধীরে চলেছে। পৃথিবীর ঘড়িতে কুড়ি বছর কেটে গেলেও রকেটের ঘড়িতে সময়ের অন্তরাল 2.9 সমীকরণ অনুযায়ী, যেহেতু $\frac{\upsilon}{c} = 0.8$।

$$\Delta t_0 = \Delta t/\gamma = \Delta t\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} = 20\sqrt{1-0.64} = 12 \text{ বছর।}$$

সুতরাং ঐ সময়ে রতনের বয়স বেড়েছে 12 বছর। অর্থাৎ দুই যমজের একজন অন্যজনের চেয়ে আট বছরের ছোটো রয়ে গেছে।

রহস্যের এখানেই শেষ নয়। রতনের দৃষ্টিকোণ থেকে দেখলে পৃথিবীবাসী মধু তার কাছ থেকে তার হিসাবে দশ বছর ধরে 0.8c বেগে বিপরীত দিকে গেছে এবং তার পর বেগ বিপরীত করে আরও দশ বছর পরে তার রকেটে ফিরে এসেছে। সুতরাং রতনের বয়স যখন কুড়ি বছর বেড়েছে তখন মধুর বয়স 12 বছর বেড়ে থাকা উচিত। আগের সিদ্ধান্তের সঙ্গে এই সিদ্ধান্তের গরমিল অত্যন্ত স্পষ্ট।

এই রহস্যের উৎপত্তির কারণ এই যে আমরা পৃথিবীর নির্দেশতন্ত্র আর রকেটের সাপেক্ষে স্থির নির্দেশতন্ত্রকে সমতুল্য ধরে নিয়েছি। পৃথিবীর নির্দেশতন্ত্র মোটামুটিভাবে জড়ত্বীয়। কিন্তু রকেটকে শূন্য বেগ থেকে ত্বরিত হয়ে 0.8c বেগে পৌঁছোতে হয়েছে, তার বেগ মন্দিত হয়ে শূন্য এবং তারপর বিপরীত দিকে ত্বরণ ঘটার ফলে – 0.8c হয়েছে, অবশেষে পৃথিবীতে অবতরণ করার আগে আবার মন্দিত হয়ে রকেটের বেগ শূন্য হয়েছে। সুতরাং রকেটের সাপেক্ষে স্থির নির্দেশতন্ত্রকে মোটেই জড়ত্বীয় বলা যায় না। রকেট ও পৃথিবীর পারস্পরিক আপেক্ষিক বেগের যে প্রতিসাম্য আমরা ধরে নিয়েছি তাও সঠিক নয়।

তবে মধুর বয়সের তুলনায় রতনের বয়সের বৃদ্ধি কম হওয়া অপ্রত্যাশিত নয়। 2.4.2 অংশে আলোচিত উদাহরণে আমরা μ-কণার গড় আয়ুর বৃদ্ধির পরিচয় পেয়েছি। গবেষণাগারে স্বল্পস্থায়ী মৌল কণার গতিবিধি সংক্রান্ত পরীক্ষায় সর্বদাই সেগুলির গড় আয়ু বেগের সঙ্গে বৃদ্ধি পেতে দেখা যায়।

2.7 সারাংশ

এই এককটিতে আপেক্ষিকতার মৌলিক অঙ্গীকারগুলির উপর ভিত্তি করে লরেন্‌ৎসীয় পরিবর্তন সূত্রগুলি প্রতিষ্ঠিত করা হয়েছে। এই মৌলিক অঙ্গীকারগুলি হল সব জড়ত্বীয় ফ্রেমে পদার্থবিজ্ঞানের সব নিয়মের সমান প্রযোজ্যতা এবং শূন্যে আলোকের বেগের সমতা। লরেন্‌ৎসীয় পরিবর্তন সূত্রগুলি ব্যবহার করে আমরা লরেন্‌ৎসীয় দৈর্ঘ্য সংকোচন ও সময়ের দীর্ঘায়ন সূত্রগুলিও নির্ণয় করেছি। এগুলির সাহায্যে মাইকেলসন-মর্লি পরীক্ষার ফলের ব্যাখ্যা করা হয়েছে। সময়ের দীর্ঘায়নের সঙ্গে সংশ্লিষ্ট 'দুই যমজের রহস্য'টিও বিবৃত করা হয়েছে এবং সেটির প্রকৃত ব্যাখ্যা আলোচিত হয়েছে।

2.8 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

(ক) আপেক্ষিকতার বিশেষ তত্ত্বের মূল অঙ্গীকারগুলি লিখুন। বিভিন্ন স্থানে সংঘটিত দুটি ঘটনা কোনো এক জড়ত্বীয় ফ্রেমে সমকালীন বলে মনে হলেও অন্য একটি জড়ত্বীয় ফ্রেমে সেগুলি সমকালীন নাও হতে পারে—উক্তিটি ব্যাখ্যা করুন।

(খ) লরেন্‌ৎসের নির্দেশতন্ত্র পরিবর্তনের সূত্রগুলি প্রতিষ্ঠিত করুন। দেখান যে যখন $\upsilon << c$, তখন সূত্রগুলি গ্যালিলিয়ো পরিবর্তনের সূত্রে পরিণত হয়।

(গ) দৈর্ঘ্যের লরেন্‌ৎসীয় সংকোচন ও সময়ের দীর্ঘায়ন বলতে কী বোঝায়? স্থির পর্যবেক্ষকের কাছে $\frac{c}{2}$ বেগে চলমান একটি 1 cm ব্যাসার্ধের গোলকের আয়তন কত মনে হবে?

2.9 উত্তরমালা

অনুশীলনী 1

ধরে নিন 2.2 সমীকরণটি প্রতিপালিত হয়, অর্থাৎ

$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0$ । 2.7 সমীকরণগুলি থেকে x', y', z' ও t'-এর মানগুলি বসিয়ে পাওয়া যায় ঃ

$$\gamma^2(x - \upsilon t)^2 + y^2 + z^2 - c^2\gamma^2(t - \upsilon x/c^2)^2 = 0$$

$$\text{বা,}\quad \gamma^2x^2\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right) + y^2 + z^2 - \gamma^2t^2(c^2 - \upsilon^2) + 2\upsilon\gamma^2 . xt(-1 + 1) = 0$$

$$\text{বা,}\quad x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0. \qquad [\because \gamma^2 = \left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{-1}]$$

অনুশীলনী 2

(ক) 2.8 সূত্র থেকে $50 \text{ cm} = \frac{L_0}{\gamma} = \frac{1}{\gamma}\text{m}$ অর্থাৎ $\gamma = \frac{1 \text{ m}}{50 \text{ cm}} = 2$

সুতরাং $1 - \frac{\upsilon^2}{c^2} = \gamma^{-2} = \frac{1}{4}$, বা, $\upsilon^2 = \frac{3}{4}c^2$ বা, $\upsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}c.$

(খ) এক্ষেত্রে $\beta = \frac{600 \text{ m/s}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 2 \times 10^{-6}, \gamma^{-1} = (1 - \beta^2)^{+1/2} = 1 - \frac{1}{2}\beta^2$ ও $\gamma = 1 + \frac{1}{2}\beta^2$

$$\therefore \text{ বিমানটির দৈর্ঘ্য সংকোচন } = l_0 - \frac{l_0}{\gamma} = l_0 . \frac{1}{2}\beta^2$$

$$= 40 \text{ m} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 10^{-12}$$

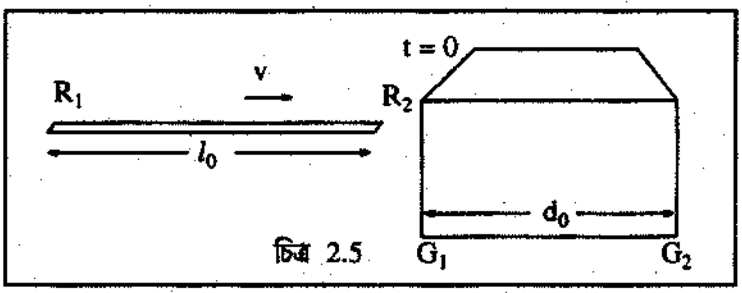
$$= 8 \times 10^{-11} \text{ m} \quad \text{বা,} \quad .08 \text{ nm}$$

বিমানের ঘড়ি প্রতি সেকেন্ডে $(\gamma - 1)$ সেকেন্ড পেছিয়ে পড়বে। সুতরাং 1 μs পেছিয়ে পড়তে সময় লাগবে $\frac{1}{\gamma - 1}$ সেকেন্ড।

কিন্তু $\frac{1}{\gamma - 1} = 2\beta^{-2} = 2(2 \times 10^{-6})^{-2} = 5 \times 10^{11}\text{s} = 3.8 \times 10^6\gamma$

এই উদাহরণটি থেকে আপনি নিশ্চয়ই বুঝতে পারছেন যে আমাদের দৈনন্দিন অভিজ্ঞতায় আপেক্ষিকতাবাদী দৈর্ঘ্য সংকোচন বা সময়-দীর্ঘায়নের কোনো প্রভাব থাকে না।

(গ) ঘটনাটিকে B পর্যবেক্ষকের ফ্রেমে দেখা যাক। ধরে নিন চালাঘরের দৈর্ঘ্য $G_1G_2 = d_0$, দণ্ডের প্রকৃত দৈর্ঘ্য $R_1R_2 = l_0$, ও দণ্ডের বেগ υ। দণ্ডের R_2 প্রান্ত যখন চালাঘরের G_1 দরজায়, তখন B পর্যবেক্ষকের ঘড়িতে সময় $t = 0$ এবং তার ফ্রেমে দণ্ডের আপাত দৈর্ঘ্য l_0/γ, যেখানে $\gamma = \left(1-\beta^2\right)^{-\frac{1}{2}}$। সুতরাং দণ্ডের R_1 প্রান্তটি G_1 দরজায় পৌঁছোনোর সময়।



চিত্র 2.5

G_1-এর পাশে দাঁড়ানো পর্যবেক্ষক R_1 প্রান্তটি G_1 দরজায় পৌঁছোনোমাত্র G_2 দরজায় আলোক সংকেত পাঠালেন যাতে G_2 দরজাটি বন্ধ হয়। এই সংকেত G_2-তে পৌঁছোতে সময় লাগবে $\frac{d_0}{c}$। সুতরাং G_2 দরজা বন্ধ হবে $t_1 = \frac{l_0}{\gamma\upsilon} + \frac{d_0}{c}$ সময়ে।

কিন্তু দণ্ডের R_2 প্রান্তটি G_2 দরজায় পৌঁছোবে $t_2 = \frac{d_0}{\upsilon}$ সময়ে। যেহেতু G_2 দরজা এই সময়ের আগেই বন্ধ হতে হবে, অতএব দণ্ডটিকে চালাঘরের মধ্যে আটকে ফেলার শর্ত $t_1 < t_2$, অর্থাৎ $\frac{l_0}{\gamma\upsilon} + \frac{d_0}{c} < \frac{d_0}{\upsilon}$,

বা, $l_0 < \gamma\upsilon\left(\frac{d_0}{\upsilon} - \frac{d_0}{c}\right)$

$$\text{কিন্তু } \gamma\upsilon\left(\frac{d_0}{\upsilon} - \frac{d_0}{c}\right) = \gamma\, d_0\left(1-\frac{\upsilon}{c}\right) = d_0\frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = d_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \qquad \text{(চিত্র 2.3)}$$

$$\therefore \text{ নির্ণেয় শর্তটি হল } l_0 < d_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\text{ ।}$$

$$\text{প্রশ্ন অনুযায়ী } \gamma = \frac{8}{4} = 2, \text{ বা, } \quad \beta = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = 0.268$$

$\therefore$ দণ্ডটিকে আটকানোর শর্ত $l_0 < 0.268\, d_0$।

$l_0 = 8$ m, $d_0 = \Delta$m হলে এই শর্ত পালিত হয় না। সুতরাং দণ্ডটিকে চালাঘরের মধ্যে আটকানো যাবে না।

ঘটনাটিকে A পর্যবেক্ষকের ফ্রেমে দেখলে আরও সহজে এই সিদ্ধান্তে আসা যাবে।

A পর্যবেক্ষকের ফ্রেমে চালাঘরের দৈর্ঘ্য সংকোচনের ফলে 2m মনে হবে। 8 m লম্বা দণ্ডটিকে তার মধ্যে আটকানো সম্ভব নয়।

(ঘ) $\upsilon << c$ হলে লরেন্‌ৎসীয় পরিবর্তন সূত্রগুলি গ্যালিলিয়ো পরিবর্তন সূত্রে পরিণত হওয়া উচিত। A_1-এর নেগেটিভ মান নিলে 2.5-এর প্রথম সূত্রটি $x' = -x + \upsilon t$ রূপ গ্রহণ করবে, যা গ্রহণযোগ্য নয়। এজন্যই A_1-এর নেগেটিভ মানটি বর্জন করা হয়েছে।

সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

(ক) 2.2 অংশে এই প্রশ্নের উত্তর আলোচিত হয়েছে।

(খ) প্রথম অংশের উত্তর 2.3 অংশে পাওয়া যাবে।

দ্বিতীয় অংশের উত্তরের জন্য যখন $\upsilon << c$ বা $\beta << 1$, তখন $\gamma \to 1$ ধরা যেতে পারে। এবার আপনি নিজেই প্রশ্নটির উত্তর দিন।

(গ) প্রথম অংশের উত্তরের জন্য 2.4.1 ও 2.4.2 অংশগুলি দেখুন। দ্বিতীয় অংশের জন্য লক্ষ করুন, গোলকটির ব্যাস গতির সমান্তরাল দিকে দৈর্ঘ্য সংকোচনের ফলে $\frac{1}{\gamma}$ cm মনে হবে।

যেখানে $\gamma = (1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}, \beta = \frac{1}{2}$ বা $\gamma = 0.866$।

সুতরাং গোলকের আয়তন হবে $\frac{4}{3}\pi . 1 . 1 . 0.866 = 3.63 \text{ cm}^3$।

একক 3 ❑ আপেক্ষকীয় সৃতিবিদ্যা

গঠন

3.1 প্রস্তাবনা ও উদ্দেশ্য

3.2 বেগ সংযোজন সূত্র

3.3 গতিশীল মাধ্যমে আলোকের বেগের পরিবর্তন

3.4 শব্দ ও আলোকের ডপলার ক্রিয়া

3.4.1 শব্দের ডপলার ক্রিয়া

3.4.2 শব্দ ও আলোকের ডপলার ক্রিয়ার পার্থক্য

3.4.3 আলোকের ডপলার ক্রিয়ার সনাতন সমীকরণ

3.4.4 আলোকের ডপলার ক্রিয়ার আপেক্ষিকীয় সমীকরণ

3.5 বিশেষ আপেক্ষিকতা তত্ত্বদ্বারা ডপলার ক্রিয়া ও অপেরণের সাধারণ সূত্র

3.5.1 ডপলার ক্রিয়ার সাধারণ সমীকরণ

3.5.2 আলোকের অপেরণের সাধারণ সমীকরণ

3.6 সারাংশ

3.7 প্রশ্নাবলী

3.7.1 সংক্ষিপ্ত উত্তরের প্রশ্নাবলি

3.7.2 বিস্তৃত উত্তরের প্রশ্নাবলি

3.8 প্রশ্নাবলীর উত্তর ও উত্তরের ইঙ্গিত

3.1 প্রস্তাবনা ও উদ্দেশ্য

পূর্ব এককে আপনি আইনস্টাইনের আপেক্ষিকতার সূত্র এবং লরেন্টজীর রূপান্তর বিষয়ে অধ্যয়ন করেছেন। এই এককে বেগের যোগ, তারার অপেরণ, ডপলার ক্রিয়া প্রভৃতি সনাতন সৃতিবিদ্যার বিভিন্ন সমীকরণগুলির ক্ষেত্রে লরেন্টজীয় রূপান্তর প্রয়োগ করলে যে পরিবর্তন ঘটে, সে বিষয়ে আলোচনা করা হবে।

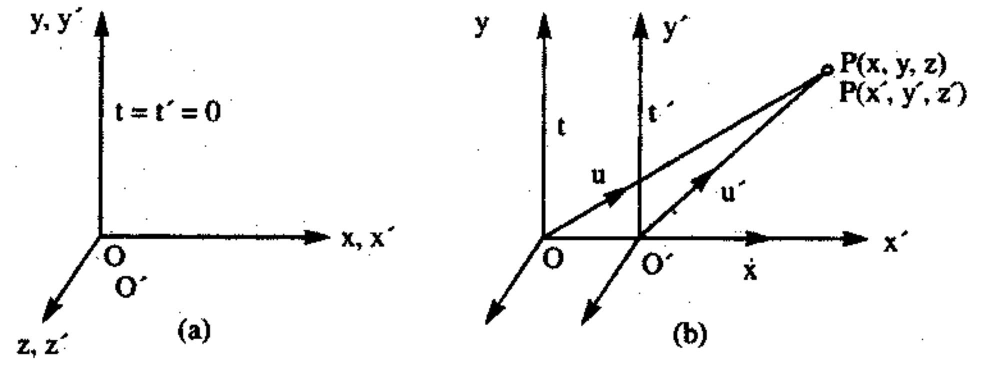
এই এককটি পাঠ করলে আপনি

- আপেক্ষিক বেগের আপেক্ষিকীয় সমীকরণ প্রতিষ্ঠা করতে পারবেন।

- লরেন্টজীয় রূপান্তর দ্বারা তারার অপেরণের সনাতন সমীকরণের সংশোধন করতে পারবেন।
- লরেন্টজীয় রূপান্তর দ্বারা ডপলার ক্রিয়ার সনাতন সমীকরণের সংশোধন করতে পারবেন।

3.2 বেগ সংযোজন সূত্র (Law of Addition of Velocities)

ধরা যাক, S (x, y, z) কার্টেজীয় নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে S′ (x′, y′, z′) কার্টেজীয় নির্দেশতন্ত্রটি x অক্ষ অভিমুখে v বেগে চলছে (চিত্র: 3.1)। ধরা যাক, $t = t' = 0$ সময়ে S′ নির্দেশতন্ত্রটি S নির্দেশতন্ত্রকে অতিক্রম করে এবং সেই মুহূর্তে নির্দেশতন্ত্র দুটির x-অক্ষ x′-অক্ষের সঙ্গে, y-অক্ষ y′ অক্ষের সঙ্গে, z-অক্ষ z′-অক্ষের সঙ্গে এবং O-মূলবিন্দু O′-মূলবিন্দুর সঙ্গে সম্পূর্ণ মিশে যায় (অর্থাৎ ঐ মুহূর্তে নির্দেশতন্ত্রদুটির পরস্পরের উপর উপরিপাতন ঘটে।



চিত্র 3.1 বেগের সংযোজন

ধরা যাক, যে মুহূর্তে S ও S′ মিলিত হয়, সেই মুহূর্তে O বিন্দুর সাপেক্ষে স্থির একজন নিরীক্ষক O বিন্দু থেকে u বেগে একটি বস্তু নিক্ষেপ করে এবং তা নিরীক্ষকের ঘড়ি অনুযায়ী t সময় পর P (x, y, z) বিন্দুতে পৌছোয়। ধরা যাক, S′ নির্দেশতন্ত্রের O′-বিন্দুতে স্থির একজন নিরীক্ষকের ঘড়ি অনুযায়ী বস্তুটি u′ বেগে t′ সময়ে P বিন্দুতে পৌছোয়। ধরা যাক, O′-এর সাপেক্ষে P-র স্থানাঙ্ক P(x′, y′, z′)।

এখন x, y, z অক্ষগুলির দিকে u-র উপাংশগুলি যথাক্রমে u_x, u_y ও u_z ধরলে এবং x′, y′, z′ অক্ষগুলির দিকে u′-এর উপাংশগুলি যথাক্রমে u'_x, u'_y ও u'_z ধরলে আমরা পাই

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} \tag{3.1}$$

এবং $$u' = \sqrt{{u'_x}^2 + {u'_y}^2 + {u'_z}^2} \tag{3.2}$$

এখন আমরা u এবং u′-র মধ্যে সম্পর্ক বার করব। যদি সনাতন গ্যালিলিয়ো রূপান্তর বিবেচনা করা হয়, তবে আমরা জানি

$$x' = x - vt,\ y' = y,\ z' = z$$

এবং $\quad t' = t \qquad (3.3)$

সুতরাং x', y' ও z'-এর সমীকরণগুলিকে $t' = t$-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করলে পাওয়া যায়

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - \upsilon, \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt}, \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{dt} (\because dt' = dt)$$

বা, $\quad u'_x = u_x - v,\ u'_y = u_y,\ u'_z = u_z \qquad (3.4)$

(3.4) সমীকরণের এই মানগুলি আমরা (3.2) সমীকরণে বসিয়ে পাই

$$u' = \sqrt{(u_x - \upsilon)^2 + u_y^2 + u_z^2} \qquad (3.5)$$

$$= \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 - u_x^2 + (u_x - \upsilon)^2}$$

$$= \sqrt{u^2 - \upsilon(2u_x + \upsilon)} \qquad (3.6)$$

(3.5) বা (3.6) সমীকরণকে আমরা u′ ও u-র মধ্যে সম্পর্কের সমীকরণ হিসাবে ধরতে পারি। এটিকে দুটি বেগের সংযোজন সূত্র বা u বেগযুক্ত কণার সাপেক্ষে v বেগযুক্ত কণার আপেক্ষিক (relative) বেগের সমীকরণও বলা হয়।

এখন (3.5) সমীকরণে $u_y = u_z = 0$ এবং $u_x = u$ ধরলে আমরা পাই,

$$u' = u - v \qquad (3.7)$$

(3.7) সমীকরণটি হল সনাতন সৃতিবিদ্যা অনুযায়ী u বেগে ভ্রমণশীল A কণার সাপেক্ষে একই দিকে v বেগে ভ্রমণশীল B কণার আপেক্ষিক বেগ।

যদি কণাগুলির বেগ u ও v আলোকের বেগ c-র তুলনায় অত্যন্ত কম হয়, তবে সনাতন সৃতিবিদ্যার উপরোক্ত সূত্র বা সমীকরণগুলি প্রযোজ্য হয়। কিন্তু u ও v আলোকের বেগের সঙ্গে তুলনীয় হলে গ্যালিলিয়ো রূপান্তর সমীকরণগুলি প্রযোজ্য হয় না এবং সেক্ষেত্রে লরেন্টজীয় রূপান্তর সমীকরণ ব্যবহার করতে হয়। ফলে বেগ সংযোজনের সূত্রগুলিও ভিন্ন রূপ পায়।

এখন দেখা যাক, লরেন্টজীয় রূপান্তর সমীকরণগুলি ব্যবহার করলে বেগ সংযোজনের সূত্রগুলি কিরূপ হয়। লরেন্টজীয় রূপান্তর সমীকরণগুলি হল

$$x' = \gamma(x - \upsilon t),\ \ y' = y, z' = z$$

এবং $\quad t' = \gamma\left(t - \frac{\upsilon x}{c^2}\right)$, যেখানে $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}} \qquad (3.8)$

(3.8) সমীকরণের x′, y′ ও z′ কে t-এর সাপেক্ষে এবং t′-কে t-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে আমরা পাই

$$\frac{dx'}{dt'} = \gamma\left(\frac{dx}{dt}.\frac{dt}{dt'} - v.\frac{dt}{dt'}\right)$$

$$= \gamma\left(\frac{dx}{dt} - v\right)\frac{dt}{dt'}$$

$$\frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dt'}$$

$$\frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{dt}\frac{dt}{dt'}$$

এবং $$\frac{dt'}{dt} = \gamma\left(1 - \frac{\upsilon}{c^2}\frac{dx}{dt}\right) \qquad (3.9)$$

(3.9) সমীকরণে আমরা $\frac{dx}{dt} = u_x, \frac{dy}{dt} = u_y, \frac{dz}{dt} = u_z$

$\frac{dx'}{dt'} = u'_x, \frac{dy'}{dt'} = u'_y$ এবং $\frac{dz'}{dt'} = u'_z$ মানগুলি বসিয়ে পাই

$$u'_x = \gamma(u_x - \upsilon).\frac{1}{\gamma\left(1 - \frac{\upsilon u_x}{c^2}\right)}$$

$$= \frac{u_x - \upsilon}{1 - \frac{\upsilon u_x}{c^2}}$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{\upsilon u_x}{c^2}\right)} = \frac{u_y\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}}{1 - \frac{\upsilon u_x}{c^2}}$$

$$u'_z = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{\upsilon u_x}{c^2}\right)} = \frac{u_z\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}}{1 - \frac{\upsilon u_x}{c^2}}$$

এবং $$\frac{dt}{dt} = \gamma\left(1 - \frac{\upsilon u_x}{e^2}\right) = \frac{1 - \frac{\upsilon u_x}{c^2}}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}} \qquad (3.10)$$

আপনি নিশ্চয় লক্ষ করেছেন যে S নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে S'-এর আপেক্ষিক বেগ v, x-অক্ষ অভিমুখে ধরায় গ্যালিলিয়ো এবং লরেন্টজীয় উভয় রূপান্তর সমীকরণেই $y' = y$ এবং $z' = z$। কিন্তু বেগের ক্ষেত্রে গ্যালিলিয়ো রূপান্তর দ্বারা $u'_y = u_y$ এবং $u'_z = u_z$ হলেও লরেন্টজীয় রূপান্তর দ্বারা u'_y ও u'_z যথাক্রমে u_y ও u_z-এর সমান নয়। এর কারণ S-এর সাপেক্ষে S' কাঠামোতে ঘড়ির গতি সমান নয় (অর্থাৎ $t' \neq t$ বা $dt' \neq dt$)।

যদি v ও u_x c-র তুলনায় খুব ক্ষুদ্র হয়, তবে (3.10) সমীকরণ থেকে আমরা লিখতে পারি

$$\frac{\upsilon u_x}{c^2} \approx 0 \quad \text{এবং} \quad \frac{\upsilon^2}{c^2} \approx 0$$

সুতরাং, $u'_x \approx u_x - \upsilon$

$u'_y \approx u_y$

$u'_z \approx u_z$.

এবং $dt' \approx dt$ (3.11)

অর্থাৎ এক্ষেত্রে (3.11) সমীকরণগুলি গ্যালিলিয়ো রূপান্তরকে অনুসরণ করে।

(3.10) সমীকরণগুলির সাহায্যে আমরা u′ ও u-র মধ্যে সম্পর্ক পাই।

$$u'^2 = u_x'^2 + u_y'^2 + u_z'^2$$

$$= \frac{(u_x - \upsilon)^2 + (u_y^2 + u_z^2)\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{\upsilon u_x}{c^2}\right)^2}$$

$$= \frac{(u_x - \upsilon)^2 + (u^2 - u_x^2)\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{\upsilon u_x}{c^2}\right)^2} \qquad (3.12)$$

(3.10) এবং (3.12) সমীকরণগুলিকে S' নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে দুটি আপেক্ষিকীয় বেগের সংযোজন সূত্র বলে। যদি u এবং v উভয়েই x অক্ষের সমান্তরাল হয়, তবে

$$u_x = u,\ u_y = 0,\ u_z = 0$$

সুতরাং (3.10) বা (3.12) সমীকরণ থেকে পাই

$$u' = u'_x = \frac{u - \upsilon}{1 - \frac{u\upsilon}{c^2}};\ u'_y = 0,\ u'_z = 0 \qquad (3.13)$$

(3.13) সমীকরণকে S′-এর সাপেক্ষে আপেক্ষিকীয় আপেক্ষিক বেগের সূত্র বলা যায়। এই সূত্রে $u << c, v << c$ ধরলে, আমরা সনাতন আপেক্ষিক বেগের সূত্র অর্থাৎ সমীকরণ (3.7) পাই।

(3.10) সমীকরণগুলি থেকে বিপরীতক্রমে u_x, u_y, u_z রাশিগুলির মান বার করলে আমরা পাই,

$$u_x = \frac{u'_x + \upsilon}{1 + \frac{\upsilon u'_x}{c^2}}$$

$$u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}}{1 + \frac{\upsilon u'_x}{c^2}}$$

এবং
$$u_z = \frac{u'_z \sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}}{1 + \frac{\upsilon u'_x}{c^2}} \tag{3.14}$$

আপনি লক্ষ করে দেখুন যে, এই সমীকরণগুলি (3.10) সমীকরণগুলির বাঁদিকের রাশিগুলির উপর থেকে ড্যাশ (dash) চিহ্নগুলি তুলে সেগুলিকে ডানদিকের অনুরূপ রাশিগুলির উপর বসিয়ে এবং v কে $-\upsilon$ দ্বারা প্রতিস্থাপিত করেও সহজে পাওয়া যায়।

যদি u′ ও v পরস্পর সমান্তরাল হয়, তবে (3.13) সমীকরণ থেকে আমরা পাই

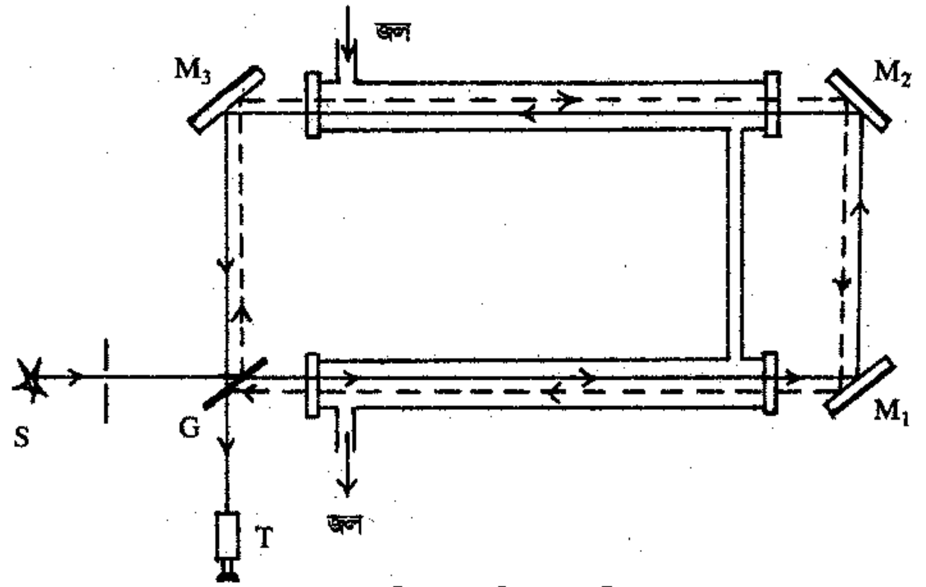
$$u = \frac{u' + \upsilon}{1 + \frac{u'\upsilon}{c^2}} \tag{3.15}$$

3.3 গতিশীল মাধ্যমে আলোকের বেগের পরিবর্তন (Dragging of Light by a Moving Medium) :

আপনি আপেক্ষিকতা তত্ত্বের পটভূমিকার (প্রথম) এককে ইথার তত্ত্বের আলোচনা পেয়েছেন এবং লক্ষ করেছেন যে ইথারের সাপেক্ষে পৃথিবীর বেগের মান নির্ণয়ের না-ধর্মী পরীক্ষাগুলি ফ্রেনেলের (Fresnel) ইথার টান প্রকল্পদ্বারা (ether drag hypothesis) মোটামুটি ব্যাখ্যা করা যায়। ইথার টান প্রকল্প সরাসরি পরীক্ষার জন্য 1851 খ্রিস্টাব্দে ফিজো (Fizeau) একটি নলের মধ্য দিয়ে উচ্চবেগে জলের প্রবাহ পাঠিয়ে ঐ গতিশীল জলের মাধ্যমে আলোকের বেগ নির্ণয় করেন (চিত্র 3.2)। তিনি লক্ষ করেন যে এই বেগ স্থির হলে আলোকের বেগের যে মান হয়, তার চেয়ে কিছু বেশি। যদি শূন্য

মাধ্যমে আলোকের বেগ c এবং জলের প্রতিসরাঙ্ক n ধরা হয়, তবে স্থির জলে আলোকের বেগ হয় $\frac{c}{n}$ । কিন্তু ফিজোর পরীক্ষাকে ইথার টান প্রকল্প দ্বারা ব্যাখ্যা করলে আলোকের প্রাপ্ত বেগ হয়

$$u = \frac{c}{n} + fv \tag{3.16}$$



চিত্র 3.2 ফিজোর পরীক্ষা

এখানে v হল জলের প্রবাহের বেগ এবং f ইথার টান গুণাঙ্ক। ফিজোর পরীক্ষা থেকে f-এর যে মান পাওয়া যায়, তা হল

$$f \approx 0.48 \tag{3.17}$$

কিন্তু ফ্রেনেলের প্রকল্প অনুযায়ী

$$f = 1 - \frac{1}{n^2} \tag{3.18}$$

সুতরাং জলের ক্ষেত্রে n = 1.33 বসালে আমরা পাই

$$f \approx 0.44 \tag{3.19}$$

কাজেই পরীক্ষার ভ্রম সীমার মধ্যেই f-এর মান আছে ধরা যায়।

সুতরাং ফিজোর পরীক্ষাকে ফ্রেনেলের ইথার টান প্রকল্পের সমর্থনসূচক বলে গণ্য করা যায়।

পরবর্তীকালে দেখা যায় যে ফ্রেনেলের ইথার টান প্রকল্পের বহু ত্রুটি রয়েছে। এই ত্রুটি দূর করার জন্য লরেন্টজ (Lorentz) তাঁর ইলেকট্রন তত্ত্ব উপস্থাপিত করেন। এই তত্ত্বে তিনি ধরে নেন

যে গতিশীল বস্তুমাধ্যম ইথারকে টেনে নিয়ে যায় না। অপরপক্ষে বস্তুর মধ্যে স্পন্দনশীল ঋণাত্মক তড়িৎধর্মী ইলেকট্রনগুলি নিজেরাই তড়িচ্চুম্বকীয় তরঙ্গ উৎপন্ন করে এবং এই তরঙ্গের সঙ্গে আপতিত আলোক-তরঙ্গের ব্যতিচার ঘটে। ফলে যদি বস্তুমাধ্যম স্থির থাকে, তবে উৎপন্ন তরঙ্গের বেগ হয় $\frac{c}{n}$। কিন্তু বস্তুমাধ্যম আলোকের বিপরীত দিকে v বেগে গতিশীল হলে আলোকের দশার বেগ ফ্রেনেলের প্রকল্প অনুসরণ করে এবং সেজন্য ঐ মাধ্যমে আলোকের বেগ হয়

$$u = \frac{c}{n} + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \tag{3.20}$$

অর্থাৎ, লরেন্টজের ইলেকট্রন তত্ত্ব ফ্রেনেলের ইথার টান প্রকল্প বাদ দিয়েও ফিজোর পরীক্ষা ব্যাখ্যা করতে পারে। কিন্তু এই ইলেকট্রন তত্ত্বের অসুবিধা হল যে এটি স্থির ইথার তত্ত্বকে স্বীকার করে যা আপেক্ষিকতা তত্ত্বের বিরোধী। তাছাড়া লরেন্টজের ইলেকট্রন তত্ত্বের আরও নানা জটিলতা রয়েছে, যেগুলির সঠিক ব্যাখ্যা করা কঠিন।

আমরা এখন দেখব যে লরেন্টজের রূপান্তর থেকে প্রাপ্ত বেগের সংযোজন সূত্রদ্বারা ফিজোর পরীক্ষার ফল সরাসরি সহজে প্রমাণ করা যায়।

ধরা যাক, পরীক্ষাগারে একটি নলের মধ্যদিয়ে x-অক্ষের দিকে প্রবাহিত জলের বেগ v এবং পরীক্ষাগারে অবস্থিত একজন নিরীক্ষকের কাছে ঐ জলের মধ্যদিয়ে আগত আলোকের বেগ u_x। এখন যদি নিরীক্ষকের সাপেক্ষে স্থির পরীক্ষাগারের নির্দেশতন্ত্রকে S এবং এই নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে v বেগে গতিশীল জলের নির্দেশতন্ত্রকে S′ দ্বারা প্রকাশ করা হয়, তবে এই S′ নির্দেশতন্ত্রে আলোকের বেগ হবে $u'_x = \frac{c}{n}$ কারণ এই নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে জল স্থির আছে এবং এর প্রতিসরাঙ্ক (ধরা হয়েছে) n।

সুতরাং আপেক্ষিকীয় বেগ সংযোজনের সূত্র প্রয়োগ করে আমরা পাই

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{u'_x + \upsilon}{1 + \frac{\upsilon u'_x}{c^2}} \\ &= \frac{\frac{c}{n} + \upsilon}{1 + \frac{\upsilon}{cn}} \\ &= \left(\frac{c}{n} + \upsilon\right)\left(1 + \frac{\upsilon}{cn}\right)^{-1} \\ &\simeq \left(\frac{c}{n} + \upsilon\right)\left(1 - \frac{\upsilon}{cn}\right) \\ &\approx \frac{c}{n} + \upsilon\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \end{aligned} \tag{3.21}$$

এখানে $\frac{\upsilon}{c}$ এবং এর উচ্চতর ঘাতের মানগুলি অত্যন্ত ক্ষুদ্র হওয়ায় উপেক্ষা করা হয়েছে।

কাজেই, দেখা যাচ্ছে যে ইথার মাধ্যম বা আর অন্য কোনও প্রকার প্রকল্প বা তত্ত্ব ছাড়াই কেবল লরেন্টজের আপেক্ষিকীয় বেগের সূত্রদ্বারাই সোজাসুজি ফিজোর পরীক্ষালব্ধ গতিশীল মাধ্যমে আলোকের বেগ নির্ণয় করা যায়।

3.4 শব্দ ও আলোকের ডপলার ক্রিয়া (Doppler Effect for Sound and Light) :

সি জে ডপলার (Christian Johann Doppler, 1803-1853) 1832 খ্রিস্টাব্দে প্রথম উল্লেখ করেন যে আলোক উৎস ও নিরীক্ষকের মধ্যে আপেক্ষিক বেগ থাকলে নিরীক্ষকের চোখে আলোক উৎসের রঙ পরিবর্তিত হবে। আলোকের রঙ বা বর্ণের এইরূপ পরিবর্তনকে ডপলার ক্রিয়া বলে। আলোকের তরঙ্গদৈর্ঘ্য পরিবর্তনের জন্যই বর্ণের পরিবর্তন হয়। আবার যেহেতু তরঙ্গদৈর্ঘ্য (λ) ও কম্পাঙ্কের (γ) গুণফল হল তরঙ্গের বেগ (c), সেজন্য বেগ অপরিবর্তিত থাকলে তরঙ্গদৈর্ঘ্য যে অনুপাতে বাড়ে কম্পাঙ্ক সেই অনুপাতে কমে।

আলোকের মতো শব্দেরও ডপলার ক্রিয়া আছে। কারণ শব্দও একপ্রকার তরঙ্গ। কিন্তু শব্দের বেগ আলোকের বেগের তুলনায় অনেক কম। সেজন্য শব্দের ক্ষেত্রে ডপলার ক্রিয়া সহজেই লক্ষ করা যায়। যখন কোনও ট্রেন বাঁশি বাজিয়ে স্টেশনের দিকে এগিয়ে আসে, তখন স্টেশনে অপেক্ষারত শ্রোতার কানে বাঁশির সুর সরু (বেশি কম্পাঙ্কের) শোনায়, কিন্তু ঐ ট্রেনটিই যখন স্টেশন ছেড়ে বেরিয়ে যায়, তখন শ্রোতার কানে ঐ সুর হঠাৎ মোটা (কম কম্পাঙ্কের) হয়ে যায়।

3.4.1 শব্দের ডপলার ক্রিয়া

শব্দের ক্ষেত্রে শ্রোতা বা উৎসের আপেক্ষিক বেগের জন্য কম্পাঙ্ক কিরূপ পরিবর্তিত হয়, তা সহজে নির্ণয় করা যায়। আপনি শব্দবিজ্ঞানে এ বিষয়ে অধ্যয়ন করেছেন। আপনি নিশ্চয় লক্ষ করেছেন যে মোট চারটি ক্ষেত্র আমরা বিবেচনা করতে পারি।

প্রথম ক্ষেত্র : উৎস মাধ্যমের সাপেক্ষে স্থির। শ্রোতা v_0 বেগে উৎসের দিকে গতিশীল [চিত্র 3.3 (a)]। এক্ষেত্রে শ্রোতা যে আপাত কম্পাঙ্কের শব্দ শুনবে, তা হল

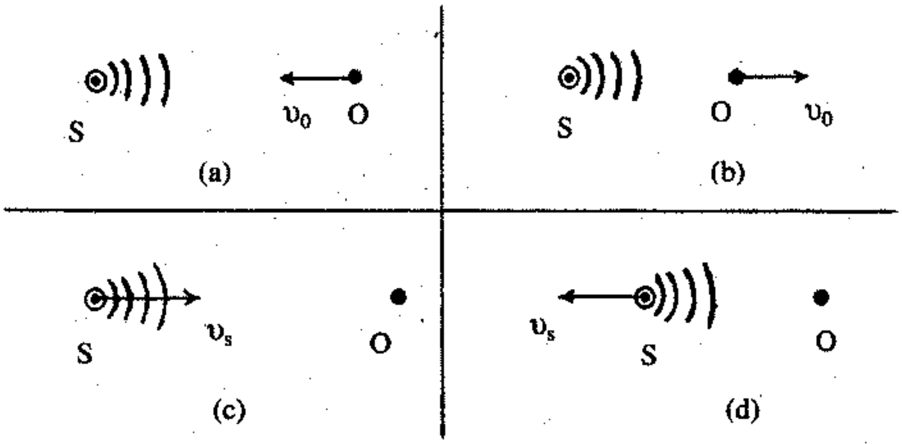
$$\gamma' = \gamma\left(1 + \frac{\upsilon_0}{\upsilon}\right) \tag{3.22}$$

যেখানে γ হল উৎসের প্রকৃত কম্পাঙ্ক এবং v শব্দের বেগ। অর্থাৎ এখানে আপাত কম্পাঙ্ক প্রকৃত কম্পাঙ্কর থেকে বেশি।

দ্বিতীয় ক্ষেত্র ঃ উৎস মাধ্যমের সাপেক্ষে স্থির আছে। কিন্তু শ্রোতা v_0 বেগে উৎসের বিপরীত দিকে গতিশীল [চিত্র 3.3 (b)] । এক্ষেত্রে শ্রোতা যে আপাত কম্পাঙ্কের শব্দ শুনবে, তা হল

$$\gamma' = \gamma\left(1 - \frac{\upsilon_0}{\upsilon}\right) \tag{3.23}$$

সুতরাং আপাত কম্পাঙ্ক এক্ষেত্রে প্রকৃত কম্পাঙ্ক থেকে কম।



চিত্র 3.3 শব্দের ডপলার ক্রিয়া

তৃতীয় ক্ষেত্র ঃ শ্রোতা মাধ্যমের সাপেক্ষে স্থির আছে। কিন্তু শব্দের উৎস v_s বেগে শ্রোতার অভিমুখে অগ্রসরমান [চিত্র 3.3 (c)]। এক্ষেত্রেও আপাত কম্পাঙ্ক প্রকৃত কম্পাঙ্কর চেয়ে বেশি। তবে এর সমীকরণ হল

$$\gamma' = \gamma\left(\frac{\upsilon}{\upsilon - \upsilon_s}\right) \tag{3.24}$$

চতুর্থ ক্ষেত্র ঃ উৎস স্থির-শ্রোতার থেকে υ_s বেগে দূরে সরে যেতে থাকলে [চিত্র 3.3 (d)] শ্রোতার আপাত কম্পাঙ্ক হবে

$$\gamma' = \gamma\left(\frac{\upsilon}{\upsilon + \upsilon_s}\right) \tag{3.25}$$

অর্থাৎ এক্ষেত্রে শব্দের আপাত কম্পাঙ্ক হ্রাস পায়।

আপনি লক্ষ করেছেন যে (3.22) ও (3.23) সমীকরণ দুটি (3.24) এবং (3.25) সমীকরণ দুটি থেকে আলাদা। তবে যদি $v_0 = v_s = u$ হয় এবং u, v-এর তুলনায় অত্যন্ত ক্ষুদ্র হয় $(u << v)$, তা হলে (3.22) সমীকরণ থেকে আমরা পাই

$$\gamma' = \gamma\left(1+\frac{u}{\upsilon}\right) \tag{3.26}$$

এবং (3.24) সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়

$$\gamma' = \gamma\left(\frac{\upsilon}{\upsilon-u}\right) = \gamma\left(1-\frac{u}{\upsilon}\right)^{-1} \approx \gamma\left(1+\frac{u}{\upsilon}\right) \tag{3.27}$$

অর্থাৎ এক্ষেত্রে (3.22) এবং (3.24) উভয় সমীকরণ থেকেই আপাত কম্পাঙ্কের মান প্রায় একই হয়।

অনুরূপে আমরা দেখতে পারি যে (3.23) এবং (3.25) সমীকরণদুটি থেকেও উপরের শর্ত অনুযায়ী একই আপাত কম্পাঙ্কের সমীকরণ পাওয়া যায়। অর্থাৎ এক্ষেত্রে আমরা পাই

$$\gamma' = \gamma\left(1+\frac{u}{\upsilon}\right) \tag{3.28}$$

3.4.2 শব্দ ও আলোকের ডপলার ক্রিয়ার পার্থক্য

আলোকের ক্ষেত্রেও আমরা ডপলার ক্রিয়া লক্ষ করতে পারি। তবে শব্দের চেয়ে আলোকের বেগ অনেক বেশি হওয়ায় এই ক্রিয়া আমরা সাধারণত মহাকাশের জ্যোতিষ্ক বা পারমাণবিক আলোর উৎসের (অর্থাৎ যাদের বেগ পার্থিব দৃশ্যমান কোনও বস্তুর বেগের তুলনায় খুবই বেশি তাদের) ক্ষেত্রেই সহজে লক্ষ করতে পারি।

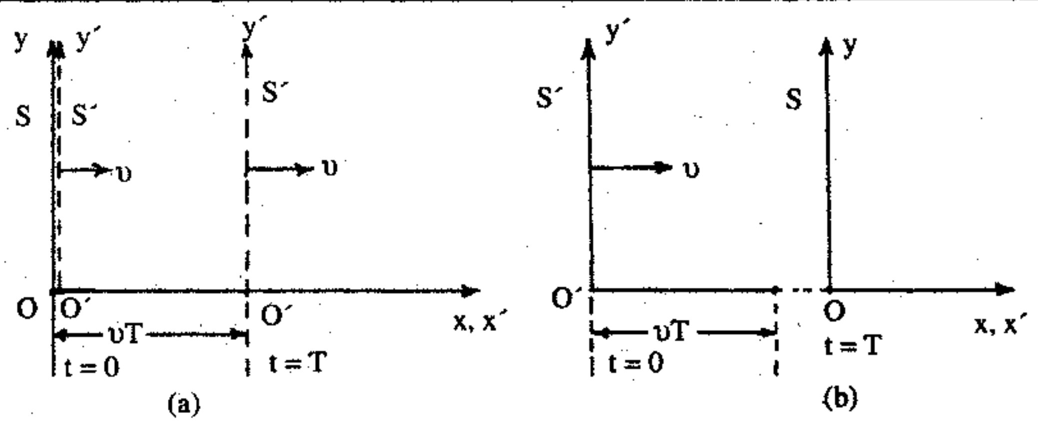
শব্দ ও আলোকের ডপলার ক্রিয়ার আরও একটি মূল পার্থক্য আছে। উপরের সমীকরণগুলি থেকে আমরা দেখতে পাই যে, শব্দ ও শ্রোতার আপেক্ষিক বেগ সমান হলেও মাধ্যমের সাপেক্ষে উৎস শ্রোতার মধ্যে কোনটি স্থির ও কোনটি গতিশীল তার উপর আপাত কম্পাঙ্কের সমীকরণ নির্ভর করে। কিন্তু আলোকের ক্ষেত্রে আমরা কেবল উৎস ও নিরীক্ষকের সাপেক্ষে এর বেগ মাপতে পারি এবং আইনস্টাইনের আপেক্ষিকতা তত্ত্ব অনুযায়ী উৎস ও নিরীক্ষকের পারস্পরিক আপেক্ষিক বেগ যা-ই হোক না কেন, শূন্য মাধ্যমে আলোকের বেগ সর্বদাই c অর্থাৎ ধ্রুবক। বস্তুত শব্দের বিস্তারের জন্য যেমন কোনও বস্তু মাধ্যমের প্রয়োজন, আলোকের বিস্তারের জন্য সেরূপ কোনও মাধ্যমেরই প্রয়োজন হয় না এবং এমন কোনও নিশ্চল (বা পরম) মাধ্যম বা নির্দেশতন্ত্র নেই যার সাপেক্ষে আমরা আলোকের পরম বেগ নির্ণয় করতে পারি। ফলে আলোকের ডপলার ক্রিয়া কেবল আলোকের বেগ

এবং উৎস ও নিরীক্ষকের আপেক্ষিক বেগের উপর নির্ভর করে এবং অন্য কোনও বিষয় অর্থাৎ মাধ্যমের স্থিতি বা গতির উপর নির্ভর করে না। সুতরাং আলোকের ডপলার ক্রিয়ার সমীকরণ শব্দের ডপলার ক্রিয়ার সমীকরণ থেকে ভিন্ন, যদিও উৎস ও নিরীক্ষকের আপেক্ষিক বেগ আলোকের ও শব্দের বেগের তুলনায় অত্যন্ত ক্ষুদ্র হলে আলোক ও শব্দের ডপলার ক্রিয়ার সমীকরণগুলি প্রায় অভিন্ন আকার লাভ করে।

3.4.3 আলোকের ডপলার ক্রিয়ার সনাতন সমীকরণ

এখন দেখা যাক, আলোকের ক্ষেত্রে আমরা কিভাবে ডপলার ক্রিয়ার সমীকরণ নির্ণয় করতে পারি। প্রথমে আমরা একটি সরল ক্ষেত্র বিবেচনা করব, যেখানে আলোকের গতির দিক ও নিরীক্ষক ও উৎসের আপেক্ষিক বেগের দিক অভিন্ন। এরূপ ক্ষেত্রকে অনুদৈর্ঘ্য বা ব্যাসার্ধমুখী ডপলার ক্রিয়া (Radial Doppler effect) বলে।

[3.4 (a)] চিত্রে S কার্টেজীয় নির্দেশতন্ত্রের মূলবিন্দুতে আলোকের একটি বিন্দু উৎস O ধরা হল। ধরা যাক, এই উৎস থেকে প্রতি T সময় অন্তর একটি করে ক্ষুদ্র স্পন্দন (কম্পন) x অক্ষের দিকে যায়। এখন ধরা যাক S′ নির্দেশতন্ত্রের x′-অক্ষ x অক্ষের দিকে v বেগে গতিশীল। ধরা যাক S′



চিত্র 3.4 আলোকের ডপলার ক্রিয়া

নির্দেশতন্ত্রের মূলবিন্দু O′ যেসময় O বিন্দুর উপর আসে, তখন O থেকে প্রথম স্পন্দন নির্গত হয়। তাহলে O′ বিন্দুতে একজন নিরীক্ষক থাকলে, সেই মুহূর্তেই আলোক স্পন্দনটি তার কাছে পৌঁছোবে।

O বিন্দু থেকে আলোকের দ্বিতীয় স্পন্দন T সময় পর নির্গত হয়। কিন্তু ঐ সময়ে O′-এ অবস্থিত নিরীক্ষক x, x′ অভিমুখে vT দূরত্ব অতিক্রম করে। O′ অভিমুখে আলোকের আপেক্ষিক বেগ c – v (c = আলোকের প্রকৃত বেগ)। সুতরাং vT ব্যবধান অতিক্রম করে দ্বিতীয় স্পন্দনটির O′

নিরীক্ষকের কাছে পৌঁছোতে মোট সময় লাগবে

$$T' = T + \frac{\upsilon T}{c-\upsilon}$$

$$= T\left(1+\frac{\upsilon}{c-\upsilon}\right) = T\left(\frac{c}{c-\upsilon}\right) \tag{3.29}$$

এই সময় হল S নির্দেশতন্ত্রে অবস্থিত কোনও নিরীক্ষকের ঘড়ির সময়। যদি আমরা গ্যালিলিয়ো রূপান্তর মেনে নিই, তবে S ও S′ উভয় নির্দেশতন্ত্রের ঘড়ির সময় অভিন্ন হবে। সুতরাং S′ নির্দেশতন্ত্রের নিরীক্ষকও দুটি স্পন্দনের মধ্যে ঐ একই সময়ের পার্থক্য দেখতে পাবে।

উৎসটি T সময় অন্তর অন্তর স্পন্দিত হয়। সুতরাং এর কম্পাঙ্ক

$$\gamma = \frac{1}{T} \tag{3.30}$$

গ্যালিলিয়ো রূপান্তর অনুযায়ী উৎসের সাপেক্ষে গতিশীল নিরীক্ষকের নিকট ঐ স্পন্দনের কম্পাঙ্ক হবে

$$\gamma' = \frac{1}{T'} = \frac{1}{T}\left(\frac{c-\upsilon}{c}\right)$$

$$= \gamma\left(1-\frac{\upsilon}{c}\right) \tag{3.31}$$

উৎসের স্পন্দনকে আমরা বিকীর্ণ আলোকের স্পন্দন হিসাবে ধরতে পারি। এই আলোকের তরঙ্গ-দৈর্ঘ্য λ ধরলে

$$\lambda = cT = \frac{c}{\gamma} \tag{3.32}$$

সুতরাং আপেক্ষিক গতিসম্পন্ন নিরীক্ষকের নিকট এই আলোকে তরঙ্গ-দৈর্ঘ্য হবে

$$\lambda' = cT' = \frac{c}{\gamma'}$$

$$= \frac{c}{\gamma}\left(\frac{1}{1-\frac{\upsilon}{c}}\right)$$

$$= \frac{\lambda}{1-\frac{\upsilon}{c}} \tag{3.33}$$

আমরা উপরে ধরে নিয়েছি যে নিরীক্ষক উৎস থেকে দূরে যাচ্ছে। (3.33) সমীকরণ থেকে দেখা যাচ্ছে যে এক্ষেত্রে আলোকের তরঙ্গ-দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি পাবে, অর্থাৎ আলোকের বর্ণালি লালের দিকে সরে যাবে। যদি নিরীক্ষক স্থির থাকে, কিন্তু উৎস নিরীক্ষকের সাপেক্ষে দূরে যায়, তা হলেও আমরা আপাত তরঙ্গদৈর্ঘ্যের একই সমীকরণ, অর্থাৎ (3.33) সমীকরণটি পাই। অপরপক্ষে, উৎস [চিত্র 3.4 (b)] বা নিরীক্ষক পরস্পরের অভিমুখে গতিশীল হলে (3.31) এবং (3.33) সমীকরণে v-কে –v দ্বারা প্রতিস্থাপিত করে আমরা পাই যথাক্রমে

$$\gamma' = \gamma\left(1 + \frac{\upsilon}{c}\right) \tag{3.34}$$

এবং $$\lambda' = \frac{\lambda}{1 + \frac{\upsilon}{c}} \tag{3.35}$$

আমরা দেখতে পাচ্ছি যে এক্ষেত্রে আলোকের আপাত কম্পাঙ্ক বৃদ্ধি পায় এবং আপাত তরঙ্গদৈর্ঘ্য হ্রাস পায়। সুতরাং আলোকের বর্ণালি বেগুনি বর্ণের দিকে সরে যাবে।

3.4.4 আলোকের ডপলার ক্রিয়ার আপেক্ষিকীয় সমীকরণ

উপরের (3.31), (3.33), (3.34) এবং (3.35) সমীকরণগুলি হল আলোকের গতির দিক এবং উৎস ও নিরীক্ষকের আপাত গতির দিক একই সরলরেখার অভিমুখে থাকলে গ্যালিলিয়ো রূপান্তরদ্বারা ডপলার ক্রিয়ার সমীকরণ। যদি v-এর মান বেশি না হয়, তবে পরীক্ষার দ্বারা যাচাই করলে দেখা যায় যে, এই সমীকরণগুলি দ্বারা আলোকের যে আপাত কম্পাঙ্ক বা তরঙ্গদৈর্ঘ্য পাওয়া যায়, তা পরীক্ষালব্ধ ফলের সঙ্গে বেশ মিলে যায়। কিন্তু v খুব বেশি ($v \sim c$) হলে উপরের সমীকরণ ও পরীক্ষার ফলের মধ্যে পার্থক্য ঘটে। কারণ v বেশি হলে গ্যালিলিয়ো রূপান্তর প্রযোজ্য হয় না এবং সেক্ষেত্রে আপেক্ষিকতা তত্ত্ব ও লরেন্টজীয় রূপান্তর প্রয়োগ করতে হয়।

আপেক্ষিকতা তত্ত্বে বলা হয়েছে যে পরস্পরের সাপেক্ষে গতিশীল দুটি নির্দেশতন্ত্রের দুটি ঘড়ির সময়ের পার্থক্য কখনও এক হয় না। আপনি পূর্ব পরিচ্ছেদে লরেন্টজীয় রূপান্তর এবং তার ফলে সময়ের প্রসারণ সম্বন্ধে জ্ঞান লাভ করেছেন। আপনি লক্ষ করেছেন যে S′ নির্দেশতন্ত্রের প্রকৃত সময়ান্তর (proper time interval) $\Delta t'_0$ হলে S নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে ঐ সময়ান্তর হয়,

$$\Delta t = \frac{\Delta t'_0}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \tag{3.36}$$

বা $$\Delta t'_0 = \Delta t\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c}} \tag{3.37}$$

আমাদের পূর্ব আলোচনায় S' নির্দেশতন্ত্রের নিরীক্ষক তার ঘড়ির দ্বারা একই বিন্দু O'-এ স্পন্দনের সময়ান্তর পরিমাপ করে। সুতরাং নিরীক্ষকের সাপেক্ষে এটি প্রকৃত সময়ান্তর $T_0' = \Delta t_o'$ । কিন্তু S নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে এই সময়ান্তরের পরিমাপ হল $T' = \Delta t$ । সুতরাং আমরা (3.37) এবং (3.29) সমীকরণ দুটি থেকে পাই

$$T_o' = \Delta t_o' = T'\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} = T\left(\frac{c}{c-\upsilon}\right)\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}$$

$$= T\frac{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}{1-\frac{\upsilon}{c}} = T\sqrt{\frac{1+\frac{\upsilon}{c}}{1-\frac{\upsilon}{c}}} \qquad (3.38)$$

(3.38) সমীকরণ থেকে আমরা সহজেই আপাত কম্পাঙ্ক ও আপাত তরঙ্গদৈর্ঘ্যের সমীকরণ পেতে পারি। (3.30) সমীকরণ অনুযায়ী উৎসের প্রকৃত কম্পাঙ্ক

$$\gamma = \frac{1}{T}$$

সুতরাং ডপলার ক্রিয়ার জন্য S' নির্দেশতন্ত্রের নিরীক্ষক যে আপাত কম্পাঙ্ক নিরীক্ষণ করবে, তা হল

$$\gamma' = \frac{1}{T_0'} = \frac{1}{T}\sqrt{\frac{1-\frac{\upsilon}{c}}{1+\frac{\upsilon}{c}}}$$

$$= \gamma\sqrt{\frac{1-\frac{\upsilon}{c}}{1+\frac{\upsilon}{c}}} \qquad (3.39)$$

অনুরূপভাবে আপাত তরঙ্গদৈর্ঘ্যের সমীকরণ হল

$$\lambda' = \frac{c}{\gamma'} = \frac{c}{\gamma}\sqrt{\frac{1+\frac{\upsilon}{c}}{1-\frac{\upsilon}{c}}}$$

$$= \lambda\sqrt{\frac{1+\frac{\upsilon}{c}}{1-\frac{\upsilon}{c}}} \qquad (3.40)$$

যদি $\frac{\upsilon}{c}$ ক্ষুদ্র হয়, তবে 1-এর সাপেক্ষে $\frac{\upsilon^2}{c^2}$-কে উপেক্ষা করা যায়। সেক্ষেত্রে আপনি দেখতে পারেন যে (3.39) এবং (3.40) সমীকরণ দুটি থেকে যথাক্রমে (3.31) এবং (3.33) সমীকরণ দুটি পাওয়া যায়। এটিকে আপনার অনুশীলনী হিসাবে রাখা হল। সুতরাং (3.31) ও (3.33) সমীকরণ দুটিকে যথাক্রমে (3.39) ও (3.40) সমীকরণদুটির বিশেষ রূপ হিসাবে ধরা যায়। এই উভয় সমীকরণ থেকেই আমরা দেখতে পাই যে, উৎসের সাপেক্ষে নিরীক্ষক অথবা নিরীক্ষকের সাপেক্ষে উৎস যত বেশি বেগে দূরে যাবে, নিরীক্ষকের নিকট উৎসের বর্ণালি তত বেশি লালের দিকে সরে যাবে। এর বিপরীত ক্রিয়া ঘটবে যদি উৎস বা নিরীক্ষকের মধ্যে একটি অপরের দিকে কোনও আপেক্ষিক বেগে অগ্রসর হয়।

যখন উৎস বা নিরীক্ষক v আপেক্ষিক বেগে পরস্পরের দিকে অগ্রসর হয়, তখন ডপলার ক্রিয়ার আপাত কম্পাঙ্কের সমীকরণ (3.39) সমীকরণে v-এর স্থানে –v লিখে পাওয়া যায়। অর্থাৎ

$$\gamma' = \gamma\sqrt{\frac{1+\frac{\upsilon}{c}}{1-\frac{\upsilon}{c}}} \tag{3.41}$$

অনুরূপে আপাত তরঙ্গদৈর্ঘ্যের সমীকরণ হবে

$$\lambda' = \lambda\sqrt{\frac{1-\frac{\upsilon}{c}}{1+\frac{\upsilon}{c}}} \tag{3.42}$$

(3.41) সমীকরণে $\gamma' > \gamma$ এবং (3.42) সমীকরণে $\lambda' < \lambda$। অর্থাৎ উভয় সমীকরণই বোঝাচ্ছে যে বর্ণালি বেগুনি রঙের দিকে সরে যাবে।

(3.39) থেকে (3.42) পর্যন্ত সমীকরণগুলি গবেষণাগারে গতিশীল আলোক উৎস ও মহাকাশে গতিশীল জ্যোতিষ্কগুলি থেকে প্রাপ্ত আলোকবর্ণালি বিশ্লেষণ করে সম্পূর্ণ নির্ভুল বলে প্রমাণিত হয়েছে। এ থেকে আপেক্ষিকতা তত্ত্ব যে নির্ভুল তাও প্রমাণিত হয়।

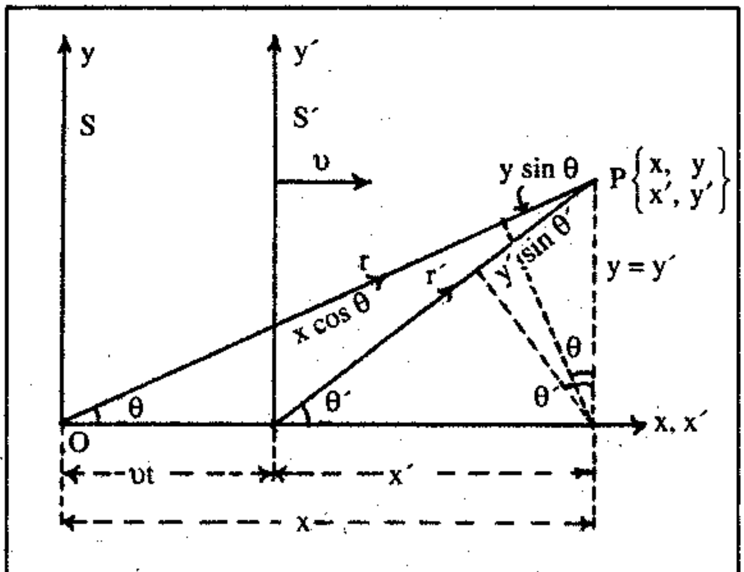
3.5 বিশেষ আপেক্ষিকতা তত্ত্বের দ্বারা ডপলার ক্রিয়া ও অপেরণের সাধারণ সূত্র (General Formulas for Doppler Effect and Aberration of Light by Special Theory of Relativity) ঃ

পূর্ব অনুচ্ছেদে আমরা আলোকের গতি যখন উৎস বা নিরীক্ষকের আপেক্ষিক গতির অক্ষের অভিমুখে থাকে, তখন আপেক্ষিকীয় ডপলার ক্রিয়ার সূত্র কিভাবে নির্ণয় করা যায়, তা আলোচনা

করেছি। এই অনুচ্ছেদে আমরা আপেক্ষিকীয় ডপলার ক্রিয়ার সাধারণ সূত্র নির্ণয় করব। অর্থাৎ এক্ষেত্রে আলোকের গতির দিক উৎস বা নিরীক্ষকের আপেক্ষিক গতির দিকের সঙ্গে যেকোনও কোণে আনত থাকতে পারে।

এই সাধারণ সূত্র নির্ণয়ের ক্ষেত্রে আরেকটি বিষয় উল্লেখযোগ্য। আপনারা পূর্বে নক্ষত্রের আলোকের অপেরণ বিষয়ে জ্ঞান লাভ করেছেন। আপনারা এখানে দেখবেন যে এই অপেরণের সূত্রও আপেক্ষিকীয় ডপলার ক্রিয়ার সাধারণ সূত্রের সঙ্গেই একটি অতিরিক্ত শর্ত হিসাবে পাওয়া যায়।

(3.5) চিত্রে ধরা যাক, কার্টেজীয় নির্দেশতন্ত্র S-এর সাপেক্ষে এর x অক্ষ অভিমুখে অপর একটি কার্টেজীয় নির্দেশতন্ত্র S′ v বেগে গতিশীল আছে। আমরা ধরতে পারি যে S-এর x, y ও z অক্ষগুলি S′-এর যথাক্রমে x′, y′ ও z′ অক্ষগুলির সমান্তরাল এবং t = t′ = 0 প্রারম্ভিক সময়ে S ও S′-এর মূলবিন্দু যথাক্রমে O ও O′ পরস্পরের উপর সমস্থাপিত হয়। ধরা যাক, S নির্দেশতন্ত্রের xy তলে P বিন্দুতে একজন নিরীক্ষক আছে এবং S′ নির্দেশতন্ত্রের O′ বিন্দুতে একটি বিন্দু আলোক উৎস আছে। ধরা যাক, এই উৎস থেকে t = t′ = 0 প্রারম্ভিক সময়ে একটি আলোক সংকেত নির্গত হয়ে xy তলে তরঙ্গাকারে বিস্তৃত হয় এবং S নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে স্থির P বিন্দুতে অবস্থিত নিরীক্ষক t সময় পর এই আলোক তরঙ্গটি দেখতে পায়। যদি OP = r লেখা হয়, তবে S-এর সাপেক্ষে P বিন্দুতে আলোক তরঙ্গের সমীকরণ হবে



চিত্র 3.5 আলোকের আপেক্ষিকীয় অপেরণ ও ডপলার ক্রিয়া

$$\phi = A\exp\left\{2\pi i\gamma\left(t - \frac{r}{c}\right)\right\} \tag{3.43}$$

এখানে γ এবং c হল যথাক্রমে আলোকের আপাত কম্পাঙ্ক ও বেগ এবং A হল তরঙ্গ বিস্তার।

ধরা যাক, S নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) এবং r ও x, x′ অক্ষের মধ্যে কোণ θ। তাহলে আমরা (3.5) চিত্র অনুযায়ী লিখতে পারি

$$r = x\cos\theta + y\sin\theta \tag{3.44}$$

এখন তাহলে তরঙ্গ সমীকরণটির রূপ হয়

$$\phi = A\exp\left\{2\pi i\gamma\left(t - \frac{x\cos\theta + y\sin\theta}{c}\right)\right\} \tag{3.45}$$

আলোক তরঙ্গ যে সময়ে P বিন্দুতে পৌঁছোয়, সেই সময়ে O′ x, x′ অক্ষ অভিমুখে $OO' = vt$ দূরত্ব অতিক্রম করে। ধরা যাক, S′-এর সাপেক্ষে ঐ আলোক সংকেত t′ সময়ে P বিন্দুতে পৌঁছোয়। S′ -এর সাপেক্ষে P-এর স্থানাঙ্ক (x′, y′) এবং $O'P = r'$ ধরলে আমরা লিখতে পারি (চিত্র ঃ 3.5)

$$r' = x'\cos\theta' + y'\sin\theta' \tag{3.46}$$

যেখানে θ′ হল O′P ও x, x′ অক্ষের মধ্যস্থ কোণ। P বিন্দুতে অবস্থিত নিরীক্ষক S-এর সাপেক্ষে স্থির, কিন্তু S′-এর সাপেক্ষে x,x′ অক্ষ অভিমুখে −v বেগে গতিশীল। এজন্য θ′ -র মানও পরিবর্তনশীল। O বিন্দু O′ বিন্দুর উৎস থেকে যত দূরে যায়, θ′ -র মান তত বাড়ে।

S′-এর সাপেক্ষে P বিন্দুতে তরঙ্গ সমীকরণটি হবে

$$\phi' = A'\exp\left\{2\pi i\gamma'\left(t' - \frac{r'}{c}\right)\right\} \tag{3.47}$$

$$= A'\exp\left\{2\pi i\gamma'\left(t' - \frac{x'\cos\theta' + y'\sin\theta'}{c}\right)\right\} \tag{3.48}$$

যেখানে γ′ হল S′-এর সাপেক্ষে আলোকের প্রকৃত কম্পাঙ্ক এবং A′ তরঙ্গ বিস্তার।

এখন তরঙ্গের একটি বিশেষ ধর্ম হল এই যে কোনও জাড্যিক নির্দেশতন্ত্রের কাল বা স্থানাঙ্কগুলির রূপান্তর হলেও এর দশা অপরিবর্তিতই থাকে। কাজেই (3.45) ও (3.48) সমীকরণ দুটিতে তরঙ্গের এই ধর্ম প্রয়োগ করে আমরা পাই

$$2\pi i\gamma\left(t - \frac{x\cos\theta + y\sin\theta}{c}\right)$$

$$= 2\pi i\gamma'\left(t' - \frac{x'\cos\theta' + y'\sin\theta'}{c}\right)$$

বা, $$\gamma\left(t - \frac{x\cos\theta + y\sin\theta}{c}\right) = \gamma'\left(t' - \frac{x'\cos\theta' + y'\sin\theta'}{c}\right) \tag{3.49}$$

(3.49) সমীকরণে আমরা লরেন্টজীয় রূপান্তর প্রয়োগ করতে পারি। কারণ এই রূপান্তর সমীকরণগুলি হল

$$x' = \gamma(x - \upsilon t)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

এবং $$t' = \gamma\left(t - \frac{\upsilon x}{c^2}\right)$$

যেখানে $$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} \tag{3.50}$$

সুতরাং (3.39) সমীকরণের ডান দিকে x', y' ও t'-এর এই মানগুলি বসিয়ে আমরা পাই

$$\gamma\left(t - \frac{x\cos\theta + y\sin\theta}{c}\right) = \gamma'\left\{\gamma\left(t - \frac{\upsilon x}{c^2}\right) - \frac{\gamma(x-\upsilon t)\cos\theta' + y\sin\theta'}{c}\right\}$$

$$= \gamma'\left\{\gamma\left(\frac{1+\upsilon\cos\theta}{c}\right)t - \gamma\left(\frac{\upsilon}{c^2} + \frac{\cos\theta'}{c}\right)x - \frac{y\sin\theta'}{c}\right\} \tag{3.51}$$

(3.49) সমীকরণে লরেন্টজীয় রূপান্তর প্রয়োগ করার ফলে আমরা দেখতে পাচ্ছি যে (3.5.1) সমীকরণটি একটি অভেদে রূপান্তরিত হয়েছে। সুতরাং এই সমীকরণে ডান দিকের প্রত্যেক চলরাশির সহগ বাঁ দিকের অনুরূপ চলরাশির সহগের সমান হবে।

(3.51) সমীকরণে প্রথমে উভয় দিকের t-র সহগগুলি সমান করে আমরা পাই

$$\gamma = \gamma'\gamma\left(1 + \frac{\upsilon\cos\theta'}{c}\right) \tag{3.52}$$

অনুরূপে ঐ সমীকরণে উভয় দিকের যথাক্রমে x ও y এর সহগগুলি সমান করে আমরা পাই

$$\frac{\gamma\cos\theta}{c} = \gamma'\gamma\left(\frac{\upsilon}{c^2} + \frac{\cos\theta'}{c}\right)$$

বা, $$\gamma\cos\theta = \gamma'\gamma\left(\frac{\upsilon}{c} + \cos\theta'\right) \tag{3.53}$$

এবং $$\frac{\gamma\sin\theta}{c} = \frac{\gamma'\sin\theta'}{c}$$

বা, $$\gamma\sin\theta = \gamma'\sin\theta' \tag{3.54}$$

3.5.1 ডপলার ক্রিয়ার সাধারণ সমীকরণ ঃ

(3.53) সমীকরণ থেকে আমরা $\cos\theta'$-এর মান পাই

$$\cos\theta' = \frac{\gamma\cos\theta}{\gamma'\gamma} - \frac{\upsilon}{c} \qquad (3.55)$$

(3.55) সমীকরণ থেকে $\cos\theta'$-এর মান (3.52) সমীকরণে বসালে আমরা পাই

$$\gamma = \gamma'\gamma\left\{1 + \frac{\upsilon}{c}\left(\frac{\gamma\cos\theta}{\gamma'\gamma} - \frac{\upsilon}{c}\right)\right\}$$

$$= \gamma'\gamma\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right) + \frac{\upsilon}{c}\gamma\cos\theta$$

বা, $$\gamma\left(1 - \frac{\upsilon\cos\theta}{c}\right) = \gamma'\frac{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c}}} \qquad \left[\because \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right]$$

$$= \gamma'\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}$$

$$\therefore \gamma = \gamma'\frac{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}{1 - \frac{\upsilon\cos\theta}{c}} = \gamma_0\frac{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}{1 - \frac{\upsilon\cos\theta}{c}} \qquad (3.56)$$

এখানে $\gamma =$ আপাত কম্পাঙ্ক এবং $\gamma' = \gamma_0 =$ উৎসের প্রকৃত কম্পাঙ্ক।

(3.56) সমীকরণটি হল ডপলার ক্রিয়ার আপেক্ষিকীয় সাধারণ সমীকরণ, কারণ এই সমীকরণ থেকে ডপলার ক্রিয়ার যেকোনও বিশেষ সমীকরণ নির্ণয় করা যায়। নীচে এই ক্ষেত্রগুলির বিষয়ে আলোচনা করা হল।

ক্ষেত্র-1. ধরা যাক, নিরীক্ষক (P) উৎস (O′) এর সম্মুখে x, x′ অক্ষের উপর আছে। সুতরাং এক্ষেত্রে $\theta = 0$ এবং উৎস x, x′ অক্ষ অভিমুখে নিরীক্ষকের দিকে υ বেগে অগ্রসর হচ্ছে [চিত্র 3.6 (a)]। (3.56) সমীকরণ থেকে এক্ষেত্রে আমরা পাই

$$\theta = 0, \quad \cos\theta = 1$$

$$\gamma = \gamma_0\frac{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}{1 - \frac{\upsilon}{c}} = \gamma_0\sqrt{\frac{1 + \frac{\upsilon}{c}}{1 - \frac{\upsilon}{c}}} \qquad (3.57)$$

ক্ষেত্র-2. এক্ষেত্রে আমরা ধরতে পারি যে নিরীক্ষক উৎসের পিছনে (বাঁয়ে) x, x′ অক্ষের উপর আছে। সুতরাং উৎস υ বেগে নিরীক্ষক থেকে দূরে যায় এবং আলোক এই বেগের বিপরীত দিকে নিরীক্ষকের নিকট পৌঁছোয়। [চিত্র 3.6 (b)]। কাজেই, এক্ষেত্রে $\theta = \pi$, $\cos\theta = -1$

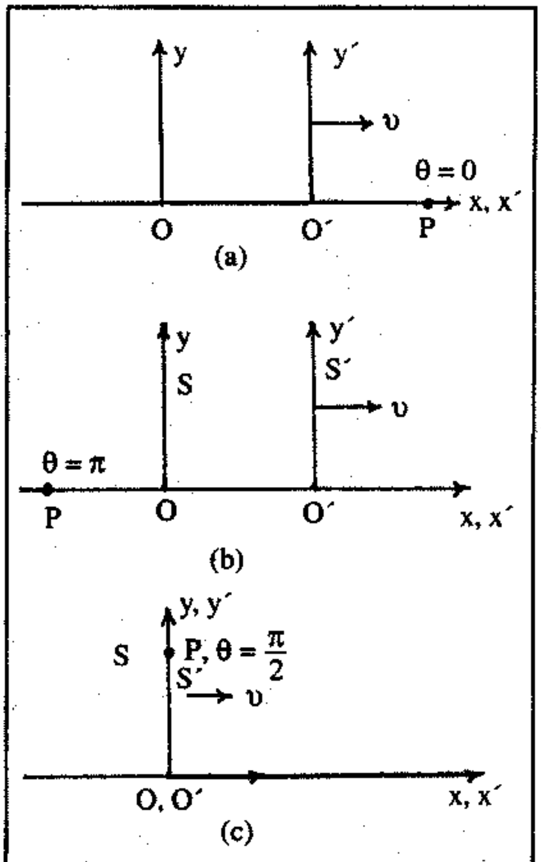
এবং $$\gamma = \gamma_0 \frac{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}{1+\frac{\upsilon}{c}} = \gamma_0\sqrt{\frac{1-\frac{\upsilon}{c}}{1+\frac{\upsilon}{c}}} \qquad (3.58)$$

ক্ষেত্র-3. এক্ষেত্রে নিরীক্ষক দ্বারা প্রাপ্ত আলোকের দিক উৎসের গতির সমকোণে ধরা যায় [চিত্র 3.6 (c)]। অর্থাৎ এক্ষেত্রে $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\cos\theta = 0$

সুতরাং (3.56) সমীকরণ থেকে আমরা পাই

$$\gamma = \gamma_0\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} \qquad (3.59)$$

(3.59) সমীকরণটিকে আমরা অনুপ্রস্থ বা লম্বমুখী (Transverse) ডপলার ক্রিয়া বলতে পারি। আপনাদের নিশ্চয়ই মনে আছে যে ডপলার ক্রিয়ার আলোচনার শুরুতে আমরা বলেছিলাম যে যখন নিরীক্ষক দ্বারা উৎস থেকে প্রাপ্ত আলোকের দিক ও নিরীক্ষকের সাপেক্ষে উৎসের গতির দিক একই অক্ষ বা সরলরেখা অভিমুখে হয়, তখন ডপলার ক্রিয়াকে অনুদৈর্ঘ্য বা ব্যাসার্ধমুখী ডপলার ক্রিয়া বলে। আমরা প্রথমে সনাতন পদ্ধতিতে অর্থাৎ গ্যালিলিয়ো রূপান্তর দ্বারা ব্যাসার্ধমুখী ডপলার ক্রিয়ার সূত্র নির্ণয় করেছি এবং তারপর আপেক্ষিকীয় তত্ত্বদ্বারা এই সূত্র কিরূপ সংশোধিত হয়, তা দেখিয়েছি। আবার ডপলার ক্রিয়ার আপেক্ষিক সাধারণ সূত্র অর্থাৎ (3.56) সমীকরণ থেকেও $\theta = 0$ এবং $\theta = \pi$ বসিয়ে আমরা যথাক্রমে (3.57) এবং (3.58) এই দুটি ব্যাসার্ধমুখী ডপলার ক্রিয়ার সমীকরণ পাই।



চিত্র 3.6 ব্যাসার্ধমুখী ও লম্বমুখী ডপলার ক্রিয়া

অন্যদিকে (3.56) সমীকরণে $\theta = \frac{\pi}{2}$ বসিয়ে আমরা (3.59) সমীকরণটি পাই। এখানে উৎস υ আপেক্ষিক বেগে যে দিকে যায়, তার লম্ব অভিমুখে আলোক নিরীক্ষকের নিকট পৌঁছোয়। এজন্যই এই ডপলার ক্রিয়ার নাম দেওয়া হয়েছে অনুপ্রস্থ বা লম্বমুখী ডপলার ক্রিয়া। লম্বমুখী ডপলার ক্রিয়ার দুটি

বিশেষ বৈশিষ্ট্য আছে। প্রথমত এটি সনাতন পদ্ধতি অর্থাৎ গ্যালিলিয়ো রূপান্তর সূত্রদ্বারা পাওয়া যায় না। অর্থাৎ গ্যালিলিয়ো রূপান্তর অনুযায়ী লম্বমুখী ডপলার ক্রিয়া হয় না। এর সত্যতা আমরা (3.59) সমীকরণ থেকেও দেখতে পারি। গ্যালিলিয়ো রূপান্তরে c-র তুলনায় υ অত্যন্ত ক্ষুদ্র ($\upsilon << c$)। সুতরাং (3.59) সমীকরণে আমরা $\frac{\upsilon^2}{c^2}$ উপেক্ষা করতে পারি। ফলে এক্ষেত্রে $\gamma = \gamma_0$ ।

(3,59) সমীকরণের দ্বিতীয় বৈশিষ্ট্য হল এই যে এখানে ডপলার কম্পাঙ্ক পরিবর্তন $\frac{\upsilon}{c}$-র দ্বিতীয় ঘাতের উপর নির্ভরশীল (অন্যদিকে লক্ষ করুন ব্যাসার্ধমুখী ডপলার ক্রিয়া $\frac{\upsilon}{c}$-র প্রথম ঘাতের উপর নির্ভরশীল)। ফলে υ-র মান c-র মানের কাছাকাছি না হলে লম্বমুখী ডপলার ক্রিয়া প্রত্যক্ষ করা অত্যন্ত কঠিন। এতৎ সত্ত্বেও 1938 খ্রিস্টাব্দে আইভিস (Ives) নামে একজন রাশিয়ান বিজ্ঞানী প্রথম পরীক্ষামূলকভাবে এই ক্রিয়ার সত্যতা প্রমাণ করতে সমর্থ হন। লম্বমুখী ডপলার ক্রিয়া একমাত্র আপেক্ষিকতা তত্ত্বের দ্বারা পাওয়া যায়। সুতরাং পরীক্ষার দ্বারা এই ক্রিয়ার সত্যতা নিরূপণ আপেক্ষিকতা তত্ত্বের নির্ভুলতা এবং সনাতন তত্ত্বের সীমাবদ্ধতা প্রকাশ করে।

আমরা (3.56) সমীকরণ এবং এ থেকে প্রাপ্ত অন্যান্য সমীকরণগুলিতে কেবল ডপলার কম্পাঙ্ক পরিবর্তনের কথাই আলোচনা করেছি। এই সমীকরণগুলিকে আপনারা $\lambda\gamma = c$ বা $\lambda = \frac{c}{\gamma}$ সম্বন্ধদ্বারা সহজেই ডপলার ক্রিয়ার তরঙ্গদৈর্ঘ্যের (λ-র) সমীকরণে পরিবর্তিত করতে পারেন। এ থেকে আপনারা পূর্বে আলোচিত তরঙ্গদৈর্ঘ্যের সমীকরণগুলিও পেয়ে যাবেন। সেজন্য এখানে এই তরঙ্গদৈর্ঘ্যের সমীকরণগুলি নির্ণয় করে দেখানোর প্রয়োজন নেই।

3.5.2 আলোকের অপেরণের সাধারণ সমীকরণ

আপনারা প্রথম পরিচ্ছেদে পাঠ করেছেন যে সূর্যের চারপাশে পৃথিবীর (υ বেগ সহ) বার্ষিক গতির জন্য আকাশের কোনও নক্ষত্র থেকে পৃথিবীতে যে আলোক আসে তা তার প্রকৃত দিক থেকে খানিকটা সরে যায়। নক্ষত্রের আলোকের দিকের এই বিচ্যুতিকেই অপেরণ বলে। 1727-1728 খ্রিস্টাব্দের বিভিন্ন সময়ে গ্যামা ড্র্যাকনিস (γ-Draconis) নামে পৃথিবীর সুবিন্দুতে (zenith) অবস্থিত একটি নক্ষত্রের গতি পরিমাপ করে জ্যোতির্বিজ্ঞানী ব্র্যাডলি (Bradley) প্রথম নক্ষত্রের অপেরণ আবিষ্কার করেন। ব্র্যাডলির গণনা অনুযায়ী পৃথিবীর সুবিন্দুতে অবস্থিত একটি নক্ষত্রের অপেরণ হবে

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{\upsilon}{c} \qquad (3.60)$$

এখানে υ হল পৃথিবীর বার্ষিক গতির বেগ এবং c শূন্য মাধ্যমে আলোকের বেগ।

আমরা জানি যে পৃথিবীর বার্ষিক বেগ $\upsilon \approx 3 \times 10^6 \text{cm/sec}$ এবং $c \approx 3 \times 10^{10} \text{cm/sec}$

$$\text{সুতরাং} \quad \alpha = \tan^{-1}\frac{3\times10^6}{3\times10^{10}} = 20.5''$$

অর্থাৎ নক্ষত্রের অপেরণ খুবই সামান্য।

ব্র্যাডলির (3.61) সূত্রে দুটি শর্ত প্রযোজ্য। এখানে ধরে নেওয়া হয়েছে যে প্রথমত নক্ষত্রটি নিরীক্ষকের সুবিন্দুতে আছে এবং দ্বিতীয়ত এই গণনায় গ্যালিলিয়ো রূপান্তর (অর্থাৎ সনাতন পদার্থবিজ্ঞানের) সূত্রগুলি প্রযোজ্য।

এখন আমরা দেখব যে আপেক্ষিকতা তত্ত্ব অনুযায়ী অপেরণের সাধারণ সূত্র কী হয় এবং এই সূত্র থেকে ব্র্যাডলির সনাতন সমীকরণ (3.60) কিভাবে পাওয়া যায়।

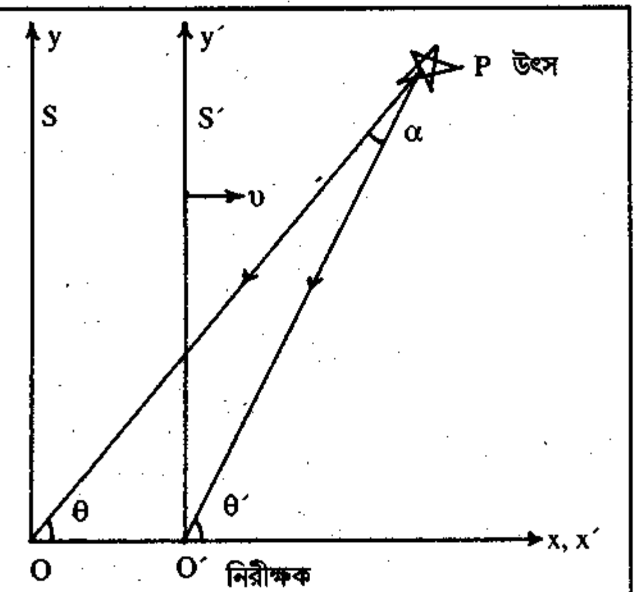
(3.53) সমীকরণকে (3.54) সমীকরণদ্বারা ভাগ করে আমরা পাই,

$$\cot\theta = \gamma\left[\frac{\upsilon}{c}\operatorname{cosec}\theta' + \cot\theta'\right]$$

$$= \frac{\frac{\upsilon}{c}\operatorname{cosec}\theta' + \cot\theta'}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \qquad \left[\because \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right] \qquad (3.61)$$

(3.61) সমীকরণের ক্ষেত্রে নিরীক্ষক S (x, y, z) নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে P বিন্দুতে স্থির আছে এবং উৎস S-এর সাপেক্ষে υ বেগে গতিশীল S′ (x′, y′, z′) নির্দেশতন্ত্রের মূলবিন্দু O′-এ আছে। সুতরাং এই সমীকরণে θ′ আলোকের প্রকৃত দিক ও θ আলোকের আপাত দিক নির্দেশ করে।

কিন্তু অপেরণের ক্ষেত্রে আমরা ধরব যে নক্ষত্রটি (আলোক উৎস) S নির্দেশতন্ত্রের P বিন্দুতে স্থির আছে এবং নিরীক্ষক (পৃথিবী) υ আপেক্ষিক বেগে গতিশীল S′ নির্দেশতন্ত্রের O′ বিন্দুতে আছে। সুতরাং এ ক্ষেত্রে θ আলোকের প্রকৃত দিক ও θ′ নিরীক্ষকের সাপেক্ষে আলোকের আপাত দিক নির্দেশ করবে (চিত্র 3.7)।



চিত্র 3.7 আলোকের অপেরণ

নির্দেশতন্ত্রের এরূপ পরিবর্তনের ফলে (3.61) সমীকরণটিও পরিবর্তিত হয়। আমরা (3.61) সমীকরণে θ-র স্থানে θ′, θ′-এর স্থানে

θ এবং υ-র স্থানে $-\upsilon$ বসিয়ে অপেরণের সমীকরণ পাই। অর্থাৎ অপেরণের সমীকরণ হবে

$$\cot\theta' = \frac{\cot\theta - \frac{\upsilon}{c}\operatorname{cosec}\theta}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \tag{3.62}$$

আলোকের আপাত দিক ও প্রকৃত দিকের মধ্যে পার্থক্যকে আলোকের অপেরণ বলে। সুতরাং অপেরণ

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= \theta' - \theta\\ \theta' &= \alpha + \theta\end{aligned}\right\} \tag{3.63}$$

বা,

(3.63) সমীকরণ থেকে θ'-এর মান (3.62) সমীকরণে বসিয়ে আমরা পাই

$$\cot(\alpha+\theta) = \frac{\cot\theta - \frac{\upsilon}{c}\operatorname{cosec}\theta}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \tag{3.64}$$

(3.64) সমীকরণের $\cot(\alpha+\theta)$-কে ভেঙে সমীকরণটি নূতন করে সাজালে আমরা পাই

$$\tan\alpha = \frac{\beta\operatorname{cosec}\theta + \left(\sqrt{1-\beta^2}-1\right)\cot\theta}{\sqrt{1-\beta^2} + (\beta\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta)\cot\theta} \tag{3.65}$$

যেখানে $\beta = \frac{\upsilon}{c}$ ।

θ-র দ্বারা নক্ষত্রের ক্রান্তিবৃত্তীয় তলের (ecliptic plane), অর্থাৎ যে তলে পৃথিবীর কক্ষপথ আছে, তার সাপেক্ষে উন্নতি বোঝায়। যদি সুবিন্দু (zenith)-র (অর্থাৎ এখানে y অক্ষের) সাপেক্ষে নক্ষত্রের নতি ϕ হয়, তবে

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \phi \tag{3.66}$$

(3.65) সমীকরণে θ-র এই মান বসিয়ে আমরা পাই

$$\tan\alpha = \frac{\beta\sec\phi + \left(\sqrt{1-\beta^2}-1\right)\tan\phi}{\sqrt{1-\beta^2} + (\beta\sec\phi - \tan\phi)\tan\phi} \tag{3.67}$$

(3.64), (3.65) ও (3.67) সমীকরণগুলির যেকোনও একটিকে আমরা অপেরণের আপেক্ষিকীয় সাধারণ সমীকরণ হিসাবে ধরতে পারি। এখন আমরা কয়েকটি বিশেষ ক্ষেত্রের কথা আলোচনা করব।

ক্ষেত্র-1. যেহেতু সাধারণভাবে $\beta^2 << 1$, সেজন্য দ্বিপদ রাশির প্রসারণ তত্ত্বদ্বারা $\sqrt{1-\beta^2}$ কে প্রসারিত করে এবং β^2-এর উচ্চতর ঘাতগুলিকে (β^4, β^6 প্রভৃতি) উপেক্ষা করে আমরা পাই

$$\sqrt{1-\beta^2} = \left(1-\beta^2\right)^{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2}\beta^2 \tag{3.68}$$

$\sqrt{1-\beta^2}$ -এর এই মান (3.65) এবং (3.67) সমীকরণদুটিতে বসিয়ে আমরা যথাক্রমে পাই

$$\tan\alpha = \frac{\beta\operatorname{cosec}\theta - \frac{1}{2}\beta^2\cot\theta}{1-\frac{1}{2}\beta^2 + \left(\beta\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta\right)\cot\theta} \tag{3.69}$$

এবং
$$\tan\alpha = \frac{\beta\sec\phi - \frac{1}{2}\beta^2\tan\phi}{1-\frac{1}{2}\beta^2 + \left(\beta\sec\phi - \tan\phi\right)\tan\phi} \tag{3.69}$$

ক্ষেত্র-2. সনাতন সৃতিবিজ্ঞানে $\beta = \frac{v}{c} << 1$ ধরা হয়। সুতরাং এক্ষেত্রে 1-এর তুলনায় β^2 উপেক্ষণীয়। সুতরাং (3.65) ও (3.67) সমীকরণ দুটির রূপ হবে

$$\tan\alpha = \frac{\beta\operatorname{cosec}\theta}{1+\left(\beta\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta\right)\cot\theta} \tag{3.70}$$

বা,
$$\tan\alpha = \frac{\beta\sec\phi}{1+\left(\beta\sec\phi - \tan\phi\right)\tan\phi} \tag{3.71}$$

ক্ষেত্র-3. ধরা যাক, নক্ষত্রটি সুবিন্দুতে (অর্থাৎ y-অক্ষ অভিমুখে) আছে। তাহলে

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ এবং } \phi = 0 \tag{3.72}$$

(3.72) সমীকরণ থেকে θ বা ϕ-এর মানগুলি (3.65) বা (3,67) সমীকরণে বসালে আমরা পাই

$$\tan\alpha = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{3.73}$$

বা,
$$\alpha = \tan^{-1}\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{3.74}$$

সুতরাং কোনও নক্ষত্র যদি পৃথিবীর সুবিন্দুতে থাকে, তবে আপেক্ষিকতা তত্ত্ব অনুযায়ী এর অপেরণের মান (3.74) সমীকরণদ্বারা নির্ধারিত হবে।

ক্ষেত্র-4. নক্ষত্রটি যদি সুবিন্দুতে থাকে এবং যদি আমরা সনাতন সৃতিবিজ্ঞান প্রয়োগ করি, তবে (3.73) বা (3.74) সমীকরণে $\beta^2 \approx 0$ হবে। কাজেই,

$$\tan\alpha = \beta = \frac{\upsilon}{c}$$

$$\text{বা,} \qquad \alpha = \tan^{-1}\frac{\upsilon}{c} \qquad (3.75)$$

এক্ষেত্রে আমরা দেখতে পাচ্ছি যে ব্র্যাডলির সমীকরণটিই আমরা ফিরে পাচ্ছি।

3.6 সারাংশ (Summary)

এই অধ্যায়ে সনাতন পদ্ধতির দ্বারা সৃতিবিদ্যার যে মূল সূত্রগুলি পাওয়া যায়, বিশেষ আপেক্ষিকতা তত্ত্বদ্বারা সেগুলি পুনরায় নির্ণয় বা সংশোধন করা হয়েছে। সনাতন পদ্ধতিতে গ্যালিলিয়ো রূপান্তর সমীকরণগুলি ব্যবহৃত হয়। অপরপক্ষে বিশেষ আপেক্ষিকতা তত্ত্বের দ্বারা সৃতিবিদ্যার কোনও সূত্র নির্ণয় করতে হলে লরেন্টজীয় রূপান্তর সমীকরণ ব্যবহার করা আবশ্যক। আমরা এই অধ্যায়ে প্রথমত কোনও বস্তুর দুটি বেগের সংযোজন সূত্র নিয়ে আলোচনা করেছি। আপেক্ষিকতা তত্ত্বের দ্বারা যে বেগ সংযোজন সূত্র পাওয়া যায়, তা সনাতন বেগ সংযোজন সূত্র থেকে কিছুটা ভিন্ন। যে দুটি নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে এই বেগ পরিমাপ করা হয়, সেই নির্দেশতন্ত্রদুটির আপেক্ষিক বেগ υ যদি আলোকের বেগের (c) তুলনায় উপেক্ষণীয় না হয়, তবে লরেন্টজীয় রূপান্তর সূত্র প্রয়োগ ছাড়া বেগের যথার্থ সংযোজন সূত্র পাওয়া যায় না। কিন্তু υ c-র তুলনায় উপেক্ষণীয় হলে $\left(\frac{\upsilon}{c} << 1\right)$ বেগ সংযোজনের আপেক্ষিকতার সূত্রগুলি সনাতন সূত্রে পর্যবসিত হয়। আরও লক্ষ করুন যে কোনও নির্দেশতন্ত্রে বস্তুর বেগ যদি c হয়, তবে অপর নির্দেশতন্ত্রেও এই বেগ c হবে। সুতরাং c-ই হল এক্ষেত্রে সর্বোচ্চ বেগ।

উৎস ও নিরীক্ষকের মধ্যে আপেক্ষিক বেগ থাকলে আমরা ডপলার ক্রিয়া ও অপেরণ পাই। ডপলার ক্রিয়ার্ ফলে নিরীক্ষকের কাছে উৎসের তরঙ্গের কম্পাঙ্ক ও তরঙ্গদৈর্ঘ্যের পরিবর্তন ঘটে। যদি উৎস ও নিরীক্ষকের মধ্যে আপেক্ষিক গতি আলোকের দিকে হয়, তবে ঐ ডপলার ক্রিয়াকে অনুদৈর্ঘ্য বা ব্যাসার্ধমুখী বলে। আবার উৎস ও নিরীক্ষকের পারস্পরিক বেগের সমকোণে আলোকের দিক থাকলে ঐ ডপলার ক্রিয়াকে অনুপ্রস্থ বা লম্বমুখী বলে। গ্যালিলিয়ো রূপান্তর দ্বারা এই লম্বমুখী ডপলার ক্রিয়া হয় না। লম্বমুখী ডপলার ক্রিয়া হল একমাত্র লরেন্টজীয় রূপান্তর প্রয়োগের ফল। সুতরাং পরীক্ষার দ্বারা এই ক্রিয়ার সত্যতা প্রমাণিত হওয়ায় লরেন্টজীয় রূপান্তরের যাথার্থ্য প্রমাণিত হয়।

উৎস ও নিরীক্ষকের আপেক্ষিক বেগের জন্য নিরীক্ষকের নিকট আগত আলোকের দিক পরিবর্তনকেই অপেরণ বলে এবং আলোকের প্রকৃত দিক ও আপাত দিকের মধ্যে কোণকে অপেরণ

কোণ বা শুধু অপেরণ বলে। পৃথিবীতে কক্ষপথ যে সমতলে আছে, তা থেকে যেকোনও উন্নতি কোণে (θ) অবস্থিত একটি নক্ষত্রের আলোক পৃথিবীতে উপস্থিত কোনও নিরীক্ষকের নিকট (নক্ষত্রের সাপেক্ষে পৃথিবীর বেগ υ ধরলে) যে আপাত দিক থেকে আসবে, লরেন্টজীয় রূপান্তর দ্বারা আমরা তার সাধারণ সমীকরণ পেয়েছি। এই সমীকরণে $\theta = 0$ এবং $\frac{\upsilon^2}{c^2} << 1$ ধরলে আমরা ব্র্যাডলির সনাতন সমীকরণটি পাই।

3.7 প্রশ্নাবলী

আপনি 3নং এককটি পাঠ করে কতটা জ্ঞান অর্জন করতে পেরেছেন, তা নিজেই যাতে পরীক্ষা করতে পারেন, তার জন্য নীচের প্রশ্নগুলি দেওয়া হল। এই প্রশ্নগুলি সংক্ষিপ্ত উত্তর ও বিস্তৃত উত্তর এই দুটি ভাগে বিভক্ত। প্রশ্নগুলির উত্তর আপনি পরের 3.8 অনুচ্ছেদে পাবেন। প্রথমে এই উত্তরগুলি না দেখে নিজেই প্রশ্নগুলির উত্তর লিখুন। পরে আপনার উত্তর 3.8 অনুচ্ছেদের সঙ্গে মিলিয়ে নিন। যদি আপনার উত্তর ভুল হয়ে থাকে, তবে সঠিক উত্তরটি আবার পড়ে নিন। তাহলেই এই এককটি আপনার সম্পূর্ণ আয়ত্ত হয়ে যাবে।

3.7.1 সংক্ষিপ্ত উত্তরের প্রশ্নাবলী

1. সমবেগ ও অসম বেগের পার্থক্য কী?
2. আপেক্ষিক বেগ ও আপেক্ষিকীয় বেগের পার্থক্য কী?
3. সূর্যের সাপেক্ষে পৃথিবী 30km/sec বেগে গতিশীল। যদি এই বেগের দিকে 7km/sec বেগে একটি রকেট ছোঁড়া হয়, তবে সূর্যের সাপেক্ষে রকেটের বেগ কত হবে? [আলোকের বেগ $c = 3 \times 10^{10}$ cm/sec]
4. একটি উত্তপ্ত বস্তু থেকে একই দিকে দুটি ইলেকট্রন নির্গত হল। ঐ বস্তুর সাপেক্ষে একটি ইলেকট্রনের বেগ $5.6 \times 10^8 \text{cm/sec}$. এবং অপরটির বেগ $1.8 \times 10^9 \text{cm/sec}$.। প্রথম ইলেকট্রনের সাপেক্ষে দ্বিতীয়টির আপেক্ষিকীয় আপেক্ষিক বেগ কত?
5. ফ্রেনেলের প্রকল্প অনুযায়ী f-এর মান কত?
6. ডপলার ক্রিয়া কী?
7. একটি রেলগাড়ি প্ল্যাটফর্মের দিকে 60 km/hr বেগে আসার সময় 320/sec কম্পাঙ্কের বাঁশি বাজায়। প্ল্যাটফর্মে স্থির শ্রোতার কানে ঐ শব্দের কম্পাঙ্ক কত হবে? বায়ুতে শব্দের বেগ = 330m/sec.

8. একটি নক্ষত্র পৃথিবীর সাপেক্ষে 300 km/sec বেগে দূরে যাচ্ছে। নক্ষত্রটির একটি তরঙ্গ দৈর্ঘ্য 5000A°, হলে পৃথিবীর নিরীক্ষকের নিকট ঐ তরঙ্গদৈর্ঘ্যের কী পরিবর্তন হবে?

9. ব্যাসার্ধমুখী ও লম্বমুখী ডপলার ক্রিয়া কাকে বলে?

10. ব্র্যাডলির অপেরণের সূত্র কী?

3.7.2 বিস্তৃত উত্তরের প্রশ্নাবলি

1. S নির্দেশতন্ত্রে একটি বস্তুর বেগ u হলে, এই নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে υ বেগে গতিশীল S′ নির্দেশতন্ত্রে ঐ বস্তুর বেগের সনাতন ও আপেক্ষিকীয় সমীকরণ নির্ণয় কর। দেখাও যে $\frac{\upsilon}{c} << 1$ হলে, আপেক্ষিকীয় সমীকরণগুলি সনাতন সমীকরণে রূপান্তরিত হয়।

2. আপেক্ষিকীয় তত্ত্বের দ্বারা ফিজোর গতিশীল জলের মাধ্যমে আলোকের বেগের পরিবর্তন ব্যাখ্যা করুন।

3. আলোক ও বেগের ডপলার ক্রিয়ার পার্থক্য কী?

4. আলোকের ডপলার ক্রিয়ার আপেক্ষিকীয় অনুদৈর্ঘ্য সমীকরণ নির্ণয় করুন।

5. বিশেষ আপেক্ষিকতা তত্ত্বের দ্বারা ডপলার ক্রিয়ার সাধারণ সমীকরণ নির্ণয় করুন।

6. বিশেষ আপেক্ষিকতা তত্ত্বের দ্বারা নক্ষত্রের অপেরণের সাধারণ সমীকরণ নির্ণয় করুন।

3.8 প্রশ্নাবলির উত্তর ও উত্তরের ইঙ্গিত

3.8.1 সংক্ষিপ্ত উত্তর

(3.7.1) প্রশ্নাবলীর সংক্ষিপ্ত উত্তর এখানে দেওয়া হল।

1. যে বেগের মান ও দিক সময়ের সঙ্গে পরিবর্তিত হয় না, তাকে সমবেগ বলে। আর এই মান বা দিক বা উভয়ই যদি সময়ের সঙ্গে পরিবর্তিত হয়, তবে ঐ বেগকে অসম বলে।

2. দুটি বস্তুর একটির বেগ u এবং অপরটির বেগ υ হলে দ্বিতীয় বস্তুর আপেক্ষিক বেগ $\upsilon - u$ এবং প্রথম বস্তুর আপেক্ষিক বেগ $u - \upsilon$। অপরপক্ষে যে বেগ (υ) আলোকের বেগের (c-র) কাছাকাছি, তাকেই আপেক্ষিকীয় বেগ বলে। এক্ষেত্রে $\frac{\upsilon}{c} \sim 1$।

3. রকেটের বেগ = 37 km/sec. [সনাতন পদ্ধতিতে]

   = 36.99999991 km/sec [আপেক্ষিকীয় সমীকরণ দ্বারা]

4. দ্বিতীয় ইলেকট্রনের বেগ = 12.4139×10^8 cm/sec.

5. $f = 0.44$

6. (3.4) অনুচ্ছেদ দেখুন

7. (3.24) সমীকরণ দেখুন/ $\gamma' = 337 / sec.$

8. (3.33) সমীকরণ দেখুন। $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 5.005A^\circ$ (সনাতন সমীকরণ অনুযায়ী) আপেক্ষিকীয় সমীকরণ (3.40) অনুযায়ী $\Delta\lambda = 5.0025A^\circ$

9. (3.43) অনুচ্ছেদ ও (3.59) সমীকরণের আলোচনা দেখুন।

10. $\alpha = \tan^{-1}\frac{\upsilon}{c}$

3.8 বিস্তৃত উত্তর

(3.7.2) প্রশ্নাবলীর বিস্তৃত উত্তরের ইঙ্গিত।

1. (3.2) বেগ সংযোজন অনুচ্ছেদ দেখুন।
2. (3.3) অনুচ্ছেদ দেখুন।
3. (3.4.2) অনুচ্ছেদ দেখুন।
4. (3.4.3) ও (3.4.4) অনুচ্ছেদ দুটি দেখুন।
5. (3.5) ও (3.5.1) অনুচ্ছেদ দেখুন।
6. (3.5) ও (3.5.2) অনুচ্ছেদ দেখুন।

একক 4 ❑ আপেক্ষকীয় গতিবিদ্যা

গঠন

4.1 প্রস্তাবনা ও উদ্দেশ্য

4.2 নিউটনের গতিসূত্র

4.3 নিউটনের গতিসূত্রগুলির গ্যালিলিয়ো রূপান্তর

4.4 নিউটনের গতিসূত্রগুলির লরেন্টজীয় রূপান্তর

4.5 বেগের উপর ভরের নির্ভরশীলতার সূত্র

4.6 বেগের উপর ভরের নির্ভরশীলতার সূত্রের পরীক্ষা

4.7 আইনস্টাইনের ভর ও শক্তির সম্বন্ধ

4.8 আইনস্টাইনের ভর ও শক্তির তুল্যতাসূত্রের সত্যতা পরীক্ষা

4.8.1 ককক্রফট্ ও ওয়ালটনের পরীক্ষা

4.8.2 কম্পটন ক্রিয়া

4.8.3 শক্তির জড়ত্ব প্রাপ্তি

4.8.4 নিউক্লীয় ফিসন পারমাণবিক বোমা ও নিউক্লীয় রিঅ্যাকটর

4.8.5 নিউক্লীয় সংযোজন ও হাইড্রোজেন বোমা

4.9 কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ আপেক্ষিকীয় সমীকরণ

4.9.1 ভর ও বেগের সমীকরণ

4.9.2 গতীয় শক্তির সমীকরণ

4.9.3 স্থৈতিক শক্তির সমীকরণ ও ভর ও শক্তির নিত্যতা সূত্র

4.9.4 বস্তুর মোট শক্তির সমীকরণ

4.9.5 ডিরাকের সমীকরণ

4.10 মিনকওস্কির চতুর্মাত্রিক জগত

4.10.1 ত্রিমাত্রিক ইউক্লিডীয় দেশ ও জ্যামিতি

4.10.2 চতুর্মাত্রিক ছদ্ম-ইউক্লিডীয় দেশ-কাল ও জ্যামিতি

4.10.3 চতুর্মাত্রিক অবকাশের লরেন্টজীয় রূপান্তর

4.10.4 চতুর্মাত্রিক বেগ

4.10.5 চতুর্মাত্রিক ত্বরণ

4.10.6 চতুর্মাত্রিক ভরবেগ

4.10.7 চতুর্মাত্রিক বল

4.11 মিনকওস্কির জগতে নিউটনের গতিসূত্রগুলির লরেন্টজীয় রূপান্তর

4.11.1 প্রথম গতিসূত্র

4.11.2 দ্বিতীয় গতিসূত্র

4.11.3 তৃতীয় গতিসূত্র

4.12 4-ভরবেগ সমীকরণ দ্বারা ভর ও বেগের সম্বন্ধ নির্ণয়

4.13 সারাংশ

4.14 প্রশ্নাবলি

4.15 উত্তর

4.1 প্রস্তাবনা ও উদ্দেশ্য

তিন এককে আপনারা আপেক্ষিকীয় গতিবিদ্যার সূত্রগুলি নিয়ে আলোচনা পড়েছেন। এই এককে আপনারা আপেক্ষিকীয় বলাবিদ্যার প্রধান সূত্রগুলি নিয়ে আলোচনা পাবেন।

এই এককটি পাঠ করলে আপনারা যে বিষয়গুলি বুঝতে বা করতে পারবেন সেগুলি হল—

(1) আপেক্ষিকীয় বলবিজ্ঞানে লরেন্টজীয় রূপান্তরের প্রয়োজনীয়তা ;

(2) নিউটনীয় বলবিজ্ঞানের ত্রুটি কী ও কীরূপে এই ত্রুটি দূর করা যায় ;

(3) কী কারণে ভরের নিত্যতা সূত্র বর্জিত হল এবং কীরূপে বেগের সঙ্গে ভরের সম্বন্ধ নির্ণয় করা হল ;

(4) ভরের বৃদ্ধির দ্বারা কীভাবে গতীয় শক্তির বৃদ্ধি হয় ;

(5) স্থির ভর কী ও এর সঙ্গে শক্তির সম্পর্ক কী ;

(6) ভর ও শক্তির তুল্যতা সূত্র কীভাবে পাওয়া যায় ;

(7) ভর ও শক্তির যুগ্মভাবে নিত্যতাসূত্র বলতে কী বোঝায় ;

(8) ভর ও শক্তির সম্বন্ধগুলি কিভাবে পরীক্ষিত সত্যে পরিণত হয়েছে ;

(9) ভর ও শক্তির সম্বন্ধ থেকে আরও কী কী প্রয়োজনীয় সমীকরণ নির্ণয় করা যায় ;

(10) মিনকওস্কির চতুর্মাত্রিক দেশ-কালের ধারণা ও বৈশিষ্ট্য ;

(11) চতুর্মাত্রিক বেগ, ভরবেগ প্রভৃতির সংজ্ঞা

(12) নিউটনের দ্বিতীয় ও তৃতীয় গতিসূত্রের সংশোধন।

4.2 নিউটনের গতিসূত্র (Newton's Laws of Motion) :

নিউটনকে আমরা গতিবিদ্যার জনক বলি। এই গতিবিদ্যা নিউটনের প্রস্তাবিত তিনটি গতিসূত্রের উপর ভিত্তি করে প্রতিষ্ঠিত। যদিও আপনারা এই গতিসূত্রগুলি পূর্বেই পাঠ করেছেন, তবু আপনাদের আর একবার স্মরণ করিয়ে দেবার জন্য এবং আপেক্ষিকীয় গতিবিদ্যার ভূমিকা হিসাবে এই সূত্র তিনটি এখানে উল্লেখ করা হল।

প্রথম সূত্র : বাইরে থেকে বল প্রয়োগ না করা হলে স্থির বস্তু চিরকাল স্থির থাকবে এবং সমবেগে গতিশীল বস্তু চিরকাল ঐ সমবেগে একই সরলরেখা ধরে চলবে।

দ্বিতীয় সূত্র : ভরবেগের পরিবর্তনের হার প্রযুক্ত বলের সমানুপাতিক এবং ভরবেগের এই পরিবর্তন যেদিকে ঘটে, ঐ বলও সেদিকেই ক্রিয়া করে।

তৃতীয় সূত্র : প্রত্যেক ক্রিয়ারই একটি সমান ও বিপরীত প্রতিক্রিয়া আছে।

আপনারা জানেন যে প্রথম সূত্র থেকে আমরা বস্তুর জাড্য ও বলের সংজ্ঞা পাই। দ্বিতীয় সূত্র থেকে বলের মান ও দিক জানা যায়। অর্থাৎ যদি F দ্বারা এই বল প্রকাশ করা হয়, তবে ঐ বলের একক এমনভাবে নির্দিষ্ট করা যায়, যার ফলে আমরা পাই

$$F = \frac{dp}{dt} = m\frac{dv}{dt} = ma \qquad ...(4.1)$$

যেখানে $p = mv = m$ ভরযুক্ত ও v বেগে গতিশীল বস্তুর ভরবেগ এবং a হল বস্তুর ত্বরণ। t সময়ে বস্তুর সরণ x হলে, ঐ অভিমুখে বস্তুর বেগ ও ত্বরণ হবে যথাক্রমে

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \qquad ...(4.2)$$

এবং $$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \qquad ...(4.3)$$

(4.1) সমীকরণকে (4.3) সমীকরণদ্বারা লেখা যায়

$$F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \qquad ...(4.4)$$

এছাড়া আপনারা জানেন যে নিউটনের তৃতীয় সূত্রকে দ্বিতীয় সূত্রের দ্বারা রূপান্তরিত করলে আমরা ভরবেগের সংরক্ষণের সূত্র পাই। এই হিসাবে তৃতীয় সূত্রকে আমরা ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্রও বলতে পারি।

নিউটনের সূত্রে যে বস্তুর কথা বলা হয়েছে, সেগুলি অতি সূক্ষ্ম কণা থেকে আরম্ভ করে আকাশের গ্রহ-নক্ষত্র বা অন্য কোনও জ্যোতিষ্ক হতে পারে। সাধারণত এইসব বস্তুর বেগ আলোকের বেগের তুলনায় যৎসামান্য এবং এরূপ ক্ষেত্রে নিউটনের বলবিদ্যা সম্পূর্ণ প্রযোজ্য। কিন্তু পরবর্তীকালে ইলেকট্রন, নিউট্রন, প্রোটন ও পারমাণবিক স্তরে এমনসব আরও অতি সূক্ষ্ম কণা আবিষ্কৃত হয়েছে, দেখা যায় যে, সেগুলির বেগের সর্বোচ্চ মান আলোকের বেগের প্রায় সমান। এরূপ অতি উচ্চ বেগসম্পন্ন কণার ক্ষেত্রে নিউটনের বল প্রয়োগ করে সঠিক ফল পাওয়া যায় না, কিন্তু আইনস্টাইনের আপেক্ষিকতা তত্ত্ব সম্পূর্ণরূপে প্রযোজ্য হয়। নিউটনের বলবিদ্যাকে আপেক্ষিকতা তত্ত্বের দ্বারা সংশোধন করে যে বলবিদ্যা পাওয়া যায়, তাকে আমরা আপেক্ষিকীয় বলবিদ্যা বলব এবং নিউটনের বলবিদ্যাকে প্রাচীন বা সনাতন বলবিদ্যা হিসাবে উল্লেখ করব।

নিউটনের গতিসূত্রগুলি যদিও সাধারণ বেগ সম্পন্ন বস্তুর ক্ষেত্রে প্রযোজ্য হয়, তাহলেও দেখা যায় যে সকল নির্দেশতন্ত্রে এই সূত্রগুলি খাটে না। উদাহরণস্বরূপ রেলগাড়িতে ভ্রাম্যমান একজন যাত্রীর কয়েকটি অভিজ্ঞতার বিষয় আমরা আলোচনা করতে পারি। রেলগাড়ি যতক্ষণ কোনও সমবেগে একটি নির্দিষ্ট দিকে চলতে থাকে, যাত্রীটি কামরার ভিতর তার আসনে বসে থেকে সেই বেগ অনুভব করতে পারে না। (এখানে আমরা ধরে নিচ্ছি যে যাত্রীটি বাইরের গাছপালা বা অন্য কোনও দ্রষ্টব্য বস্তুর দিকে তাকাচ্ছে না।) এই অবস্থায় যাত্রীটি যদি তার হাত থেকে একটি বল উপরদিকে ছুঁড়ে দেয়, তাহলে পরক্ষণেই দেখবে যে বলটি আবার তার হাতেই ফিরে এসেছে, পিছনে চলে যাচ্ছে না। যদি রেলগাড়ির বাইরে স্থির মাটির উপর দাঁড়িয়ে অন্য একজন নিরীক্ষক রেলগাড়ির যাত্রীটির অনুরূপ একটি পরীক্ষা করে, তবে সেও যাত্রীটির মতো একই ফল পাবে। অর্থাৎ এই নিরীক্ষক যদি তার হাতের একটি বল উপর দিকে ছুঁড়ে দেয়, তবে এক্ষেত্রেও বলটি ঐ নিরীক্ষকের হাতেই ফিরে আসবে। অনুরূপে আমরা দেখাতে পারি যে পৃথিবীর সাপেক্ষে স্থির একজন নিরীক্ষক বলবিজ্ঞানের যেকোনও একটি পরীক্ষা করে যে ফল পাবে, এই নিরীক্ষকের সাপেক্ষে সমবেগে গতিশীল ঐ রেলগাড়ীর যাত্রীটিও বলবিজ্ঞানের অনুরূপ পরীক্ষার দ্বারা স্থির নিরীক্ষকের মতো একই ফল পাবে।

এখন ধরা যাক, রেলগাড়ির ড্রাইভার কোনও কারণে গাড়িটি থামাবার প্রয়োজনে হঠাৎ ব্রেক প্রয়োগ করল এবং তার ফলে গাড়ির বেগ দ্রুত হারে কমতে লাগল। কামরার যাত্রীটি কিন্তু এই সময় কোনও দিকে না তাকিয়েও তার শরীরে একটি বল অনুভব করবে এবং তার আসন থেকে সামনের দিকে পড়ে যাওয়ার অবস্থা হবে। এই অবস্থায় যাত্রীটি যদি তার হাতের বলটি উপর দিকে

ছুঁড়ে দেয়, তাহলে দেখবে যে সেটি তার হাতে ফিরে আসছে না, সামনের দিকে এগিয়ে গিয়ে মেঝেতে পড়ে যাচ্ছে।

আমরা যেকোনও বস্তুর একটি বিন্দুর মধ্য দিয়ে তিনটি পরস্পর সমকোণী অক্ষবিশিষ্ট কার্টেজীয় (বা অন্য কোনও) নির্দেশতন্ত্র গঠন করতে পারি। একটি বস্তু অন্য একটি বস্তুর সাপেক্ষে গতিশীল হলে এদের নির্দেশতন্ত্র দুটিও একে অপরের সাপেক্ষে গতিশীল হয়। উপরের উদাহরণে আমরা রেলগাড়ির বাইরে স্থির নিরীক্ষকের জন্য ঐ স্থানে একটি নির্দেশতন্ত্র S এবং চলন্ত রেলগাড়ির কামরাতে একটি নির্দেশতন্ত্র S′ স্থাপন করতে পারি। যদি এই দুটি নির্দেশতন্ত্রের x ও x′-অক্ষ দুটি রেলগাড়ির বেগের অভিমুখে হয় এবং পৃথিবীর সাপেক্ষে রেলগাড়ির বেগ v হয়, তবে আমরা বলতে পারি যে S′ নির্দেশতন্ত্র S নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে v বেগে চলছে। অনুরূপে পৃথিবীর সাপেক্ষে যদি রেলগাড়ির মন্দন (বা ত্বরণ) a হয়, তবে আমরা বলব যে S নির্দেশতন্ত্র S নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে a মন্দন (বা ত্বরণ) নিয়ে চলেছে। পৃথিবীর আহ্নিক ও বার্ষিক গতি এবং আকর্ষণ উপেক্ষা করলে আমরা দেখাতে পারি যে S নির্দেশতন্ত্রে নিউটনের গতিসূত্রগুলি সত্য। অনুরূপে, S′ নির্দেশতন্ত্র S নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে v সমবেগে চলতে থাকলে, সেখানেও নিউটনের গতিসূত্রগুলি সমভাবে সত্য হয়। অপর পক্ষে যদি S′ নির্দেশতন্ত্রের কোনও ত্বরণ বা মন্দন থাকে, তবে এই নির্দেশতন্ত্রে নিউটনের গতিসূত্রগুলি সত্য হয় না।

যে নির্দেশতন্ত্রগুলিতে নিউটনের গতিসূত্রগুলি সত্য হয়, সেই নির্দেশতন্ত্রগুলিকে জাড্যিক নির্দেশতন্ত্র (Inertial frame of reference) বলে। আর যে নির্দেশতন্ত্রগুলিতে নিউটনের গতিসূত্রগুলি খাটে না, সেগুলিকে অজাড্যিক নির্দেশতন্ত্র (Non-inertial frame of reference) বলে।

সূক্ষ্মদৃষ্টিতে লক্ষ করলে পৃথিবীকে একটি প্রকৃত স্থির জাড্যিক নির্দেশতন্ত্র বলা যায় না। কারণ, পৃথিবীর উপরস্থ প্রত্যেক বস্তুর উপর এর অভিকর্ষজ বল ক্রিয়া করে। তাছাড়া এর আহ্নিক ও বার্ষিক গতির জন্য আরও দুটি কেন্দ্রাতিগ বল প্রত্যেক বস্তুর উপর ক্রিয়া করে। এজন্য নিউটনও পৃথিবীকে একটি জাড্যিক নির্দেশতন্ত্র হিসাবে গ্রহণ করেননি। তাছাড়া নিউটনের মহাকর্ষ তত্ত্ব অনুযায়ী মহাবিশ্বের প্রত্যেক বস্তুই অপর বস্তুকে আকর্ষণ করে। সুতরাং মহাবিশ্বের কোনও বস্তুই প্রকৃত জাড্যিক নির্দেশতন্ত্র নয়। তবুও তিনি বিশ্বাস করতেন যে মহাশূন্যে একটি পরম স্থির নির্দেশতন্ত্র আছে এবং সেখানে তাঁর গতিসূত্রগুলি পরম সত্য। শূন্যের মধ্য দিয়েও আলোক তরঙ্গ যেতে পারে। কিন্তু তরঙ্গ বিস্তারের জন্য একটি মাধ্যম দরকার—এই ধারণা থেকেই ধরে নেওয়া হয় যে মহাশূন্যও 'ইথার' (Ether) নামক একটি মাধ্যম দ্বারা পরিপূর্ণ। ম্যাক্সওয়েলের তড়িচ্চুম্বকীয় তরঙ্গ তত্ত্ব দ্বারাই এই 'ইথার' তত্ত্ব নূতনভাবে প্রতিষ্ঠা লাভ করে। তখন ধরা হয় যে ইথারই হল সেই পরম স্থির নির্দেশতন্ত্র, যার সাপেক্ষে পৃথিবী বা অন্য প্রত্যেক বস্তুর একটি পরম বেগ আছে। পরবর্তীকালে মাইকেলসন ও মর্লে

আয়নার সাহায্যে আলোকের প্রতিফলন ঘটিয়ে ইথারের সাপেক্ষে পৃথিবীর পরম বেগ নির্ণয়ের পরীক্ষা করেন। কিন্তু তাঁদের প্রচেষ্টা ব্যর্থ হন। আইনস্টাইন তাঁর আপেক্ষিকতা তত্ত্বে মাইকেলসন-মর্লের পরীক্ষার ফল গ্রহণ করেন এবং ইথার তত্ত্ব সহ বস্তুর পরম বেগের ধারণা পরিত্যাগ করেন। এ বিষয়ে দ্বিতীয় পরিচ্ছেদে আপনারা বিশদ আলোচনা পেয়েছেন।

4.3 নিউটনের গতিসূত্রগুলির সনাতন বা গ্যালিলিয়ো রূপান্তর (Classical or Galilean Transformation & Newton's Laws of Motion) ঃ

বিভিন্ন জাড্যিক নির্দেশতন্ত্রের ধারণা প্রথম গ্যালিলিয়ো প্রতিষ্ঠা করেন। তিনি সময়কে নির্দেশতন্ত্র নিরপেক্ষ একটি রাশি (অর্থাৎ পরম রাশি) হিসেবে ধরে ছিলেন। ফলে $s(x, y, z)$ নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে $S'(x', y', z')$ নির্দেশতন্ত্র x, x' অক্ষের অভিমুখে v সমবেগে চলতে থাকলে, S' নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে স্থির একটি বিন্দু $P(x', y', z')$-এর স্থানাঙ্কগুলি S-এর সাপেক্ষে হবে

$$x' = x - vt,$$

$$y' = y,$$

$$z' = z \qquad \text{...(4.5)}$$

এবং $$t' = t$$

এগুলিকেই আমরা গ্যালিলিয়ো রূপান্তর সমীকরণ বলেছি। আমরা এখন দেখাব যে এই রূপান্তর দ্বারা নিউটনের গতিসূত্রগুলি অপরিবর্তিত থাকে।

প্রথম গতি সূত্রের রূপান্তর পরীক্ষা ঃ

ধরা যাক, S নির্দেশতন্ত্রে একটি কণা $\vec{u}$ সমবেগে চলছে এবং বাইরে থেকে এর উপর কোনো বল ক্রিয়া করছে না। ধরা যাক পূর্বের সংজ্ঞা অনুযায়ী S নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে S' নির্দেশতন্ত্র x, x' অভিমুখে v সমবেগে যাচ্ছে। ধরা যাক, S' নির্দেশতন্ত্রে t' সময়ে কণাটির বেগ $\vec{u}'$। এখন আমরা (4.5) সমীকরণগুলি থেকে $t' = t$-র সাপেক্ষে x', y' ও z'-এর অন্তরকলন করে পাই

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - v \quad \text{বা,} \quad u'_x = u_x - v$$

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt} \quad \text{বা,} \quad u'_y = u_y \qquad \text{...(4.6)}$$

এবং $$\frac{dz'}{dt} = \frac{dz}{dt} \quad \text{বা,} \quad u'_z = u_z$$

যেখানে u_x, u_y ও u_z হল যথাক্রমে x, y ও z অক্ষের দিকে $\vec{u}$-র উপাংশ এবং অনুরূপ u'_x, u'_y ও u'_z হল $\vec{u'}$-এর উপাংশ। এখন x, x′ অক্ষের দিকে একক ভেক্টর $\vec{i} = \vec{i'}$, y, y′ অক্ষের দিকে একক ভেক্টর $\vec{j} = \vec{j'}$ এবং z, z′ অক্ষের দিকে একক ভেক্টর $\vec{k} = \vec{k'}$ ধরলে আমরা পাই—

$$\vec{u'} = \vec{i'}u'_x + \vec{j'}u'_y + \vec{k'}u'_z = \vec{i}(u_x - \upsilon) + \vec{j}\,u_y + \vec{k}\,u_z$$

$$= \vec{i}\,u_x + \vec{j}\,u_y + \vec{k}\,u_z - \vec{i}\,\upsilon = \vec{u} - \vec{\upsilon} = \text{ সমবেগ} \qquad ...(4.7)$$

কারণ $\vec{u}$ ও $\vec{v}$ উভয়েই সমবেগ।

কাজেই S নির্দেশতন্ত্রে নিউটনের প্রথম গতিসূত্র সত্য হলে, S′ নির্দেশতন্ত্রেও গতিসূত্রটি সত্য।

দ্বিতীয় গতি সূত্রের রূপান্তর পরীক্ষা :

ধরা যাক, S নির্দেশতন্ত্রে কণাটির ভর m, বেগ $\vec{u}$ এবং ভরবেগ $\vec{p} = m\vec{u}$ । যদি কণাটির এই বেগের পরিবর্তন হয়, তবে এর ভরবেগও পরিবর্তিত হবে। যদি কণার উপর প্রযুক্ত বল $\vec{F}$ হয়, তবে দ্বিতীয় সূত্র অনুযায়ী

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{u}}{dt}$$

$$= m\left(\vec{i}\,\frac{du_x}{dt} + \vec{j}\,\frac{du_y}{dt} + \vec{k}\,\frac{du_z}{dt}\right) \qquad ...(4.8)$$

এখান আমরা ভরের সংরক্ষণ সূত্র অনুযায়ী ধরে নিয়েছি যে m ধ্রুবক অর্থাৎ এটি বেগের উপর নির্ভর করে না।

এখানে S′ নির্দেশতন্ত্রে যদি কণাটির উপর প্রযুক্ত বল $\vec{F'}$ ধরা হয়, তবে আমরা (4.8) সমীকরণ অনুসরণ করে লিখতে পারি

$$\vec{F'} = \frac{d\vec{p'}}{dt} = m\left(\vec{i'}\,\frac{du'_x}{dt} + \vec{j'}\,\frac{du'_y}{dt} + \vec{k'}\,\frac{du'_z}{dt}\right) \qquad ...(4.9)$$

এখানেও আমরা ভরের সংরক্ষণ সূত্র আরোপ করে ভরকে নির্দেশতন্ত্র নিরপেক্ষ ধরেছি।

এখানে প্রত্যেক অক্ষযুগল $x' \parallel x, y' \parallel y$ এবং $z' \parallel z$ ধরে নিলে একক ভেক্টর $\vec{i'} = \vec{i}, \vec{j'} = \vec{j}$

এবং $\vec{k}' = \vec{k}$ হবে। তাছাড়া গ্যালিলিয়ো রূপান্তর দ্বারা প্রাপ্ত (4.6) সমীকরণের মানগুলি (4.9) সমীকরণে বসালে আমরা পাই

$$\vec{F}' = m\left\{\vec{i}\frac{d}{dt}(u_x - \upsilon) + \vec{j}\frac{du_y}{dt} + \vec{k}\frac{du_z}{dt}\right\}$$

$$= m\left(\vec{i}\frac{du_x}{dt} + \vec{j}\frac{du_y}{dt} + \vec{k}\frac{du_z}{dt}\right) = \vec{F} \qquad ...(4.10)$$

কারণ v সমবেগ হওয়ায় $\frac{dv}{dt} = 0$

(4.10) সমীকরণ থেকে আমরা দেখতে পাচ্ছি যে S ও S′ উভয় নির্দেশতন্ত্রেই বলের মান অপরিবর্তিত থাকছে। অর্থাৎ ভরের সংরক্ষণ সূত্র ধরে নিলে গ্যালিলিয়ো রূপান্তর দ্বারা নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্রের কোনও পরিবর্তন হয় না।

তৃতীয় গতিসূত্রের রূপান্তর পরীক্ষা ঃ

এখন দেখা যাক, তৃতীয় গতিসূত্রের ক্ষেত্রে গ্যালিলিয়ো রূপান্তর প্রয়োগ করলে কী ফল হয়। আমরা পূর্বেই উল্লেখ করেছি যে তৃতীয় সূত্রটি হল আসলে দুই বা ততোধিক বস্তুর মধ্যে ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়ার ক্ষেত্রে মোট ভরবেগ সংরক্ষণের সূত্র। অবশ্য এই ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়ার ক্ষেত্রে ধরা হয় যে মোট ভর সংরক্ষিত (অর্থাৎ অপরিবর্তিত) আছে। আমরা গণনার সরলতার জন্য মাত্র দুটি বস্তুর ভরবেগ বিবেচনা করব। অবশ্য বস্তুর সংখ্যা দুই-এর চেয়ে বেশী হলেও শেষ পর্যন্ত একই সিদ্ধান্তে আসা যায়।

এখন ধরা যাক, S নির্দেশতন্ত্রে m_1 ও m_2 ভরের দুটি বস্তুর বেগ যথাক্রমে $\vec{u}_1$ ও $\vec{u}_2$ এবং ভরবেগ যথাক্রমে $\vec{p}_1$ ও $\vec{p}_2$। যেহেতু বেগ ও ভরবেগগুলি বিভিন্ন দিকে হতে পারে, সেজন্য এগুলিকে এখানে আমরা ভেক্টর হিসাবে বিবেচনা করব।

যদি বস্তু দুটির লব্ধি ভরবেগ $\vec{p}$ হয়, তবে তৃতীয় সূত্র অনুযায়ী ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়ার দ্বারা এর পরিবর্তন হবে না। অর্থাৎ

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = \text{ধ্রুবক} \qquad ...(4.11)$$

এখন ধরা যাক, x, y ও z অক্ষ অভিমুখে একক ভেক্টরগুলি যথাক্রমে $\vec{i}, \vec{j}$ ও $\vec{k}$। (4.11) সমীকরণটিকে এই একক ভেক্টরগুলির সাপেক্ষে লিখলে দাঁড়ায়

$$\vec{p} = \vec{i}(m_1u_{1x} + m_2u_{2x}) + \vec{j}(m_1u_{1y} + m_2u_{2y}) + \vec{k}(m_1u_{1z} + m_2u_{2z}) \qquad ...(4.12)$$

এখানে u_{1x}, u_{1y} ও u_{1z} হল যথাক্রমে x, y ও z অক্ষের দিকে $\vec{u_1}$ বেগের উপাংশ।

অনুরূপে u_{2x}, u_{2y} ও u_{2z} হল যথাক্রমে x, y ও z অক্ষের দিকে $\vec{u_2}$ বেগের উপাংশ।

এখন দেখা যাক যে (4.12) সমীকরণটি S′ নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে কিরূপে পরিবর্তিত হয়। ধরা যাক, S′ নির্দেশতন্ত্রটি S′ নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে x, x′ অক্ষ অভিমুখে $\vec{\upsilon}$ বেগে যাচ্ছে। তাহলে গ্যালিলিয়োর বেগের রূপান্তর সমীকরণ (4.6) প্রয়োগ করে

S′ নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে বস্তু দুটির লব্ধি ভরবেগ $\vec{p'}$ হবে

$$\vec{p'} = m_1\vec{u'}_1 + m_2\vec{u'}_2$$

$$= \vec{i}(m_1u'_{1x} + m_2u'_{2x}) + \vec{j}(m_1u'_{1y} + m_2u'_{2y}) + \vec{k}(m_1u'_{1z} + m_2u'_{2z})$$

$$= \vec{i}\{m_1u_{1x} + m_2u_{2x} - (m_1 + m_2)\upsilon\} + \vec{j}(m_1u_{1y} + m_2u_{2y}) + \vec{k}(m_1u_{1z} + m_2u_{2z})$$

$$= \vec{p} - \vec{i}(m_1 + m_2)\upsilon$$

$$= \vec{p} - (m_1 + m_2)\vec{\upsilon} = \text{ধ্রুবক} \qquad \ldots(4.13)$$

কারণ, $\vec{P}$, $(m_1 + m_2)$ এবং $\vec{\upsilon}$ প্রত্যেকটিই ধ্রুবক। অর্থাৎ S নির্দেশতন্ত্রের মোট ভরবেগ সংরক্ষিত হবে। সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে তৃতীয় সূত্রটির পরিবর্তন হচ্ছে না।

4.4 নিউটনের গতিসূত্রগুলির লরেন্টজীয় রূপান্তর (Lorentzion Transformation of Newton's Laws of Motion) :

আমরা পূর্ব অনুচ্ছেদে দেখেছি যে গ্যালিলিয়ো রূপান্তর সমীকরণগুলি দ্বারা নিউটনের গতিসূত্রের সমীকরণগুলি পরিবর্তন করলে, হয় সেগুলি অপরিবর্তিত থাকে (যথা, দ্বিতীয় গতিসূত্র) না হয়তো এমনভাবে পরিবর্তিত হয়, যাতে সমীকরণগুলির রূপ একই থাকে এবং গতিসূত্রগুলিও অপরিবর্তিত থাকে। নিউটনের প্রথম ও তৃতীয় গতিসূত্র এই প্রকারের। উপরের প্রথম প্রকারের সমীকরণগুলিকে বলা হয় ইনভ্যারিয়েন্ট (invariant) বা 'অপরিবর্তনীয়' আর দ্বিতীয় প্রকারের সমীকরণগুলিকে বলা হয় কোভ্যারিয়েন্ট (covariant) বা 'সমরূপী'।

আমরা এখন নিউটনের গতিসূত্রগুলির উপর লরেন্টজীয় রূপান্তর সমীকরণ প্রয়োগ করে দেখব যে গতিসূত্রের সমীকরণগুলি অপরিবর্তনীয় বা সমরূপী হয় কিনা।

প্রথম সূত্র ঃ এই সূত্র অনুযায়ী ধরা যাক, S নির্দেশতন্ত্রে একটি কণা $\vec{u}$ সমবেগে কোনও এক দিকে একই সরলরেখা ধরে চলছে এবং কণাটির উপর বাইরের কোনও বল ক্রিয়া করে না। ধরা যাক x, y ও z অক্ষগুলির উপর $\vec{u}$-র উপাংশ যথাক্রমে u_x, u_y ও u_z এবং এই অক্ষগুলির দিকে তিনটি একক ভেক্টর হল যথাক্রমে $\vec{i}, \vec{j}$ ও $\vec{k}$.

$$\text{সুতরাং}\quad \vec{u} = \vec{i}\,u_x + \vec{j}\,u_y + \vec{k}\,u_z = \text{ধ্রুবক} \qquad ...(4.14)$$

এখন ধরা যাক, S´ নির্দেশতন্ত্র S নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে x-অক্ষ অভিমুখে $\vec{\upsilon}$ বেগে চলছে। আমরা আরও ধরছি যে y´-অক্ষ ‖ y-অক্ষ, z´-অক্ষ ‖ z-অক্ষ এবং x´-অক্ষ x-অক্ষের উপর আছে। যদি S´ নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে ঐ বেগ $\vec{u}'$ হয় এবং u'_x, u'_y ও u'_z যথাক্রমে x´, y´ ও z´ অক্ষগুলির দিকে এর উপাংশ হয়, তবে এই অক্ষগুলির দিকে একক ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{i}', \vec{j}'$ ও $\vec{k}'$ ধরলে আমরা পাই—

$$u' = \vec{i}'\,u'_x + \vec{j}'\,u'_y + \vec{k}'\,u_z \qquad ...(4.15)$$

এখন লরেন্টজীয় রূপান্তর সমীকরণগুলি হল—

$$x' = \gamma(x - \upsilon t)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$\text{এবং}\quad t' = \gamma\left(t - \frac{\upsilon x}{c^2}\right) \qquad ...(4.16)$$

$$\text{যেখানে}\quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}}$$

এই রূপান্তর সমীকরণগুলির সাহায্যে 3নং এককে আমরা দেখিয়েছি যে—

$$u'_x = \frac{u_x - \upsilon}{1 - \dfrac{u_x \upsilon}{c^2}}$$

$$u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}}{1 - \dfrac{u_x \upsilon}{c^2}} \qquad ...(4.17)$$

এবং $u'_z = \dfrac{u_z\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}{1-\dfrac{u_x\upsilon}{c^2}}$

(4.17) সমীকরণগুলি থেকে u'_x, u'_y ও u'_z-এর মান (4.15) সমীকরণে বসালে আমরা পাই—

$$u' = \vec{i}'\frac{u_x-\upsilon}{1-\dfrac{u_x\upsilon}{c^2}} + \vec{j}'\frac{u_y\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}{1-\dfrac{u_x\upsilon}{c}} + \vec{k}'\frac{u_z\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}{1-\dfrac{u_x\upsilon}{c^2}} \quad ...(4.18)$$

এখন যেহেতু υ $\vec{i}'$-এর অভিমুখে আছে, সুতরাং এই একক ভেক্টরটির লরেন্টজীয় সংকোচন হবে, কিন্তু $\vec{j}'$ ও $\vec{k}'$ ভেক্টরগুলির এই সংকোচন হবে না।

সুতরাং

$$\vec{i}' = i\sqrt{1-\upsilon^2/c^2},\ \vec{j}' = \vec{j},\ \vec{k}' = \vec{k} \quad ...(4.19)$$

(4.18) ও (4.19) সমীকরণগুলি থেকে এখন আমরা পাই—

$$u = \left\{\vec{i}(u_x-\upsilon) + \vec{j}\,u_y + \vec{k}\,u_2\right\}\frac{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}{1-\dfrac{u_x\upsilon}{c^2}}$$

$$= \left(\vec{u}-\vec{\upsilon}\right)\frac{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}{1-\dfrac{u_x\upsilon}{c^2}}$$

এই সমীকরণে $\vec{\upsilon} = \vec{i}\upsilon = x$-অক্ষ অভিমুখে S′ নির্দেশতন্ত্রের বেগ। কিন্তু পূর্বেই আমরা ধরে নিয়েছি যে $\vec{u}$ এবং $\vec{\upsilon}$ উভয়েই ধ্রুবক (সমবেগ)।

সুতরাং,

$$\vec{u} - \vec{\upsilon} = \text{ধ্রুবক}$$

এবং $\dfrac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-\dfrac{u_x v}{c^2}} = \text{ধ্রুবক}$

অর্থাৎ

$$u' = \text{ধ্রুবক} \qquad ...(4.21)$$

সুতরাং নিউটনের প্রথম গতিসূত্র S নির্দেশতন্ত্রেও সত্য। এখানে লক্ষণীয় যে $u \neq u'$, কিন্তু উভয়েই স্ব স্ব নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে ধ্রুবক। সুতরাং এই সমীকরণগুলি সমরূপী (covariant)।

দ্বিতীয় সূত্র :

এখন দেখা যাক, দ্বিতীয় গতিসূত্রে লরেন্টজীয় রূপান্তর প্রয়োগ করলে কী ফল পাওয়া যায়।

ধরা যাক, S নির্দেশতন্ত্রে m ভরের একটি বস্তুর উপর $\vec{F}$ বল প্রয়োগ করা হল।

সুতরাং

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{u}) \qquad ...(4.22)$$

যেখানে $m\vec{u}$ = বস্তুর ভরবেগ এবং $\vec{u}$ -এর t সময়ের বেগ (লক্ষ করুন এখানে $\vec{u}$ সমবেগ নয়)। যদি ভরকে আমরা ধ্রুবক ধরি, তবে (4.22) সমীকরণ থেকে আমরা পাই—

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{u}}{dt} = m\frac{d}{dt}\left(\vec{i}\,u_x + \vec{j}\,u_y + \vec{k}\,u_z\right)$$

$$= m\left(\vec{i}\,\frac{du_x}{dt} + \vec{j}\,\frac{du_y}{dt} + \vec{k}\,\frac{du_z}{dt}\right) \qquad ...(4.23)$$

এখন S′ নির্দেশতন্ত্রে যদি ঐ বস্তুর ভর m′ এবং বেগ $\vec{u}'$ হয়, তবে বস্তুর উপর প্রযুক্ত বল হবে

$$\vec{F} = \frac{d}{dt'}\left(m'\vec{u}'\right)$$

যদি m′ ধ্রুবক ধরা হয়, তবে

$$\vec{F} = m'\frac{d}{dt'}\left(\vec{i}'u'_x + \vec{j}'u'_y + \vec{k}'u'_z\right)$$

$$= m'\left(\vec{i}'\frac{du'_x}{dt'} + \vec{j}'\frac{du'_y}{dt'} + \vec{k}'\frac{du'_z}{dt'}\right)$$

$$= m'\left(\vec{i}'\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\,\frac{du'_x}{dt'} + \vec{j}'\frac{du'_y}{dt'} + \vec{k}'\frac{du'_z}{dt'}\right) \qquad ...(4.25)$$

কারণ, প্রথম সূত্রের আলোচনায় আপনারা দেখেছেন যে

$$\vec{i}' = \vec{i}\sqrt{1-\upsilon^2/c^2},\ \vec{j}' = \vec{j},\ \vec{k}' - \vec{k}$$

এখন $\dfrac{du'_x}{dt'} = \dfrac{d}{dt'}\dfrac{u_x - \upsilon}{1-\dfrac{u_x\upsilon}{c^2}}$ [(3.10) সমীকরণ দ্রষ্টব্য]

$$= \frac{d}{dt}\frac{u_x - \upsilon}{1-\dfrac{u_x\upsilon}{c^2}}\frac{dt}{dt'}$$

$$= \left\{\frac{\dfrac{du_x}{dt}}{1-\dfrac{u_x\upsilon}{c^2}} + \frac{(u_x-\upsilon)\dfrac{\upsilon}{c^2}\dfrac{du_x}{dt}}{\left(1-\dfrac{u_x\upsilon}{c^2}\right)^2}\right\}\frac{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}{1-\dfrac{u_x\upsilon}{c^2}} \qquad ...(4.26)$$

অনুরূপে $\dfrac{du'_y}{dt'} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{u_y\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}{1-\dfrac{u_x\upsilon}{c^2}}\cdot\dfrac{dt}{dt'}$

$$= \left\{\frac{\dfrac{du_y}{dt}}{1-\dfrac{u_x\upsilon}{c^2}} + \frac{u_y\dfrac{\upsilon}{c^2}\dfrac{du_x}{dt}}{\left(1-\dfrac{u_x\upsilon}{c^2}\right)^2}\right\}\frac{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}{1-\dfrac{u_x\upsilon}{c^2}} \qquad ...(4.27)$$

এবং $\dfrac{du'_z}{dt} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{u_z\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}{1-\dfrac{u_x\upsilon}{c^2}}\cdot\dfrac{dt}{dt'}$

$$= \left\{\frac{\dfrac{du_z}{dt}}{1-\dfrac{u_x\upsilon}{c^2}} + \frac{u_z\dfrac{\upsilon}{c^2}\dfrac{du_x}{dt}}{\left(1-\dfrac{u_x\upsilon}{c^2}\right)^2}\right\}\frac{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}{1-\dfrac{u_x\upsilon}{c^2}} \qquad ...(4.28)$$

(4.26), (4.27) ও (4.28) সমীকরণগুলির মান এখন (4.25) সমীকরণে বসালে আমরা পাই

$$F' = m'\left[\vec{i}\left\{\frac{\frac{du_x}{dt}}{1-\frac{u_x\upsilon}{c^2}} + \frac{(u_x-\upsilon)\frac{\upsilon}{c^2}\frac{du_x}{dt}}{\left(1-\frac{u_x\upsilon}{c^2}\right)^2}\right\}\frac{1-\upsilon^2/c^2}{1-\frac{u_x\upsilon}{c^2}}\right.$$

$$+\vec{j}\left\{\frac{\frac{du_y}{dt}}{1-\frac{u_x\upsilon}{c^2}} + \frac{u_y\frac{\upsilon}{c^2}\frac{du_x}{dt}}{\left(1-\frac{u_x\upsilon}{c^2}\right)^2}\right\}\frac{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}{1-\frac{u_x\upsilon}{c^2}}$$

$$+\vec{k}\left\{\frac{\frac{du_z}{dt}}{1-\frac{u_x\upsilon}{c^2}} + \frac{u_z\frac{\upsilon}{c^2}\frac{du_x}{dt}}{\left(1-\frac{u_x\upsilon}{c^2}\right)^2}\right\}\frac{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}{1-\frac{u_x\upsilon}{c^2}}$$

$$= m'\left[\left(\vec{i}\frac{du_x}{dt} + \vec{j}\frac{du_y}{dt} + \vec{k}\frac{du_z}{dt}\right) + \left(\vec{i}u_x + \vec{j}u_y + \vec{k}u_z\right)\frac{\frac{\upsilon}{c^2}\frac{du_x}{dt}}{\left(1-\frac{u_x\upsilon}{c^2}\right)}\right.$$

$$\left.-\vec{i}\,\upsilon\frac{\frac{\upsilon}{c^2}\frac{du_x}{dt}}{1-\frac{u_x\upsilon}{c^2}}\right]\frac{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}{\left(1-\frac{u_x\upsilon}{c^2}\right)^2} \qquad ...(4.29)$$

যদি উভয় নির্দেশতন্ত্রে ভর অপরিবর্তনীয় হয় $(m = m')$, তবে (4.29) সমীকরণ থেকে পাই

$$\vec{F}' = \left[\left(1-\frac{u_x\upsilon}{c^2}\right)\vec{F} + \frac{\upsilon F_x}{c^2}\left(\vec{u}-\vec{v}\right)\right]\frac{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}{\left(1-\frac{u_x\upsilon}{c^2}\right)^3} \qquad ...(4.30)$$

যেহেতু $\vec{u}$ পরিবর্তনশীল বেগ, সুতরাং এর x উপাংশ u_x-ও পরিবর্তনশীল হবে। সুতরাং (4.30) সমীকরণে $\vec{F}$ এবং এর উপাংশ F_x ধ্রুবক ধরলেও $\vec{F}'$ ধ্রুবক বা সমরূপী হবে না। অর্থাৎ লরেন্টজীয় রূপান্তর দ্বারা নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র অপরিবর্তনীয় থাকে না।

তৃতীয় সূত্র ঃ

ধরা যাক, S নির্দেশতন্ত্রে একটি বস্তুর ভরবেগ $\vec{p}_1$ এবং দ্বিতীয় বস্তুর ভরবেগ $\vec{p}_2$ । নিউটনের তৃতীয় সূত্র অনুযায়ী যদি এই দুটি বস্তুর মধ্যে সংঘর্ষ ঘটে এবং সংঘর্ষের পরও বস্তুদুটির মোট ভর অপরিবর্তিত থাকে, তবে এদের মোট ভরবেগও অপরিবর্তিত থাকবে। অর্থাৎ

$$m_1 + m_2 = \text{ধ্রুবক হলে}$$

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = \text{ধ্রুবক}$$

$$= \vec{i}(m_1u_{1x} + m_2u_{2x}) + \vec{j}(m_1u_{1y} + m_2u_{2y}) + \vec{k}(m_1u_{1z} + m_2u_{2z})$$

আপনি লক্ষ করে দেখুন যে এখানে (4.11) ও (4.12) সমীকরণ দুটিই আবার লেখা হয়েছে।

অনুরূপে S′ নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে ঐ ভরবেগ $\vec{p}'$ ধরলে আমরা পাই

$$\vec{p}' = m_1'\vec{u}_1' + m_2'\vec{u}_2'$$

$$= \vec{i}'(m_1'u_{1x}' + m_2'u_{2x}') + \vec{j}'(m_1'u_{1y}' + m_2'u_{2y}') + \vec{k}'(m_1'u_{1z}' + m_2'u_{2z}') \quad ...(4.31)$$

(4.31) সমীকরণ এখন লরেন্টজীয় রূপান্তর প্রয়োগ করলে পাই

$$\vec{P}' = \sqrt{1-\upsilon^2/c^2}\,\vec{i}\left\{m_1'\frac{u_{1x}-\upsilon}{1-\frac{u_{1x}\upsilon}{c^2}} + m_2'\frac{u_{2x}-\upsilon}{1-\frac{u_{2x}\upsilon}{c^2}}\right\}$$

$$+\vec{j}\left\{m_1'\frac{u_{1y}\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}{1-\frac{u_{1x}\upsilon}{c^2}} + m_2'\frac{u_{2y}\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}{1-\frac{u_{2x}\upsilon}{c^2}}\right\}$$

$$+\vec{k}\left\{m_1' \frac{u_{1z}\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}{1-\frac{u_{1x}\upsilon}{c^2}} + m_2' \frac{u_{2y}\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}{1-\frac{u_{2x}\upsilon}{c^2}}\right\}$$

$$=\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}\left(m_1' \frac{\vec{i}u_{1x}+\vec{j}u_{1y}+\vec{k}u_{1z}}{1-\frac{u_{1x}\upsilon}{c^2}} - \frac{\vec{i}m_1'\upsilon}{1-\frac{u_{1x}\upsilon}{c^2}}\right.$$

$$\left.+m_2' \frac{\vec{i}u_{2x}+\vec{j}u_{2y}+\vec{k}u_{2z}}{1-\frac{u_{2x}\upsilon}{c^2}} - \frac{\vec{i}m_2'\upsilon}{1-\frac{u_{2x}\upsilon}{c^2}}\right)$$

$$=\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}\left\{\frac{m_1'(\vec{u_1}-\vec{\upsilon})}{1-\frac{u_{1x}\upsilon}{c^2}} + \frac{m_2'(\vec{u_2}-\vec{\upsilon})}{1-\frac{u_{2x}\upsilon}{c^2}}\right\} \qquad \text{...(4.32)}$$

(4.32) সমীকরণটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ। কারণ এই সমীকরণ থেকে আমরা দেখতে পাচ্ছি যে যদি ভর সংরক্ষণ সূত্র সঠিক হয় অর্থাৎ $m'_1 = m_1$ এবং $m'_2 = m_2$ হয়, তবে $\vec{p'}$ ধ্রুবক হবে না। কারণ, $\vec{p_1} + \vec{p_2}$ ধ্রুবক হলেও u_{1x} ও u_{2x}-এর বিভিন্ন মান হতে পারে। এক্ষেত্রে নিউটনের ভরবেগ সংরক্ষণ সূত্রকে গ্রহণ করা যায় না। অপরপক্ষে যদি আমরা ভরবেগ সংরক্ষণ সূত্র গ্রহণ করি, তবে (4.32) সমীকরণকে ধ্রুবক করতে হবে। সেক্ষেত্রে ভরের সংরক্ষণ সূত্র পরিত্যাগ করতে হবে এবং ভরকে বেগের উপর নির্ভরশীল ধরতে হবে।

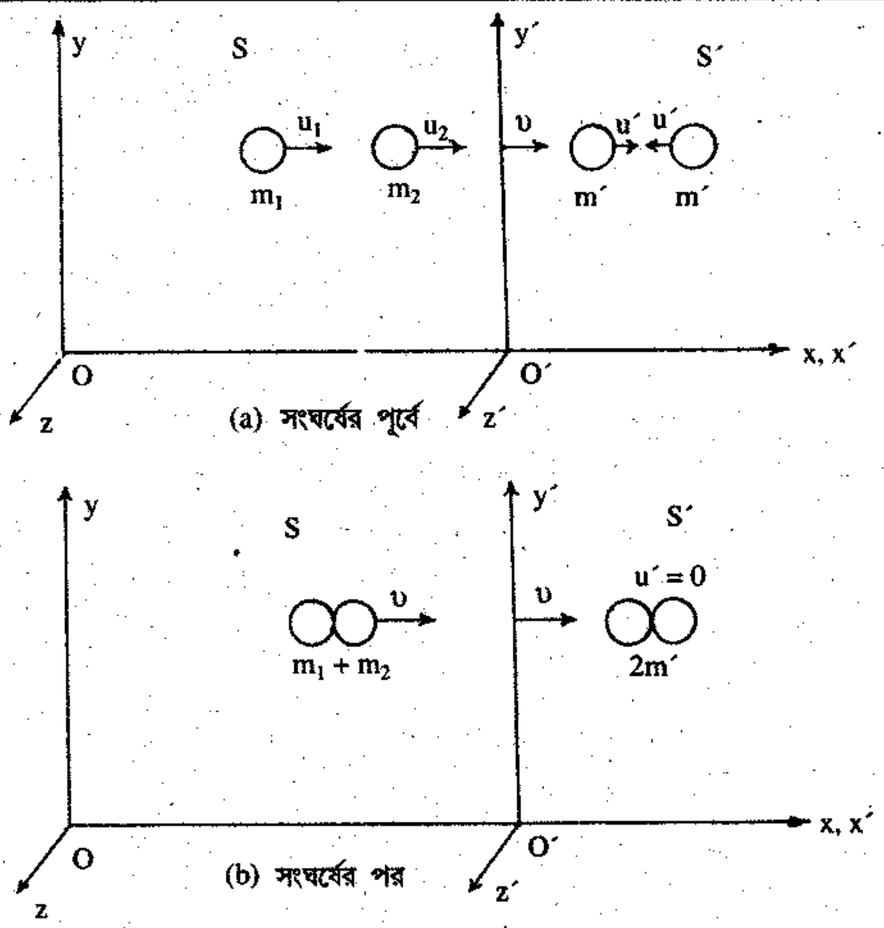
আইনস্টাইন তাঁর আপেক্ষিকতা তত্ত্বে দ্বিতীয় বিকল্পটিই গ্রহণ করলেন। অর্থাৎ তিনি ধরে নিলেন যে সকল জাড্যিক নির্দেশতন্ত্রেই বস্তুগুলির মোট ভরবেগ সংরক্ষিত হয়। এর কারণ, ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র পদার্থবিদ্যার একটি অতি প্রয়োজনীয় ও গুরুত্বপূর্ণ সূত্র। এরদ্বারা গতিবিজ্ঞানের বহু দুরূহ প্রশ্নের সমাধান করা যায়। তাই ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্রকে পদার্থবিদ্যার একটি মৌলিক সূত্র বলা হয়। তাছাড়া আইনস্টাইন তাঁর এই প্রকল্পদ্বারা দেখালেন যে এর ফলে নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্রও সকল জ্যাডিক নির্দেশতন্ত্রে সত্য হয়।

কিন্তু আইনস্টাইনের এই সিদ্ধান্তের ফলে তাঁকে বস্তুর ভরের সংরক্ষণ সূত্র পরিত্যাগ করতে হল এবং তাঁকে মেনে নিতে হল যে বস্তুর ভর তার বেগের উপর নির্ভরশীল। আমরা এখন বেগের উপর ভরের এই নির্ভরতার সূত্র নির্ণয় করব।

4.5 বেগের উপর ভরের নির্ভশীলতার সূত্র (Relation for Variation of Mass with Velocity) :

ধরা যাক, S′ নির্দেশতন্ত্রে দুটি সমান ভরের বস্তু x′ অক্ষের সমান্তরাল u′ ও –u′ বেগে পরস্পরের সঙ্গে স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ ঘটায় এবং তার ফলে পরস্পর যুক্ত হয়ে স্থির হয়ে যায়। যদি প্রত্যেক বস্তুর ভর m′ ধরা হয়, তবে ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র অনুযায়ী (চিত্র 4.1)

$$m'u' - m'u' = 0 \qquad ...(4.32)$$



চিত্র 4.1 বস্তুর ভর ও বেগের সম্বন্ধ

ধরা যাক, S′ নির্দেশতন্ত্র S নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে x, x′ অক্ষের দিকে υ বেগে চলে। ধরা যাক, S নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে স্থির একজন নিরক্ষকের নিকট সংঘর্ষের পূর্বে ঐ বস্তুদুটির বেগ যথাক্রমে u_1 ও u_2 এবং এদের ভর যথাক্রমে m_1 ও m_2। সংঘর্ষের পর বস্তুদুটি পরস্পর যুক্ত হয়ে

S নির্দেশতন্ত্রে স্থির হয়ে যায়। সুতরাং S নির্দেশতন্ত্রের নিরীক্ষকের নিকট যুক্ত বস্তুটির বেগ υ (কারণ, S নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে S' নির্দেশতন্ত্রের বেগ υ)। সুতরাং ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র থেকে আমরা লিখতে পারি—

$$m_1u_1 + m_2u_2 = (m_1 + m_2)\upsilon \qquad ...(4.34)$$

বা, $$m_1(u_1 - \upsilon) = -m_2(u_2 - \upsilon) \qquad ...(4.35)$$

এখন বেগ সংযোজনের (3.15) সমীকরণ অনুযায়ী আমরা লিখতে পারি

$$u_1 = \frac{u' + \upsilon}{1 + \frac{u'\upsilon}{c^2}}$$

এবং $$u_2 = \frac{-u' + \upsilon}{1 - \frac{u'\upsilon}{c^2}} \qquad ...(4.36)$$

(4.36) সমীকরণগুলি (4.35) সমীকরণে বসালে আমরা পাই

$$m_1\left(\frac{u' + \upsilon}{1 + \frac{u'\upsilon}{c^2}} - \upsilon\right) = -m_2\left(\frac{-u' + \upsilon}{1 - \frac{u'\upsilon}{c^2}} - \upsilon\right)$$

বা $$\frac{m_1}{m_2} = -\frac{1 + \frac{u'\upsilon}{c^2}}{1 - \frac{u'\upsilon}{c^2}} \qquad ...(4.37)$$

(4.37) সমীকণের ডানদিক u' ও v-র সাপেক্ষে আছে। এই বেগগুলিকে u_1 ও u_2 বেগের সাপেক্ষে পরিবর্তন করার জন্য ধরা যাক,

$$\frac{u'\upsilon}{c^2} = \alpha \qquad ...(4.38)$$

তাহলে (4.36) সমীকরণ দুটি থেকে আমরা লিখতে পারি

$$u_1(1 + \alpha) = u' + \upsilon$$

এবং $$u_2(1 - \alpha) = -u' + \upsilon$$

এই সমীকরণ দুটির উভয় দিক বর্গ করে আমরা পাই

$$u_1^2(1 + 2\alpha + \alpha^2) = (u' + \upsilon)^2 = u'^2 + 2u'\upsilon + \upsilon^2$$

এবং $$u_2^2(1 - 2\alpha + \alpha^2) = (-u' + \upsilon)^2 = u'^2 - 2u'\upsilon + \upsilon^2$$

এই সমীকরণ দুটির বিয়োগফল হল—

$$u_1^2(1+2\alpha+\alpha^2)-u_2^2(1-2\alpha+\alpha^2)=4u'\upsilon$$

$$=4c^2\frac{u'\upsilon}{c^2}=4c^2\alpha\quad\left[\because\frac{u'\upsilon}{c^2}=\alpha\right]\qquad\text{...(4.39)}$$

(4.39) সমীকরণকে α-র দ্বিঘাত সমীকরণরূপে লিখলে আমরা পাই

$$\left(u_1^2-u_2^2\right)\alpha^2+2(u_1^2+u_2^2-2c^2)\alpha+u_1^2-u_2^2=0\qquad\text{...(4.40)}$$

(4.40) দ্বিঘাত সমীকরণ থেকে আমরা α-র দুটি মান পাই

$$\alpha=\frac{2c^2-u_1^2-u_1^2\pm2\sqrt{\left(c^2-u_1^2\right)\left(c^2-u_2^2\right)}}{u_1^2-u_2^2}\qquad\text{...(4.41)}$$

যেহেতু $\frac{u'\upsilon}{c^2}<<1$, অতএব (4.41) সমীকরণ থেকে α-র প্রকৃত মান হল,

$$\alpha=\frac{2c^2-u_1^2-u_2^2-2\sqrt{(c^2-u_1^2)(c^2-u_2^2)}}{u_1^2-u_2^2}\qquad\text{...(4.42)}$$

(4.42) সমীকরণ থেকে $\alpha\left(=\frac{u'\upsilon}{c^2}\right)$-র এই মান (4.37) সমীকরণে বসালে আমরা পাই

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{1+\alpha}{1-\alpha}=\frac{\sqrt{1-\frac{u_2^2}{c^2}}}{1-\frac{u_1^2}{c^2}}\qquad\text{...(4.43)}$$

(4.43) সমীকরণ থেকে উভয় দিকে কোণাকুণি গুণ করে পাওয়া যায়

$$m_1\sqrt{1-\frac{u_1^2}{c^2}}=m_2\sqrt{1-\frac{u_2^2}{c^2}}=k\text{ (ধরি)}\qquad\text{...(4.44)}$$

(4.44) সমীকরণটি বিশেষ তাৎপর্যপূর্ণ। কারণ, এই সমীকরণ থেকে দেখা যাচ্ছে যে যদি S' নির্দেশতন্ত্রে দুটি অভিন্ন ভরের বস্তুর মধ্যে সংঘর্ষের ফলে এদের ভরবেগ সংরক্ষিত হয়, তবে S নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষেও ঐ অভিন্ন বস্তুদুটির ভরবেগ সংরক্ষিত ধরতে হলে, এদের উভয়ের জন্যই (4.44) সমীকরণের শর্ত প্রযোজ্য হবে।

সুতরাং সাধারণভাবে বস্তুদুটির যে কোনোও একটির ভর m ও বেগ υ ধরলে (4.44) সমীকরণ অনুযায়ী আমরা পাই

$$m\sqrt{1-\upsilon^2/c^2} = k \qquad ...(4.45)$$

এখন যদি $\upsilon = 0$ হয় এবং তখন $m = m_0$ ধরা হয়, তবে (4.45) সমীকরণ থেকে পাই

$$m_0 = k \qquad ...(4.46)$$

সুতরাং সাধারণভাবে আমরা লিখতে পারি

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \qquad ...(4.47)$$

এটিই আইনস্টাইনের আপেক্ষিকতা তত্ত্ব অনুযায়ী ভর ও বেগের সম্বন্ধ। এই সম্বন্ধ অনুযায়ী m_0 হল নিরীক্ষকের সাপেক্ষে একটি স্থির বস্তুর ভর এবং m হল ঐ বস্তুর υ বেগে গতিশীল অবস্থার ভর।

যদি $\frac{\upsilon}{c}$ অত্যন্ত ক্ষুদ্র হয় $\left(\frac{\upsilon}{c} << 1\right)$ তাহলে আমরা $\frac{\upsilon^2}{c^2}$ কে উপেক্ষা করতে পারি। সেক্ষেত্রে (4.47) সমীকরণ থেকে আমরা পাই

$$m \simeq m_0 \qquad ...(4.48)$$

অর্থাৎ এক্ষেত্রে আমরা সনাতন ভর সংরক্ষণের সূত্র পাই। কিন্তু $\frac{\upsilon^2}{c^2}$ যদি উপেক্ষণীয় না হয়, তবে v-এর মান যত বাড়বে, ভর m ও তত বাড়বে। আবার যদি $\upsilon = c$ ধরা হয়, তবে আমরা পাই

$$m = \infty \qquad ...(4.49)$$

অর্থাৎ এক্ষেত্রে ভর অসীম, সুতরাং অবাস্তব। কাজেই আমরা সিদ্ধান্ত করতে পারি যে, কোনও বস্তুর পক্ষেই আলোকের বেগের সমান বেগে যাওয়া সম্ভব নয়।

এখন প্রশ্ন হল, কোনও বস্তুর বেগ কি c-এর চেয়ে বেশি হওয়া সম্ভব? যদি (4.47) সমীকরণে আমরা $\upsilon > c$ বসাই, তবে m-এর মান একটি কল্পিত রাশি হয়। 1962 খ্রিস্টাব্দে বিজ্ঞানী সুদর্শন প্রথম কল্পনা করেন যে, অতিক্ষুদ্র এরূপ কল্পিত ভরের বস্তু থাকা সম্ভব এবং তিনি এই কল্পিত ভরের বস্তুর নাম দেন 'ট্যাকিয়ন' (tachyon)। ট্যাকিয়ন প্রকল্প বিজ্ঞানীমহলে যথেষ্ট আগ্রহ সৃষ্টি করে, এবং পরীক্ষাগারে এই কণাটি আবিষ্কারের জন্য নানা পরীক্ষা করা হয়। কিন্তু এখনও পর্যন্ত এই কণাটির অস্তিত্ব প্রমাণ করা সম্ভব হয়নি।

এখানে আরেকটি কথা বলা প্রয়োজন। আমরা উপরে শূন্য মাধ্যমে আলোকের বেগ c নিয়ে আলোচনা করেছি। কিন্তু আলোক যখন জল, কাঁচ প্রভৃতি কোনও ঘনতর মাধ্যমে প্রবেশ করে, তখন তার বেগ কমে যায়। আপনারা জানেন যে শূন্য মাধ্যমে ও ঘনতর মাধ্যমে আলোকের দুটি বেগের অনুপাতকেই আমরা ঐ মাধ্যমের প্রতিসরাঙ্ক বলি। ঘনতর মাধ্যমে ইলেকট্রন, মিউয়ন প্রভৃতি বহু

মৌলিক কণার বেগ ঐ মাধ্যমে আলোকের বেগের চেয়ে বেশি হতে পারে। কিন্তু তা হলেও এগুলির ভর কখনোই কল্পিত রাশি হয় না। কারণ, এইসব ঘনতর মাধ্যমেও কোনও কণার ভর ঐ মাধ্যমে আলোকের বেগের মানদ্বারা নির্ধারিত হয় না, শূন্য মাধ্যমে আলোকের বেগ c-র দ্বারাই নির্ধারিত হয়। ফলে ঐ মাধ্যমেও (4.47) সমীকরণটির পরিবর্তন হয় না এবং সেজন্য $\frac{\upsilon}{c}$ সর্বদাই 1-এর কম হয় $\left(\frac{\upsilon}{c} < 1\right)$।

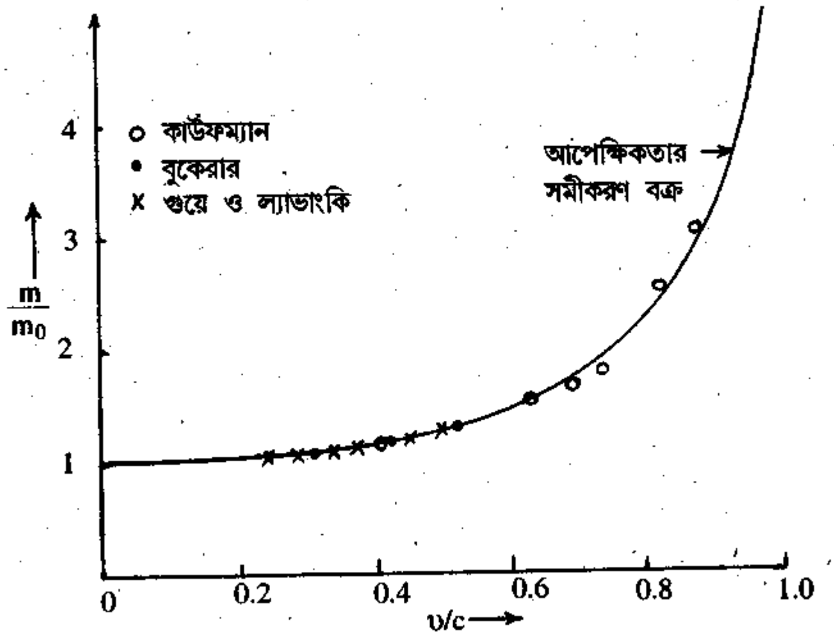
4.6 বেগের উপর ভরের নির্ভরশীলতার সূত্রের পরীক্ষা (Experimental Verification of Dependence of Mass on Velocity) ঃ

1897 খ্রিস্টাব্দে জে জে টমসন প্রথম ক্যাথোড রশ্মির ইলেকট্রনের তড়িৎ আধান ও ভরের অনুপাত $\left(\frac{e}{m}\right)$ নির্ণয় করেন এবং লক্ষ করেন যে এই অনুপাত ইলেকট্রনের বেগের উপর নির্ভরশীল। যেহেতু ইলেকট্রনের গতির জন্য একটি তড়িৎ প্রবাহ ও চৌম্বক ক্ষেত্র উৎপন্ন হয়, তাই প্রথম মনে করা হয়েছিল যে এর ফলেই ঐ আধান ও ভরের অনুপাতের পরিবর্তন ঘটে। এ বিষয়ে আব্রাহাম (Abraham) একটি গাণিতিক সূত্র নির্ণয় করেন। এর কারণ, তখনও আইনস্টাইনের আপেক্ষিকতা তত্ত্ব উদ্ভাবিত হয়নি। 1901 খ্রিস্টাব্দে কাউফম্যান (Kaufmann) জে জে টমসনের ধনাত্মক রশ্মির ধর্ম বিশ্লেষণের পদ্ধতি অনুসরণ করে ইলেকট্রনের বিভিন্ন বেগের জন্য এর $\frac{e}{m}$ নির্ণয় করেন এবং লক্ষ করেন যে এই পরীক্ষার ফলদ্বারা আব্রাহামের গাণিতিক সূত্র মোটামুটি ব্যাখ্যা করা যায়। কিন্তু 1905 খ্রিস্টাব্দে আপেক্ষিক তত্ত্ব প্রকাশিত হওয়ার পর বোঝা গেল যে কাউফম্যানের পরীক্ষার ফল আসলে আব্রাহাম নয়, আইনস্টাইনের ভর ও বেগের সম্বন্ধকেই অনুসরণ করে।

1908 খ্রিস্টাব্দে বুকেরার (Bucherer) একটি গতিশীল ইলেকট্রনের উপর নির্দিষ্ট তড়িৎ ক্ষেত্র ও চৌম্বক ক্ষেত্র প্রয়োগ করে কাউফম্যানের চেয়ে আরও নির্ভুলভাবে এর বেগ ও $\frac{e}{m}$ পরিমাপের ব্যবস্থা করেন। তাঁর এই পরীক্ষার ফল আইনস্টানের ভর ও বেগের সমীকরণকে আরও ভালোভাবে প্রতিষ্ঠা করে। তবে বুকেরার পরীক্ষার একটি ত্রুটি ছিল। এখানে দুটি সমান্তরাল ধাতব পাত দ্বারা তড়িৎ ক্ষেত্র উৎপন্ন করা হয়েছিল। ফলে পাতদুটির প্রান্তে তড়িৎ বলরেখাগুলির বক্রতার জন্য ইলেকট্রনের গতিপথ নির্ণয়ের ক্ষেত্রে সামান্য ত্রুটি ঘটত।

বুকেরারের পরীক্ষার ত্রুটি দূর করার জন্য 1915 খ্রিস্টাব্দে গুয়ে (Guye) এবং ল্যাভাংকি (Levanchy) বুকেরারের মতোই একটি পরীক্ষায় একই পথ দিয়ে একটি কমবেগ সম্পন্ন ইলেকট্রন ও একটি বেশি বেগ সম্পন্ন ইলেকট্রন পাঠিয়ে এদের বেগের অনুপাত ও ভরের অনুপাত নির্ণয় করেন। এর ফলে ভর ও বেগের সম্বন্ধটি আরও নির্ভুলভাবে প্রতিষ্ঠিত হয়।

উপরে বর্ণিত এই তিনটি পরীক্ষার ফল (4.2) চিত্রে দেখানো হল। চিত্রে টানা বক্ররেখাটি আইনস্টাইনের ভর ও বেগের গাণিতিক সম্বন্ধদ্বারা আঁকা হয়েছে এবং বিভিন্ন বিন্দু, বৃত্ত ও কাটা চিহ্নের দ্বারা পরীক্ষার ফলগুলি দেখানো হয়েছে। দেখা যাচ্ছে যে এই ফলগুলি আইনস্টাইনের গাণিতিক সমীকরণটিকে যথার্থ হিসাবেই প্রমাণ করছে।



চিত্র 4.2 আইনস্টাইনের ভর ও বেগের সমীকরণের সত্যতা পরীক্ষা

এরপর 1940 খ্রিস্টাব্দে রোজার্স (Rogers) ও তাঁর সহকর্মীগণ তাঁদের পরীক্ষায় মাত্র শতকরা একভাগ ভ্রমসীমার মধ্যে এবং 1963 খ্রীস্টাব্দে মেয়ার (Mayer) ও তাঁর সহকর্মীগণ তাঁদের পরীক্ষায় মাত্র 0.05% ভ্রমসীমার মধ্যে অতি উচ্চ বেগের $\left(\frac{\upsilon}{c} \geq 0.8\right)$ ইলেকট্রনের ভর পরিমাপ করে আইনস্টাইনের ভর ও বেগের সম্বন্ধটির সত্যতা প্রমাণ করেন।

আইনস্টানের এই ভর ও বেগের সম্বন্ধ এর পরও আরও বহু পরীক্ষায় এবং ইলেকট্রন ছাড়াও আরও অন্যান্য মৌলিক কণার ক্ষেত্রে যথার্থ বলে প্রমাণিত হয়েছে। তাছাড়া ভর ও বেগের এই সম্বন্ধ ব্যবহার করে আইনস্টাইন ভর ও শক্তির মধ্যে অতি গুরুত্বপূর্ণ একটি সম্বন্ধ নির্ণয় করেন। বিভিন্ন পরীক্ষার দ্বারা এই ভর ও শক্তির সম্বন্ধও যথার্থ বলে প্রমাণিত হয়েছে। আধুনিক পদার্থবিদ্যায় বহু জটিল সমস্যার সমাধানে এই ভর ও শক্তির সম্বন্ধ ব্যবহার করা হয়। কিন্তু এখনও পর্যন্ত কোনও

ক্ষেত্রেই এর কোনও ত্রুটি ধরা পড়েনি। সুতরাং আইনস্টাইনের ভর ও বেগের সম্বন্ধ এবং ভর ও শক্তির সম্বন্ধ যে যথার্থ সে বিষয়ে কোনও সন্দেহ নেই।

4.7 আইনস্টাইনের ভর ও শক্তির সম্বন্ধ (Einestein's Mass and Energy Relation) :

ধরা যাক, m ভরের একটি বস্তুর উপর F বল dt সময়ের জন্য ক্রিয়া করে এবং তার ফলে বস্তুটির dx সরণ হয়। সুতরাং সংজ্ঞা অনুযায়ী বস্তুর উপর কৃতকার্য = Fdx এবং এর ফলে বস্তুটির গতীয় শক্তির বৃদ্ধি,

$$dT = Fdx \qquad ...(4.50)$$

কিন্তু বলের সংজ্ঞা আনুযায়ী

$$F = \frac{d}{dt}(m\upsilon) \qquad ...(4.51)$$

যেখানে v হল ঐ সময়ে বস্তুর বেগ এবং mv হল বস্তুর ভরবেগ। কাজেই

$$dT = \frac{d}{dt}(m\upsilon)dx$$

$$= m\frac{d\upsilon}{dt}dx + \upsilon\frac{dm}{dt}dx$$

$$= m\upsilon d\upsilon + \upsilon^2 dm \qquad \left(\because \frac{dx}{dt} = \upsilon\right) \qquad ...(4.52)$$

কিন্তু বেগের উপর ভরের নির্ভরশীলতার সূত্র [সমীকরণ (4.47)] থেকে আমরা পাই

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}}$$

বা, $$m\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}} = m_0 \qquad ...(4.53)$$

যেখানে m_0 হল বস্তুর স্থির অবস্থার ভর এবং c হল শূন্য মাধ্যমে আলোকের বেগ। সুতরাং (4.53) সমীকরণের উভয় পক্ষকে বর্গ করে আমরা পাই

$$m^2c^2 - m^2\upsilon^2 = m_0^2c^2 \qquad ...(4.54)$$

(4.54) সমীকরণের উভর দিক অন্তরকলন করে আমরা পাই

$$2mdmc^2 - 2m^2\upsilon d\upsilon - 2mdm\upsilon^2 = 0$$

বা, $$m\upsilon d\upsilon + \upsilon^2 dm = c^2 dm \qquad ...(4.55)$$

(4.52) এবং (4.55) সমীকরণ দুটি থেকে আমরা পাই

$$dT = c^2 dm$$

বা, $$\int_0^T dT = c \int_{m_0}^{m} dm \qquad ...(4.56)$$

বা, $$T = c^2(m - m_0) \qquad ...(4.57)$$

(4.56) এবং (4.57) সমীকরণে আমরা ধরে নিয়েছি যে, স্থির অবস্থায় বস্তুটির গতীয় শক্তি শূন্য এবং বস্তুটির বেগ যখন υ, তখন তার ভর m এবং গতীয় শক্তি T।

(4.57) সমীকরণ থেকে আমরা দেখতে পাচ্ছি যে, যখন কোনও বস্তুর ভর m_0 থেকে বৃদ্ধি পেয়ে m হয়, তখন তার গতীয় শক্তি হয় T। (4.57) সমীকরণকে আমরা লিখতে পারি

$$mc^2 = T + m_0c^2 \qquad ...(4.58)$$

যেহেতু একটি বস্তুর মোট শক্তি

E = গতীয় শক্তি + স্থৈতিক শক্তি

বা E = T + স্থৈতিক শক্তি ...(4.59)

সুতরাং (4.59) সমীকরণকে (4.58) সমীকরণের সঙ্গে তুলনা করে আমরা বলতে পারি যে,

বস্তুর স্থৈতিক শক্তি = m_0c^2 ...(4.60)

এবং মোট শক্তি, $E = mc^2$ ...(4.61)

(4.61) সমীকরণটিই হল আইনস্টাইনের বিখ্যাত ভর ও শক্তির তুল্যতার সূত্র। এই সূত্র অনুযায়ী আমরা m ভরের একটি বস্তুকে মোট E শক্তির আধার হিসাবে ধরতে পারি, যেখানে এই শক্তির মান হল বস্তুর ভর ও আলোকের শূন্যস্থানের বেগের বর্গের গুণফল। যদি বস্তুটির গতীয় শক্তি শূন্য হয় (T = 0), তবে এর মোট শক্তি,

E_0 = স্থৈতিক শক্তি = m_0c^2 ...(4.62)

এখন ধরা যাক, বস্তুটির স্থৈতিক ভর Δm_0 হ্রাস পায়। তাহলে (4.62) সমীকরণ অনুযায়ী এর স্থৈতিক শক্তিও ΔE_0 হ্রাস পাবে। যেখানে

$$\Delta E_0 = \Delta m_0 c^2 \qquad (4.63)$$

আইনস্টাইন (4.63) সমীকরণটির ব্যাখ্যা এভাবে করলেন যে প্রকৃতিতে এই ΔE_0 স্থৈতিক শক্তির অপচয় হবে না এবং তা সম পরিমাণ গতিশক্তিতে রূপান্তরিত হবে। অনুরূপে বলা যায় যে যদি কোনও বস্তুর গতিশক্তি ΔE_0 হ্রাস পায়, তবে তা বস্তুর সমপরিমাণ স্থৈতিক শক্তিতে রূপান্তরিত হবে এবং তার ফলে বস্তুর স্থির ভর $\frac{\Delta E_0}{c^2} = \Delta m_0$ বৃদ্ধি পাবে।

সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে, আইনস্টাইনের ব্যাখ্যা অনুযায়ী বস্তুর (স্থির) ভর সংরক্ষিত হচ্ছে না (এটি আমাদের সনাতন ধারণার পরিপন্থী)। কিন্তু যদি কোনও বস্তুর ভর হ্রাস পায়, তবে তা তুল্য পরিমাণ (গতীয়) শক্তিতে রূপান্তরিত হবে এবং বিপরীত পক্ষে যদি কোনও বস্তুর (গতীয়) শক্তি হ্রাস পায়, তবে তা বস্তুর (স্থির) ভর তুল্য পরিমাণ বৃদ্ধি করবে। এখানে তুল্য পরিমাণ বলতে (4.63) সম্বন্ধটির কথা বলা হচ্ছে। সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে ভর বা শক্তি এককভাবে সংরক্ষিত হচ্ছে না। কিন্তু এরা যুগ্মভাবে সংরক্ষিত হচ্ছে। একেই আইনস্টাইনের ভর ও শক্তির যুগ্ম সংরক্ষণ সূত্র বলে।

আইনস্টাইনের উপরোক্ত সূত্রগুলি তাত্ত্বিক বলবিদ্যা সম্বন্ধে মানুষের নিউটনীয় বা সনাতন ধারণাকে সম্পূর্ণ বদলে দিয়েছে। বিশেষত তাঁর ভর ও শক্তির তুল্যতার সূত্র, স্থৈতিক ভরকে বস্তুর মোট সঞ্চিত শক্তির বহিঃপ্রকাশ হিসাবে বিবেচনা করা এবং বাইরে থেকে কোনও বল ক্রিয়া না করলে বস্তুর ভর ও শক্তির যুগ্মভাবে সংরক্ষণ আধুনিক তাত্ত্বিক পদার্থবিদ্যায় সম্পূর্ণ অভিনব সংযোজন।

আইনস্টাইনের আপেক্ষিকীয় গতিবিদ্যার সূত্রগুলি বস্তুর সকল বেগের ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য। তবে সনাতন গতিবিদ্যার সূত্রগুলি থেকে আপেক্ষিকীয় গতিবিদ্যার সূত্রগুলির পার্থক্য কেবল তখনই ধরা পড়ে, যখন বস্তুর বেগ আলোকের বেগের সমতুল্য হয় $(\upsilon \sim c)$। বস্তুর বেগ আলোকের বেগের তুলনায় তুচ্ছ হলে $\left(\frac{\upsilon}{c} << 1\right)$, আপেক্ষিকীয় গতিবিদ্যার সূত্রগুলি সনাতন গতিবিদ্যার সূত্রে পরিণত হয়।

এই বিষয়টি প্রমাণ করার জন্য গতিশক্তির সমীকরণটি ধরা যাক। (4.57) সমীকরণ থেকে আমরা পাই

$$T = c^2(m - m_0) = c^2\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} - m_0\right)$$

$$= m_0c^2\left\{(1-\upsilon^2/c^2)^{-\frac{1}{2}} - 1\right\}$$

$$= m_0c^2\left[1 + \frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^3 + \ldots - 1\right]$$

$$= m_0c^2\left[\frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2} + \frac{3}{8}\left(\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^2 + \frac{5}{16}\left(\frac{\upsilon^2}{c^3}\right)^3 + \ldots\right] \tag{4.64}$$

এই সমীকরণটি আমরা বীজগণিতের $(1 + x)^n$ অপেক্ষকের প্রসারণ সূত্র অনুযায়ী প্রসারিত করে পাই।

এখন যদি আমরা মনে করি যে বস্তুর বেগ আলোকের বেগের তুলনায় অত্যন্ত ক্ষুদ্র $\left(\frac{\upsilon}{c} << 1\right)$ তবে (4.64) সমীকরণে আমরা কেবল $\frac{\upsilon^2}{c^2}$-এর প্রথম ঘাতটি রেখে এর উচ্চতর ঘাতগুলি (ক্রমশ আরও অত্যন্ত ক্ষুদ্র হওয়ায়) উপেক্ষা করতে পারি। সুতরাং এক্ষেত্রে বস্তুর গতীয় শক্তির সমীকরণটি হয়

$$T \simeq \frac{1}{2} m_0 \upsilon^2 \tag{4.65}$$

তাছাড়া আমরা পূর্বেই উল্লেখ করেছি যে $\frac{\upsilon}{c} << 1$ হলে

$$m \simeq m_0 \quad [(4.48) \text{ সমীকরণ দ্রষ্টব্য}]$$

অতএব
$$T \simeq \frac{1}{2} m \upsilon^2 \tag{4.66}$$

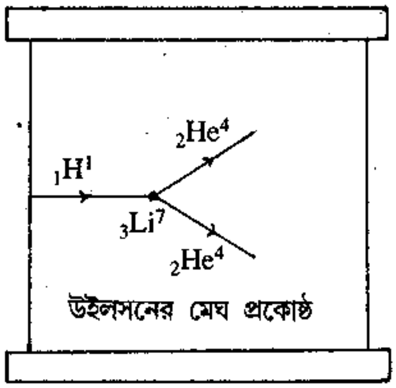
সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে $\frac{\upsilon}{c} << 1$ হলে আমরা সনাতন গতিবিদ্যার ভর সংরক্ষণের সূত্র এবং গতীয় শক্তির সূত্র ফিরে পাই। এ কারণে আমরা সনাতন গতিবিদ্যার সূত্রগুলিকে আপেক্ষিকীয় গতিবিদ্যার সূত্রগুলির **বিশেষ ক্ষেত্র** বা **সীমায়িত সূত্র** বলতে পারি।

4.8 আইনস্টাইনের ভর ও শক্তির তুল্যতা সূত্রের সত্যতার পরীক্ষা (Verification of Einestien's Mass and Energy Relation)

বহু পরীক্ষার দ্বারা আইনস্টাইনের ভর ও শক্তির সম্বন্ধ প্রমাণ করা হয়েছে। আমরা এখানে মাত্র কয়েকটি পরীক্ষার কথা উল্লেখ করব।

4.8.1 ককক্রফ্‌ট (Cockroft) ও ওয়াল্‌টনের (Walton) পরীক্ষা

প্রথম দিকে ভর ও শক্তির সম্বন্ধের সত্যতা নির্ণয়ের যেসব পরীক্ষা হয়েছিল, ককক্রফ্‌ট ও ওয়াল্‌টনের পরীক্ষা সেগুলির অন্যতম। তাঁরা 1932 খ্রিস্টাব্দে লক্ষ করেন যে যদি একটি উচ্চবেগ সম্পন্ন প্রোটন অর্থাৎ হাইড্রোজেন কেন্দ্রক $({}_1H^1)$ দ্বারা একটি লিথিয়াম নিউক্লিয়াস (অর্থাৎ লিথিয়াম কেন্দ্রক, ${}_3Li^7$-কে আঘাত করা যায়, তাহলে ঐ প্রোটন লিথিয়াম নিউক্লিয়াসটির সঙ্গে যুক্ত হয়ে দুটি আলফা কণিকা (অর্থাৎ হিলিয়াম নিউক্লিয়াস ${}_2He^4$) গঠন করে (চিত্র 4.3) এবং সেই সঙ্গে



চিত্র 4.3 ককক্রফ্‌ট ও ওয়ালটনের পরীক্ষা

কিছু শক্তি (Q) উদ্ভূত হয়, যা আলফা কণাদুটির গতীয় শক্তিরূপে প্রকাশ পায়। এই প্রক্রিয়াটিকে একটি কৃত্রিম নিউক্লীয় বিভাজন বিক্রিয়া বলে এবং উইলসনের মেঘ প্রকোষ্ঠ (Willson Cloud Chamber) ব্যবহার করে বিক্রিয়ায় অংশগ্রহণকারী তড়িৎযুক্ত কণিকাগুলি যে পথ অবলম্বন করে চলে, তার চিত্র গ্রহণ করা যায়।

উপরের বিক্রিয়াটিকে একটি সমীকরণের আকারে লিখলে দাঁড়ায়

$$_{3}Li^{7} + {_1}H^{1} \rightarrow {_2}He^{4} + {_2}He^{4} + Q \qquad (4.67)$$

এখন এই বিক্রিয়ায় অংশগ্রহণকারী কণিকাগুলির স্থির ভর হল

$M_{Li} = 7.01822$ a.m.u. (এখানে a.m.u. হল পারমাণবিক ভর

$M_H = 1.00812$ a.m.u. পরিমাপের একক, যা দ্বারা একটি

এবং $M_{He} = 4.00390$ a.m.u. অক্সিজেন পরমাণুর ভরকে 16 ধরা হয়)

সুতরাং (4.67) সমীকরণের বাঁদিকের কণিকাগুলির মোট ভর = 8.02634 a.m.u.

এবং ডান দিকের 2টি He কণিকার মোট ভর = 8.00780 a.m.u.

সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে এই বিক্রিয়ার দ্বারা মোট $8.02634 - 8.00780 = 0.01854$ a.m.u. ভর বিনষ্ট হয়েছে। আইনস্টাইনের $\Delta E_0 = \Delta m_0 c^2$ সমীকরণ দ্বারা দেখানো যায় যে 1 a.m.u. = 931 MeV (মনে রাখবেন, 1 MeV = 1মিলিয়ন ইলেকট্রন ভোল্ট = 10^6 eV এবং 1 eV = 1.602×10^{-12} erg = 1.602×10^{-19} Joules)

সুতরাং এই বিক্রিয়ায় যে ভর বিনষ্ট হয়েছে, আইনস্টাইনের তত্ত্বদ্বারা তা থেকে উদ্ভূত গতীয় শক্তির মান হবে

$$Q = 0.01854 \times 931 = 17.26\text{MeV} = 27.65 \times 10^{-6}\text{erg}$$

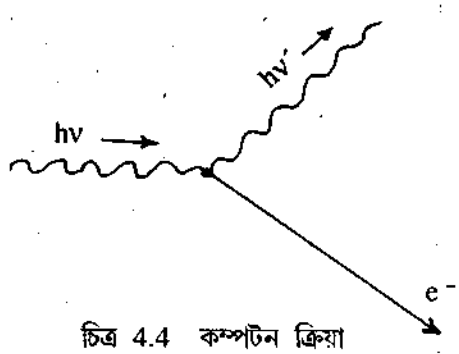
ককক্রফট ও ওয়ালটনের পরীক্ষায় দেখা যায় আলফা কণিকাদুটির বায়ুতে পাল্লা 8 cm.। কিন্তু বায়ুতে 1 cm যেতে একটি আলফা কণিকার মোট প্রায় 1.08 MeV শক্তি ব্যয় হয়। সুতরাং উক্ত বিক্রিয়ায় উৎপন্ন দুটি আলফা কণিকার $({_2}He^4)$ মোট গতীয় শক্তি ছিল প্রায় $2 \times 8 \times 1.08 = 17.28$ MeV। উক্ত পরীক্ষায় Li নিউক্লিয়াসটি স্থির ছিল। কিন্তু যে প্রোটন কণিকাটি তাকে আঘাত করে, তার গতীয়শক্তি ছিল 0.25 MeV। সুতরাং এই বিক্রিয়ায় প্রকৃতপক্ষে যে শক্তি উদ্ভূত হয়েছে, তার পরিমাণ

$$17.28 - 0.25 = 17.03\ \text{MeV} = 27.28 \times 10^{-6}\text{erg}$$

সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে আইনস্টাইনের তত্ত্বদ্বারা গণনালব্ধ ফল পরীক্ষালব্ধ ফলের সঙ্গে পরীক্ষার ভ্রমসীমার মধ্যে চমৎকার মিলে যাচ্ছে।

4.8.2 কম্পটন ক্রিয়া (Compton Effect)

এ বিষয়ে আপনারা পূর্বে পাঠগ্রহণ করেছেন। এই ক্রিয়ায় (চিত্র 4.4) একটি $h\gamma$ শক্তির ফোটন একটি স্থির ইলেকট্রনকে ধাক্কা দেয়। এই সংঘর্ষের ফলে ফোটনের শক্তি হ্রাস পায় এবং ইলেকট্রনের শক্তি বৃদ্ধি পেয়ে তা গতিশীল হয়। কম্পটনের পরীক্ষায় দেখা যায় যে ইলেকট্রনের গতিশক্তি যে পরিমাণে বৃদ্ধি পায়, তা আপতিত ফোটন ও বিক্ষেপিত ফোটনের শক্তির $(h\gamma')$ পার্থক্যের সমান।



চিত্র 4.4 কম্পটন ক্রিয়া

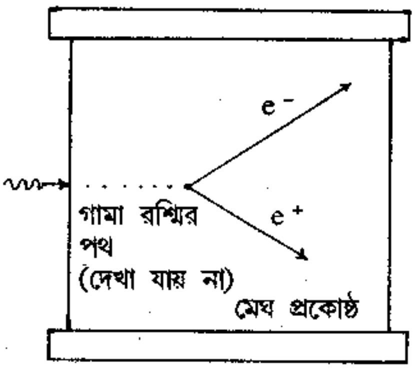
অর্থাৎ

$$h(\gamma - \gamma') = T = m_0 c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} - 1\right) \tag{4.68}$$

এখানে γ, γ' ফোটনের সংঘর্ষের পূর্বের ও পরের কম্পাঙ্ক, h প্ল্যাংকের ধ্রুবক এবং m_0 ও υ হল যথাক্রমে বিক্ষেপিত ইলেকট্রনের স্থির ভর ও বেগ।

4.8.3 শক্তির জড়ত্বপ্রাপ্তি (Materialisation of Energy)

একটি বিশেষ শক্তির গামা রশ্মি (ফোটন) যখন কোনও নিউক্লিয়াসকে ধাক্কা দেয়, তখন ঐ গামারশ্মি থেকে একটি ইলেকট্রন ও একটি পজিট্রন যুগলের সৃষ্টি হয় (চিত্র 4.5)। [পজিট্রন হল ইলেকট্রনের প্রতিকণা, যার ভর ও তড়িৎ আধানের মান যথাক্রমে ইলেকট্রনের ভর ও তড়িৎ আধানের মানের সমান, কিন্তু ঐ তড়িৎ আধানের প্রকৃতি ধনাত্মক। অর্থাৎ ইলেকট্রনের স্থির ভর m_0 এবং তড়িৎ আধান e^- ধরলে, পজিট্রনেরও স্থির ভর m_0, কিন্তু তড়িৎ আধান হল e^+।] এই ক্রিয়াকে শক্তির জড়ত্বপ্রাপ্তি বলা হয়। একটি উইলসনের মেঘ প্রকোষ্ঠে গামা রশ্মি পাঠিয়ে এরূপ ইলেকট্রন-পজিট্রন যুগল সহজেই সৃষ্টি করা যায়। প্রকোষ্ঠে ইলেকট্রন ও পজিট্রনের গতিপথ যে তলে থাকে, তার সমকোণে একটি চৌম্বক ক্ষেত্র প্রয়োগ করলে, ইলেকট্রন ও পজিট্রনের গতিপথ দুটি বিপরীত বৃত্তাকারে বেঁকে যায়। এ থেকে এদের আধানের প্রকৃতি



চিত্র 4.5 ইলেকট্রন-পজিট্রন যুগল সৃষ্টি

এবং গতিশক্তি নির্ণয় করা যায়। যদি এই দুটি গতিশক্তির যোগফল T হয় এবং গামা রশ্মির শক্তি $h\gamma$ হয়, তা হলে দেখা যায় যে

$$h\gamma - T = 1.022 \text{ MeV} \tag{4.69}$$

কিন্তু আমরা জানি যে একটি ইলেকট্রনের স্থৈতিক শক্তি $m_0c^2 = 0.511$ MeV। সুতরাং একটি ইলেকট্রন ও একটি পজিট্রনের মোট স্থৈতিক শক্তি হবে

$$2m_0c^2 = 2 \times 0.511 = 1.022 \text{ MeV} \tag{4.70}$$

(4.69) এবং (4.70) সমীকরণ দুটিরই ডানদিক সমান।

সুতরাং
$$h\gamma - T = 2m_0c^2 \tag{4.71}$$

কাজেই এই পরীক্ষার দ্বারা আইস্টাইনের ভর ও শক্তির তুল্যতা সূত্র প্রমাণিত হচ্ছে। এই পরীক্ষায় আরও বিশেষভাবে লক্ষ করার বিষয় যে, $h\gamma \geq 2m_0c^2$ না হলে ঐ গামা রশ্মি থেকে কখনওই ইলেকট্রন-পজিট্রন যুগল গঠিত হয় না। এটি আইনস্টাইনের ভর ও শক্তির যুগ্ম নিত্যতা (সংরক্ষণ) সূত্রকেই প্রমাণ করে।

4.8.4 নিউক্লীয় ফিসন, পারমাণবিক বোমা ও নিউক্লীয় রিঅ্যাকটর (Nuclear Fission, Atomic Bomb and Nuclear Reactor)

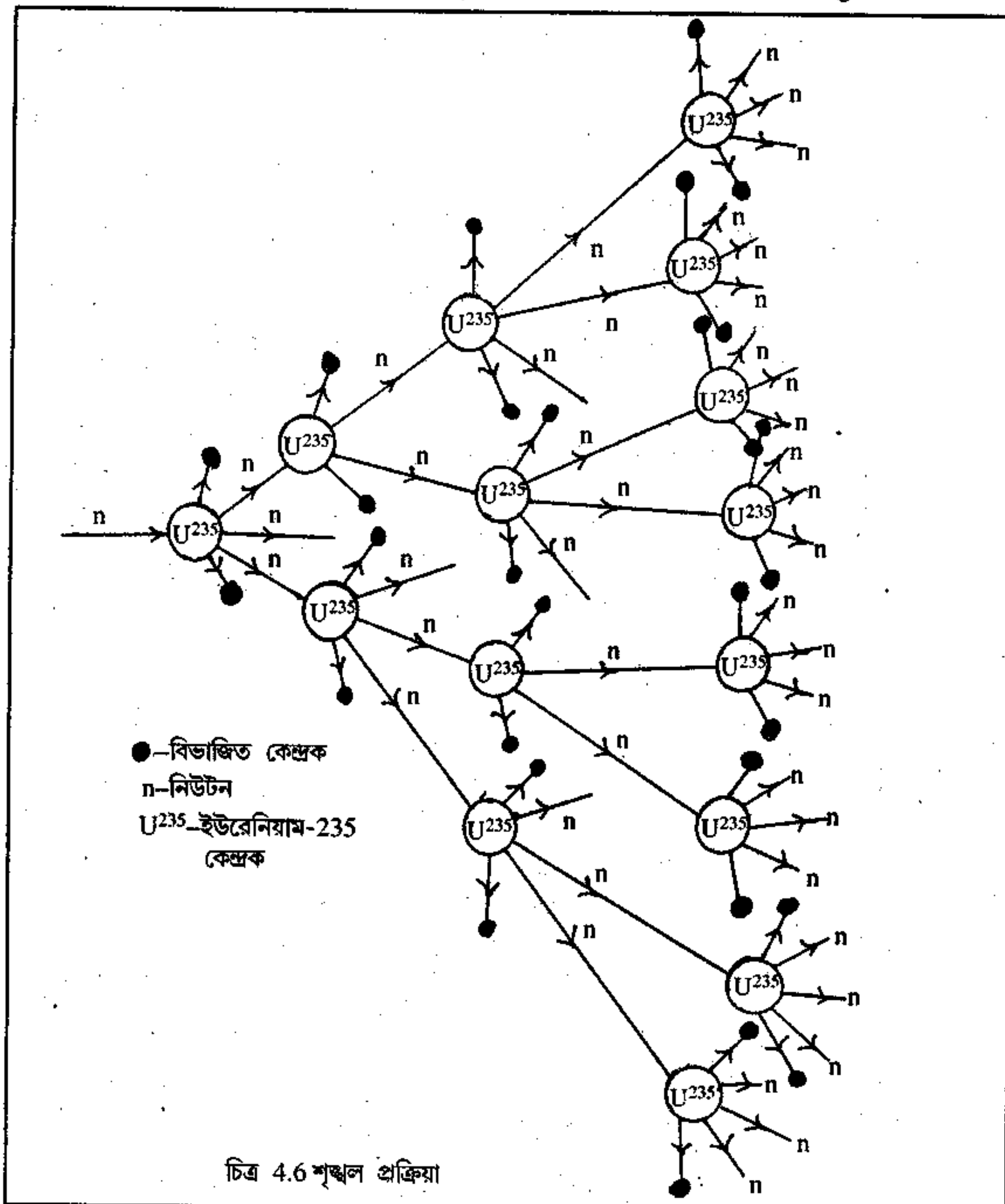
1938 খ্রিস্টাব্দে অটো হান (Otto Hahn) লক্ষ করেন যে একটি নিউট্রনের ($_0n^1$) সঙ্গে একটি ইউরেনিয়াম-235 ($_{92}U^{235}$) আইসোটোপের সংঘাত ঘটলে আইসোটোপটি প্রায় সমান দুভাগে বিভাজিত হয় এবং সেই সঙ্গে 3টি নিউট্রন ও প্রচুর শক্তি নির্গত হয়। একে **নিউক্লীয় ভাঙ্গন** (Nuclear Fission) বলে। এই বিক্রিয়াটি এরূপ

$$_0n^1 + {}_{92}U^{235} \rightarrow {}_{56}Ba^{141} + {}_{36}Kr^{92} + 3\,{}_0n^1 + Q \tag{4.72}$$

এই সমীকরণ থেকে দেখা যায় যে ডান দিকের কণিকাগুলির মোট ভর বাঁদিকের কণিকাগুলির মোট ভরের চেয়ে প্রায় 0.2154 a.m.u. কম। ফলে এই ভরের বিনাশ থেকে আইনস্টাইনের সূত্র অনুযায়ী $Q = 0.2154 \times 931 = 200.5$ MeV শক্তি উৎপন্ন হয়।

একটি পারমাণবিক বোমায় বিশুদ্ধ U^{235} ব্যবহার করা হয়। প্রথমে কোনও একটি প্রাকৃতিক নিউট্রনের আঘাতে একটি U^{235} পরমাণু ভেঙে যায়, এবং তা থেকে উপরি উক্ত শক্তি ও 3টি নিউট্রনের উৎপত্তি হয়। এই নিউট্রনগুলির দুটি বা তিনটি সমসংখ্যক U^{235} পরমাণু ভেঙে দেয়। ফলে মুক্ত নিউট্রনের সংখ্যা 4 থেকে 9 পর্যন্ত হতে পারে। এই নিউট্রনগুলি যখন আবার সমসংখ্যক U^{235} পরমাণুকে ভেঙে দেয়; তখন মুক্ত নিউট্রনের সংখ্যা আগের 3 গুণ বৃদ্ধি পায়। এভাবে যতই পারমাণবিক ভাঙন ঘটতে থাকে, নিউট্রনের সংখ্যাও ততই দ্রুতহারে বাড়তে থাকে এবং তার ফলে

পারমাণবিক ভাঙনও সেই হারেই বাড়তে থাকে। (চিত্র. 4.6) এভাবে ক্রমবর্ধমান হারে বিক্রিয়ার বৃদ্ধিকে শৃঙ্খল বিক্রিয়া (Chain reaction) বলে। এই শৃঙ্খল বিক্রিয়া চলার জন্য U^{235}-এর পরিমাণ



চিত্র 4.6 শৃঙ্খল প্রক্রিয়া

একটি নির্দিষ্ট ভরের চেয়ে বেশি হওয়া প্রয়োজন। এই ভরকে বলে সংকট ভর (Critical mass)। পারমাণবিক বোমায় এই শৃঙ্খল বিক্রিয়া অবাধে চলে, ফলে প্রায় মুহূর্তের মধ্যে বোমার ভিতরের

প্রায় যাবতীয় U^{235} ভেঙে গিয়ে প্রচণ্ড শক্তির উদ্ভব ঘটে। হিসাব করে দেখা গেছে যে 1 Kg U^{235} থেকে প্রায় 20,000 TNT শক্তি উৎপন্ন করা যায় এবং এ থেকে আইনস্টাইনের ভর ও শক্তির সম্বন্ধ প্রমাণিত হয়।

নিউক্লীয় রিঅ্যাকটরে বিশুদ্ধ U^{235}-এর পরিবর্তে U^{238} ও U^{235} দুটি আইসোটোপের সংমিশ্রণ নেওয়া হয় এবং শৃঙ্খল বিক্রিয়াকে নিয়ন্ত্রণ করার জন্য ক্যাডমিয়াম বা বোরনের দণ্ড ব্যবহার করা হয়। এতে শৃঙ্খল বিক্রিয়া ধীরে ধীরে চলে এবং শক্তিও নিয়ন্ত্রিতভাবে উৎপন্ন হয়। এই শক্তিকে তখন বিদ্যুৎশক্তি উৎপাদনের জন্য ব্যবহার করা যায়।

4.8.5 নিউক্লীয় সংযোজন ও হাইড্রোজেন বোমা (Nuclear Fusion and Hydrogen Bomb)

অতি উচ্চ উষ্ণতায় 4টি হাইড্রোজেন পরমাণু ধাপে ধাপে পরস্পরের সঙ্গে যুক্ত হয়ে একটি হিলিয়াম পরমাণু গঠন করতে পারে। একে নিউক্লীয় সংযোজন বলে। আরও অধিক উষ্ণতায় হাইড্রোজেন অন্যান্য মৌলের (যেমন কার্বন, নাইট্রোজেন, অক্সিজেন প্রভৃতি) সঙ্গে মিলিত হয়েও নিউক্লীয় সংযোজন ঘটাতে পারে। সাধারণভাবে বলা যায় দুটি কম ভরের মৌল নিউক্লীয়ভাবে যুক্ত হয়ে যদি অপর একটি অধিকতর ভারী মৌল গঠন করে, তবে তাকেই নিউক্লীয় সংযোজন বলে।

নিউক্লীয় সংযোজনে নিউক্লীয় ভাঙনের চেয়ে অধিকতর বেশি শক্তি উৎপন্ন হয়। এর কারণ সংযোজনকারী মৌলগুলির মোট ভর ও সংযোজিত মৌলটির ভরের মধ্যে পার্থক্য নিউক্লীয় ভাঙনের তুলনায় অনেক বেশি হয়। এর ফলে পারমাণবিক বোমার চেয়ে হাজার গুণ শক্তিশালী হাইড্রোজেন বোমা তৈরি করা সম্ভব হয়েছে। সূর্য ও অসংখ্য নক্ষত্র থেকে যে প্রচন্ড তাপ ও আলোকের উৎপত্তি হয়, তাও বিভিন্ন মৌলের মধ্যে নিউক্লীয় সংযোজনের ফল।

ফিসন ও ফিউসন বিক্রিয়ার মধ্যে নিম্নলিখিত সাদৃশ্য ও পার্থক্যগুলি দেখা যায়।

(1) ফিসন বিক্রিয়া ইউরেনিয়াম, থোরিয়াম প্রভৃতি প্রকৃতিতে প্রাপ্য সবচেয়ে ভারী আইসোটোপগুলির মধ্যে সংঘটিত হয়। কিন্তু ফিউশন বিক্রিয়া হাইড্রোজেন, ডয়টেরিয়াম, হিলিয়াম প্রভৃতি প্রকৃতিতে প্রাপ্য সবচেয়ে হাল্কা মৌলগুলির মধ্যে সংঘটিত হয়।

(2) ফিসন বিক্রিয়া শুরুর জন্য এক বা একাধিক প্রাকৃতিক নিউট্রন প্রয়োজন হয়। ফিউসনের জন্য প্রাথমিকভাবে অতি উচ্চ উষ্ণতা উৎপন্ন করতে হয়।

(3) ফিসন চলাকালে প্রচুর নিউট্রন, অন্যান্য অপেক্ষাকৃত হাল্কা তেজস্ক্রিয় মৌল ও প্রভূত তাপের উদ্ভব ঘটে। কিন্তু ফিউসনের ফলে তেজস্ক্রিয় মৌলের উদ্ভব হয় না। অপেক্ষাকৃত ভারী মৌল ও প্রচণ্ড তাপের উদ্ভব ঘটে।

(4) ফিসনকে নিয়ন্ত্রিত ও মন্থর করা যায় এবং তাদ্বারা পারমাণবিক রিঅ্যাক্টর তৈরি করা যায়। সুতরাং ফিসন যুদ্ধ (পারমাণবিক বোমা তৈরি) ও শান্তি উভয় কাজে লাগে। কিন্তু হাইড্রোজেন পরমাণুর ফিউসন দ্বারা হাইড্রোজেন বোমা তৈরি করা সম্ভব হলেও এই বিক্রিয়াকে এখনও নিয়ন্ত্রণ করা সম্ভব হয়নি। ফলে এখনও একে কোনও শান্তিপূর্ণ কাজে ব্যবহার করা যায় না। তবে ফিউসনই হল সূর্য ও নক্ষত্রগুলির তাপ ও আলোকের উৎস।

4.9 কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ আপেক্ষিকীয় সমীকরণ (Important Relativistic Formulae)

আধুনিক পদার্থবিদ্যাকে প্রধানত তিনভাগে বিভক্ত করা যায়। যেমন, (ক) পারমাণবিক পদার্থবিদ্যা, (খ) নিউক্লীয় পদার্থবিদ্যা ও (গ) কণা পদার্থবিদ্যা। এই বিভাগগুলিতে ক্রমান্বয়ে সূক্ষ্ম থেকে সূক্ষ্মতর কণা আবিষ্কৃত হয়েছে এবং দেখা গেছে এই কণাগুলির বেগ শূন্য থেকে আলোকের বেগের সমান (যেমন, ফোটন ও নিউট্রিনোর বেগ আলোকের বেগের সমান) পর্যন্ত হতে পারে। সুতরাং এই কণাগুলির বহু ক্রিয়া ও বিক্রিয়া আপেক্ষিকীয় বলবিদ্যা ছাড়া আলোচনা করা যায় না। এজন্য আপেক্ষিকীয় বলবিদ্যার কয়েকটি সমীকরণ খুবই ব্যবহার করার প্রয়োজন হয়। আমরা এই গুরুত্বপূর্ণ সমীকরণগুলি এখানে উল্লেখ করতে পারি।

4.9.1 ভর ও বেগের সমীকরণ

এই সমীকরণটি আমরা ইতিপূর্বেই নির্ণয় করেছি [সমীকরণ (4.47)]। বলা যায় এই সমীকরণটিই আপেক্ষিকীয় বলবিদ্যার ভিত্তি। কারণ, এই সমীকরণটির উপর নির্ভর করেই এই বলবিদ্যার অন্যান্য সমীকরণগুলি গঠিত হয়েছে। সেজন্য এই (4.47) সমীকরণটি এখানে আর একবার উল্লেখ করা হল।

$$m = m_0 \frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} = m_0(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} = m_0\gamma \qquad (4.73)$$

[যেখানে $\beta = \frac{\upsilon}{c}$ এবং $\gamma = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$]

4.9.2 গতীয় শক্তির সমীকরণ

এই সমীকরণটিও আমরা পূর্বেই পেয়েছি [সমীকরণ (4.57)]

$$T = c^2(m-m_0) = c^2\Delta m \quad (m - m_0 = \Delta m \text{ ধরলে})$$

$$= m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} - 1\right) = m_0c^2(\gamma - 1) \qquad (4.74)$$

4.9.3 স্থৈতিক শক্তির সমীকরণ ও ভর ও শক্তির নিত্যতা সূত্র

(4.60) এবং (4.62) সমীকরণ দুটি থেকে আমরা পাই

স্থৈতিক শক্তি, $E_0 = m_0c^2$

এবং স্থৈতিক শক্তির এই সমীকরণ থেকে স্থৈতিক ভরের হ্রাস বা বৃদ্ধির সমীকরণ হল [সমীকরণ (4.63)]

$$\Delta E_0 = \Delta m_0 c^2$$

এই সমীকরণটিকে বলা হয় আইনস্টাইনের ভর ও শক্তির যুগ্ম নিত্যতা (সংরক্ষণ) সূত্র। কারণ এই সমীকরণের অর্থ হল যে যদি কোনও বস্তুর স্থৈতিক ভর Δm_0 হ্রাস পায়, তবে তার দ্বারা বস্তুর শক্তি $\Delta m_0c^2 = \Delta E_0$ পরিমাণ বৃদ্ধি পাবে অথবা যদি কোনও বস্তুর স্থৈতিক ভর Δm_0 বৃদ্ধি পায়, তবে ঐ বস্তুর শক্তি $\Delta m_0c^2 = \Delta E_0$ পরিমাণ হ্রাস পাবে, অর্থাৎ বস্তুর স্থৈতিক ভরের হ্রাস-বৃদ্ধিতে বস্তুর মোট শক্তির কোনও হ্রাস-বৃদ্ধি হয় না।

আপনি (4.57) ও (4.74) সমীকরণের সঙ্গে (4.63) সমীকরণের পার্থক্য লক্ষ করুন। (4.57) বা (4.74) সমীকরণে বস্তুর স্থৈতিক ভরের পরিবর্তন হচ্ছে না এবং এই সমীকরণটি বোঝাচ্ছে যে বস্তুর গতীয় শক্তি (এবং মোট শক্তি) যত বৃদ্ধি পাবে, বস্তুটির ভরও সেই অনুপাতে (Δm) বৃদ্ধি পাবে। বাইরে থেকে বল বা শক্তি প্রয়োগ হলে তবেই বস্তুর এরূপ ভরসহ গতীয় ও মোট শক্তির বৃদ্ধি ঘটে।

অপর পক্ষে (4.63) সমীকরণ বোঝাচ্ছে যে বস্তুর স্থৈতিক ভরের হ্রাস বা বৃদ্ধি হলে বস্তুটির গতীয় শক্তিও যথাক্রমে বৃদ্ধি বা হ্রাস পাবে এবং এই হ্রাস-বৃদ্ধির ক্ষেত্রে বস্তুর মোট শক্তির কোনও পরিবর্তন হবে না, যদি না বাইরে থেকে কোনও বল বা শক্তি বস্তুর উপর প্রযুক্ত হয়। সুতরাং এটিকে বস্তুর মোট শক্তির নিত্যতা সূত্রও বলা যায়।

4.9.4 বস্তুর মোট শক্তির সমীকরণ

আপনারা পূর্বেই লক্ষ করেছেন যে (4.47) সমীকরণটির উভয়দিক বর্গ করে আমরা নীচের (4.54) সমীকরণটি পাই

$$m^2c^2 - m^2\upsilon^2 = m_0c^2$$

$$\text{বা,}\quad m^2c^2 = m^2\upsilon^2 + m_0^2c^2 \qquad (4.75)$$

আমরা (4.61) সমীকরণে বস্তুর মোট শক্তি, $mc^2 = E$ ধরেছিলাম। তাছাড়া বস্তুর ভরবেগ $p = m\upsilon$ ধরলে E ও p-র সাপেক্ষে (4.75) সমীকরণের রূপ হবে

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m_0^2c^2$$

$$\text{বা,}\quad E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4 \qquad (4.76)$$

(4.76) সমীকরণটি আপেক্ষিকীয় কণা পদার্থবিদ্যায় বহুল ব্যবহৃত হয়। সাধারণত যেসব কণার স্পিন 0 বা 1, 2, 3 প্রভৃতি কোনও পূর্ণসংখ্যা (যেমন, ফোটন, পায়ন, কেয়ন প্রভৃতি ; এই ধরনের কণাগুলিকে বিজ্ঞানী সত্যেন বোসের নামানুসারে 'বোসন' বলা হয়), সেগুলির ক্ষেত্রে এই সমীকরণটি বিশেষভাবে প্রযোজ্য।

আমরা জানি ফোটনের ভর নেই ($m_0 = 0$)। আবার কোনও কণা যখন প্রায় আলোকের বেগে চলে, তখন তার ভরবেগ $p >> m_0c$। সুতরাং এই উভয় ক্ষেত্রে আমরা লিখতে পারি

$$E^2 = p^2c^2$$

$$\text{বা, } E = mc^2 = pc \qquad (4.77)$$

(এখানে লক্ষ করুন, ভরবেগ p ভেক্টর হলেও আমরা এখানে কেবল এর মানের কথা বলছি, কারণ E একটি স্কেলার)

4.9.5 ডিরাকের সমীকরণ (Dirac's Equation)

কণা পদার্থবিদ্যায় বোসন ছাড়াও আরেক ধরনের কণা পাওয়া যায়, যাদের স্পিন $\frac{1}{2}$ বা এর কোনও গুণিতক ($\frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ ইত্যাদি)। ইলেকট্রন, প্রোটন, নিউট্রন, নিউট্রিনো ইত্যাদি এই ধরনের কণার উদাহরণ। বিজ্ঞানী ফের্‌মির নামানুসারে এই কণাগুলিকে 'ফের্‌মিয়ন' বলে। বিজ্ঞানী ডিরাক (Dirac) লক্ষ করেন যে ফের্‌মিয়নগুলির ক্ষেত্রে (4.76) সমীকরণ সরাসরি ব্যবহার করা যায় না। এজন্য 1928 খ্রিস্টাব্দে একে তিনি যেভাবে পরিবর্তন করেন, তা আমরা এখানে উল্লেখ করতে পারি। (4.76) সমীকরণ থেকে আমরা পাই

$$E = \pm\sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} \qquad (4.78)$$

যেহেতু $\vec{p}$ একটি ভেক্টর রাশি, সেজন্য ডিরাক (4.78) সমীকরণের সমাধান হিসাবে ধরে নিলেন যে

$$E = \pm\left(\vec{\alpha}.\vec{p}c + \beta m_0c^2\right) \qquad (4.79)$$

যেখানে $\vec{\alpha}$ একটি অজানা ভেক্টর এবং β একটি অজানা স্কেলার।

এখন ধরা যাক $\vec{p}$ ভেক্টরের তিনটি উপাংশ হল p_x, p_y, p_z। অনুরূপে আমরা যদি $\vec{\alpha}$ ভেক্টরের তিনটি উপাংশ $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ ধরি, তবে (4.79) সমীকরণটি হবে

$$E = \pm(\alpha_x p_x c + \alpha_y p_y c + \alpha_z p_z c + \beta m_0 c^2) \qquad (4.80)$$

এখন $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ ও β-র মান জানার জন্য (4.80) সমীকরণের উভয় দিকের বর্গ করে পাই

$$E^2 = (\alpha_x p_x c + \alpha_y p_y c + \alpha_z p_z c + \beta m_0 c^2)(\alpha_x p_x c + \alpha_y p_y c + \alpha_z p_z c + \beta m_0 c^2)$$

$$= c^2(\alpha_x^2 p_x^2 + \alpha_x p_x \alpha_y p_y + \alpha_x p_x \alpha_z p_z + \alpha_x p_x \beta m_0 c$$
$$+ \alpha_y p_y \alpha_x p_x + \alpha_y^2 p_y^2 + \alpha_y p_y \alpha_y p_z + \alpha_y p_y \beta m_0 c$$
$$+ \alpha_z p_z \alpha_x p_x + \alpha_z p_z \alpha_y p_z + \alpha_z^2 p_z^2 + \alpha_y p_y \beta m_0 c$$
$$+ \beta m_0 c \alpha_x p_x + \beta m_0 c \alpha_y p_y + \beta m_0 c \alpha_z p_z + \beta^2 m_0^2 c^2)$$

$$= c^2\{\alpha_x^2 p_x^2 + \alpha_y^2 p_y^2 + \alpha_z^2 p_z^2 + \beta^2 m_0^2 c^2 + (\alpha_x \alpha_y + \alpha_y \alpha_x) p_x p_y$$
$$+ (\alpha_y \alpha_z + \alpha_z \alpha_y) p_y p_z + (\alpha_z \alpha_x + \alpha_x \alpha_z) p_z p_x$$
$$+ (\alpha_x \beta + \beta \alpha_x) p_x m_0 c + (\alpha_y \beta + \beta \alpha_y) p_y m_0 c + (\alpha_z \beta + \beta \alpha_z) p_z m_0 c\} \quad (4.81)$$

এখন p_x, p_y, p_z যেহেতু $\vec{p}$-র উপাংশ, সুতরাং

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \quad (4.82)$$

সুতরাং সমীকরণ (4.81) ও সমীকরণ (4.76) অভিন্ন হবে। যদি আমরা বসাই

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_x^2 = \alpha_y^2 = \alpha_z^2 = \beta^2 = 1 \\ &\alpha_x\alpha_y + \alpha_y\alpha_x = 0 \\ &\alpha_y\alpha_z + \alpha_z\alpha_y = 0 \\ &\alpha_z\alpha_x + \alpha_x\alpha_z = 0 \\ &\alpha_x\beta + \beta\alpha_x = 0 \\ &\alpha_y\beta + \beta\alpha_y = 0 \\ &\alpha_z\beta + \beta\alpha_z = 0 \end{aligned}\right\} \quad (4.83)$$

(4.83)-র শর্তগুলিকে ডিরাকের শর্ত বলা হয় এবং এই শর্তগুলির দ্বারাই $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ ও β-র মান নির্ধারিত হয়। ইলেকট্রন স্পিনের ধর্মগুলির সঙ্গে ডিরাকের শর্তগুলি মিলে যায়। এজন্য (4.80) সমীকরণটিকে ডিরাকের আপেক্ষিকীয় ইলেকট্রনের সমীকরণ বলা হয়।

(4.80) সমীকরণে আর একটি বিষয় লক্ষ করুন। এখানে E-র মান ধনাত্মক (+) বা ঋণাত্মক (−) দুইই হতে পারে। ডিরাক E-র ধনাত্মক মানের সমীকরণটিকে ইলেকট্রনের গতির সমীকরণ হিসাবে ধরলেন। এখন তা হলে প্রশ্ন হল যে E-র ঋণাত্মক মানের সমীকরণটির অর্থ কী? ডিরাক যখন এই সমীকরণ গঠন করেন, তখন কোনও প্রতিকণা (anti particle)-র আবিষ্কার হয়নি। ডিরাক ভেবে

দেখলেন যে যদি ইলেকট্রনের একটি প্রতিকণা আছে, এরূপ ধরে নেওয়া হয়, তবে ঋণাত্মক শক্তির সমীকরণটির দ্বারা ঐ প্রতিকণার গতি ব্যাখ্যা করা যেতে পারে। ডিরাক এই তাত্ত্বিক প্রতিকণাটির নাম দিলেন 'পজিট্রন'। কেননা, প্রতিকণা হল কণার বিপরীত উপাদান, যা কণার সঙ্গে মিলিত হলে উভয়ের বিনাশ হয় এবং এদের মোট ভর শক্তিতে রূপান্তরিত হয়। কাজেই যেহেতু ইলেকট্রনের তড়িৎ আধান e ঋণাত্মক (e^-), এর প্রতিকণা পজিট্রনের তড়িৎ আধান হবে ধনাত্মক e (e^+)। তাছাড়া এই প্রতিকণার ভর ও স্পিন হবে ইলেকট্রনের ভর ও স্পিনের সমান।

ডিরাকের এই তাত্ত্বিক ভবিষ্যদ্বাণী সত্য হিসাবে প্রতিষ্ঠিত হয়, যখন 1932 খ্রিস্টাব্দে প্রথম অ্যানডারসন (Anderson) ও তারপর ব্ল্যাকেট (Blackett) উইসনের মেঘপ্রকোষ্ঠ দ্বারা মহাজাগতিক রশ্মিদ্বারা সৃষ্ট পজিট্রন আবিষ্কার করেন।

4.10 মিনকওস্কির চর্তুমাত্রিক জগত (Four Dimentional World of Minkowski)

আমরা এ পর্যন্ত আপেক্ষিকীয় বলবিদ্যার সূত্রগুলি নিয়ে যে আলোচনা করেছি, তারপরই হয়তো এই এককটির পরিসমাপ্তি করা যেত। কিন্তু তাহলে আপনাদের মনে একটি প্রশ্ন থেকেই যেত। সেটা হল নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্রের লরেন্টজীয় রূপান্তর নিয়ে যে সমস্যার সৃষ্টি হয়েছিল, তার কোনও সমাধানের কথা তো বলা হলো না।

নিউটনের গতিসূত্র গঠনের বহু পূর্বেই গ্যালিলিও বলেছিলেন যে কোনও বস্তুর সমবেগ গতি ও স্থিতির বিষয়টি সম্পূর্ণ আপেক্ষিক, কারণ বস্তুর এই দুই অবস্থার যেকোনও একটিতে ঐ বস্তুর উপর যে প্রাকৃতিক নিয়ম প্রজোয্য, অপর অবস্থার ক্ষেত্রেও ঐ নিয়মগুলিই প্রযোজ্য হয়, কোনও ব্যতিক্রম হয় না।

এরপর নিউটন যে তিনটি গতিসূত্র দিয়েছেন, আমরা দেখেছি যে গ্যালিলিয়ো রূপান্তর দ্বারা সেগুলির কোনও পরিবর্তন হয় না। এদ্বারা জাড্যিক নির্দেশতন্ত্রের সংজ্ঞাও দেওয়া হয়েছিল। কিন্তু তারপর আইনস্টাইন লক্ষ করলেন যে আলোকের সমীকরণের ক্ষেত্রে গ্যালিলিয়ো রূপান্তর খাটে না বটে, কিন্তু লরেন্টজীয় রূপান্তর খাটে এবং তা মাইকেলসন-মর্লের পরীক্ষার ফল যথার্থরূপে ব্যাখ্যা করতে পারে। তাছাড়া তিনি আরও লক্ষ করলেন যে নিউটনের প্রথম গতিসূত্রটিও লরেন্টজীয় রূপান্তরের সাপেক্ষে অপরিবর্তিত থাকে।

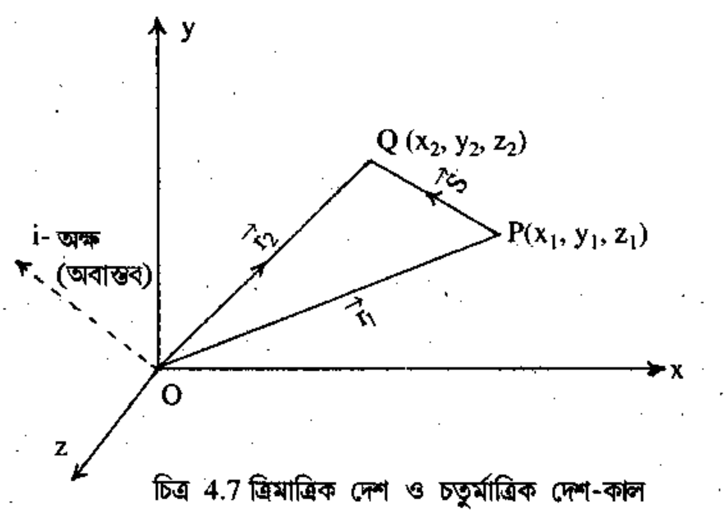
এ থেকে আইনস্টাইন তাঁর বিশেষ আপেক্ষিকতার প্রথম সূত্রেই গ্যালিলিয়োর আপেক্ষিকতার সূত্রকে আরও বিস্তৃত করে বললেন যে সকল জাড্যিক নির্দেশতন্ত্রেই তড়িচ্চুম্বকীয় সহ বলবিদ্যার সকল সূত্রই অপরিবর্তিত থাকবে এবং সূত্রগুলির সমীকরণ এক নির্দেশতন্ত্র থেকে অন্য জাড্যিক নির্দেশতন্ত্রে

সমরূপে পরিবর্তিত (covariant) হবে। আইনস্টাইনের প্রথম ও দ্বিতীয় সূত্র থেকে লরেন্টজীয় রূপান্তর সমীকরণগুলি পাওয়া যায়। সুতরাং আইনস্টাইনের আপেক্ষিকতার প্রথম সূত্র অনুযায়ী নিউটনের তিনটি সূত্রই লরেন্টজীয় রূপান্তর দ্বারা সমরূপে পরিবর্তিত হওয়া আবশ্যক। কিন্তু বাস্তবে দেখা যাচ্ছে যে নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র লরেন্টজীয় রূপান্তর দ্বারা সমরূপে পরিবর্তিত হয় না। তৃতীয় সূত্রের ক্ষেত্রেও অনুরূপ সমস্যার সৃষ্টি হয়েছিল। কিন্তু আপনারা দেখেছেন যে বেগের উপর বস্তুর ভরের নির্ভরশীলতা ধরে নিয়ে আইনস্টাইন কিভাবে ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্রকে অপরিবর্তিত রেখেছেন।

আমরা এখন দেখব যে মিনকওস্কির চতুর্মাত্রিক জ্যামিতিদ্বারা আইনস্টাইন কিভাবে নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রের সংশোধন করেছেন, যাতে সেটি লরেন্টজীয় রূপান্তর দ্বারা অপরিবর্তিত থাকে।

4.10.1 ত্রিমাত্রিক ইউক্লিডীয় দেশ ও জ্যামিতি (Three-Dimensional Euclidean Space and Geometry)

আমরা জানি, x, y, z ত্রিমাত্রিক কার্টেজীয় দেশে P ও Q দুটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক $P(x_1, y_1, z_1)$ এবং $Q(x_2, y_2, z_2)$ হলে নিউক্লিডীয় জ্যামিতি অনুযায়ী (চিত্র 4.7)



চিত্র 4.7 ত্রিমাত্রিক দেশ ও চতুর্মাত্রিক দেশ-কাল

সরণ ভেক্টর, $\overrightarrow{PQ} = \vec{s} = \vec{r_2} - \vec{r_1} = \vec{i}(x_2 - x_1) + \vec{j}(y_2 - y_1) + \vec{k}(z_2 - z_1)$ (4.84)

যেখানে $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ যথাক্রমে x, y, z অক্ষের দিকে একক ভেক্টর এবং $\vec{r_1}$ ও $\vec{r_2}$ P ও Q বিন্দুর ব্যাসার্ধ ভেক্টর। এই সরণের মান s (স্কেলার) ধরলে

$$\therefore \qquad s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \qquad (4.85)$$

$$\text{বা,} \qquad s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (4.86)$$

কারণ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ প্রত্যেকে প্রত্যেকের সমকোণে থাকায়

$$\vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1, \vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0$$

আমরা এখন দেখাতে পারি যে গ্যালিলিয়ো রূপান্তরের সাপেক্ষে s অপরিবর্তনীয় (invariant) থাকে।

ধরা যাক, S নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে S′ নির্দেশতন্ত্র x, x′ অক্ষ অভিমুখে υ বেগে চলছে। ধরা যাক, S′ নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে স্থির দুটি বিন্দু $P(x_1', y_1', z_1')$ ও $Q(x_2', y_2', z_2')$ -র মধ্যে দূরত্ব s′। তাহলে আমরা পাই

$$s' = \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2} \qquad (4.87)$$

ধরা যাক, S নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে স্থির একজন নিরীক্ষকের নিকট t সময়ে ঐ দুটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক $P(x_1, y_1, z_1)$ এবং $Q(x_2, y_2, z_2)$। যদি এই নিরীক্ষকের সাপেক্ষে এই দুটি বিন্দুর দূরত্ব s হয়, তাহলে, আমরা (4.85) সমীকরণ থেকে পাই

$$s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

এখন t সময়ে গ্যালিলিয়ো রূপান্তর সমীকরণগুলি হবে

$$x_1 = x_1' + \upsilon t,\ y_1 = y_1',\ z_1 = z_1'$$

$$\text{এবং} \quad x_2 = x_2' + \upsilon t,\ y_2 = y_2',\ z_2 = z_2' \qquad (4.88)$$

সুতরাং এই সমীকরণগুলি থেকে আমরা পাই

$$x_2 - x_1 = x_2' - x_1',\ y_2 - y_1 = y_2' - y_1',\ z_2 - z_1 = z_2' - z_1' \qquad (4.89)$$

(4.89) সমীকরণের এই মানগুলি (4.85) সমীকরণে বসালে আমরা পাই

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \\ &= \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2} \\ &= s' \end{aligned} \qquad (4.90)$$

অর্থাৎ গ্যালিলিয়ো রূপান্তর দ্বারা s স্কেলারটির মান অপরিবর্তনীয়।

যদি P ও Q-র দূরত্ব অত্যল্প হয়, তবে s-কে আমরা ds দ্বারা প্রতিস্থাপিত করতে পারি। এক্ষেত্রে ds-এর উপাংশগুলিও অত্যন্ত ক্ষুদ্র হবে এবং সেজন্য আমরা ধরতে পারি

$$x_2 - x_1 = dx,\ y_2 - y_1 = dy,\ z_2 - z_1 = dz$$

(4.85) ও (4.86) সমীকরণে আমরা এই মানগুলি বসিয়ে পাই

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{4.91}$$

এবং

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \tag{4.92}$$

4.10.2 চতুর্মাত্রিক ছদ্ম-ইউক্লিডীয় দেশ-কাল ও জ্যামিতি (Four Dimensional Pseudo-Euclidean Space-time and Geometry)। মিনকওস্কির জগত।

মিনকওস্কি ত্রিমাত্রিক দেশের সঙ্গে কাল মাত্রা যোগ করে একটি চতুর্মাত্রিক দেশ-কালের কল্পনা করেন। এজন্য তিনি x, y, z অক্ষগুলির প্রত্যেকটির সঙ্গে সমকোণে কল্পিত i-অক্ষ কল্পনা করেন (চিত্র 4.7) এবং এই অক্ষের উপর দেশ-কাল ভেক্টরের উপাংশ ct ধরে নেন (যেখানে c = আলোকের বেগ ও t = সময় বা কালাঙ্ক। t-কে c-দ্বারা গুণ করার কারণ হল যাতে এটিও দেশ স্থানাঙ্কগুলির মতো একই দৈর্ঘ্যের মাত্রা পায়।) যেহেতু কল্পিত সংখ্যা i-এর বর্গের মডিয়ুল $|i^2| = 1$, সুতরাং i-কে i-অক্ষের দিকে একক ভেক্টর হিসাবে কল্পনা করা যায়। (লক্ষ করুন, মিনকওস্কির চতুর্মাত্রিক দেশ-কাল ত্রিমাত্রিক দেশের ধারণার একটি গাণিতিক প্রসারণ মাত্র। এর কোনও বাস্তব উপলব্ধি আমাদের পক্ষে সম্ভব নয়।)

অতএব চতুর্মাত্রিক দেশ-কালে P ও Q বিন্দুর নির্দেশাঙ্ক যথাক্রমে $P(x_1, y_1, z_1, ct_1)$ এবং $Q(x_2, y_2, z_2, ct_2)$ ধরে নিলে চতুর্মাত্রিক ব্যাসার্ধ ভেক্টর দুটি হবে

$$\vec{R}_1 = \vec{i}\,x_1 + \vec{j}\,y_1 + \vec{k}\,z_1 + ict_1$$

এবং

$$\vec{R}_2 = \vec{i}\,x_2 + \vec{j}\,y_2 + \vec{k}\,z_2 + ict_2 \qquad ...(4.93)$$

এখানে লক্ষণীয় যে $\vec{i}$ হল x-অক্ষ অভিমুখে একক ভেক্টর, কিন্তু (ভেক্টরের তীর চিহ্ন বর্জিত) i হল কল্পিত i-অক্ষের দিকে একক কল্পিত ভেক্টর এবং এর মান $i = \sqrt{-1}$।

চতুর্মাত্রিক সরণ $\vec{S}$ দেশ-কালে ঘটে। এজন্য একে দুটি ঘটনার অবকাশ বলে।

সুতরাং অবকাশ,

$$\vec{S} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1 = \vec{i}(x_2 - x_1) + \vec{j}(y_2 - y_1) + \vec{k}(z_2 - z_1) + ic(t_2 - t_1) \qquad ...(4.94)$$

সুতরাং এই অবকাশের মানের বর্গ হবে—

$$S^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 \quad ...(4.95)$$

বা, $$S = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2} \quad ...(4.96)$$

কারণ, $i = \sqrt{-1}, i^2 = -1, i.\ \vec{i} = i.\ \vec{j} = i.\ \vec{k} = 0$ (যেহেতু i-কে $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ প্রত্যেক ভেক্টরের সমকোণে ধরা হয়েছে।)

(4.95) ও (4.96) সমীকরণ থেকে অত্যল্প অবকাশের ক্ষেত্রে আমরা পাই

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2 \quad ...(4.97)$$

এবং $$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2} \quad ...(4.98)$$

(4.94) সমীকরণে আমরা $\vec{S}$-কে x, y, z বাস্তব অক্ষগুলির দিকে ধরেছি। যদি $dt = 0$ হয়, তবে dS দ্বারা আমরা দৈর্ঘ্যের মান পাই। এজন্য এই অবকাশকে দেশতুল্য (space like) বলা হয়। অপরপক্ষে এই অবকাশকে আমরা কল্পিত i-অক্ষের দিকেও ধরতে পারতাম। সেক্ষেত্রে আমরা লিখতে পারি

$$i\vec{S}_t = i\left(\vec{R}_2 - \vec{R}_1\right) = \vec{i}(x_2 - x_1) + \vec{j}(y_2 - y_1) + \vec{k}(z_2 - z_1) + ic(t_2 - t_1) \quad ...(4.99)$$

সুতরাং এখান থেকে আমরা পাই—

$$-S_t^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2$$

বা, $$S_t^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \quad ...(4.100)$$

এবং $$dS_t^2 = c^2dt^2 - dx - dy^2 - dz^2 \quad ...(4.101)$$

সুতরাং আমরা পাচ্ছি $S^2 = -S_t^2$ এবং $dS^2 = -dS_t^2$ ...(4.102)

(4.99) সমীকরণে অবকাশকে সময় অক্ষের দিকে ধরা হয়েছে। যদি $dx = dy = dz = 0$ হয়, তবে dS_t দুটি ঘটনার মধ্যে সময়ের পার্থক্য নির্দেশ করে। এজন্য এই অবকাশকে সাধারণত কালতুল্য অবকাশ (time like interval) বলা হয়

লক্ষণীয় যে ত্রিমাত্রিক দেশে $dx = dy = dz = 0$ হলে, (4.88) সমীকরণ অনুযায়ী $ds = 0$। কিন্তু কালতুল্য অবকাশের ক্ষেত্রে [সমীকরণ (4.101)] আমরা $dx = dy = dz = 0$ বসালে পাই

$$dS_t = cdt > 0 \quad ...(4103)$$

আবার দেশতুল্য অবকাশের সমীকরণে $dt = 0$ বসালে আমরা পাই

$$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = ds > 0 \quad ...(4104)$$

সুতরাং আমরা দেখতে পাচ্ছি যে শুধুমাত্র কালাঙ্ক বা শুধুমাত্র স্থানাঙ্কগুলির মান শূন্য নিলেও অবকাশের মান শূন্য হয় না। কিন্তু যদি

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = c^2t^2 \quad ...(4105)$$

ধরা হয়, তবে আমরা পাই $dS = dS_t = 0$ এবং সেক্ষেত্রে (4.105) বা (4.97) বা (4.101) সমীকরণ আলোকের বিস্তারের সমীকরণে রূপান্তরিত হয়।

চতুর্মাত্রিক দেশ-কালকে **মিনকওস্কির জগত** বলে। এই জগতে অবকাশের মান ইউক্লিডীয় পদ্ধতি অনুসরণ করে নির্ণয় করা হয়েছে। এতৎসত্ত্বেও মিনকওস্কির জগতকে সম্পূর্ণ ইউক্লিডীয় বলা যায় না। কারণ আপনি নিশ্চয় লক্ষ করেছেন যে ইউক্লিডীয় ত্রিমাত্রিক সরণের বর্গ তিনটি ধনাত্মক রাশির যোগফল। কিন্তু মিনকওস্কির চতুর্মাত্রিক জগতে অবকাশের বর্গ ধনাত্মক ও ঋণাত্মক উভয় প্রকার রাশির যোগফল। ফলে মিনকওস্কির জগতের অনেক ধর্ম ইউক্লিডীয় জ্যামিতির দ্বারা ব্যাখ্যা করা যায় না। এজন্য এই জগতকে **ছদ্ম ইউক্লিডীয় দেশ** (Pseudo Euclidean Space) বলা হয়।

লক্ষ করুন, ত্রিমাত্রিক ও চতুর্মাত্রিক রাশিগুলির (ব্যাসার্ধ ভেক্টর, সরণ, অবকাশ) মধ্যে পার্থক্য বোঝাবার জন্য আমরা এখানে ত্রিমাত্রিক রাশির ক্ষেত্রে ছোটো রোমান অক্ষর (r, s প্রভৃতি) ও চতুর্মাত্রিক রাশির ক্ষেত্রে বড়ো রোমান অক্ষর (R, S প্রভৃতি) ব্যবহার করেছি। পরবর্তীকালে বেগ, ত্বরণ, বল, ভরবেগ ইত্যাদির ক্ষেত্রেও আমরা এই নীতি ব্যবহার করব। তাছাড়া ত্রিমাত্রিক ও চতুর্মাত্রিক সরণ, বেগ, ত্বরণ ইত্যাদির মধ্যে পার্থক্য বোঝাবার জন্য অনেক সময় (ত্রিমাত্রিকের ক্ষেত্রে) 3-সরণ, 3-বেগ, 3-ত্বরণ ইত্যাদি এবং চতুর্মাত্রিক ক্ষেত্রে 4-সরণ, 4-বেগ, 4-ত্বরণ ইত্যাদি শব্দ ব্যবহার করা হয়।

4.10.3. চতুর্মাত্রিক অবকাশের লরেন্টজীয় রূপান্তর (Lorentzeon Transformation of Four Dimensional Interval)

এখন আমরা প্রমাণ করতে পারি যে লরেন্টজীয় রূপান্তর দ্বারা S (বা S_t) স্কেলারটির মান অপরিবর্তিত থাকে।

ধরা যাক্ L′ নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে স্থির একজন নিরীক্ষক এই নির্দেশতন্ত্রে স্থির দুটি বিন্দু $P(x_1', y_1', z_1')$ ও $Q(x_2', y_2', z_2')$ -তে দুটি ঘটনা যথাক্রমে t_1' ও t_2' সময়ে ঘটতে দেখে। সুতরাং এই নিরীক্ষকের সাপেক্ষে P ও Q বিন্দুর 4-দূরত্ব S′ ধরলে (4.95) সমীকরণ অনুযায়ী আমরা পাই

$$S'^2 = (x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2 - c^2(t_2' - t_1')^2 \quad ...(4.105)$$

যদি L′ নির্দেশতন্ত্র L নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে x, x′ অক্ষ অভিমুখে v সমবেগে চলে এবং $t = t' = 0$ সময়ে নির্দেশতন্ত্র দুটির সমাপতন হয়ে থাকে, L নির্দেশতন্ত্রের নিরীক্ষক ঐ ঘটনা দুটি

$P(x_1, y_1, z_1)$ ও $Q(x_2, y_2, z_2)$ বিন্দুতে যথাক্রমে t_1 ও t_2 সময়ে ঘটতে দেখবে। সুতরাং এই নিরীক্ষকের কাছে (4.95) সমীকরণ অনুযায়ী এই ঘটনা দুটির অবকাশের মান হবে

$$S^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 \quad ...(4.106)$$

এখন এই দুটি নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে লরেন্টজীয় রূপান্তর সমীকরণগুলি হল

$$x_1 = \gamma(x_1' + \upsilon t_1'), \; y_1 = y_1', \; z_1 = z_1', \; t_1 = \gamma\left(t_1' + \frac{\upsilon x_1'}{c^2}\right)$$

এবং $$x_2 = \gamma(x_2' + \upsilon t_2'), \; y_2 = y_2', \; z_2 = z_2', \; t_2 = \gamma\left(t_2' + \frac{\upsilon x_2'}{c^2}\right)$$

যেখানে $$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \quad ...(4.107)$$

(4.107) সমীকরণগুলি থেকে L নির্দেশতন্ত্রের নির্দেশাঙ্কের মানগুলি (4.106) সমীকরণে বসালে আমরা পাই

$$S^2 = \gamma^2\left\{(x_2' - x_1') + \upsilon(t_2' - t_1')\right\}^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2$$

$$-c^2\gamma^2\left\{(t_2' - t_1') + \frac{\upsilon}{c^2}(x_2' - x_1')\right\}^2$$

$$= \gamma^2\left\{(x_2' - x_1')^2 + \upsilon^2(t_2' - t_1')^2 + 2\upsilon(x_2' - x_1')(t_2' - t_1')\right\} + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2$$

$$-\gamma^2\left\{c^2(t_2' - t_1')^2 + \frac{\upsilon^2}{c^2}(x_2' - x_1')^2 + 2\upsilon(x_2' - x_1')(t_2' - t_1')\right\}$$

$$= \gamma^2\left\{(x_2' - x_1')^2\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right) + (t_2' - t_1')^2(\upsilon^2 - c^2)\right\} + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2$$

$$= \gamma^2\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)\left\{(x_2' - x_1')^2 - c^2(t_2' - t_1')^2\right\} + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2$$

$$= (x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2 - c^2(t_2' - t_1')^2$$

[যেহেতু $\gamma^2 = \frac{1}{1 - \upsilon^2/c^2}$]

$$= S'^2 \quad ...(4.108)$$

সুতরাং লরেন্টজীয় রূপান্তর দ্বারা S (এবং অনুরূপে S_1) অপরিবর্তনীয়।

4.10.4. চতুর্মাত্রিক বেগ (4-বেগ) নির্ণয় (Determination of 4-Velocity)

আমরা ত্রিমাত্রিক দেশে সময়ের সাপেক্ষে সরণের পরিবর্তনের হারকে বেগ বলি।

$$\vec{u} = \frac{d\vec{s}}{dt} \quad ...(4.109)$$

সুতরাং $\vec{u}$-র তিনটি উপাংশ হল $u_x = \frac{dx}{dt}$, $u_y = \frac{dy}{dt}$, $u_z = \frac{dz}{dt}$

4-বেগের ক্ষেত্রে আমরা $\vec{s}$ এর পরিবর্তে $\vec{S}$ ধরব। কিন্তু এক্ষেত্রে সময় t-র সাপেক্ষে $\vec{S}$-এর পরিবর্তনের হারকে 4-বেগ হিসাবে ধরা যায় না। কারণ ত্রিমাত্রিক দেশে সময় একটি স্কেলার এবং তা গ্যালিলিয়ো রূপান্তর নিরপেক্ষ (অর্থাৎ এই রূপান্তর দ্বারা অপরিবর্তনীয়)। কিন্তু 4-মাত্রিক দেশ কালে সময় হল আপেক্ষিক যা স্থান ও কাল উভয়ের উপর নির্ভর করে। সুতরাং এটি স্কেলার নয় এবং লরেন্টজীয় রূপান্তর দ্বারা এর মান পরিবর্তিত হয়। এখন দেখা যাক, এই সময়ের পরিবর্তে এর তুল্য অপরিবর্তনীয় স্কেলার রাশি কিভাবে পাওয়া যায়।

(4.108) সমীকরণ অনুযায়ী আমরা লিখতে পারি

$$S_t^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$$

$$= c^2(t_2' - t_1')^2 - (x_2' - x_1')^2 - (y_2' - y_1')^2 - (z_2' - z_1')^2 \quad ...(4.110)$$

এখন (4.110) সমীকরণে $x_2' - x_1' = y_2' - y_1' = z_2' - z_1' = 0$ ধরলে এবং $t_2' - t_1' = \tau$ বসালে আমরা পাই

$$S_t^2 = c^2(t_2' - t_1')^2 = c^2\tau^2$$

বা, $$\tau = \frac{S_t}{c}$$

যেহেতু S_t ও c উভয়েই লরেন্টজীয় রূপান্তরের সাপেক্ষে অপরিবর্তনীয় ও স্কেলার, সুতরাং τ-ও লরেন্টজীয় রূপান্তরের সাপেক্ষে অপরিবর্তনীয় ও স্কেলার। τ-কে যথার্থ বা প্রকৃত সময় (proper time) বলা হয়। কারণ L′ নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে স্থির নিরীক্ষক ঐ নির্দেশতন্ত্রের একটি বিন্দুতে t_1' ও t_2' সময়ে পরপর দুটি ঘটনা ঘটতে দেখে, যার অন্তর স্থান নিরপেক্ষ এবং সেজন্য তা কেবল তার নিজের ঘড়ির সময় দ্বারা পরিমাপ করা যায়।

সুতরাং আমরা এই প্রকৃত সময় τ-এর সাপেক্ষে $\vec{S}$-এর পরিবর্তনের হারকে 4-বেগ বলতে পারি। অর্থাৎ

$$\text{4-বেগ,} \quad \vec{U} = \frac{d\vec{S}}{d\tau} \quad ...(4.112)$$

এখন $d\vec{S}$-এর চারটি উপাংশ হল d_x, d_y, d_z এবং cdt। সুতরাং $\vec{U}$-র চারটি উপাংশ হবে

$$\left.\begin{aligned} U_x &= \frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt}\cdot\frac{dt}{d\tau} = \frac{u_x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \\ U_y &= \frac{dy}{d\tau} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{d\tau} = \frac{u_y}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \\ U_z &= \frac{dz}{d\tau} = \frac{dz}{dt}\cdot\frac{dt}{d\tau} = \frac{u_z}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \\ U_i &= \frac{cdt}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \end{aligned}\right\} \qquad ...(4.113)$$

কারণ (4.109) সমীকরণ অনুযায়ী $\frac{dx}{dt} = u_x, \frac{dy}{dt} = u_y, \frac{dz}{dt} = u_z$ হল 3-বেগ $\vec{u}$-র তিনটি উপাংশ। অধিকন্তু (4.111) এবং (4.101) সমীকরণ থেকে আমরা পাই

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{dS_t}{cdt} = \frac{\sqrt{c^2dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)}}{cdt}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right)}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}{c^2}}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \qquad ...(4.114)$$

(4.113) সমীকরণ থেকে আপনি নিশ্চয় লক্ষ করবেন যে এখানে u হল L নির্দেশতন্ত্রে বস্তুর ত্রিমাত্রিক বেগ। সুতরাং এটিকে এই নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে L′ নির্দেশতন্ত্রের বেগ υ-র সঙ্গে মিশিয়ে ভুল করবেন না।

(4.113) সমীকরণে $\frac{u}{c} << 1$ ধরলে $\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \simeq$ হয়। সুতরাং এক্ষেত্রে 4-বেগের দৈশিক উপাংশগুলি 3-বেগের অনুরূপ উপাংশগুলির সমান হয় এবং কালিক উপাংশটি c-র সমান হয়।

অর্থাৎ $$U_x = u_x,\ U_y = u_y,\ U_z = u_z,\ U_t = c \qquad ...(4.115)$$

সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে আপেক্ষিকীয় বেগের সীমায়িত রূপ থেকে সনাতন বেগের সংজ্ঞা পাওয়া যায়।

4.10.5. চতুর্মাত্রিক ত্বরণ (4-ত্বরণ) নির্ণয় (Determination of 4-acceleration)

সময়ের সাপেক্ষে 3-বেগের পরিবর্তনের হারকে আমরা 3-ত্বরণ বলি। সুতরাং এই ত্বরণকে a-দ্বারা প্রকাশ করলে আমরা পাই,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt} \qquad ...(4.116)$$

সুতরাং এই ত্বরণের তিনটি উপাংশ হল—

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{du_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \\ a_y &= \frac{du_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \\ a_z &= \frac{du_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned}\right\} \qquad ...(4.117)$$

অনুরূপে যথার্থ সময় (τ)-এর সাপেক্ষে 4-বেগের পরিবর্তনের হারকে আমরা 4-ত্বরণ বলতে পারি। সুতরাং এই ত্বরণের চিহ্ন A ধরলে

$$\vec{A} = \frac{d\vec{U}}{d\tau} = \frac{d\vec{U}}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdot\frac{d\vec{U}}{dt} \qquad ...(4.118)$$

[$\because$ (4.114) সমীকরণ অনুযায়ী $\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$]

সমীকরণ (4.118) ও (4.113) ব্যবহার করে আমরা এখন $\vec{A}$-র চারটি উপাংশ নির্ণয় করতে পারি।

$$A_x = \frac{dU_x}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\frac{dU_x}{dt}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\frac{u_x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\left[\frac{\frac{du_x}{dt}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} + \frac{1}{2}\frac{u_x\frac{2u}{c^2}\frac{du}{dt}}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$= \frac{1}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}\left[\frac{du_x}{dt} + \frac{\frac{uu_x}{c^2}.\frac{du}{dt}}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}\right]$$

বা $$A_x = \frac{1}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}\left[a_x + \frac{\frac{uu_x}{c^2}a}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}\right] \qquad ...[4.119(i)]$$

অনুরূপে $$A_y = \frac{1}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}\left[a_y + \frac{\frac{uu_y}{c^2}a}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}\right] \qquad ...[4.119(ii)]$$

$$A_z = \frac{1}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}\left[a_z + \frac{\frac{uu_z}{c^2}a}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}\right] \qquad ...[4.119(iii)]$$

$$A_i = \frac{dU_t}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\frac{dU_t}{dt}$$

$$= \frac{c}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \frac{d}{dt}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{c}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \frac{\frac{u}{c^2}\frac{du}{dt}}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{ua}{c\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^2} \quad \text{...[4.119(iv)]}$$

এখানে $a = \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ ...(4.120)

4-ত্বরণকে 3-ত্বরণের সঙ্গে তুলনা করার জন্য (4.119) সমীকরণগুলিতে এই উপাংশগুলির সীমায়িত ক্ষেত্র $\left(\frac{u}{c} \sim 0\right)$ বিবেচনা করা যায়। তাহলে আমরা পাই—

$$A_x = a_x,\ A_y = a_y,\ A_z = a_z \quad \text{...(4.121)}$$

এবং $A_i = 0$

সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে আমরা পুনরায় সনাতন ত্বরণের মানগুলি পাচ্ছি।

4.10.6. চতুর্মাত্রিক ভরবেগ বা 4-ভরবেগ (Four Momentum)

নিউটনীয় গতিবিদ্যায় ভর ও বেগের গুণফলকে ভরবেগ বলে। যেহেতু ভর (m) একটি অপরিবর্তনীয় স্কেলার রাশি, সেজন্য বেগের অভিমুখই ভরবেগের অভিমুখ। অর্থাৎ,

$$\vec{p} = m\vec{u} \quad \text{...(4.122)}$$

চতুর্মাত্রিক গতিবিদ্যায় আমরা একইভাবে ভরবেগের সংজ্ঞা নিরূপণ করতে পারি। তবে এক্ষেত্রে বস্তুর ভর m যেহেতু বেগের উপর নির্ভরশীল, সেজন্য এটি লরেন্টজীয় রূপান্তরদ্বারা অপরিবর্তনীয় থাকে না। বেগ নির্ণয়ের ক্ষেত্রেও আমাদের সময় নিয়ে অনুরূপ সমস্যার সৃষ্টি হয়েছিল। কিন্তু আমরা দেখেছি যে যেহেতু প্রকৃত সময় τ লরেন্টজীয় রূপান্তর দ্বারা পরিবর্তিত হয় না, সেজন্য 4-বেগকে τ-র সাপেক্ষে সংজ্ঞায়িত করা হলে সমস্যার সমাধান হয়। অনুরূপে, ভরের ক্ষেত্রেও আমরা দেখতে পাই যে m-এর পরিবর্তে m_0 গ্রহণ করা হলে 4-ভরবেগ সংজ্ঞায়িত করার সমস্যা দূর হয়। কারণ m_0

হল বস্তুর স্থিরভাব যা লরেণ্টজীয় রূপান্তরদ্বারা পরিবর্তিত হয় না। সুতরাং 4-ভরবেগ হবে

$$\vec{P} = m_0 \vec{U} \quad ...(4.123)$$

এক্ষেত্রে $\vec{P}$-র চারটি উপাংশের মান (4.113) সমীকরণ অনুযায়ী পাওয়া যায়।

$$\left.\begin{aligned} P_x &= m_0 U_x = \frac{m_0 u_x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \\ P_y &= m_0 U_y = \frac{m_0 u_y}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \\ P_z &= m_0 U_z = \frac{m_0 u_z}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \\ P_i &= m_0 U_i = \frac{m_0 c}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \end{aligned}\right\} \quad ...(4.124)$$

যদি $\frac{u}{c} \sim 0$ ধরি, তবে (4.124) সমীকরণের সীমায়িত মানগুলি হবে

$$P_x = m_0 u_x,\ P_y = m_0 u_y,\ P_z = m_0 u_z,\ P_i = m_0 c \quad ...(4.125)$$

সনাতন বলবিজ্ঞানে $m = m_0$। সুতরাং (4.125) সমীকরণের P_x, P_y, P_z মানগুলি সনাতন বলবিজ্ঞান অনুযায়ী 3-ভরবেগের মান নির্দেশ করে। অবশ্য ভরবেগের চতুর্থ উপাংশ $P_t = m_0 c$ সমীকরণের কোনও অর্থ সনাতন বলবিজ্ঞান থেকে পাওয়া যাবে না।

4.10.7. চতুর্মাত্রিক বল বা 4-বল (Four Dimensional Force)

চতুর্মাত্রিক বলের সংজ্ঞা নির্ধারণের ক্ষেত্রেও আমরা উপরের পদ্ধতি অনুসরণ করতে পারি। নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র অনুযায়ী 3-বল হবে

$$\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} m\vec{u} = m\frac{d\vec{u}}{dt} = m\vec{a} \quad ...(4.126)$$

এই বলের তিনটি উপাংশ হল

$$\left.\begin{aligned} f_x &= m\frac{du_x}{dt} = ma_x \\ f_y &= m\frac{du_y}{dt} = ma_y \\ f_z &= m\frac{du_z}{dt} = ma_z \end{aligned}\right\} \qquad ...(4.127)$$

অনুরূপে, 4-বলের সমীকরণ হবে

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{d\tau} = m_0\frac{d\vec{U}}{d\tau} = m_0\vec{A} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\frac{d\vec{U}}{dt} \qquad ...(4.128)$$

(4.128) সমীকরণ থেকে আমরা 4-বলের চারটি উপাংশের মান লিখতে পারি। এগুলি হল

$$F_x = m_0A_x = \frac{m_0}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}\left[a_x + \frac{uu_xa}{c^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}\right] \qquad ...[4.128(i)]$$

$$F_y = m_0A_y = \frac{m_0}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}\left[a_y + \frac{uu_ya}{c^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}\right] \qquad ...[4.128(ii)]$$

$$F_z = m_0A_z = \frac{m_0}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}\left[a_z + \frac{uu_za}{c^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}\right] \qquad ...[4.128(iii)]$$

$$F_i = m_0A_z = \frac{m_0ua}{c\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^2} \qquad ...[4.128(iv)]$$

(4.128) সমীকরণগুলি থেকে দেখা যাচ্ছে যে এই সমীকরণগুলিতে $m = m_0$ এবং $\frac{u}{c} \sim 0$ বসিয়ে আমরা বলের সনাতন সূত্র পাই। এক্ষেত্রে আরও লক্ষ করুন যে $F_i = 0$। অর্থাৎ সনাতন বলের ক্ষেত্রে কল্পিত অক্ষের উপর বলের (এবং ত্বরণের) কোনও উপাংশ নেই।

4.11 মিনকওস্কির জগতে নিউটনের গতিসূত্রগুলির লরেন্টজীয় রূপান্তর ((Lorentzean Transformation of Newton's Laws of Motion in Minkowski's World)

এখন আমরা মিনকওস্কির জগতে নিউটনের গতিসূত্রগুলির চতুর্মাত্রিক সমীকরণগুলির উপর লরেন্টজীয় রূপান্তর প্রয়োগ করে দেখব যে এই সমীকরণগুলি বিভিন্ন জ্যাড্যিক নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে সমরূপ থাকে কিনা।

4.11.1. প্রথম গতিসূত্র

ধরা যাক, L' নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে একটি বস্তুকণা $\vec{U}'$ 4-সমবেগে চলছে। তাহলে $\vec{U}'$ = ধ্রুবক। সুতরাং এর উপাংশগুলি $\left(U'_x, U'_y, U'_z, U'_i\right)$ও প্রত্যেকটি ধ্রুবক হবে। অর্থাৎ U'_x = ধ্রুবক, U'_y = ধ্রুবক, U'_z = ধ্রুবক এবং U'_i = ধ্রুবক। যদি L নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে L' নির্দেশতন্ত্র x, x' অক্ষ অভিমুখে $\vec{\upsilon}$ সমবেগে চলে এবং L নির্দেশতন্ত্রে স্থির একজন নিরীক্ষকের নিকট ঐ বস্তুকণার 4-বেগ $\vec{U}$ হয়, তাহলে এই বেগের উপাংশগুলি (U_x, U_y, U_z, U_i)-র উপর লরেন্টজীয় রূপান্তর আরোপ করে আমরা পাই

$$\begin{aligned} U_x &= \gamma(U'_x + \beta U'_i) = \text{ধ্রুবক} \\ U_y &= U'_y = \text{ধ্রুবক} \\ U_z &= U'_z = \text{ধ্রুবক} \\ U_i &= \gamma(U'_i + \beta U'_x) = \text{ধ্রুবক} \end{aligned} \quad ...(4.129)$$

কারণ $\beta = \frac{\upsilon}{c}$ এবং $\gamma - \left(1-\beta^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ উভয়েই ধ্রুবক। সুতরাং $\vec{U}$ 4-বেগে ভেক্টরটিও একটি ধ্রুবক (= সমবেগ)। কাজেই L নির্দেশতন্ত্রেও নিউটনের প্রথমসূত্র অপরিবর্তনীয় থাকছে।

এখানে লক্ষ করুন যে (4.129) সমীকরণটি যেকোনও ভেক্টরের উপাংশগুলির লরেন্টজীয় রূপান্তরের সাধারণরূপ। কারণ (4.94) সমীকরণ অনুযায়ী যদি L নির্দেশতন্ত্রে $\vec{S}$ ভেক্টরের উপাংশগুলি

$S_x = (x_2 - x_1), S_y = (y_2 - y_1), S_z = (z_2 = z_1), S_i = c(t_2 - t_1)$ ধরা হয় এবং অনুরূপে যদি L′ নির্দেশতন্ত্রে $\vec{S'}$ ভেক্টরের উপাংশগুলি $S'_x = (x'_2 - x'_1), S'_y = (y'_2 - y'_1), S'_z = (z'_2 - z'_1)$, $S'_i = c(t'_2 - t'_1)$ ধরা হয়, তবে L′ নির্দেশতন্ত্র L নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষ x, x′ অক্ষ অভিমুখে υ বেগে চললে লরেন্টজীয় রূপান্তর সমীকরণগুলি (4.107) সমীকরণগুলির দ্বারা নির্ণয় করা যায়। অর্থাৎ

$$S_x = \gamma\left(S'_x + \frac{\upsilon}{c}S'_i\right) = \gamma(S'_x + \beta S'_i)$$
$$S_y = S'_y \qquad \ldots(4.130)$$
$$S_z = S'_z$$

এবং $$S_i = \gamma\left(S'_i + \frac{\upsilon}{c}S'_x\right) = \gamma(S'_i + \beta S'_x)$$

হয়।

এখন (4.130) সমীকরণে S-কে U-দ্বারা প্রতিস্থাপিত করলে আমরা (4.129) সমীকরণগুলি পাই।

4.11.2. দ্বিতীয় গতিসূত্র

ধরা যাক, L′ মিনকওস্কির নির্দেশতন্ত্রে m_0 স্থির ভরের একটি বস্তু $\vec{A'}$ সমত্বরণে চলছে। সুতরাং 4-বলের সংজ্ঞা অনুযায়ী $\vec{F'}$ বলের মান হবে

$$\vec{F'} = m_0 \vec{A'} \text{ ধ্রুবক } (\because m_0 \text{ এবং } \vec{A'} \text{ উভয়ে ধ্রুবক}) \qquad \ldots(4.131)$$

ধরা যাক, L নির্দেশতন্ত্রের একজন নিরীক্ষকের নিকট ঐ বলের মান

$$\vec{F} = m_0 \vec{A} \qquad \ldots(4.132)$$

এখন যদি L′ L-এর সাপেক্ষে x, x′ অক্ষ অভিমুখে υ বেগে যায়, তবে, লরেন্টজীয় রূপান্তর দ্বারা $\vec{A}$ ও $\vec{A'}$ ভেক্টরগুলির উপাংশগুলির সম্পর্ক হবে

$$A_x = \gamma(A'_x + \beta A_i) = \text{ ধ্রুবক}$$
$$A_y = A'_y = \text{ধ্রুবক}$$
$$A_z = A'_z = \text{ ধ্রুবক} \qquad \ldots(4.133)$$

এবং $$A_i = \gamma(A'_i + \beta A'_x) = \text{ ধ্রুবক}$$

কারণ $\vec{A}'$ সমত্বরণ (ধ্রুবক) হওয়ায় এর উপাংশগুলির প্রত্যেকটি ধ্রুবক এবং υ সমবেগ হওয়ায় β ও γ উভয়েই ধ্রুবক।

সুতরাং $\vec{F}$ বলের উপাংশগুলির মান হবে

$$\begin{aligned} F_x &= m_0 A_x = \text{ধ্রুবক} \\ F_y &= m_0 A_y = \text{ধ্রুবক} \\ F_z &= m_0 A_z = \text{ধ্রুবক} \\ F_i &= m_0 A_i = \text{ধ্রুবক} \end{aligned} \quad ...(4.134)$$

সুতরাং $\vec{F}$ বলটিও ধ্রুবক। অর্থাৎ মিনকওস্কির চতুর্মাত্রিক জগতে লরেন্টজীয় রূপান্তরের সাপেক্ষে নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র অপরিবর্তনীয়।

4.11.3. তৃতীয় গতিসূত্র

ধরা যাক, L নির্দেশতন্ত্রে $m_{01}, m_{02}, m_{03}, \dots m_{0n}$ সংখ্যক স্থির ভরবিশিষ্ট বস্তু আছে এবং কোনও সময়ে এদের মধ্যে পারস্পরিক ক্রিয়া ঘটে। ধরা যাক, এই ক্রিয়ার পূর্বে এদের 4-বেগের মান যথাক্রমে $\vec{U}_1', \vec{U}_2', \vec{U}_3', \dots \vec{U}_n'$ । সুতরাং 4-ভরবেগের সংজ্ঞা অনুযায়ী এদের মধ্যে k-তম বস্তুর 4-ভরবেগ হবে

$$\vec{P}_k' = m_{0k}\, \vec{U}_k' \quad ...(4.135)$$

এবং এদের মোট 4-ভরবেগ হবে

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{P}_k' = \sum_{k=1}^{n} m_{0k}\, \vec{U}_k' \quad ...(4.136)$$

বস্তুগুলির মধ্যে পারস্পরিক ক্রিয়ার ফলে প্রতিক্রিয়া হবে এবং তারফলে প্রত্যেক ক্রিয়াশীল বস্তুর পূর্বের 4-ভরবেগের পরিবর্তন ঘটবে। কিন্তু L′ নির্দেশতন্ত্রে নিউটনের তৃতীয় ও দ্বিতীয় সূত্র প্রযোজ্য হলে বস্তুগুলির মধ্যে পারস্পরিক ক্রিয়া-প্রতিক্রিয়ার পরও মোট 4-ভরবেগ সংরক্ষিত হবে। অর্থাৎ

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{P}_k' = \sum_{k=1}^{n} m_{0k}\, \vec{U}_k' = \text{ধ্রুবক} \quad ...(4.137)$$

(4.137) সমীকরণের শর্ত অনুযায়ী আমরা পাই যে L' নির্দেশতন্ত্রের প্রত্যেক অক্ষের উপর ঐ বস্তুগুলির আনুষঙ্গিক 4-ভরবেগের উপাংশগুলির সমষ্টিও ধ্রুবক হবে। অর্থাৎ

$$\sum_{k=1}^{n} P'_{kx} = \sum_{k=1}^{n} m_{0k} U'_{kx} = \text{ধ্রুবক}$$

$$\sum_{k=1}^{n} P'_{ky} = \sum_{k=1}^{n} m_{0k} U'_{ky} = \text{ধ্রুবক} \qquad ...(4.138)$$

$$\sum_{k=1}^{n} P'_{kz} = \sum_{k=1}^{n} m_{0k} U'_{kz} = \text{ধ্রুবক}$$

$$\sum_{k=1}^{n} P'_{ki} = \sum_{k=1}^{n} m_{0k} U'_{ki} = \text{ধ্রুবক}$$

এখন যদি ধরা হয় যে L' নির্দেশতন্ত্রটি L নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে x, x′ অক্ষ অভিমুখে v সমবেগে গতিশীল, তাহলে L নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে স্থির একজন নিরীক্ষকের নিকট বস্তুগুলির মোট 4-ভরবেগ হবে

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{P}_k = \sum_{k=1}^{n} m_{0k} \vec{U}_k \qquad ...(4.139)$$

যদি k-তম বস্তুর $\vec{U}_k$ 4-ভরবেগের উপাংশগুলি $U_{kx}, U_{ky}, U_{kz}, U_{ki}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়, তবে এগুলির উপর লরেন্টজীয় রূপান্তর প্রয়োগ করে আমরা পাই

$$\begin{aligned} U_{kx} &= \gamma(U'_{kx} + \beta U'_{ki}) \\ U_{ky} &= U'_{ky} \\ U_{kz} &= U'_{kz} \end{aligned} \qquad ...(4.140)$$

এবং $U_{ki} = \gamma(U'_{ki} + \beta U'_{kx})$

সুতরাং L নির্দেশতন্ত্রের প্রত্যেক অক্ষের উপর বস্তুগুলির 4-ভরবেগের উপাংশগুলির সমষ্টি হবে

$$\sum_{k=1}^{n} P_{kx} = \sum_{k=1}^{n} m_{0k} U_{kx} = \sum_{k=1}^{n} m_{0k} \gamma(U'_{kx} + \beta U'_{ki})$$

$$= \gamma \sum_{k=1}^{n} m_{0k} U'_{kx} + \gamma\beta \sum_{k=1}^{n} m_{0k} U'_{ki} = \text{ধ্রুবক} \qquad ...(4.141)$$

$$\sum_{k=1}^{n} P_{ky} = \sum_{k=1}^{n} m_{0k} U_{ky} = \sum_{k=1}^{n} m_{0k} U'_{ky} = \text{ ধ্রুবক}$$

$$\sum_{k=1}^{n} P_{kz} = \sum_{k=1}^{n} m_{0k} U_{kz} = \sum_{k=1}^{n} m_{0k} U'_{kz} = \text{ ধ্রুবক} \qquad ...(4.142)$$

$$\sum_{k=1}^{n} P_{ki} = \sum_{k=1}^{n} m_{0k} U_{ki} = \sum_{k=1}^{n} m_{0k} \gamma (U'_{ki} + \beta U'_{kx})$$

$$= \gamma \sum_{k=1}^{n} m_{0k} U'ki + \gamma\beta \sum_{k=1}^{n} m_{0k} U'_{kx} = \text{ ধ্রুবক}$$

লক্ষ করুন, এই সমীকরণগুলি নির্ণয়ের জন্য আমরা (4.138) সমীকরণগুলি ব্যবহার করেছি। তাছাড়া আপনারা জানেন, $\upsilon =$ ধ্রুবক হওয়ায় $\beta = \frac{\upsilon}{c} =$ ধ্রুবক এবং $\gamma = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} =$ ধ্রুবক।

সুতরাং (4.140) শর্তগুলি থেকে আমরা পাই

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{P}_k = \sum_{k=1}^{n} m_{0k} \vec{U}_k = \text{ ধ্রুবক} \qquad ...(4.143)$$

আমরা আগেই দেখিয়েছি, লরেন্টজীয় রূপান্তর দ্বারা 4-বলের সূত্র অপরিবর্তিত থাকে। সুতরাং (4.142) সমীকরণ থেকে প্রমাণিত হচ্ছে যে নিউটনের তৃতীয় সূত্রও মিনকওস্কির জগতে লরেন্টজীয় রূপান্তরের সাপেক্ষে অপরিবর্তনীয় থাকে।

4.12. 4-ভরবেগ সমীকরণদ্বারা ভর ও বেগের সম্বন্ধ নির্ণয় (Determination of the Relation between Mass and Velocity by the 4-Momentum Equation)

ত্রিমাত্রিক দেশে লরেন্টজীয় রূপান্তরের ক্ষেত্রে নিউটনের তৃতীয় সূত্র অনুযায়ী ভরবেগ সংরক্ষণ সূত্র ধরে নিয়ে আমরা পূর্বে ভর ও বেগের সম্বন্ধ নির্ণয় করেছি [সমীকরণ (4.47)]। আপেক্ষিকতা তত্ত্বে এই সমীকরণটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ। কারণ, এই সমীকরণদ্বারা গতিশক্তির জন্য ভরের বৃদ্ধি, আপেক্ষিকীয় গতিশক্তির মান, ভর ও মোট শক্তির তুল্যতা, ভর ও শক্তির যুগ্মভাবে সংরক্ষণ সূত্র প্রভৃতি উচ্চশক্তির কণাবিজ্ঞানে প্রয়োজনীয় বহু সমীকরণ পাওয়া যায়। এখন আমরা দেখব যে 4-ভরবেগের সংজ্ঞা থেকে ভর ও বেগের সম্বন্ধের এই সমীকরণটি অতি সহজেই পাওয়া যায়।

ত্রিমাত্রিক দেশে নিউটনের ভরবেগের সংজ্ঞা হল

$$\vec{p} = m\vec{u} \quad [\text{সমীকরণ } (4.122)]$$

এর তিনটি উপাংশ হল

$$p_x = mu_x, p_y = mu_y, p_z = mu_z \tag{4.144}$$

অপর পক্ষে চতুর্মাত্রিক দেশে 4-ভরবেগের সংজ্ঞা হল

$$\vec{P} = m_0\vec{U} \quad [\text{সমীকরণ } (4.123)]$$

এই ভরবেগের চারটি উপাংশ হল

$$\left.\begin{aligned} P_x &= m_0U_x = \frac{m_0u_x}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \\ P_y &= m_0U_y = \frac{m_0u_y}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \\ p_z &= m_0U_z = \frac{m_0u_z}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \\ P_i &= m_0U_i = \frac{m_0c}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \end{aligned}\right\} \quad [\text{সমীকরণ } (4.124)]$$

এখন যদি (4.124) সমীকরণগুলির ডানদিকের রাশিগুলি (4.143) সমীকরণের অনুরূপে ভর ও বেগের গুণফল হিসাবে প্রকাশ করা হয়, তাহলে আমরা পাই

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$$

যা (4.47) সমীকরণের সঙ্গে অভিন্ন।

4.13 সারাংশ (Summary)

এই এককে আমরা আপেক্ষিকীয় বলবিদ্যার অতি গুরুত্বপূর্ণ সূত্রগুলি নিয়ে আলোচনা করেছি। নিউটনের গতিসূত্রগুলিই সনাতন বলবিদ্যার ভিত্তি। এই সূত্রগুলি গ্যালিলিয়ো রূপান্তর দ্বারা অপরিবর্তিত থাকে। কিন্তু বিশেষ আপেক্ষিকতার তত্ত্বে গ্যালিলিয়ো রূপান্তর খাটে না। কারণ এখানে

সময় একটি পরম (absolute) রাশি যা সকল জাড্যিক তন্ত্রেই অভিন্ন। সুতরাং আলোকের আপেক্ষিক বেগ নিরীক্ষকের গতির উপর নির্ভরশীল হবে। কিন্তু মাইকেলসন ও মর্লের পরীক্ষার দ্বারা প্রমাণিত হয় যে আলোকের এরূপ আপেক্ষিক বেগ মাপা যায় না এবং এক্ষেত্রে লরেন্টজীয় রূপান্তর প্রযোজ্য। আইনস্টাইন সেজন্য তাঁর বিশেষ আপেক্ষিকতার সূত্র এমনভাবে প্রস্তুত করেন, যা থেকে লরেন্টজীয় রূপান্তর-সূত্র নিরূপণ করা যায়। আইনস্টাইন লক্ষ করেন যে তড়িৎ-চুম্বকীয় তত্ত্বে লরেন্টজীয় রূপান্তর প্রয়োগ করা যায়। এমনকি নিউটনের প্রথম গতিসূত্রও লরেন্টজীয় রূপান্তরের সাপেক্ষে অপরিবর্তিত থাকে। কিন্তু দ্বিতীয় ও তৃতীয় সূত্র লরেন্টজীয় রূপান্তর দ্বারা অপরিবর্তিত রাখা যায় না। আইনস্টাইন তখন একটি মৌলিক সিদ্ধান্ত নিলেন যে প্রকৃতির সকল তত্ত্বেই লরেন্টজীয় রূপান্তর প্রযোজ্য। সেজন্য তিনি নিউটনের তৃতীয় গতিসূত্র থেকে প্রাপ্ত ভরবেগের সংরক্ষণ মেনে নিয়ে এবং সেখানে লরেন্টজীয় রূপান্তর প্রয়োগ করে বেগের উপর ভরের নির্ভরতার সূত্র নির্ণয় করেন। অর্থাৎ এর ফলে এককভাবে ভরের নিত্যতা সূত্র বর্জিত হল এবং ভর একটি আপেক্ষিক রাশি হিসাবে প্রতিষ্ঠিত হল। ভর ও বেগের এই সূত্রকে অবলম্বন করে সনাতন গতীয় শক্তির সূত্র পরিবর্তিত হল এবং ভর ও শক্তির তুল্যতা সূত্র প্রতিষ্ঠিত হল। সে সঙ্গে এও দেখা গেল যে বস্তুর স্থির ভরও তুল্য শক্তির আধার, যার ক্ষয় দ্বারা তুল্য শক্তির উদ্ভব হয় বা বৃদ্ধির দ্বারা তুল্য শক্তি ব্যয়িত হয়। এ থেকে আইনস্টাইন ভর ও শক্তির যুগ্মভাবে নিত্যতা সূত্র বিবৃত করেন। আইনস্টাইনের ভর ও শক্তির বিভিন্ন সূত্রগুলি বিভিন্ন পরীক্ষার দ্বারা প্রমাণিত হয়েছে এবং এর ফলে তাঁর বিশেষ আপেক্ষিকতা তত্ত্বের যথার্থতা প্রশ্নাতীতভাবে প্রতিষ্ঠিত হয়েছে। পরবর্তীকালে ডিরাক তাঁর শক্তির সমীকরণের নূতন সমাধান উদ্ভাবন করে ইলেকট্রনের প্রতিকণা পজিট্রনের তত্ত্ব গঠন করেন। পরে অ্যান্ডারসন পরীক্ষার দ্বারা পজিট্রন আবিষ্কার করে ডিরাকের প্রতিকণার তত্ত্ব প্রমাণিত করেন।

এরপর আইনস্টাইন মিনকওস্কির চতুর্মাত্রিক সমীকরণদ্বারা নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রের এমনভাবে সংশোধন করেন, যার ফলে দেখা যায় যে এটিও লরেন্টজীয় রূপান্তর দ্বারা অপরিবর্তিত থাকে। সুতরাং বলা যায় যে আইনস্টাইনের আপেক্ষিকীয় বলবিদ্যা মিনকওস্কির চতুর্মাত্রিক সমীকরণ ও লরেন্টজীয় রূপান্তরের উপর প্রতিষ্ঠিত।

4.14 প্রশ্নাবলি

আপনি 4 এককটি পাঠ করে কতটা জ্ঞান অর্জন করতে পেরেছেন, তা নিজেই যাতে যাচাই করে দেখতে পারেন, তার জন্য নীচের প্রশ্নগুলি দেওয়া হল। এই প্রশ্নগুলি 'সংক্ষিপ্ত উত্তর' ও 'বিস্তৃত উত্তর' এই দুটি ভাগে বিভক্ত। প্রশ্নগুলির উত্তর আপনি পরের (4.15) অনুচ্ছেদে পাবেন। প্রথমে এই উত্তরগুলি না দেখে নিজেই প্রশ্নগুলির উত্তর লিখুন। পরে আপনার উত্তর (4.15) অনুচ্ছেদে দেওয়া

উত্তর বা ইঙ্গিত অনুসারে মিলিয়ে নিন। যদি আপনার উত্তর ভুল হয়ে থাকে, তবে সঠিক উত্তরটি আবার তৈরি করে নিন। তা হলেই এই এককটি আপনার সম্পূর্ণ আয়ত্ত হয়ে যাবে।

4.14.1 সংক্ষিপ্ত উত্তরের প্রশ্নাবলি

1. নিউটনের প্রথম গতিসূত্রটি বিবৃত করুন। এ থেকে বলের কী সংজ্ঞা দেওয়া যায়?
2. দ্বিতীয় সূত্র অনুযায়ী বলের সমীকরণটি লিখুন।
3. বল কি একটি ভেক্টর বা স্কেলার রাশি?
4. দ্বিতীয় সূত্র থেকে বলের দিক কি পাওয়া যায়?
5. জাড্য কাকে বলে?
6. জাড্য কিসের উপর নির্ভর করে ও কিভাবে এর পরিমাপ হয়?
7. নিউটনের তৃতীয় গতিসূত্র কী?
8. ভরবেগ কাকে বলে? এটি কী স্কেলার না ভেক্টর?
9. ভরবেগের সংরক্ষণ কী?
10. সনাতন বলবিদ্যা কাকে বলে?
11. সনাতন বলবিদ্যা কোন্ ক্ষেত্রে প্রযোজ্য?
12. আপেক্ষিকীয় বলবিদ্যা কাকে বলে?
13. আপেক্ষিকীয় বলবিদ্যা কোন্ ক্ষেত্রে প্রযোজ্য?
14. জাড্যিক নির্দেশতন্ত্র কী?
15. গ্যালিলিয়ো রূপান্তরের সমীকরণগুলি লিখুন।
16. গ্যালিলিয়ো রূপান্তর সূত্রগুলি কোন্ সূত্রের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য?
17. লরেন্টজীয় রূপান্তর সমীকরণগুলি লিখুন।
18. নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রের ক্ষেত্রে কি লরেন্টজীয় রূপান্তর খাটে?
19. আইনস্টাইন ভরের সংরক্ষণ সূত্র ও ভরবেগের সংরক্ষণের সূত্রের মধ্যে কোন্‌টি গ্রহণ করলেন?
20. ভরের নিত্যতা বর্জন করার ফল কী?
21. বেগের উপর ভরের নির্ভরশীলতার সমীকরণটি লিখুন।
22. 'ট্যাকিয়ন' কী?

23. দুজন বিজ্ঞানীর নাম বলুন যাঁরা প্রথম বেগের উপর ভরের নির্ভরশীলতার সূত্র পরীক্ষা করেছিলেন।

24. আইনস্টাইনের ভর ও শক্তির তুল্যতার সম্বন্ধটি লিখুন।

25. বস্তুর স্থৈতিক শক্তি কী?

26. ভর ও শক্তির যুগ্মভাবে নিত্যতার সূত্র কী?

27. আপেক্ষিকীয় গতীয় শক্তির সমীকরণটি লিখুন।

$\upsilon/c << 1$ হলে এই সূত্রটির কী পরিবর্তন হয়?

28. আইনস্টাইনের ভর ও শক্তির তুল্যতার সূত্রের পরীক্ষা প্রথম কে করেন?

29. কম্পটন ক্রিয়া কী?

30. শক্তির জড়ত্ব প্রাপ্তি কাকে বলে?

31. পজিট্রন ও ইলেকট্রনের মধ্যে প্রভেদ কী?

32. একটি ইলেকট্রনের স্থৈতিক শক্তি কত?

33. 'ফিসন' ক্রিয়া কাকে বলে?

34. নিউক্লিয়ার ফিউসন কী?

35. বস্তুর মোট শক্তির সমীকরণটি লিখুন।

36. মিনকওস্কির জগতে অবকাশের বর্গের সমীকরণটি লিখুন।

37. অবকাশের বর্গ কি লরেন্টজীয় রূপান্তরের সাপেক্ষে অপরিবর্তনীয়?

38. 4-বেগ, 4-ভরবেগ ও 4-বলের সংজ্ঞা দিন।

4.14.2 বিস্তৃত উত্তরের প্রশ্নাবলি

1. নিউটনের গতিসূত্র তিনটি বিবৃত করুন এবং বলের সমীকরণটি লিখুন। ভরবেগের সংরক্ষণসূত্র কিভাবে পাওয়া যায়? জাড্যিক নির্দেশতন্ত্র কাকে বলে?

2. গ্যালিলিয়ো রূপান্তর দ্বারা প্রমাণ করুন যে নিউটনের তিনটি গতিসূত্রই অপরিবর্তিত থাকে।

3. গ্যালিলিয়ো ও লরেন্টজীয় রূপান্তর সূত্রগুলি লিখুন। এই দুই প্রকার রূপান্তর সূত্রের মধ্যে পার্থক্যের কারণ কী? কোন্ শর্তে লরেন্টজীয় রূপান্তর সূত্রগুলি গ্যালিলিয়ো রূপান্তর সূত্রের সঙ্গে অভিন্ন হয়?

4. আইনস্টাইন কেন ভরের সংরক্ষণ সূত্র পরিত্যাগ করেন? বেগের উপর ভরের নির্ভরশীলতার সূত্রটি নির্ণয় করুন।

5. বেগের উপর ভরের নির্ভরশীলতার যেসব পরীক্ষা হয়েছে, তার সংক্ষিপ্ত বিবরণ দিন।

6. আইনস্টাইনের ভর ও মোট শক্তির সম্বন্ধে সমীকরণটি নির্ণয় করুন।

7. আইনস্টাইনের ভর ও শক্তির তুল্যতা সূত্রের সত্যতা নির্ণয়ের একটি পরীক্ষা বর্ণনা করুন।

8. পারমাণবিক বোমা ও হাইড্রোজেন বোমার তত্ত্ব আলোচনা করুন। সূর্য ও নক্ষত্রগুলির শক্তির উৎস কী?

9. বস্তুর মোট শক্তি ও ভরবেগের সম্বন্ধের সমীকরণটি নির্ণয় করুন।

10. 'বোসন' ও 'ফেরমিয়ন' কণা কী? ইলেকট্রন ও পজিট্রন কণার পার্থক্য কী? পজিট্রনকে প্রতিকণা বলার অর্থ কী? পজিট্রনের তত্ত্ব কিভাবে পাওয়া যায়? এই কণা কিভাবে আবিষ্কৃত হয়? এটি কী ফেরমিয়ন না বোসন?

11. মিনকওস্কির চতুর্মাত্রিক জগত কাকে বলে? এই জগতে দেশকালের সম্বন্ধের সমীকরণ কী? এই জগতকে ছদ্ম-ইউক্লিডীয় দেশ বলার কারণ কী? প্রমাণ করুন যে এই জগতে অবকাশের বর্গ লরেন্টজীয় রূপান্তরের সাপেক্ষে অপরিবর্তনীয়।

12. 4-বেগ ও 4-ত্বরণের সংজ্ঞা লিখুন এবং 3-বেগ ও 3-ত্বরণের উপাংশগুলির সাপেক্ষে এদের উপাংশগুলির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

13. 4-বলের সংজ্ঞা লিখুন। প্রমাণ করুন যে এটি লরেন্টজীয় রূপান্তরের সাপেক্ষে অপরিবর্তনীয়।

14. লরেন্টজীয় রূপান্তরের সাপেক্ষে 4-ভরবেগ সংরক্ষণের সূত্রটি প্রমাণ করুন। 4-ভরবেগ থেকে কিভাবে ভর ও বেগের সম্বন্ধটি নির্ণয় করা যায়?

4.15.1 সংক্ষিপ্ত উত্তর

(4.14.1) অনুচ্ছেদের প্রশ্নাবলীর সংক্ষিপ্ত উত্তর।

1. (a) (4.2) অনুচ্ছেদ দেখুন।

   (b) বাইরে থেকে প্রযুক্ত যে ক্রিয়ার জন্য একটি স্থির বস্তুর গতি শুরু হয় (বা গতির বাধা হ্রাস হয়) বা গতিশীল একটি বস্তুর বেগের মান বা দিকের পরিবর্তন হয় বা বস্তুটি স্থির হয়, তাকেই বল বলে।

2. $F = \frac{dp}{dt} = ma.$

3. ভেক্টর

4. ভরবেগের পরিবর্তন যে দিকে হয় (বা হওয়ার চেষ্টা হয়), বল সেদিকেই ক্রিয়া করে।
5. বস্তুর যে ধর্মের জন্য স্থির বস্তু স্থির থাকতে চায় বা গতিশীল বস্তু তার বেগের মান ও দিক বজায় রাখতে চায়, তাকেই বস্তুর জাড্য বলে।
6. জাড্য বস্তুর ভরের উপর নির্ভর করে। বস্তুর ভর যত বেশি হয়, জাড্যও তত বেশি হয়। এজন্য ভর দ্বারাই জাড্য পরিমাপ করা হয়।
7. অনুচ্ছেদ (4.2) দ্রষ্টব্য।
8. বস্তুর ভর ও বেগের গুণফলকে ভরবেগ বলে। এটি ভেক্টর।
9. ক্রিয়ার পূর্বে এক বা একাধিক বস্তুর মোট ভরকো, ক্রিয়ার পর মোট ভরবেগের সমান।
10. গ্যালিলিয়ো ও নিউটন যে বলবিদ্যার সূচনা করেন, তাকেই সনাতন বলবিদ্যা বলে।
11. বস্তুর বেগ যখন আলোকের বেগের তুলনায় উপেক্ষণীয় হয়।
12. আইনস্টাইনের বিশেষ আপেক্ষিকতা তত্ত্বের দ্বারা যে বলবিদ্যা তৈরি হয়েছে।
13. আপেক্ষিকীয় বলবিদ্যা বস্তুর যেকোনও বেগের জন্যই প্রযোজ্য। তবে $\upsilon/c << 1$ হলে এ থেকে সনাতন বলবিদ্যার সমীকরণগুলিই পাওয়া যায়। কিন্তু $\upsilon/c \sim 1$ হলে সনাতন বলবিদ্যা খাটে না।
14. যে নির্দেশতন্ত্রে নিউটনের গতিসূত্রগুলি সত্য, তাকেই জাড্যিক নির্দেশতন্ত্র বলে।
15. (4.5) সমীকরণ।
16. সনাতন গতিবিদ্যার সূত্রগুলির ক্ষেত্রে।
17. (4.16) সমীকরণ
18. না।
19. ভরবেগের সংরক্ষণ
20. ভর বেগের উপর নির্ভর করবে। (4.47) সমীকরণ।
21. (4.47) সমীকরণ।
22. (4.5) অনুচ্ছেদ দেখুন।
23. (4.6) অনুচ্ছেদ দেখুন। (কাউফম্যান, বুকেরার)।
24. $E = mc^2$ [সমীকরণ (4.61)]
25. (4.7) অনুচ্ছেদ দেখুন।
26. (4.7) অনুচ্ছেদ দেখুন।
27. (4.7) অনুচ্ছেদ দেখুন।
28. (4.8) অনুচ্ছেদ (ককক্রফ্ট ও ওয়ালটন)।
29. (4.8.2) অনুচ্ছেদ দেখুন।

30. (4.8.3) অনুচ্ছেদ দেখুন।

31. (4.8.3) অনুচ্ছেদ দেখুন।

32. $m_0c^2 = 0.511$ MeV [(4.8.3) অনুচ্ছেদ]

33. (4.8.4) অনুচ্ছেদ দ্রষ্টব্য।

34. (4.8.5) অনুচ্ছেদ দেখুন।

35. (4.76) সমীকরণ।

36. (4.95) ও (4.100) সমীকরণ।

37. হ্যাঁ।

38. (4.112), (4.123), (4.128) সমীকরণগুলি দেখুন।

4.15.2 বিস্তৃত উত্তর

4.14.2 প্রশ্নাবলীর বিস্তৃত উত্তর ও উত্তরের ইঙ্গিত।

1. (4.2) অনুচ্ছেদ দেখুন।

2. (4.3) অনুচ্ছেদ দেখুন।

3. (4.3) ও (4.4) অনুচ্ছেদ দুটি দেখুন।

4. প্রশ্নের প্রথম অংশের উত্তর (4.4) অনুচ্ছেদে এবং দ্বিতীয় অংশের উত্তর (4.5) অনুচ্ছেদে পাবেন।

5. (4.6) অনুচ্ছেদ দেখুন।

6. (4.7) অনুচ্ছেদ দেখুন।

7. (4.8) অনুচ্ছেদ দেখুন।

8. (4.8.4) ও (4.8.5) অনুচ্ছেদ দেখুন।

9. (4.9.4) অনুচ্ছেদ দেখুন।

10. (4.9.4) অনুচ্ছেদ দেখুন।

11. (4.10.2) ও (4.10.3) অনুচ্ছেদ দেখুন।

12. (4.10.4) ও (4.10.5) অনুচ্ছেদ দেখুন।

13. (4.10.7) ও (4.11) অনুচ্ছেদ দেখুন।

14. (4.11) ও (4.12) অনুচ্ছেদ দেখুন।

একক 5 ❑ ল্যাগ্রাঞ্জীয় এবং হ্যামিল্টনীয় পদ্ধতি

গঠন

5.1 প্রস্তাবনা

উদ্দেশ্য

5.2 নিউটনের গতি সমীকরণ এবং এই সমীকরণের অসুবিধা

5.3 স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা, প্রতিবন্ধ গতি

5.4 ডা' ল্যামবার্টের নীতি

5.5 ব্যাপক নির্দেশাঙ্ক ও ল্যাগ্রাঞ্জের সমীকরণ

5.6 হ্যামিল্টনিয়ান চাক্রিক নির্দেশাঙ্ক ও সংরক্ষণ নীতি

5.7 সারাংশ

5.8 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

5.9 উত্তরমালা

5.10 পরিশিষ্ট

5.1 প্রস্তাবনা ও উদ্দেশ্য

আপনারা এতদিন নিশ্চয়ই জেনেছেন যে, নিউটনের গতিসূত্র সংক্রান্ত সমীকরণটি প্রকৃতপক্ষে একটি ভেক্টর অবকলন সমীকরণ এবং এর কার্যকর রূপটি হল—

$$\vec{F}(\vec{r}, \vec{\upsilon}, \vec{t}) = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad .... (5.1)$$

গতিবিদ্যা সংক্রান্ত সমস্যার সমাধানের জন্য এই ভেক্টর সমীকরণটির প্রত্যেকটি উপাংশ দুবার সমাকলন করে $\vec{r}$-কে t-এর একটি অপেক্ষক হিসেবে পেতে হয়। যেহেতু দুবার সমাকলন করতে হয়, সেজন্য প্রতিটি উপাংশের জন্য দুটি করে অনির্দিষ্ট সমাকলন ধ্রুবক আসে। এই ধ্রুবকগুলির মান নির্দিষ্ট করতে হলে আমাদের অতিরিক্ত কিছু উপাত্ত দরকার হয়, তবেই সমস্যাটির পূর্ণ সমাধান সম্ভব হয়। আপনাদের নিশ্চয়ই অজানা নয় যে কোনও নির্দেশতন্ত্রে নিউটনের সমীকরণ ব্যবহার করতে হলে ঐ তন্ত্রে তা ত্বরণের উপাংশ হিসেব করতে হয়। এখন সমকোণী কার্টেজীয় নির্দেশতন্ত্র ছাড়া অন্য নির্দেশতন্ত্রে ত্বরণের রাশিমালা বেশ জটিল। এছাড়া প্রতিবন্ধকতা সম্পন্ন গতির (constrained motion) ক্ষেত্রে প্রতিবন্ধ বল নির্ণয় করা অনেক ক্ষেত্রে বেশ কঠিন অথবা অসম্ভব। সুতরাং সেই ক্ষেত্রে প্রতিবন্ধ বল নির্ণয় করতে না পারার দরুণ নিউটনের গতি সমীকরণটির সমাধান অসম্ভব।

তাই আমাদের উদ্দেশ্য হবে এমন কোনও সমীকরণের প্রতিষ্ঠা করা যা যে কোনও নির্দেশতন্ত্রে সরাসরি ব্যবহার করা চলে। এতে গাণিতিক জটিলতা অনেক কমে যাবে। এই এককে আপনারা জানতে পারবেন যে, ল্যাগ্রাঞ্জীয় ও হ্যামিলটনীয় পদ্ধতিতে উচ্চতর গতিবিদ্যায় আমরা ঠিক এই লক্ষ্যেই পৌঁছোতে পেরেছি।

এখানে আর একটা বিষয় বলে নেওয়া দরকার। এই পরিচ্ছেদে এবং পরবর্তী পরিচ্ছেদে আমরা আরো ভেক্টর সূচকের ক্ষেত্রে আইনস্টাইনের সমষ্টিগত প্রকরণ (Einstein's Summation Convention) ব্যবহার করব। এই প্রসঙ্গে কিছু উদাহরণ আপনারা পরিশিষ্টে পাবেন, যাতে প্রয়োজনে আপনাদের পাঠের সুবিধে হয়।

উদ্দেশ্য ঃ

এই এককটি পাঠ করলে আপনি

- নিউটনের গতি সমীকরণের অসুবিধার দিকগুলি বুঝতে পারবেন।
- ল্যাগ্রাঞ্জের সমীকরণের প্রয়োজনীয়তার কথা উপলব্ধি করতে পারবেন।
- সূচক চিহ্নের সাহায্যে ভেক্টর সমীকরণ লিখতে পারবেন।
- আইনস্টাইনের সমষ্টিকরণ প্রকরণটি সম্বন্ধে জানতে পারবেন।
- সংরক্ষণ নীতির একটি সাধারণ উপপাদ্য প্রতিষ্ঠা করতে পারবেন।

5.2 নিউটনের গতি সমীকরণ ও এই সমীকরণের অসুবিধা

উচ্চতর গতিবিদ্যায় নিউটনের গতি সমীকরণ (5.1) প্রত্যক্ষভাবে ব্যবহার না করে গাণিতিক বিশ্লেষণের সাহায্যে গতি সমীকরণকে এমন রূপ দেওয়া হয় যার ফলে অনেক জটিল সমস্যা নিউটনের পদ্ধতির তুলনায় অনেক সহজে সমাধান করা যায়। কিন্তু মনে রাখতে হবে কেবলমাত্র সরলীকরণের জন্য এই উচ্চতর গাণিতিক পদ্ধতির উদ্ভাবন হয়নি। নিউটনের গতি সমীকরণের কিছু জটিলতা আছে। সেই বিষয়ে আমরা এখন আলোচনা করব।

আপনারা নিশ্চয়ই জানেন যে নিউটনের গতি সমীকরণের রূপ সমস্ত নির্দেশতন্ত্রে (5.1) সমীকরণের মতো হয় না। যে সমস্ত নির্দেশ তন্ত্রে নিউটনের গতি সূত্রের রূপ (5.1) সমীকরণের মতো হয়, সেই তন্ত্রগুলিকে জাড্যিক নির্দেশতন্ত্র বলা হয়। দেখা গেছে দুটি আপেক্ষিক সমগতিসম্পন্ন নির্দেশতন্ত্রে নিউটনের গতীয় সমীকরণের চেহারা (5.1) সমীকরণের মতো হয়। অর্থাৎ এক্ষেত্রে দুটি তন্ত্রই জাড্যিকতন্ত্র। অর্থাৎ জ্যাড্যিকতন্ত্রের মধ্যে অনন্যতা নেই। জাড্যিক নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে ত্বরণসম্পন্ন

তন্ত্রে অলীক বলের অবতারণা আসে এবং ত্বরণ যত জটিল হয় এই অলীক বলের জটিলতাও তত বাড়ে। আশ্চর্যের কথা এই যে নিউটনের সূত্রে কোথাও তিনি এই জাড্যিকতন্ত্রের গুরুত্বের কথা উল্লেখ করেননি।

এখন জাড্যিকতন্ত্রের সঙ্গে সমত্বরণে গতিশীল অথবা কৌণিক গতিতে গতিশীল কোনও তন্ত্রে (5.1) সমীকরণের রূপ দুটি হবে যথাক্রমে

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} - m\vec{a}$$

এবং $$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} - m\vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r}) - 2m\vec{w} \times \vec{\upsilon} - m\frac{d\vec{w}}{dt} \times \vec{r}$$

অলীক বলের এই জটিলতা দেখে স্বাভাবিকভাবেই মনে আসে যে যদি আমরা এমন কোনও গাণিতিক কাঠামো খাড়া করতে পারি যা সব ধরনের নির্দেশতন্ত্রে একই ধরনের সমীকরণ দেয়, তবে আমরা নিউটনীয় গতিবিদ্যার পদ্ধতিগত জটিলতা এড়াতে পারি। ভেক্টরের আলোচনার সময় আপনারা নিশ্চয়ই জেনেছেন যে একমাত্র স্কেলার রাশিগুলি নির্দেশতন্ত্র নিরপেক্ষ (invariant)। সুতরাং আমাদের উদ্দেশ্য হবে (5.1) সমীকরণের পরিবর্তে কোনও স্কেলার সমীকরণ খোঁজা যেটি নির্দেশতন্ত্র নিরপেক্ষ হবার সাথে সাথে গতিবিদ্যার সমস্যাগুলিও সমাধান করতে সক্ষম হবে। অলীক বল ছাড়া নিউটনীয় গতিবিদ্যায় আরও কিছু জটিলতা দেখা যায় যেখানে গতি অবাধ নয়, অর্থাৎ যেখানে প্রতিবন্ধক বল ক্রিয়া করে। উচ্চতর গতিবিদ্যার জন্য নির্দেশতন্ত্র নিরপেক্ষ সমীকরণ খোঁজার আগে আমরা প্রতিবন্ধ গতির কথা আলোচনা করব।

5.3 স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা, প্রতিবন্ধ গতি (Degrees of freedom, Constrained motion)

সাধারণভাবে কোনও একটি তন্ত্রের (system) অবস্থান নির্দিষ্টভাবে জানার জন্য ন্যূনতম যে কয়টি প্রাচলের (parameter) প্রয়োজন হয় সেই সংখ্যাকে ঐ তন্ত্রটির স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা বলে। যেমন, একটি মুক্ত বিন্দু-ভরের ক্ষেত্রে স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা হল তিন (3)। কারণ বিন্দু-ভরের অবস্থান নির্দেশ করতে ত্রিমাত্রিক তলে তিনটি স্থানাঙ্কের প্রয়োজন। কিন্তু বাস্তবে কোনও বস্তু যদি এমনভাবে গতিশীল হয়, যাতে বস্তুটির স্থানাঙ্ক বা গতি কোনও গাণিতিক সম্পর্ক মেনে চলে তবে সেই গতিকে প্রতিবন্ধ গতি বলা হয়।

মুক্ত অবস্থায় তন্ত্রের স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা থেকে প্রতিবন্ধ সমীকরণ সংখ্যার অন্তরফলকে সাধারণভাবে প্রতিবন্ধ গতির স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা বলা হয়। যেমন সরল দোলকের প্রতিবন্ধক সমীকরণটি হল আলম্বন থেকে বিন্দুভরের দূরত্ব সমান থাকা। এর ফলে সরল দোলকের ভরবিন্দুর স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা হল দুই। সাধারণভাবে তাই লেখা যায়, স্বাতন্ত্র সংখ্যা $f = 3n - r$ ... (5.2)

যেখানে n হল ভরবিন্দুর সংখ্যা এবং r হল পরস্পর নিরপেক্ষ প্রতিবন্ধক সংখ্যা। অবশ্য n বা r অসীম হলে (5.2) সমীকরণটি অর্থহীন হয়ে পড়ে। এর একটি উদাহরণ হল দৃঢ়বস্তু। দৃঢ়বস্তুর স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা আমরা পরবর্তী পরিচ্ছেদে আলোচনা করব। এই প্রসঙ্গে আরও একটি কথার উল্লেখ করা প্রয়োজন। যে সমস্ত প্রতিবন্ধককে বীজগাণিতিক সমীকরণ দ্বারা লেখা যায় সেই সমস্ত প্রতিবন্ধকের দরুণই স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা কমে। কিন্তু যে সমস্ত প্রতিবন্ধককে এক বা একাধিক অসমতা সম্বন্ধে দিয়ে প্রকাশ করা হয় সেই ক্ষেত্রে স্বাতন্ত্র্য সংখ্যার কোনও হ্রাস হয় না।

উদাহরণস্বরূপ আমরা দুটি ভর-বিন্দুর গতি আলোচনা করতে পারি যাদের মধ্যে এমন একটি কঠিন বন্ধন আছে যার ফলে বিন্দু দুটির পারস্পরিক দূরত্ব সর্বদা ধ্রুবক থাকে। এখানে স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা হবে পাঁচ কারণ প্রথম বিন্দুর অবস্থান তিনটি স্থানাঙ্ক দ্বারা নির্দিষ্ট হয়ে যাবার পর দ্বিতীয় বিন্দুটির অবস্থান নিরূপণ করতে আর তিনটি স্থানাঙ্কের দরকার হয় না, যে কোনও দুটি স্থানাঙ্কই দ্বিতীয় বিন্দুটিকে নির্দিষ্ট করতে যথেষ্ট।

একটু আগেই আমরা উল্লেখ করেছি অপূর্ণ প্রতিবন্ধকের (non-holonomic Constraints) দরুণ স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা হ্রাস পায় না, যেমন একটি গোলাকার আবদ্ধ পাত্রে গ্যাস রাখলে অণুগুলি পাত্রের বাইরে যেতে পারে না। এই প্রতিবন্ধকতার প্রকাশ করা হয়।

$$|\vec{r}_i| \leq \vec{R}$$

এই অসমতা সম্বন্ধ দিয়ে। গোলকের কেন্দ্রস্থল থেকে গ্যাসের i-তম অণুর অবস্থান দূরত্ব $\vec{r}_i$ ভেক্টর দিয়ে প্রকাশ করা হয়েছে এবং $\vec{R}$ হল $\vec{r}_i$-এর দিকে গোলকের ব্যাসার্ধ। এই ক্ষেত্রে স্বাতন্ত্র্য সংখ্যার কোনওরকম হ্রাস হয় না। অনেক সময় প্রতিবন্ধককে একটি অবকলন সমীকরণ দ্বারা প্রকাশ করা যায় ; কিন্তু সেই অবকলন সমীকরণটি সমাকলন করা যায় না। এই ক্ষেত্রেও স্বাতন্ত্র্য সংখ্যার হ্রাস ঘটে না। একটি বৃত্তাকার চাকতি অনুভূমিক সমতলের ওপর গড়িয়ে চললে এই ধরনের প্রতিবন্ধকতা হয়।

গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ করলে প্রতিবন্ধকের রূপ নানা ধরনের হতে পারে। প্রতিবন্ধকের এই নানা ধরণের শ্রেণীবিভাগ আমরা নীচের সারণিতে দেব। সমস্ত ধরনের প্রতিবন্ধক নিয়ে আমরা নীচের সারণিতে দেব। সমস্ত ধরনের প্রতিবন্ধক নিয়ে আমরা এই স্বল্প পরিসরে আলোচনা করব না, করবার দরকারও নেই। কারণ, আমরা উচ্চতর গতিবিদ্যায় যে ধরনের সমীকরণ প্রতিষ্ঠা করতে চলেছি, সেখানে এই প্রতিবন্ধক বলের মান বার না করেও তন্ত্রটির গতি সম্বন্ধে আমরা অনেক কিছু জানতে পারব।

সারণি 5.1 প্রতিবন্ধক বলের শ্রেণিবিভাগ

প্রতিবন্ধক বল

[i] হয় সময় নিরপেক্ষ (scleronomic) নতুবা সময়ের ওপর নির্ভরশীল (rheonomic)

[ii] হয় বীজগাণিতিক সম্পর্ক দ্বারা প্রকাশিতব্য এবং বেগ নিরপেক্ষ (holonomic) নতুবা গাণিতিক সমীকরণ দ্বারা প্রকাশিতব্য নয় এবং বেগ নিরপেক্ষও নয় (non-holonomic)

এবং [iii] হয় সংরক্ষী অর্থাৎ তন্ত্রের মোট শক্তির কোনো হেরফের হয় না এবং প্রতিবন্ধক বল কোনো কার্য করে না। (conservative) নতুবা, অসংরক্ষী, অর্থাৎ তন্ত্রের মোট শক্তির পরিবর্তন হয়, প্রতিবন্ধক বলও কার্য করে (non-conservative)।

অনুশীলনী 5.3

1. একটি হাইড্রোজেন অণুর স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা কত ?

সূত্র ঃ একটি হাইড্রোজেন অণু দুটি পরমাণু দ্বারা গঠিত এবং তাদের মধ্যে একটি বন্ধন আছে।

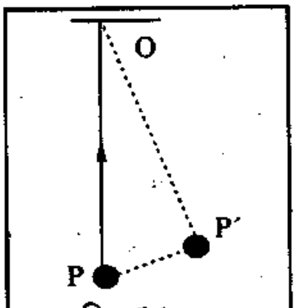
2. একটি গোলকের মধ্যে একটি দণ্ড এমনভাবে আছে যে তার দুটি প্রান্ত গোলকের তল স্পর্শ করে আছে। দৈর্ঘ্য অপরিবর্তনীয় হলে দণ্ডটির স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা কত ?

5.4 ডা' লামবার্টের নীতি (D'Alembert's principle)

আগের সারণিতে আমরা প্রতিবন্ধক বল সম্বন্ধে সাধারণ শ্রেণিবিভাগ করে দেখিয়েছি। এইবার আমরা বিশেষ কিছু প্রতিবন্ধক বল দ্বারা কৃতকার্য আলোচনা করব।

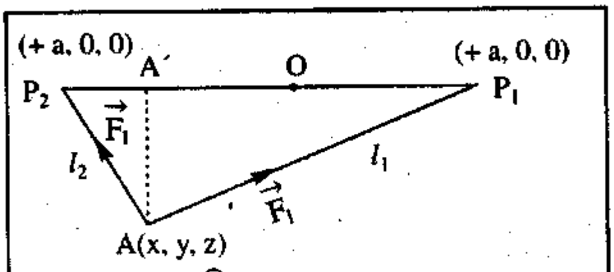
(a) সরল দোলক ঃ

[5.1] চিত্রে প্রতিবন্ধক বল হল সুতো কর্তৃক প্রদত্ত টান। PP′ একটি বৃত্তের অংশ। সুতোর টান হল সবসময়ই কেন্দ্র O অভিমুখী, সরণ হল বৃত্তের চাপ বরাবর। কাজেই সরণ ও প্রতিবন্ধক বল পরস্পর লম্ব, ফলে কৃতকার্যের মান শূন্য।



চিত্র 5.1

(b) দুটি সুতো দিয়ে বিলম্বিত বস্তুকণা ঃ



চিত্র 5.2

[চিত্র 5.2] চিত্রে ভরবিন্দু A সুতো দিয়ে দুটি বিন্দু P_1 এবং P_2-এর সঙ্গে আটকানো আছে। P_1P_2-কে x-অক্ষ ধরে P_1P_2-র মধ্যবিন্দুকে মূলবিন্দু O ধরা হলে প্রতিবন্ধক সমীকরণ হবে

(i) $(x + a)^2 + y^2 + z^2 = l_1^2$ (ধ্রুবক)

(ii) $(x - a)^2 + y^2 + z^2 = l_2^2$ (ধ্রুবক)

প্রতিবন্ধক বল দুটি সুতোর দৈর্ঘ্য বরাবর কাজ করবে। প্রতিবন্ধক বল দুটি হল,

$$\text{(i) } \vec{F}_1 = \lambda_1 \hat{i}_1 = \frac{\lambda_1}{l_1}\vec{l}_1 = \frac{\lambda_1}{l_1}\left[(x+a)\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\right] \text{ এবং}$$

$$\text{(ii) } \vec{F}_2 = \lambda_2 \hat{i}_2 = \frac{\lambda_2 \vec{l}_2}{l_2} = \frac{\lambda_2}{l_2}\left[(x-a)\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\right]$$

প্রতিবন্ধক সমীকরণ দুটি থেকে পাওয়া যায়,

$$(x + a)dx + y\,dx + z\,dz = 0$$

$$\text{এবং } \quad (x - a)dx + y\,dx + z\,dz = 0$$

প্রতিবন্ধক বল দুটির কৃতকার্য হল

$$\vec{F}_1 . d\vec{r} = \frac{\lambda_1}{l_1}\left[(x+a)dx + yd_y + zd_z\right] = 0$$

$$\vec{F}_2 . d\vec{r} = \frac{\lambda_2}{l_2}\left[(x-a)dx + yd_y + zd_z\right] = 0$$

(c) দৃঢ় বস্তু

যে বস্তুর যে কোনো দুটি কণার ভিতরকার দূরত্ব সর্বদাই সমান থাকে সেই বস্তুকে দৃঢ় বস্তু বলে। i-তম ও k-তম বস্তুকণার অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}_i$ এবং $\vec{r}_k$ হলে দৃঢ় বস্তুর শর্ত হল

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_k|^2 = \text{ধ্রুবক}$$

অবকলন করে পাই,

$$(\vec{r}_i - \vec{r}_k).(d\vec{r}_i - d\vec{r}_k) = 0$$

এখন ধরা যাক i-তম বস্তুকণার ওপর k-তম বস্তুকণার অভ্যন্তরীণ প্রতিবন্ধক বল হল $\vec{F}_{ik}$, নিউটনের তৃতীয় সূত্র অনুযায়ী, আমরা বলতে পারি

$$\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$$

এখন i-তম কণার ওপর মোট বল হবে $\sum_k \vec{F}_{ik}$, তবে এখানে মনে রাখতে হবে বস্তুকণার নিজের ওপর নিজের জন্য কোনও প্রভাব বস্তুকণার গতি পরিবর্তন করতে অক্ষম। তাই সমষ্টি চিহ্নে k = i হবে না। সুতরাং i-তম কণার ওপর কৃতকার্যের পরিমাণ

$$dw_i = \sum_{k \neq i} \vec{F}_{ik} . d\vec{r}_i$$

∴ মোট কৃতকার্যের পরিমাণ

$$dw = \sum_i dw_i = \sum_i \sum_{k \neq i} \vec{F}_{ik} . d\vec{r}_i = \sum_k \sum_{i \neq k} \vec{F}_{ki} . d\vec{r}_k = -\sum_k \sum_{i \neq k} \vec{F}_{ik} . d\vec{r}_k$$

$$\therefore \quad dw = \frac{1}{2}\left(\sum_i dw_i + \sum_k dw_k\right) = \frac{1}{2}\sum_i \sum_{k\neq i} \vec{F}_{ik}\cdot\left(d\vec{r_i} - d\vec{r_k}\right)$$

সাধারণতঃ আমরা যে সমস্ত বলের সাথে পরিচিত, তারা কেন্দ্রস্থ অর্থাৎ i-তম ও k-তম কণার মধ্যে অভ্যন্তরীণ বল, সংযোগকারী ভেক্টর রেখা $(\vec{r_i} - \vec{r_k})$ বরাবর ক্রিয়াশীল। অর্থাৎ

$$\vec{F}_{ik} = \lambda_{ik}(\vec{r_i} - \vec{r_k})$$

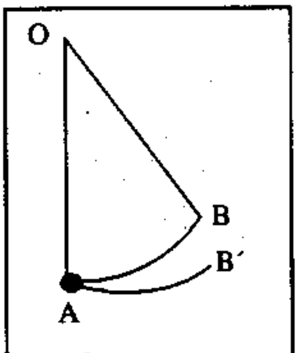
$$\therefore \quad d_w = \frac{1}{2}\sum\sum \lambda_{ik}(\vec{r_i} - \vec{r_k}).(d\vec{r_i} - d\vec{r_k})$$

$$= 0$$

অর্থাৎ প্রতিবন্ধক বল ছাড়া কৃতকার্যের পরিমাপ দৃঢ়বস্তুর বেলাতেও শূন্য।

এই সমস্ত উদাহরণ থেকে মনে হতে পারে তবে কি সমস্ত ক্ষেত্রেই পূর্ণ প্রতিবন্ধক বল দ্বারা কৃতকার্যের পরিমাণ শূন্য ? উত্তর হল না। ঘর্ষণের ক্ষেত্রে সরণ হল বলের বিপরীতমুখী। ঘর্ষণের ক্ষেত্রে তাই অন্ততঃ কৃতকার্যের পরিমাণ শূন্য হয় না। আর একটি সহজ ক্ষেত্রে আমরা দেখাতে পারি যে, কৃতকার্যের পরিমাণ শূন্য নয়।

ধরা যাক, একটি সরল দোলক যে সুতো দিয়ে ঝোলানো হয়েছে, তা স্থিতিস্থাপক। অর্থাৎ দোলকের লম্ব অবস্থানে সুতোর দৈর্ঘ্য সর্বোচ্চ, অন্য অবস্থানে এই দৈর্ঘ্য পরিবর্তনশীল। সুতরাং এক্ষেত্রে দোলকটি AB´ বৃত্তচাপ বরাবর না গিয়ে সুতোর দৈর্ঘ্য পরিবর্তনের জন্য AB বরাবর যাবে [চিত্র 5.3]। যেহেতু গতিপথ এবং সুতো পরস্পরের লম্ব নয়, সুতরাং প্রতিবন্ধক বল এক্ষেত্রে কাজ করবে।



চিত্র 5.3

এই ধরনের প্রতিবন্ধক বল সময়-নিরপেক্ষ নয়। তাই মনে করা হয় এই ধরনের অসুবিধার উৎস সময়ের পরিবর্তন। যদি সময়কে স্থির রাখা যেত, তাহলে সুতোর দৈর্ঘ্যও পরিবর্তিত হত না, এবং দোলকও AB´ চাপ বরাবর (অর্থাৎ সুতোর লম্ব-অভিমুখে) চলত। এই ধরনের সরণকে বলা হয় অলীক সরণ, এবং এই অলীক সরণের কার্যকে বলা হয় অলীক কার্য যার মান শূন্য। নতুন শিক্ষার্থী হিসাবে আপনার কাছে অলীক সরণের মতো অবাস্তব ধারণা বিস্ময়কর মনে হতে পারে, কিন্তু এই অলীক সরণের ধারণা থেকে প্রতিবন্ধক বলের অপনয়ন সম্ভব। নীচের গাণিতিক বিশ্লেষণ থেকে এই ধারণা আরও স্পষ্ট করে বোঝা যাবে।

কোনও তন্ত্রে যে কোনও একটি কণার জন্য নিউটনের গতি সমীকরণ হল,

$$m_{(i)}\frac{d^2\vec{r}_{(i)}}{dt^2} = \vec{F}_{(i)} = \vec{F}_{(i)}^{\,a} + \vec{F}_{(i)}^{\,c}$$

সূচক i বিশেষ কণাটিকে নির্দেশ করছে। ভেক্টরের কোনও উপাংশ নির্দেশ করছে না সেটা বোঝানোর জন্য i-কে বন্ধনীর ভেতরে রাখা হয়েছে, $\vec{F}_{(i)}$ বলতে দুভাগে ভাগ করে লেখা হয়েছে—$\vec{F}_{(i)}^{(c)}$ হল প্রতিবন্ধক বল এবং $\vec{F}_{(i)}^{a}$ হল বাকি বল। উদাহরণস্বরূপ বলা যায়, দোলকের উদাহরণের ক্ষেত্রে $\vec{F}_{(i)}^{a}$ হবে অভিকর্ষজ বল এবং $\vec{F}_{(i)}^{c}$ হবে সুতোর টান। এখন অলীক সরণ $\delta\vec{r}_{(i)}$ ধরে উপরের সমীকরণের স্কেলার গুণ করে পাই,

$$m_{(i)}\frac{d^2\vec{r}_{(i)}}{dt^2}.\delta\vec{r}_{(i)} = \vec{F}_{(i)}^{a}.\delta\vec{r}_{(i)} + \vec{F}_{(i)}^{c}.\delta\vec{r}_{(i)}$$

সমস্ত বস্তুকণার জন্য এই সমীকরণটি যোগ করে পাই,

$$\sum_{i} m_{(i)}\frac{d^2\vec{r}_{(i)}}{dt^2}.\delta\vec{r}_{(i)} = \sum_{(i)}\vec{F}_{(i)}^{a}.\delta\vec{r}_{(i)} + \sum\vec{F}_{(i)}^{c}.\delta\vec{r}_{(i)}$$

যেহেতু ধরে নেওয়া হয়েছে অলীক সরণ দ্বারা কোনও কার্য হয় না, সুতরাং ডানদিকের দ্বিতীয় রাশিটির মান শূন্য হবে।

$$\therefore \quad \sum_{i}\left[\vec{F}_{(i)}^{a} - m_{(i)}\frac{d^2\vec{r}_{(i)}}{dt^2}\right].\delta\vec{r}_{(i)} = 0 \qquad \ldots \ (5.3)$$

এই সমীকরণটি ডা' লামবার্টের নীতি বলে পরিচিত। এই সমীকরণে দেখুন অজানা প্রতিবন্ধক বল আর নেই, কিন্তু বিভিন্ন কণাগুলির গতি সমীকরণ ভিন্ন ভিন্ন ভাবে এই সমীকরণে আর নেই। সব কণার গতি জট পাকিয়ে গেছে। আপনার সুবিধার জন্য ডা' লামবার্টের নীতির সাহায্যে কয়েকটি সমস্যা সমাধানের উদাহরণ দেওয়া হচ্ছে। আশা করা যায় কিছুটা চর্চার পর আপনারা এই আপাত বিস্ময়কর আলোচনার তাৎপর্য উপলব্ধি করতে পারবেন। এই পদ্ধতিতে (5.3) সমীকরণের সঙ্গে প্রতিবন্ধক সমীকরণও ব্যবহার করতে হয়।

উদাহরণ 1. সরল দোলক। এখানে দোলকের গতি একটি সমতলে সীমাবদ্ধ বলে ধরে নেওয়া হয়েছে।

উল্লম্ব অক্ষকে z, দোলকের আলম্বন বিন্দুকে মূলবিন্দু এবং দোলকের গতি $z-x$ সমতল বরাবর হচ্ছে ধরে নিলে [5.3] সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়,

$$-m\frac{d^2x}{dt^2}\delta x - \left(mg + m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z = 0 \quad \ldots \quad [5.4(a)]$$

আবার প্রতিবন্ধক সমীকরণ থেকে অলীক সরণ কল্পনা করে পাওয়া যায়,

$$x\,\delta x + z\,\delta z = 0 \quad \dots \quad [5.4(b)]$$

$$z = -\sqrt{l^2 - x^2} = -l\left(1 - x^2/l^2\right)^{1/2} \simeq -l\left(1 - \frac{1}{2}\frac{x^2}{l^2} + \cdots\right)$$

$$\simeq -l \text{ (কারণ } x/l << 1]$$

কাজেই, $\frac{dz}{dt}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$-কে উপেক্ষণীয় ধরা হলে,

[5.4(a)] সমীকরণটি দাঁড়ায়

$$-m\frac{d^2x}{dt^2}\delta x - mg\,\delta z = 0$$

এবং [5.4(b)] সমীকরণকে লেখা যায়,

$$x\delta x - l\delta z = 0 \quad \text{বা,} \quad \delta x = \frac{l}{x}\delta z$$

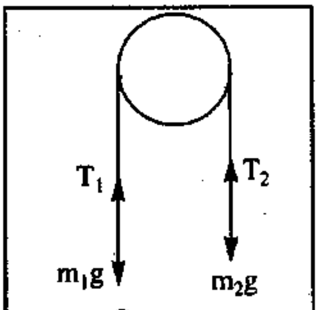
$$\therefore \quad m\frac{d^2x}{dt^2}\frac{l}{x}\delta z + mg\,dz = 0$$

$$\text{বা,} \quad \left(\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l}x\right)\delta z = 0 \quad \text{বা,} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l}x = 0$$

সুতরাং এক্ষেত্রে আমরা সরল দোলকের সুপরিচিত সমীকরণ পাই।

উদাহরণ-2. অ্যাটউড মেশিন (Atwood machines) ঃ

দুটি বস্তুকণা যাদের ভর m_1 ও m_2, টানলে বাড়ে না এমন একগাছা সুতো দিয়ে বেঁধে মসৃণ একটি পুলির ওপর দিয়ে ঘোরানোর তন্ত্রের নামই অ্যাটউড মেশিন। অভিকর্ষ ক্রিয়ার ফলে কণা দুটির ত্বরণ বার করতে হবে।



চিত্র 5.4

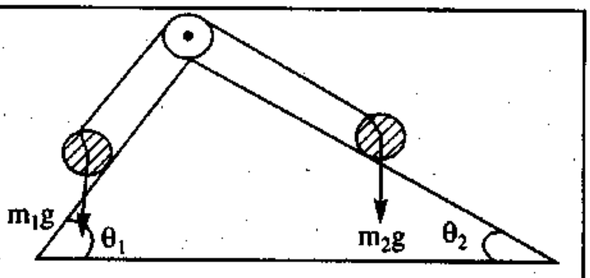
এখানে প্রযুক্ত বল $m_1\vec{g}$ ও $m_2\vec{g}$ তারের টান $\vec{T_1}$ ও $\vec{T_2}$ বাধাজনিত বল। কিন্তু ডা' লামবার্টের সূত্রের প্রয়োগ করলে এই প্রতিবন্ধক বলের কোনো প্রয়োজন নেই। কণা দুটির ত্বরণ $\vec{a}_1$ ও $\vec{a}_2$ হলে (5.3) সমীকরণ অনুসারে

$$(m_1\vec{g} - m_1\vec{a}_1).\delta\vec{r}_1 + (m_2\vec{g} - m_2\vec{a}_2).\delta\vec{r}_2 = 0 \quad \dots \quad [(5.5(a)]$$

এখানে কল্পিত অলীক সরণ $\delta\vec{r}_1$ এবং $\delta\vec{r}_2$ ওপর দিকে ধনাত্মক ধরা হয়েছে। সুতোর দৈর্ঘ্য বদলায় না। ফলে $\delta\vec{r}_1 = -\delta\vec{r}_2$ এবং $\vec{a}_1 = -\vec{a}_2$.

$$\therefore\ \vec{a}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\vec{g} \quad \ldots [5.5(b)]$$

উদাহরণ-3. টানলে বাড়ে না এমন একগাছি সুতোর দুই মাথায় m_1, m_2 ভরের দুটি কণা বেঁধে θ_1, θ_2 কোণে আনত দুটি মসৃণ তলের উপর রাখা হয়েছে। কণা দুটির গতি পর্যালোচনা করা যাক।



চিত্র 5.5

এক্ষেত্রে (5.3) সমীকরণটি হল,

$$(m_1\vec{g} - m_1\ddot{\vec{r}}_1).\delta\vec{r}_1 + (m_2\vec{g} - m_2\ddot{\vec{r}}_2).\delta\vec{r}_2 = 0$$

একে লেখা যায়

$$(m_1 g\sin\theta_1 - m_1\ddot{r}_1)\delta r_1 + (m_2 g\sin\theta_2 - m_2\ddot{r}_2)\delta r_2 = 0$$

যেহেতু সুতোটি অপ্রসারণীয়, $r_1 + r_2 =$ ধ্রুবক অর্থাৎ $\delta r_1 = -\delta r_2$ এবং $\ddot{r}_1 = \ddot{r}_2$ এই দুটি শর্ত ওপরের সমীকরণে বসালে

$$\ddot{r}_1 = \frac{m_1 g\sin\theta_1 - m_2 g\sin\theta_2}{m_1 + m_2} \quad \ldots [5.5(c)]$$

অনুশীলনী 5.4

1. উল্লম্ব তলে r ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার একটি তারের ওপর m ভরের একটি কণা বাধাহীনভাবে গড়িয়ে পড়ছে। যদি তারের তলটিকে $x - y$ তল ধরা হয় তবে প্রমাণ করুন যে, $y\ddot{x} - x\ddot{y} + gx = 0$.

2. বিস্তার যদি অতি ক্ষুদ্র না হয় তবে সরল দোলকের গতি কিরূপ হবে ডা' লামবার্টের নীতির সাহায্যে আলোচনা করুন।

5.5 সাধারণীকৃত নির্দেশাঙ্ক ও ল্যাগ্রাঞ্জের সমীকরণ (Generalised co-ordinates and Lagrange's Equation)

দেখা গেছে যে কার্টেজীয় নির্দেশতন্ত্র ব্যবহার করে বস্তুকণার গতি নিরূপণ সর্বদা সুবিধাজনক নয়। উদাহরণস্বরূপ বলা যায়, কেন্দ্রগ বলের ক্ষেত্রে গতি সমীকরণ বিশ্লেষণের সময় কার্টেজীয় তন্ত্রের চেয়ে

গোলীয় ধ্রুবীয় (spherical polar) নির্দেশতন্ত্রের ব্যবহার অনেক সুবিধাজনক। পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদে দেখা গেছে যে পূর্ণ প্রতিবন্ধক থাকলে স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা কমে যায়, ফলে কার্টেজীয় নির্দেশাঙ্কগুলি আর পরস্পর, নিরপেক্ষ থাকে না। কোনো কোনো ক্ষেত্রে এই অপ্রয়োজনীয় রাশিগুলি অযথা জটিলতার সৃষ্টি করে। শুধু তাই নয়, ক্ষেত্র বিশেষে আলোচনা প্রায় অসম্ভব হয়ে দাঁড়ায়। তাই আমরা এখানে যে উচ্চতর গণিত আলোচনা করতে চলেছি, সেখানে নির্দেশাঙ্কের উপর কেবল দুটি শর্ত আরোপ করব—

(i) এদের সংখ্যা আলোচ্য তন্ত্রের স্বাতন্ত্র্য সংখ্যার সমান হবে।

(ii) এদের প্রত্যেকে পরস্পরের নিরপেক্ষ হবে।

উপরের দুটি শর্ত মেনে যে গাণিতিক নির্দেশাঙ্ক আমরা ব্যবহার করব সেগুলির বাস্তব বা জ্যামিতিক তাৎপর্য না থাকলেও চলবে। এরকম নির্দেশাঙ্কের নামই সাধারণীকৃত নির্দেশাঙ্ক (generalised co-ordinates)। কার্টেজীয় নির্দেশাঙ্ক এবং এই সাধারণীকৃত নির্দেশাঙ্কগুলি পরস্পরের অপেক্ষক হয় এবং এই নির্দেশাঙ্কগুলির অঞ্চল (domain) সবসময়ই $-\infty$ থেকে $+\infty$ হয়। $q_1, q_2, \ldots q_r$ দিয়ে সাধারণীকৃত নির্দেশাঙ্কগুলি চিহ্নিত করা হলে (r হল তন্ত্রের স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা) এবং কার্টেজীয় নির্দেশাঙ্কগুলিকে $x_1, x_2, \ldots x_{3n}$ (n হল তন্ত্রের কণার সংখ্যা)-দ্বারা লেখা হলে

$$x_i = x_i(q_k, t) \quad \left.\begin{matrix} i = 1,2,\ldots,3n \\ k = 1,2,\ldots r \end{matrix}\right\} \quad \ldots (5.6)$$

কোনও পূর্ণ প্রতিবন্ধক না থাকলে $r = 3n$, অন্যথায় $r = 3n - p$ যেখানে p হল তন্ত্রের পূর্ণ প্রতিবন্ধক সংখ্যা। x_i গুলি প্রত্যক্ষভাবে সময়ের উপর নির্ভরশীল হবে যদি পূর্ণ প্রতিবন্ধকটি সময়ের উপর নির্ভরশীল হয়, অথবা q নির্দেশতন্ত্র ও x নির্দেশতন্ত্রের মধ্যে আপেক্ষিক বেগ থাকে।

(5.6) সমীকরণের অবকলন রূপ থেকে পাওয়া যায়,

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} dt$$ [এখানে k হল মূল সূচক (dummy index) যা একই রাশিতে দুবার ব্যবহৃত হওয়ায় আইনস্টাইনের রীতিতে ওই রাশির সমষ্টিকরণ বোঝাচ্ছে।]

$$\therefore \quad v_i = \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} \quad \ldots (5.7)$$

$\dot{q}_k$-গুলিকে বলা হয় সাধারণীকৃত বেগ (generalised velocity)। $\frac{dx_i}{dt}$ এবং $\frac{\partial x_i}{\partial t}$-এর মধ্যে পার্থক্য লক্ষ করুন— দুটো কিন্তু এক মানের নয়। এছাড়া একটি বিষয়ও লক্ষ করা দরকার। (5.7) সমীকরণে $\frac{\partial}{\partial q_k}$ সংকারক (operator) লেখা হলেও $\frac{\partial}{\partial x_k}$ সংকারকটি অর্থপূর্ণ নয়। কারণ প্রতিবন্ধকতার

জন্য x_k গুলি পরস্পর নিরপেক্ষ নয়। অর্থাৎ (5.6) সমীকরণের বিপরীত রূপ $q_j = q_j(x_k, t)$ থেকে $\dot{q}_j = \frac{\partial q_j}{\partial x_k}\dot{x}_k + \frac{\partial q_j}{\partial t}$ জাতীয় সমীকরণ লেখা যায় না।

এখন কণাগুলির মোট গতীয় শক্তি $T = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \upsilon_\alpha^2 = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha (\upsilon_\alpha)_k (\upsilon_\alpha)_k$ ..... [5.8(a)]

এখানে α-কে কণার সূচক হিসাবে নির্দেশ করা হয়েছে এবং k হল ভেক্টর সূচক। উভয় সূচকই দুবার বা ততোধিক ব্যবহৃত হওয়ার ফলে সমষ্টিকরণ বোঝাচ্ছে। আমরা এই অনুচ্ছেদে গ্রিক অক্ষর দ্বারা কণার সূচক এবং রোমান অক্ষর দ্বারা ভেক্টর সূচক বোঝাব। কিন্তু মূল সূচকের অক্ষর ইচ্ছামতো পরিবর্তন করা যায়। সেজন্য পরবর্তী অনুচ্ছেদে আমরা ঠিক বিপরীত অক্ষর ব্যবহার করব। আমাদের আশা এর ফলে আপনি ভেক্টরের সূচক প্রকরণে (index notation) পারদর্শী হয়ে উঠবেন।

$$\therefore T = \sum \frac{1}{2} m_\alpha \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial x_j}{\partial t}\right)_\alpha \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_m}\dot{q}_m + \frac{\partial x_j}{\partial t}\right)_\alpha$$

$$= \sum \frac{1}{2} m_\alpha \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_k}\right)_\alpha \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_m}\right)_\alpha (\dot{q}_k)_\alpha (\dot{q}_m)_\alpha + \sum m_\alpha \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_k}\right)_\alpha \left(\frac{\partial x_j}{\partial t}\right)_\alpha (\dot{q}_k)_\alpha$$

$$+ \sum \frac{1}{2} m_\alpha \left(\frac{\partial x_j}{\partial t}\right)_\alpha^2 \quad \text{... [5.8(b)]}$$

এখানে দেখা যাচ্ছে, গতীয় শক্তির রাশিমালার মধ্যে বেশ জটিল কিছু পদ এসে গেছে। এর মূল কারণ হল দুটি নির্দেশতন্ত্রের মধ্যে যদি কোনও আপেক্ষিক বেগ থাকে তাহলে গতীয় শক্তির মান সেই দুটি নির্দেশতন্ত্রে সমান নয়।

[5.8(b)] সমীকরণে দেখা যাচ্ছে যে T কতকগুলি চলরাশি q_j, $\dot{q}_j$, $\frac{\partial x_j}{\partial t}$ এবং t-এর ওপর নির্ভরশীল। আমরা এগুলিকে পরস্পর নিরপেক্ষ চলরাশি বলে ধরে নেব। [5.8(b)] সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_p} = \sum \frac{1}{2}\left(m \frac{\partial x_j}{\partial q_m}\frac{\partial x_j}{\delta q_m}\delta_{pk}\,\dot{q}_m + m\frac{\partial x_j}{\partial q_k}\frac{\partial x_j}{\partial q_m}\dot{q}_u\,\delta p_m\right) \quad \text{[5.9(a)]}$$

$$+ \sum m \frac{\partial x_j}{\partial q_k}\frac{\partial x_j}{\delta t}\delta k_p$$

[সমষ্টিকরণ বন্ধনীর মধ্য থেকে আমরা কণার সূচক α-কে উঠিয়ে দিলেও সমষ্টিকরণ বন্ধনী সমস্ত কণাগুলির সমষ্টি বোঝাচ্ছে। রোমান ভেক্টর সূচকগুলি পুনরাবৃত্তি হলে সমষ্টিকরণ এমনিতেই বোঝাবে বলে আগেই বলা হয়েছে।]

$$\therefore\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_p} = \sum \frac{1}{2} m\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_p}\frac{\partial x_j}{\partial q_m}\dot{q}_m + \frac{\partial x_j}{\partial q_k}\frac{\partial x_j}{\partial q_p}\dot{q}_k\right) + \sum m \frac{\partial x_j}{\partial q_p}\frac{\partial x_j}{\partial t}$$

$$= \sum m \frac{\partial x_j}{\partial q_p}\frac{\partial x_j}{\partial q_k}\dot{q}_k + \sum m \frac{\partial x_j}{\partial q_p}\frac{\partial x_j}{\partial t}$$

$$= \sum m \frac{\partial x_j}{\partial q_p}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial x_j}{\partial t}\right)$$

$$= \sum m \frac{\partial x_j}{\partial q_p} \upsilon_j \quad \therefore \quad [5.9(b)]$$

অতএব $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_p}\right) = \sum m \frac{\partial x_j}{\partial q_p}\dot{\upsilon}_j + \sum m\upsilon_j \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_p}\right) \quad \ldots \quad [5.10(a)]$

এখন $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_p}\right) = \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_m \partial q_p}\dot{q}_m + \frac{\partial^2 x_j}{\partial t\,\partial q_p}$

$$= \frac{\partial}{\partial q_p}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_m}\dot{q}_m + \frac{\partial x_j}{\partial t}\right)$$

$$= \frac{\partial \upsilon_j}{\partial q_p} \quad \ldots. \ [5.10(b)]$$

অতএব [5.10(a)] সমীকরণটি এখন দাঁড়ায়

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_p}\right) = \sum m \frac{\partial x_j}{\partial q_p}\dot{\upsilon}_j + \sum m\upsilon_j \frac{\partial \upsilon_j}{\partial q_p}$$

$$= \sum m \frac{\partial x_j}{\partial q_p}\dot{\upsilon}_j + \frac{1}{2}\sum m \frac{\partial}{\partial q_p}(\upsilon_j\,\upsilon_j)$$

$$= \sum m \frac{\partial x_j}{\partial q_p}\dot{\upsilon}_j + \frac{\partial T}{\partial q_p}$$

$$\therefore\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_p}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_p}=\sum m\frac{\partial x_j}{\partial q_p}\dot{\upsilon}_j \quad \text{.. [5.10(c)]}$$

সমীকরণ [5.10(c)]-কে আমরা সাধারণীকৃত নির্দেশাঙ্ক q_p-র কল্পিত সরণ δq_p দিয়ে গুণ করব এবং একই সূচকের পুনরাবৃত্তি হবার ফলে সমষ্টিকরণ প্রকরণ কার্যকর হবে। এভাবে পাওয়া যায়,

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_p}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_p}\right]\delta p_q=\sum m\dot{\upsilon}_j\frac{\partial x_j}{\partial q_p}\delta q_p=\sum m\dot{\upsilon}_j\,\delta x_j \quad \text{[5.10(d)]}$$

আপনি লক্ষ করুন যে এক্ষেত্রে কল্পিত সরণ

$$\delta x_j=\frac{\partial x_j}{\partial q_p}\delta q_p\neq\frac{\delta x_j}{\delta q_k}dq_k+\frac{\delta x_j}{\delta t}dt$$

আবার, $\sum m\dot{\upsilon}_j\,.\,\delta x_j=F_j\frac{\delta x_j}{\delta q_p}\delta q_p=\phi_p\delta_q$ ... [5.10(e)]

এখানে $\phi_p=F_j\frac{\partial x_j}{\partial q_p}$-কে বলা হয় সাধারণীকৃত বল।

সুতরাং এখন, ডা' লামবার্টের নীতিতে [সমীকরণ (5.3)] [5.10(d)] ও [5.10(e)] এবং (5.10c) সমীকরণ ব্যবহার করে লেখা যায়,

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_p}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_p}-\phi_p\right]\delta p_q=0 \quad \text{... [5.10(f)]}$$

(5.3) সমীকরণে কার্টেজীয় নির্দেশাঙ্ক ব্যবহার করা হয়েছিল। প্রতিবন্ধকতার জন্য কল্পিত সরণ পরস্পর নিরপেক্ষ ছিল না। সেজন্য ডা' লামবার্টের নীতিতে $\delta\vec{r}$-এর প্রত্যেক উপাংশের সহগর মান আলাদা করে শূন্য হবে সেকথা বলা যায়নি। কিন্তু সাধারণীকৃত নির্দেশাঙ্কগুলিকে আমরা প্রথম থেকেই পরস্পরের নিরপেক্ষ করে নিয়েছি। কাজেই [5.10(f)] সমীকরণে δp_q-র সহগগুলি আলাদা করে শূন্য হবে অর্থাৎ

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_p}\right]-\frac{\partial T}{\partial q_p}-\phi_p=0 \quad \text{.... [5.11(a)]}$$

এরকম r সংখ্যক সমীকরণ আমরা পাব। যেখানে r হল তন্ত্রের স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা। সচরাচর আমরা সংরক্ষী বলের আলোচনা করে থাকি যে বল একটি বিভবের অবকল রূপে লেখা যায়।

বিভবকে V লিখে আমরা বলতে পারি,

$$\phi_p = -\frac{\partial V}{\partial q_p} \qquad .... [5.11(b)]$$

এবং $-\delta V = \phi_k \delta q_k = F_j \delta x_j$ একটি যথার্থ অবকল (perfect differential)। [5.11(a)] সমীকরণকে এবার লেখা যাবে,

$$\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_p} - \frac{\partial(T-V)}{\partial p_q}\right] = 0 \qquad ... \ [5.11(c)]$$

যদি ধরা হয় যে স্থিতিশক্তি V বেগ $\dot{q}_p$-এর ওপরে নির্ভর করে না তবে ওপরের সমীরণটিকে একটু সাজিয়ে লেখা যায়,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \pounds}{\partial \dot{q}_p}\right) - \frac{\partial \pounds}{\partial q_p} = 0 \qquad ... [5.12(a)]$$

যেখানে $\pounds \equiv T - V$ ... [5.12(b)]

£ অপেক্ষকটিকে বলা হয় লাগ্রাঞ্জিয়ান (Lagrangian) এবং [5.12(a)] সমীকরণটিকে বলা হয় ল্যাগ্রাঞ্জের সমীকরণ।

এই সমীকরণ ব্যবহার করবার আগে আমরা আপনাকে নিউটনের সমীকরণের সঙ্গে ল্যাগ্রাঞ্জের সমীকরণের যোগসূত্র সম্বন্ধে একটি পরিষ্কার ধারণার প্রয়োজনীয়তা সম্বন্ধে আলোকপাত করব। এই সমীকরণের সঙ্গে নিউটনের সমীকরণের যোগসূত্র হল ডা' লামবার্টের নীতির মাধ্যমে। আবার ডা' লামবার্টের সমীকরণে ব্যবহৃত x_i হল একটি জাড্য নির্দেশতন্ত্রের নির্দেশাঙ্ক। কিন্তু সাধারণীকৃত নির্দেশাঙ্ক সম্বন্ধে কোনো তন্ত্রের অঙ্গীভূত হবার শর্ত আরোপ করা হয়নি। কাজেই q_p-দের জাড্য তন্ত্রের নির্দেশাঙ্ক হবার কোনও বাধ্যবাধকতা নেই। শুধু আমাদের বিশ্লেষণে গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তির মান নির্দিষ্ট হবে একটি জাড্য নির্দেশতন্ত্রের মাধ্যমে।

সাধারণীকৃত বেগ ও বলের সংজ্ঞা দেওয়া হলেও সাধারণীকৃত ভরবেগের সম্বন্ধে আমরা কিন্তু এখনও কিছু বলিনি। সাধারণীকৃত ভরবেগের সংজ্ঞা হল $p_k = \frac{\partial \pounds}{\partial \dot{q}_k}$ [5.12(c)]। এরকম অদ্ভুত সংজ্ঞার কারণ ক্রমশ পরিষ্কার হবে। ভরবেগের এই সংজ্ঞা [5.12(a)] সমীকরণে ব্যবহার করলে দাঁড়ায় $\frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial \pounds}{\partial q_p}$. এই সমীকরণের সঙ্গে নিউটনের সমীকরণের সাদৃশ্য $\left(\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)$ সুস্পষ্ট।

আর একটি গুরুত্বপূর্ণ বিষয়ের উল্লেখ আমরা এখানে করব। সেটি হল নিউটনের সমীকরণ $m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\vec{\nabla}\phi$ একটি ভেক্টর সমীকরণ এবং ভেক্টরের সংজ্ঞা অনুযায়ী একটি ভেক্টর সমীকরণ কোনো একটি নির্দেশতন্ত্রে সিদ্ধ হলে সব নির্দেশতন্ত্রেই সিদ্ধ হবে। অথচ আমরা জানি এই সমীকরণটি সরাসরি গোলীয় তন্ত্রে ব্যবহার করা যায় না। এই আপাত বিস্ময়কর পরিস্থিতির কারণ হল আমরা যখন অকার্টেজীয় নির্দেশতন্ত্র নিয়ে আসি তখন উপরের সমীকরণটিকে ঠিক ভেক্টর সমীকরণ বলা চলে না। সমীকরণের বাঁ পাশের রাশিটি বিষম পরিবর্তী ভেক্টর (contravariant vector) এবং ডান পাশের রাশি সমপরিবর্তী ভেক্টর (covariant vector)। তাদের অকার্টেজীয় তন্ত্রে রূপান্তর বিভিন্ন রকম। নিউটনের সমীকরণের এই ত্রুটি ল্যাগ্রাঞ্জের সমীকরণে নেই। t একটি স্কেলার হওয়ায় q_k, $\dot{q}_k$ বিষম পরিবর্তী ভেক্টর। যেহেতু ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান £ একটি স্কেলার $\frac{\partial £}{\partial \dot{q}_k}$ এবং $\frac{\partial £}{\partial q_k}$ দুটি সমপরিবর্তী ভেক্টর। সেজন্যই নির্দেশাঙ্ক নির্বিশেষে এই সমীকরণ ব্যবহার করা চলে।

ল্যাগ্রাঞ্জের সমীকরণের ব্যবহারিক প্রয়োগ

উদাহরণ 1. একটিমাত্র বস্তুকণার গতি

(a) **কার্টেসীয় নির্দেশতন্ত্র অনুযায়ী**

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0.\ -\frac{\partial V}{\partial x} = F_x,\ -\frac{\partial V}{\partial y} = F_y,\ -\frac{\partial V}{\partial z} = F_z$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x},\ \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y},\ \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z},\ \frac{\partial V}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial V}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial V}{\partial \dot{z}} = 0$$

সুতরাং গতীয় সমীকরণ হল,

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = F_x,\ \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = F_y,\ \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = F_z \qquad \text{.... [5.13(a)]}$$

এই সমীকরণগুলি নিউটনের গতীয় সমীকরণ।

(b) ধ্রুবীয় নির্দেশতন্ত্র অনুযায়ী (plane polar co-ordinates)

এই তন্ত্র অনুযায়ী $x = r\cos\theta$

এবং $y = r\sin\theta$

$$\therefore \quad \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta$$

$$\dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta$$

$\therefore$ গতিশক্তি $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$

ল্যাগ্রাঞ্জের r-সমীকরণটি হল,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial £}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial £}{\partial r}\right) = 0$$

বা, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial r} = 0$

বা, $\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr\dot{\upsilon}^2 = -\frac{\partial V}{\partial r} = F_r$

বা, $m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F_r$ [5.13(b)]

θ সমীকরণটি হল,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial £}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial £}{\partial \theta} = 0$$

বা, $\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) + \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0$

বা, $\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = -\frac{\partial v}{\partial \theta} = rF_\theta$ .... [5.13(c)]

উদাহরণ-2. সূর্যের মহাকর্ষক্ষেত্রে গ্রহের আবর্তন।

যেহেতু স্থিতিশক্তি V কেবলমাত্র r নির্দেশাঙ্কের ওপর নির্ভর করে আমরা গোলীয় নির্দেশাঙ্ক ব্যবহার করব।

এই নির্দেশাঙ্কে x, y, z এর সাথে r, θ, φ-এর রূপান্তর সমীকরণগুলি হল

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta\cos\phi$$

$$z = r\sin\theta\sin\phi$$

$\therefore$ গতিশক্তি $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\dot{\varphi}^2)$

ল্যাগ্রাঞ্জের r-সমীকরণটি হল

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial £}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial £}{\partial r} = 0$$

বা, $\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr\dot{\theta}^2 - mr\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0$ ... [5.14(a)]

θ সমীকরণটি হল—

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) - mr^2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2 = 0 \quad ... \quad [5.14(b)]$$

এবং φ–সমীকরণ

$$\frac{d}{dt}(mr^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2) = 0 \quad ... \quad [5.14(c)]$$

[5.14(c)] সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়,

$r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}$ = ধ্রুবক = h (ধরা যাক) ... [5.14(d)]

এখন এই ধ্রুবকটি এমনভাবে নিতে পারি যে, $\dot{\theta}$-র মান যখন শূন্য তখন θ-র মান $\frac{\pi}{2}$। তাহলে [5.12(a)] সমীকরণ থেকে দেখা যায় সেক্ষেত্রে $\ddot{\theta}$ এবং θ-র সমস্ত উচ্চতর অবকলজ (সময়ের সাপেক্ষে) (all higher order derivatives of θ with respect to time) শূন্য হবে। অর্থাৎ θ চিরকালই $\frac{\pi}{2}$ থেকে যাবে। যেহেতু $\theta = \frac{\pi}{2}$ নিরক্ষীয় সমতল নির্দেশ করে। এই সিদ্ধান্তের তাৎপর্য হল এক্ষেত্রে গতিপথ সর্বদাই একটি সমতলে থাকবে। $\theta = \frac{\pi}{2}$ হওয়ায় [5, 14(d)] সমীকরণের চেহারা হবে—

$r^2\dot{\varphi} = h$ [5.14(e)]

$\dot{\theta} = 0$ এবং $\theta = \frac{\pi}{2}$ [5.14(a)] সমীকরণে বসালে পাওয়া যায়,

$$m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 + \frac{dv}{dr} = 0 \quad ... \quad [5.14(f)]$$

এই সমীকরণের তাৎপর্য বেশ সরল। $mr\dot{\phi}^2$ রাশিটি অপকেন্দ্র বল এবং $-\frac{dv}{dr}$ বিভব ক্ষেত্র জনিত বল।

5.6 হ্যামিল্টনীয়, চাক্রিক নির্দেশাঙ্ক ও সংরক্ষণ নীতি (Hamiltonian, Cyclic Co-ordinates and Conservation principles)

কোনও তন্ত্রের ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান যদি সাধারণীকৃত নির্দেশাঙ্ক q_k, সাধারণীকৃত বেগ $\dot{q}_k$ এবং সময় t-এর উপর নির্ভরশীল হয় তবে অবকল গণিতের উপপাদ্য অনুযায়ী লেখা যায়,

$$\frac{d\pounds}{dt} = \frac{\partial\pounds}{\partial t} + \frac{\partial\pounds}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial\pounds}{\partial\dot{q}_k}\ddot{q}_k$$

এখন ল্যাগ্রাঞ্জের সমীকরণ অনুযায়ী, $\frac{\partial £}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial £}{\partial \dot{q}_k}\right)$

$$\therefore \frac{d£}{dt} = \frac{\partial £}{\partial t} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial £}{\partial \dot{q}_k}\right)\dot{q}_k + \frac{\partial £}{\partial \dot{q}_k}\frac{d}{dt}(\dot{q}_k)$$

$$= \frac{\partial £}{\partial t} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial £}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k\right)$$

বা, $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial £}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - £\right) = -\frac{\partial £}{\partial t}$$

যদি তন্ত্রটির ল্যাগ্রাঞ্জিয়ানে সময়ের প্রত্যক্ষ নির্ভরতা না থাকে তবে,

$\frac{\partial £}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - £$ রাশিটি একটি সংরক্ষিত রাশি

সাধারণীকৃত ভরবেগ $p_k = \frac{\partial £}{\partial \dot{q}_k}$ ধরা হয় এবং $(p_k \dot{q}_k - £)$ এই সংরক্ষিত রাশিটিকে বলা হয় তন্ত্রের হ্যামিল্টনিয়ান।

$$\therefore \; H = p_k \dot{q}_k - £ \quad .... \quad [5.15]$$

এখানে আমরা সাধারণীকৃত ভরবেগের সংজ্ঞার একটা উৎস সন্ধান করব। ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান সমীকরণ থেকে দেখা যায়,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial £}{\partial \dot{q}_p}\right) = \frac{\partial £}{\partial q_p} = -\frac{\partial V}{\partial q_p}$$

[পরিমিত গতিশক্তির রাশিমালায় T, q_p-এর ওপর প্রত্যক্ষভাবে নির্ভরশীল নয়]

উপরের সমীকরণে ডানদিকের রাশিটি একটি সংরক্ষী বল। সুতরাং তন্ত্রে বল প্রযুক্ত না হলে $\frac{\partial £}{\partial \dot{q}_p}$ রাশিটি সংরক্ষিত হবে। নিউটনের সূত্রানুযায়ী বলের বিহনে ভরবেগ সংরক্ষিত হয়। তাই $\frac{\partial £}{\partial \dot{q}_p}$ রাশিটিকে আমরা ভরবেগ বলব। অবশ্য এই রাশিটি কেবলমাত্র রৈখিক ভরবেগ নয়, বিভিন্ন সাধারণীকৃত নির্দেশাঙ্কের জন্য $\frac{\partial £}{\partial \dot{q}_p}$ রাশিটি সাধারণীকৃত ভরবেগ নির্দেশ করবে। যেমন $\frac{\partial £}{\partial \dot{\theta}}$ রাশিটি কৌণিক ভরবেগ নির্দেশ করবে।

কখনও কখনও এমন ঘটে যে ল্যাগ্রাঞ্জিয়ানে কোনও একটি নির্দেশাঙ্ক q_k নিজে অনুপস্থিত, কিন্তু তার সময়ের সাপেক্ষে অবকলজ আছে। তখন সেই নির্দেশাঙ্ককে চাক্রিক বা উপেক্ষণীয় (cyclic or ignorable) বলা হয়।

ল্যাগ্রাঞ্জের সমীকরণ [5.12(a)] থেকে এরকম উপেক্ষণীয় নির্দেশাঙ্কের ক্ষেত্রে পাওয়া যায়,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial £}{\partial \dot{q}_k} = 0$$

$$\text{সুতরাং} \quad \frac{\partial £}{\partial \dot{q}_k} = p_k = \text{ধ্রুবক} \qquad [5.16]$$

তাই সাধারণভাবে বলা হয় যদি q_k একটি চাক্রিক নির্দেশাঙ্ক হয়, তবে সেই নির্দেশাঙ্কের চাক্রিক প্রকৃতি ল্যাগ্রাঞ্জিয়ানে একটি প্রতিসাম্য (symmetry) নির্দেশ করে এবং এই প্রতিসাম্যের জন্য তার প্রতিযঙ্গী (corresponding) সাধারণীকৃত ভরবেগ সংরক্ষিত হয়।

এই সিদ্ধান্তকে একটি উপপাদ্যের আকারে প্রথম প্রকাশ করেন মহিলা গাণিতবিদ এমি নোয়েদার (Emmy Noether) এবং এটি নোয়েদারের উপপাদ্য হিসাবে পরিচিত। উপপাদ্যের বিবৃতিটি এরকম ঃ

যদি ল্যাগ্রাঞ্জীয়ানে এমন কোনও চলরাশি (variable) η থাকে যে η'র অণু-পরিমাণ পরিবর্তনে ল্যাগ্রাঞ্জিয়ানের কোনও পরিবর্তন হয় তবে একটি সংরক্ষণ সূত্র থাকবে।

5.7 হ্যামিল্টনের সমীকরণ

(5.15) নং সমীকরণ থেকে হ্যামিল্টনীয়ান H-এর সংজ্ঞা আমরা পেয়েছি।

$$H = p_k \dot{q}_k - £ \qquad \dots [5.15]$$

সাধারণত $\dot{q}_k$-গুলিকে p_k, q_k-এর মাধ্যমে প্রকাশ করে H-কে কেবলমাত্র p_k, q_k এবং t-এর অপেক্ষক হিসেবে লেখা হয়। অর্থাৎ $H = H(p_k, q_k, t)$

$$\therefore \quad dH = \frac{\partial H}{\partial q_l} dq_l + \frac{\partial H}{\partial q_l} dp_l + \frac{\partial H}{\partial t} dt \qquad \dots [5.17]$$

আবার সমীকরণ (5.15) থেকে পাওয়া যায়,

$$\begin{aligned} dH &= p_k d\dot{q}_k + \dot{q}_k dp_k - d£ \\ &= p_k d\dot{q}_k + \dot{q}_k dp_k - \frac{\partial £}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k - \frac{\partial £}{\partial q_k} dq_k - \frac{\partial £}{\partial t} dt \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial £}{\partial \dot{q}_l} d\dot{q}_l + \dot{q}_l dp_l - \frac{\partial £}{\partial \dot{q}_l} d\dot{q}_l - \frac{\partial £}{\partial q_k} dq_k - \frac{\partial £}{\partial t} dt$$

$$= \dot{q}_l \, dp_l - \frac{\partial £}{\partial q_l} dq_l - \frac{\partial £}{\partial t} dt \quad .... \ (5.18)$$

সমীকরণ (5.17) এবং (5.18) তুলনা করে পাওয়া যায়,

$$\dot{q}_l = \frac{\partial H}{\partial p_l} \quad ... \ [5.19(a)]$$

$$-\frac{\partial £}{\partial q_l} = \frac{\partial H}{\partial q_l} \quad ... \ [5.19(b)]$$

$$-\frac{\partial £}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad .... \ [5.19(c)]$$

[5.19(b)] সমীকরণটিতে ল্যাগ্রাঞ্জের সমীকরণ ব্যবহার করে পাওয়া যায়,

$$\frac{\partial H}{\partial q_l} = -\frac{\partial £}{\partial q_l} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial £}{\partial \dot{q}_l} = -\frac{dp_l}{dt} = -\dot{p}_l \quad .... \ [5.19(d)]$$

[5.19(a)] এবং [5.19(d)] সমীকরণ দুটিকে হ্যামিল্টনের সমীকরণ বলে।

যদি p_l, q_l, t-এর অপেক্ষক হিসেবে H জানা থাকে তবে [5.19(a)] এবং [5.19(d)] সমীকরণ দুটি p_l, q_l গুলির সাথে তাদের সময়ের সাপেক্ষে অবকলজদের সম্পর্ক প্রকাশ করবে। আগে ল্যাগ্রাঞ্জের সমীকরণে আমাদের n সংখ্যক দ্বিতীয় ক্রমের অবকল সমীকরণের সাহায্যে গতিবিদ্যার সমস্যার সমাধান করতে হত এখন সেখানে 2n সংখ্যক প্রথম ক্রমের অবকল সমীকরণ এসেছে। একদিকে যেমন সমীকরণ সরলতর হয়েছে (ক্রম কমে যাবার ফলে) অন্যদিকে তেমনি সমীকরণের সংখ্যা বেড়ে যাবার ফলে জটিলতা আসতে পারে। [5.19(c)] নং সমীকরণ থেকে দেখা যাচ্ছে £ যদি প্রত্যক্ষভাবে সময় নির্ভর না হয় তবে H-ও প্রত্যক্ষভাবে সময় নির্ভর হবে না। আমরা আগেই দেখেছি $\frac{\partial £}{\partial t} = 0$ হলে হ্যামিল্টনীয়ান সংরক্ষিত হয়। কাজেই এখন আমরা বলতে পারি যদি $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ হয় তবে হ্যামিল্টনীয়ান সংরক্ষিত হবে।

$$\therefore \ \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{dH}{dt} = 0 \quad ... \ (5.20)$$

5.8 সারাংশ

এই এককটিতে আমরা অজাড্য নির্দেশতন্ত্রে (non-inertial frame) নিউটনের গতি সমীকরণের জটিল রূপের কথা উল্লেখ করে নির্দেশতন্ত্র নিরপেক্ষ একটি গাণিতিক সমীকরণের প্রয়োজনীয়তার কথা উল্লেখ

করেছি। (5.2) প্রতিবন্ধ গতির ক্ষেত্রে কী করে স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা নিরূপণ করতে হয় ব্যাখ্যা করেছি। তন্ত্রে n সংখ্যক বস্তু থাকলে এবং r সংখ্যক প্রতিবন্ধক সমীকরণ থাকলে স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা হয় $f = 3n - r$ অদৃশ্য দৃঢ় বস্তুর ক্ষেত্রে স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা এভাবে নিরূপণ করা যায় না। পরবর্তী পরিচ্ছেদে এই নিয়ে আমরা আলোচনা করব। (\$5.3)

প্রতিবন্ধক বল জানা না থাকলে নিউটনের গতি সমীকরণ থেকে আমরা কল্পিত সরণ ব্যবহার করে ডা' লামবার্টের নীতি নিরূপণ করেছি। সমীকরণটির রূপ হল

$$\sum_i [\vec{F}_{(i)} - m_{(i)} \frac{d^2 \vec{r}_{(i)}}{dt^2}] . \delta \vec{r}_{(i)} = 0$$

কিন্তু এক্ষেত্রে বিভিন্ন কণার গতি সমীকরণগুলি আলাদাভাবে পাওয়া যায় না। ডা' লামবার্টের নীতির কিছু সহজ ব্যবহারিক প্রয়োগও আমরা দেখিয়েছি। (\$5.4)

সাধারণীকৃত নির্দেশাঙ্কের প্রয়োজনীয়তার কথা উল্লেখ করে ডা' লামবার্টের নীতির সাহায্যে আমরা ল্যাগ্রাঞ্জের সমীকরণ নির্ণয় করেছি।

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial £}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial £}{\partial q_k} = 0$$

ল্যাগ্রাঞ্জের সমীকরণের সাহায্যে বিভিন্ন তন্ত্রের গতি সমীকরণ নির্ণয় করার পদ্ধতি নিয়ে আলোচনা করেছি। এই সমীকরণের তন্ত্র নিরপেক্ষতা নিয়ে আমরা আলোচনা করেছি। (\$5.5)

(\$5.6)-এ আমরা সংরক্ষণ নীতির একটি সাধারণ উপপাদ্য আলোচনা করেছি। সেই উপপাদ্যকে নোয়েদারের উপপাদ্য বলা হয়। উপপাদ্যের মূল কথা হল, যদি ল্যাগ্রাঞ্জিয়ানে একটি চাক্রিক নির্দেশাঙ্ক থাকে তবে তার প্রতিযঙ্গী সাধারণীকৃত ভরবেগ সংরক্ষিত হবে।

$H = p_k \dot{q}_k - £$-কে কেবলমাত্র p এবং q-এর অপেক্ষক ধরে আমরা হ্যামিল্টনের সমীকরণ নির্ণয় করেছি এবং দেখিয়েছি

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \text{ হলে } \frac{dH}{dt} = 0 \text{ হয়।}$$

5.9 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. একটি অনুভূমিক সরলরেখার সাপেক্ষে উল্লম্ব তলে দোলনশীল একটি যৌগিক দোলকের ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান নির্ণয় করে যৌগিক দোলকের গতি সমীকরণ নির্ণয় করুন।
2. m ভরের একটি কণাকে অনুভূমিক রেখার θ কোণে v বেগে নিক্ষিপ্ত করা হলে ল্যাগ্রাঞ্জিয়ানের সাহায্যে কণাটির গতি সমীকরণ নির্ণয় করুন।

3. বিভিন্ন নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে একটি মুক্ত কণার হ্যামিল্টনীয়ান নির্ণয় করুন।

4. একটি লাট্টুর ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান নিম্নরূপ

$$£ = \frac{1}{2}A(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta) + \frac{1}{2}B(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)^2 + c\cos\theta$$

চাক্রিক নির্দেশাঙ্কগুলির সাধারণীকৃত ভরবেগ নির্ণয় করুন এবং দেখান যে হ্যামিল্টনীয়ানের মান এক্ষেত্রে মোট যান্ত্রিক শক্তি।

5. যদি $\frac{d£}{dt} = 0$ হয় তবে দেখান £-এর বদলে f(£)-কে ল্যাগ্রাঞ্জীয়ান ধরে নিলেও ল্যাগ্রাঞ্জের সমীকরণের কোনও পরিবর্তন হবে না।

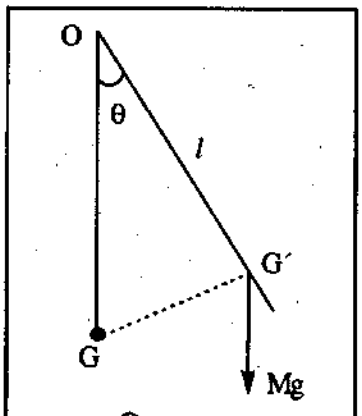
5.10 উত্তরমালা

1. ধরে নিই সাম্যাবস্থায় যৌগিক দোলকের ভারকেন্দ্র G বিন্দুতে এবং স্থানান্তরিত অবস্থায় G′ বিন্দুতে। G′ বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) হলে $x = l\sin\theta,\ y = l\cos\theta$,

$$\therefore\ T = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}Ml^2\dot{\theta}^2$$

$$V = -Mgl\cos\theta$$

$$\therefore\ £ = \frac{1}{2}Ml^2\dot{\theta}^2 + Mgl\cos\theta$$



চিত্র 5.6

ল্যাগ্রাঞ্জের θ সমীকরণটি দেয়

$$Ml^2\ddot{\theta} + Mgl\sin\theta = 0$$

বা, $$I\ddot{\theta} + Mgl\theta = 0\ (\theta \to 0)$$

$$\therefore\ \ddot{\theta} + \left(\frac{Mgl}{I}\right)\theta = 0$$

সুতরাং দোলনকাল $$= 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{M(k^2 + l^2)}{Mgl}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{k^2 + l^2}{gl}}$$

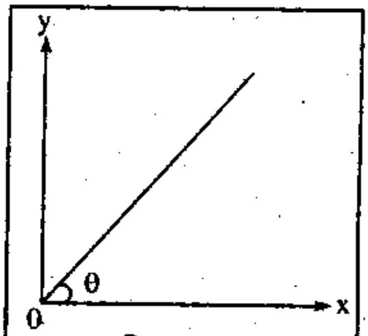
2. কণার গতিশক্তি

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

স্থিতিশক্তি $v = mg\,y.$

$\therefore$ ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান $\pounds = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$

$\therefore$ x-সমীকরণটি



চিত্র 5.7

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \pounds}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \pounds}{\partial x} = 0 \Rightarrow m\ddot{x} = 0 \Rightarrow x = at + b$$

y-সমীকরণটি

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \pounds}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \Rightarrow \ddot{y} = -g \Rightarrow y = -\frac{1}{2}gt^2 + ct + d$$

যদি আমরা ধরে নিই $t = 0$ হলে $x = y = 0$

$$\therefore \quad \dot{x} = \upsilon\cos\theta t, \quad \dot{y} = \upsilon\sin\theta t$$

$$\therefore \quad x = \upsilon\cos\theta t, \quad y = \frac{1}{2}gt^2 + \upsilon\sin\theta t$$

$$\therefore \quad y = \frac{1}{2}g\frac{x^2}{\upsilon^2\cos^2\theta} + x\tan\theta$$

অতএব কণাটি একটি অধিবৃত্তাকার (parabolic) পথে গতিশীল হবে।

3. যেহেতু মুক্ত কণার কথা বলা হয়েছে কণাটির স্থিতিশক্তি নেই। কার্টেসীয়ান, গোলীয় এবং বেলনাকার নির্দেশতন্ত্রে কণাটির ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান হল যথাক্রমে

$$\pounds_{cartesian} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$\pounds_{sph} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2)$$

$$\pounds_{cyl} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{z}^2)$$

$$H = p_k\dot{q}_k - \pounds$$ [k দুবার ব্যবহৃত হওয়া সমষ্টিকরণ বোঝাচ্ছে]

$$= \frac{\partial \pounds}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - \pounds$$

এই সমীকরণ থেকে

$$H_{cart} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$$

$$H_{sph} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2) = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\Theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2\sin^2\theta}\right)$$

$$H_{cyl} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p\theta^2}{r^2} + p_z^2\right)$$

4. এই ধরনের ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান থেকে চাক্রিক নির্দেশাঙ্কগুলির প্রতিষঙ্গী সাধারণীকৃত ভরবেগ আমরা পরবর্তী এককে নিরূপণ করব।

5. ধরি $\overline{\pounds} = f(\pounds)$

$$\therefore \quad \frac{\partial\overline{\pounds}}{\partial\dot{q}_k} = \frac{\partial f(\pounds)}{\partial\dot{q}_k} = f'(\pounds)\frac{\partial\pounds}{\partial\dot{q}_k}$$

এখন $\frac{d}{dt}f'(\pounds) = f''(\pounds)\frac{d\pounds}{dt} = 0$

অতএব $\frac{d}{dt}\frac{\partial\overline{\pounds}}{\partial\dot{q}_k} = f'(\pounds)\frac{d}{dt}\frac{\partial\pounds}{\partial q_k}$

এবং $\frac{\partial\overline{\pounds}}{\partial q_k} = \frac{\delta f(\pounds)}{\delta q_k} = f'(\pounds)\frac{\partial\pounds}{\partial q_k}$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial\overline{\pounds}}{\partial\dot{q}_k} - \frac{\partial\overline{\pounds}}{\partial q_k} = f'(\pounds)\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial\pounds}{\partial\dot{q}_k} - \frac{\partial\pounds}{\partial q_k}\right]$$

$$= 0$$

অতএব যদি $\frac{d\pounds}{dt} = 0$ হয় তবে £-এর পরিবর্তে f(£)-কেও ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান হিসেবে লেখা যায়।

পরিশিষ্ট

ত্রিমাত্রিক দেশে একটি ভেক্টর $\vec{A}$-কে আমরা লিখি

$$\vec{A} = A_1\hat{i} + A_2\hat{j} + A_3\hat{k}$$

এবং $\vec{A}$ ও $\vec{B}$-এর মধ্যে স্কেলার গুণফলকে লেখা হয়,

$$\vec{A}.\ \vec{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$$

$$= \sum_{j=1}^{3} A_jB_j = A_jB_j \qquad \text{.... (A.1)}$$

আইনস্টাইনের সমষ্টিগত প্রকরণ অনুযায়ী একটি ভেক্টর সূচকের দুবার ব্যবহার হলে সেক্ষেত্রে সমষ্টি বোঝাবে। এখানে j-কে বলা হয় মূক সূচক (dummy index), এই সূচকটি ইচ্ছেমতো ব্যবহার করা যেতে পারে, যেমন (A-1) সমীকরণে j-এর জায়গায় মূল সূচক হিসাবে l, m বা যা খুশি ব্যবহার করা যায়। যেমন $\vec{A}.\vec{B} = A_lB_l = A_mB_m$, মূক সূচকটি কখনই দুবারের বেশি ব্যবহার করা যাবে না, যেমন—

$$(\vec{A}.\vec{B})^2 \neq A_lB_lA_lB_l$$

লিখতে হবে,

$$(\vec{A}.\vec{B})^2 = A_lB_lA_mB_m$$

যে কোনো সূচকের ক্ষেত্রেই পুনরাবৃত্তি থাকলেই যে সমষ্টি বোঝাবে তা নয়। কেবলমাত্র ভেক্টর সূচকের ক্ষেত্রেই এই সমষ্টিকরণ বিধি প্রযোজ্য হয়। প্রথম প্রথম শিক্ষার্থীরা হয়ত এই প্রকরণটিতে একটু অসুবিধা বোধ করতে পারেন কিন্তু একটু অভ্যাস করলেই বিষয়টি সহজ হয়ে যাবে। এই এককটিতে আমরা ভেক্টর সূচক বোঝাতে রোমান অক্ষর i, j, k, l–ইত্যাদি ব্যবহার করেছি। কিন্তু এর পরবর্তী এককে আমরা ভেক্টর সূচক হিসাবে গ্রিক অক্ষর α, β ... ইত্যাদি ব্যবহার করব। এর ফলে আমাদের ধারণা সমষ্টিগত প্রকরণ বুঝতে নতুন শিক্ষার্থীদের সুবিধে হবে। দুটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফলের i-তম উপাংশকে আমরা লিখব $(\vec{A} \times \vec{B})_i = \epsilon_{ijk}\ A_jB_k$.

... (A.2)

এখানে j এবং k দুবার ব্যবহৃত হওয়ায় সমষ্টিকরণ বোঝাচ্ছে। ϵ_{ijk}-কে বল হয় একটি পূর্ণ বিপ্রতিসম সংকেত (completely anti-symmetric symbol)। এই সংকেতটির মান নিম্নরূপ ধরা হয়, $\epsilon_{ijk} = 0$ যদি i, j এবং k-এর মধ্যে যে কোনো দুটি সূচক সমান হয়

$= \pm 1$ যদি i, j, k তিনটি সূচকই ভিন্ন মানের হয় এবং ijk যদি 123 হতে চাক্রিক পরিবর্তনে পাওয়া যায় তবে + চিহ্ন হবে নতুবা – চিহ্ন হবে।

$$\therefore \quad \epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = +1$$

$$\epsilon_{132} = \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = -1$$

অন্য সব $\epsilon_{ijk} = 0$

এখন (A-2) সমীকরণ থেকে দেখা যায়,

$$(\vec{A}\times\vec{B})_1 = \in_{ijk} A_j B_k = \in_{12k} A_2 B_k + \in_{13k} A_3 B_k$$
$$= \in_{123} A_2 B_3 + \in_{132} A_3 B_2$$
$$= A_2 B_3 - A_3 B_2$$

একইভাবে আমরা লিখতে পারি,

$$(\vec{A}\times\vec{B})_2 = \in_{1jk} A_j B_k = \in_{12k} A_1 B_k + \in_{13k} A_3 B_k$$
$$= \in_{123} A_1 B_3 + \in_{132} A_3 B_2 = A_2 B_3 - A_3 B_2$$

একইভাবে আমরা লিখতে পারি,

$$(\vec{A}\times\vec{B})_2 = \in_{2jk} A_j B_k = \in_{21k} K A_j B_k + \in_{23k} A_3 B_k$$
$$= \in_{213} A_1 B_3 + \in_{231} A_3 B_1 = A_3 B_1 - A_1 B_3$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})_3 = A_1 B_2 - A_2 B_1$$

$$\therefore\ \vec{A}\times\vec{B} = (A_2B_3 - A_3B_2)\,\hat{i} + (A_3B_1 - A_1B_3)\,\hat{j} + (A_1B_2 - A_2B_1)\,\hat{k}$$

$\vec{A}, \vec{B}$-এর ভেক্টর গুণফলের পরিচিত রূপ আমরা দেখতে পাচ্ছি।

এইবার আমরা দেখাব,

$$\in_{ijk}\in_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl} \qquad \ldots \quad (A\text{-}3)$$

আমরা জানি,

$$|\vec{A}\times\vec{B}|^2 = A^2B^2 - A^2B^2\cos^2\theta$$

বা, $(\vec{A}\times\vec{B})_i(\vec{A}\times\vec{B})_i = A_kA_kB_jB_j - (\vec{A}.\vec{B})^2$

$$= A_kA_kB_jB_j - A_jB_jA_kB_k$$

বা, $\in_{ijk} A_j B_k \in_{ilm} A_l B_m = A_j A_j B_m B_m - A_j B_j A_l B_l$ (মূল সূচকগুলি পরিবর্তন করা যায়)

বা, $\in_{ijk}\in_{ilm} A_j A_l B_k B_m = \delta_{jl} A_j A_l \delta_{km} B_k B_m - \delta_{jm} A_j B_m \delta_{kl} A_l B_k$

$$= (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}) A_j A_l B_k B_m$$

বা, $[\in_{ijk}\in_{ilm} - (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl})] A_j A_l B_k B_m = 0$

যেহেতু $\vec{A}, \vec{B}$ যে কোনও দুটি ভেক্টর, তাদের উপাংশগুলিও যা খুশি হতে পারে, অতএব, আমরা পাই—

$$\in_{ijk}\in_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$$

এই সম্পর্কটি আমরা দৃঢ়বস্তুর গতিবিজ্ঞানে আলোচনার সময় ব্যবহার করব।

একক 6 ❑ জ তা ামক জ তা ণক ও লা ুর গতি

গঠন

6.1 প্রস্তাবনা ও উদ্দেশ্য

6.2 দৃঢ় বস্তুর স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা

6.3 দৃঢ় বস্তুর গতি সংক্রান্ত তথ্যাবলি

6.4 দৃঢ় বস্তুর গতিশক্তি ও জড়তা ভ্রামক

6.5 জড়তা ভ্রামক টেনসরের ধর্মাবলি

6.6 কয়েকটি প্রতিসম বস্তুর জাড্য ভ্রামক

6.7 অয়লারীয় কোণ, কৌণিক বেগ ও অয়লারের সমীকরণ

6.8 দৃঢ় বস্তুর মুক্ত আবর্তনের ফলে উদ্ভূত ধ্রুবক সমূহ

6.9 অয়লারের সমীকরণের ব্যবহারিক প্রয়োগ

6.10 প্রতিসম লাটিমের আবর্তনে ল্যাগ্রাঞ্জের সমীকরণের প্রয়োগ

6.11 সারাংশ

6.12 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

6.13 উত্তরমালা

6.1 প্রস্তাবনা ও উদ্দেশ্য

ল্যাগ্রাঞ্জীয় গতিবিদ্যার ব্যবহারিক প্রয়োগের একটি চমৎকার দৃষ্টান্ত হল দৃঢ় বস্তু। বস্তুতপক্ষে এর ব্যাপ্তি এত বেশি যে শুধুমাত্র এই বিষয়ের ওপর ভিত্তি করেই একটি গোটা বই লেখা হয়েছে। এখানে অবশ্য আমরা দৃঢ় বস্তুর গতি সংক্রান্ত কিছু মৌলিক আলোচনা করব এবং কয়েকটি সহজ উদাহরণ দেখাব।

সংজ্ঞানুসারে যে কণাগোষ্ঠীতে কণাগুলির পারস্পরিক দূরত্ব সর্বদা স্থির থাকে তাকে দৃঢ় বস্তু বলে। এখানে প্রথমেই বলে নেওয়া ভালো যে যথার্থ দৃঢ় বস্তুর বাস্তব কোনও ভিত্তি নেই, এটি একটি গাণিতিক কল্পনা মাত্র কারণ বল প্রয়োগে যে কোনও বস্তুর আকার বা আয়তনের পরিবর্তন হয়।

পূর্ববর্তী পরিচ্ছেদের মতো এই পরিচ্ছেদেও আমরা আইনস্টাইনের সমষ্টি প্রকরণ প্রযুক্ত হচ্ছে বলে ধরে নেব। কোনও ভেক্টর সূচক দুবার ব্যবহৃত হলে সমষ্টি বোঝাবে। যদি কোনও স্থলে ভেক্টর সূচক দুবার ব্যবহৃত হলেও সমষ্টি না বোঝায় সেই স্থলে আমরা সেটি বলে দেব। এই পরিচ্ছেদে আমরা সাধারণভাবে গ্রিক অক্ষরগুলিকে ভেক্টর সূচক এবং রোমান অক্ষরকে বস্তুকণার সূচক হিসেবে নির্দেশ করব। সূচকের

এই ধরনের পছন্দ পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদের ঠিক বিপরীত। আমাদের উদ্দেশ্য হল, ভেক্টর সূচকের ওপর পাঠকের ধারণা স্পষ্ট করা।

উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করলে আপনি

[i] বিভিন্ন প্রতিসম বস্তুর জাড্য ভ্রামক নির্ণয় করতে পারবেন।

[ii] যদি আপনি প্রতিসম $I_{\alpha\beta}$ টেনসরের 6টি পরস্পর নিরপেক্ষ উপাংশ জানেন তবে অন্য যে কোনো অক্ষের সাপেক্ষে বস্তুর জড়তা ভ্রামকের মান নির্ণয় করতে পারবেন।

[iii] কোনও সমীকরণের বিশ্লেষণী সমাধান না করতে পারলেও কোনও তন্ত্রের গতি সম্বন্ধে ধারণা কী করে করতে হয় তা আপনি জানতে পারবেন।

6.2 দৃঢ় বস্তুর স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা

দৃঢ় বস্তুর দৃঢ় হবার মূল শর্ত হল (এটি প্রতিবন্ধকতা শর্ত হিসাবেও মনে করা যেতে পারে)।

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = \text{ধ্রুবক} \quad \dots \quad (6.1)$$

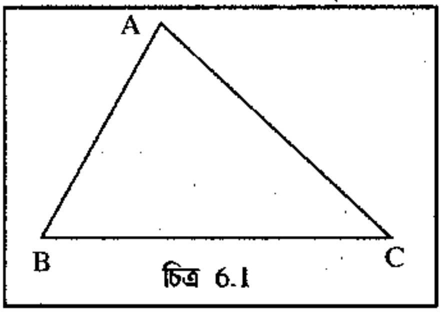
যদি দৃঢ় বস্তুতে N সংখ্যক বস্তুকণা থাকে তবে (6.1) সমীকরণের সংখ্যা হবে $^{N}C_2 = \frac{N(N-1)}{2}$

পূর্ববর্তী অধ্যায়ে আমরা যেভাবে কোনও তন্ত্রের স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা নির্ণয় করেছি সেইভাবে দৃঢ় বস্তুর স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা হবে $3N - \frac{N(N-1)}{2}$

কিন্তু এইভাবে যদি স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা নির্ণয় করা হয় তবে দেখা যাচ্ছে $N > 7$ হলেই স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা ঋণাত্মক হয়ে যাচ্ছে। সুতরাং স্পষ্টতই প্রতিবন্ধকগুলি নিরপেক্ষ নয়। এইজন্য আমরা একটু অন্যভাবে দৃঢ় বস্তুর স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা নির্ণয় করব। দৃঢ় বস্তুর কোনও বিন্দুকে নির্দিষ্ট করতে হলে সেই বিন্দু থেকে অন্য সমস্ত বিন্দুর দূরত্ব উল্লেখ করার দরকার হয় না। যে কোনও তিনটি অসমরেখ বিন্দুদের (non-collinear points) নির্দিষ্ট করলেই হয়। কারণ একটি বিন্দুকে নির্দিষ্ট করতে তিনটি প্রতিবন্ধক সমীকরণ প্রয়োজন, আর তিনটি প্রতিবন্ধক সমীকরণ পেতে গেলে তিনটি নির্দিষ্ট বিন্দুর প্রয়োজন হয়। অতএব যদি দৃঢ় বস্তুর মধ্যে যে কোনও তিনটি অসমরেখ বিন্দু নির্দিষ্ট করে দেওয়া হয় তবে স্বভাবতই দৃঢ় বস্তুর সমস্ত বিন্দুই নির্দিষ্ট হয়ে যাবে।

অতএব তিনটি বিন্দু A, B, C নির্দিষ্ট করতে সর্বোচ্চ $3 \times 3 = 9$টি নির্দেশাঙ্ক লাগতে পারে। কিন্তু এই

তিনটি বিন্দুরও নিজেদের মধ্যে 3টি প্রতিবন্ধক সমীকরণ আছে। $r_{AB} = C_1, r_{BC} = C_2, r_{CA} = C_3$. অতএব দৃঢ় বস্তুর স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা হবে $9 - 3 = 6$।



চিত্র 6.1

অতএব দৃঢ় বস্তুর অবস্থান ওরিয়্যান প্রকাশ করবার জন্য মোট 6টি নির্দেশাঙ্কের প্রয়োজন। তিনটি নির্দেশাঙ্কে দৃঢ় বস্তুটির যে কোনো বিন্দুর (সাধারণত ভরকেন্দ্রের) অবস্থান নির্দিষ্ট হয় এবং অন্য তিনটি নির্দেশাঙ্ক দ্বারা ঐ বিন্দু সাপেক্ষে দৃঢ় বস্তুটির কৌণিক বিন্যাস (orientation) নির্দিষ্ট হয়। এই প্রসঙ্গে উল্লেখ করা যেতে পারে, যে দৃঢ় বস্তুর গতির সম্পূর্ণ বিবরণ, পূর্বে উল্লিখিত 6টি নির্দেশাঙ্ক ছাড়া জড়তা ভ্রামক টেনসরের (এ প্রসঙ্গে পরে আলোচনা করা হবে)। নিরপেক্ষ 6টি উপাংশের সাহায্যে দেওয়া সম্ভব।

6.3 দৃঢ় বস্তুর গতি সংক্রান্ত তথ্যাবলি

দৃঢ়তা ধর্ম বজায় রেখে দৃঢ় বস্তুর গতি তিন ধরনের হতে পারে। (i) চলন, (ii) ঘূর্ণন এবং (iii) চলন ও ঘূর্ণনের সমন্বয়।

দৃঢ় বস্তুর যে কোনও কণার স্থান ভেক্টর $\vec{r_i}$ যদি এমনভাবে পরিবর্তিত হয় যে $\vec{r_i}' = \vec{r_i} + \vec{a}$ হয় তবে (6.1) নং সমীকরণ থেকে দেখা যায়,

$$|\vec{r_i}' - \vec{r_j}'| = |\vec{r_i} - \vec{r_j}|$$

হয়। অর্থাৎ প্রত্যেক কণার সমান সরণ ঘটলে দৃঢ় বস্তুর দৃঢ়তা ধর্ম বজায় থাকে। প্রত্যেক বস্তু কণার সমান সরণকেই চলন বলা হয়।

এইবার আমরা একটি একঘাত (linear) রূপান্তরের ক্ষেত্রে দৃঢ়তা শর্তটি কী দাঁড়ায় সেটা দেখব। আমরা রূপান্তরটিকে লিখব,

$$(x_i)'_\alpha = a_{\alpha\beta}(x_i)_\beta \quad [\beta \text{ সূচকের ওপর সমষ্টিকরণ হচ্ছে}]$$

$(x_i)_\alpha$ হল, i-তম কণার স্থান ভেক্টর $\vec{r_i}$-এর α-তম উপাংশ। এখন দৃঢ়তা শর্তটিকে লেখা যায়,

$$\vec{r_i} - \vec{r_j} = \vec{C}_{ij} \qquad \therefore \quad (\vec{r_i} - \vec{r_j}).(\vec{r_i} - \vec{r_j}) = \vec{C}_{ij}.\vec{C}_{ij}$$

$$\therefore \quad (\vec{r_i} - \vec{r_j}).(\vec{r_i} - \vec{r_j}) = (\vec{C}_{ij})_\alpha.(\vec{C}_{ij})_\alpha$$

$$= [(\vec{x_i})_\alpha - (\vec{x_j})_\alpha][(\vec{x_i})_\alpha - (\vec{x_j})_\alpha]$$

এখন রূপান্তরিত দৃঢ়তা শর্তটি হল,

$$(\vec{r}_i' - \vec{r}_j').(\vec{r}_i' - \vec{r}_j') = [(x_i)_\alpha' - (x_j)_\alpha'][(x_i)_\alpha' - (x_j)_\alpha']$$

$$= [a_{\alpha\beta}\{(x_i)_\beta - (x_j)_\beta\}][a_{\alpha\gamma}\{(x_i)_\gamma - (x_j)_\gamma\}]$$

$$= [a_{\alpha\beta}\, a_{\alpha\gamma}\{(x_i)_\beta - (x_j)_\beta\}\{(x_i)_\gamma - (x_j)_\gamma\}]$$

এখন যদি আমরা ধরে নিই যে রূপান্তরটি একটি সমকোণী রূপান্তর (orthogonal transformation) হয়, তবে

$$a_{\alpha\beta}\, a_{\alpha\gamma} = \delta_{\beta\gamma}$$

অতএব রূপান্তরিত দৃঢ়তা শর্তটি হল,

$$|\vec{r}_i' - \vec{r}_j'|^2 = [\delta_{\beta\gamma}\{(x_i)_\beta - (x_j)_\beta\}\{(x_i)_\gamma - (x_j)_\gamma\}]$$

$$= \{(x_i)_\gamma - (x_j)_\gamma\}\{(x_i)_\gamma - (x_j)_\gamma\}$$

$$= (\vec{r}_i - \vec{r}_j).(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

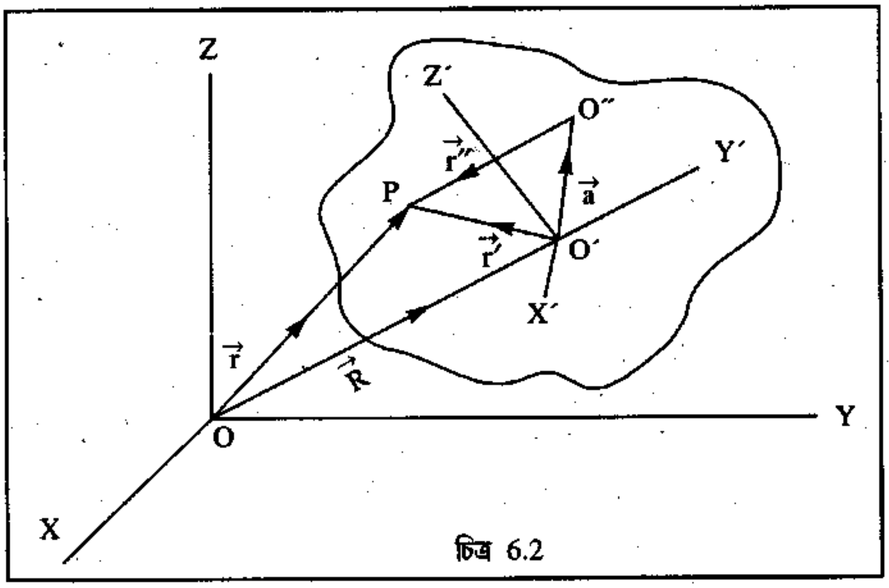
সুতরাং সমকোণী রূপান্তরের জন্য দৃঢ় বস্তুর দৃঢ়তা ধর্ম বজায় থাকে। এখন ত্রিমাত্রিক ইউক্লিডীয় জ্যামিতিক ক্ষেত্রে (3×3) সমকোণী রূপান্তরিত ম্যাট্রিক্সকে (orthogonal tranformation matrix) একটি ঘূর্ণন দ্বারা চিহ্নিত করা যায়। সুতরাং ঘূর্ণনও দৃঢ় বস্তুর একটি সম্ভাব্য গতি হতে পারে। প্রসঙ্গত উল্লেখ্য $\vec{r}_i \rightarrow (-\vec{r}_i)$ রূপান্তরিত (প্রতিফলন) দৃঢ় বস্তুর দৃঢ়তা ধর্ম মেনে চলবে। কিন্তু এটি সম্ভাব্য রূপান্তর হবে না। কারণ কোন এক তন্ত্র থেকে অবিচ্ছিন্নভাবে (continuously) (ঘূর্ণন অথবা অন্য কোনভাবে) $\vec{r}_i \rightarrow (-\vec{r}_i)$ রূপান্তর সম্ভব নয়।

যেহেতু চলন অথবা ঘূর্ণন আলাদাভাবে দৃঢ় বস্তুর সম্ভাব্য গতি চিহ্নিত করে, সুতরাং এই দুটির সম্মিলিত রূপও (combination) দৃঢ় বস্তুর সম্ভাব্য গতি হতে পারে। এটি অয়লারের উপপাদ্য নামে পরিচিত। সুতরাং আমরা দৃঢ়বস্তুর i-তম কণার সাধারণ বেগের রাশিমালা (expression)-কে লিখতে পারি

$$\vec{v}_i = \vec{u} + \vec{w} \times \vec{r}_i \qquad \dots (6.2)$$

এই রাশিমালাতে আপনি লক্ষ করুন যে চলনের বেগটি কণা নিরপেক্ষ এবং ঘূর্ণন গতির ক্ষেত্রে কৌণিক বেগটিও (angular velocity) কণার ওপর নির্ভরশীল নয়। অর্থাৎ দৃঢ় বস্তুর প্রত্যেক কণার ক্ষেত্রেই কৌণিক বেগের মান ও দিক সমান। এই তথ্যটি প্রমাণ করতে হলে আমাদের দু ধরনের নির্দেশতন্ত্রের দরকার হবে। একটি স্থির তন্ত্র XYZ (যে তন্ত্রকে আমরা জাড্য তন্ত্র হিসেবে ধরব) এবং

অন্য একটি গতীয় তন্ত্র X´Y´Z´ (যেটিকে দৃঢ় বস্তুর সঙ্গে গতিশীল বলে ধরা হবে) [চিত্র (6.2)]। সুবিধের জন্য গতীয়তন্ত্রের মূলবিন্দুটি দৃঢ় বস্তুর ভরকেন্দ্রে অবস্থিত বলে ধরা যেতে পারে।



চিত্র 6.2

মনে করা যাক O´ দৃঢ় বস্তুর ভরকেন্দ্র। চিত্রে নির্দেশতন্ত্র (X, Y, Z)-এর সাপেক্ষে দৃঢ়বস্তুর মধ্যে অবস্থিত যে কোনও বস্তুকণা P-এর স্থান ভেক্টর $\vec{r}$ । গতীয় নির্দেশতন্ত্র (X´, Y´, Z´) এর সাপেক্ষে (যার মূলবিন্দু হল O´) P বিন্দুর স্থান ভেক্টর হল $\vec{r}'$ । অতএব অয়লারের উপপাদ্য অনুযায়ী P বিন্দুর অণু পরিমাণ (infinitesimeal) সরণ হলে ভরকেন্দ্রের অণু পরিমাণ সরণ হবে এবং ভরকেন্দ্রের সাপেক্ষে একটি অণু পরিমাণ ঘূর্ণন হবে।

অর্থাৎ $$d\vec{r} = d\vec{R} + d\vec{\phi} \times \vec{r}' \qquad \text{... (6.3)}$$

সুতরাং P বস্তুকণার গতিকে লেখা যাবে, $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d\vec{R}}{dt} + \dfrac{d\vec{\phi}}{dt} \times \vec{r}'$

$$\text{বা,} \quad \vec{\upsilon} = \vec{u} + \vec{w} \times \vec{r}' \qquad (6.3a)$$

এবার ধরা যাক, (X´, Y´, Z´) গতীয় তন্ত্রটির মূলবিন্দু O´ বিন্দুতে না হয়ে অন্য একটি O´´ বিন্দুতে আছে। ধরা যাক $\vec{O'O''} = \vec{a}$ এবং O´´ বিন্দুটির রৈখিক বেগ $\vec{u}'$ এবং O´´ বিন্দুর সাপেক্ষে P বিন্দুর নতুন কৌণিক গতিবেগ $\vec{w}'$ । সুতরাং এখন (6.3a) সমীকরণ দাঁড়ায়

$$\vec{\upsilon} = \vec{u}' + \vec{w}' \times \vec{r}'' \qquad \text{.... (6.36)}$$

যেখানে $\vec{r}''$ হল O´´ বিন্দুর সাপেক্ষে P বিন্দুর স্থান ভেক্টর।

কিন্তু (6.2) চিত্র অনুযায়ী $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{a}$ ... (6.3c)

এখন, (6.3a) সমীকরণে $\vec{r}'$-এর এই মান বসিয়ে পাওয়া যায়,

$$\vec{\upsilon} = \vec{u} + \vec{w} \times \vec{a} + \vec{w} \times \vec{r}' \quad (6.3d)$$

(6.3b) ও (6.3d) দুটি সমীকরণ তুলনা করলে পাওয়া যায়

$$\vec{u}' = \vec{u} + \vec{w} \times \vec{a} \quad \text{এবং}$$

$$\vec{w} = \vec{w}' \quad \ldots (6.4)$$

(6.4) সমীকরণ থেকে বোঝা যায় যে দৃঢ় বস্তুর কৌণিক বেগ নির্দেশতন্ত্র নিরপেক্ষ। দৃঢ় বস্তুর সঙ্গে গতিশীল যে কোনও নির্দেশতন্ত্র সর্বদা একই কৌণিক বেগ নিয়ে ঘোরে। অর্থাৎ আমরা পেলাম কোনও অক্ষের সাপেক্ষে ঘূর্ণনের সময় দৃঢ় বস্তুর ওপর অবস্থিত প্রত্যেক বিন্দুর বেগ সমান।

এখন ভেক্টরের ত্রিধা গুণন থেকে (triple product) পাওয়া যায়,

$$\frac{\vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{w})}{w^2} = \vec{u} - \frac{\vec{w}(\vec{u} \cdot \vec{w})}{w^2}$$

অতএব, (6.2) সমীকরণকে লেখা যায়,

$$\vec{\upsilon}_i = \vec{u} + \vec{w} \times \vec{r}_i = \frac{\vec{w} \times (\vec{u} \cdot \vec{w})}{w^2} + \vec{w} \times \frac{\vec{u} \times \vec{w}}{w^2} + \vec{w} \times \vec{r}_i$$

$$= \frac{\vec{w}(\vec{u} \cdot \vec{w})}{w^2} + \vec{w} \times \left(\vec{r}_i + \frac{\vec{u} \times \vec{w}}{w^2} \right) \quad \ldots (6.5)$$

অর্থাৎ দৃঢ় বস্তুর প্রত্যেক বিন্দুর সাধারণ বেগকে একটি পরিবর্তিত অক্ষের সাপেক্ষে ঘূর্ণন এবং সেই অক্ষের দিকে চলন হিসাবে প্রকাশ করা যায়। একে তাই স্ক্রু গতিও (screw motion) বলা হয়। এই ঘটনাকে চেস্‌লের উপপাদ্য বলে (Chasles' theorem)।

6.4 দৃঢ় বস্তুর গতিশক্তি এবং জড়তা ভ্রামক

(6.2) সমীকরণের সাহায্যে দৃঢ় বস্তুর গতিশক্তির রাশিমালাটি হল,

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i(\upsilon_i)^2 = \frac{1}{2}\sum m_i(\vec{u} + \vec{w} \times \vec{r}_i)^2 = \frac{1}{2}\sum m_i\{u^2 + 2\vec{u} \cdot (\vec{w} \times \vec{r}_i) + (\vec{w} \times \vec{r}_i)^2\}$$

$$= \frac{1}{2}\sum m_i u^2 + \sum m_i \vec{u}(\vec{w}\times\vec{r}_i) + \frac{1}{2}\sum m_i(\vec{w}\times\vec{r}_i)^2$$

$$= \frac{1}{2}u^2\sum m_i + \sum m_i \vec{r}_i.(\vec{u}\times\vec{w}) = \frac{1}{2}\sum m_i(\vec{w}\times\vec{r}_i)^2$$

$$= \frac{1}{2}M\upsilon^2(\vec{u}\times\vec{w}).\sum m_i \vec{r}_i + \frac{1}{2}\sum m_i(\vec{w}\times\vec{r}_i)^2 \qquad \text{... (6.6a)}$$

এই সমীকরণের প্রথম পদটি চলনের জন্য গতিশক্তি এবং শেষ পদটি ঘূর্ণনের জন্য গতিশক্তি এবং মাঝের পদটিকে চলন এবং ঘূর্ণনের জন্য সংমিশ্রিত গতিশক্তি বলে ধরা যেতে পারে। মূলবিন্দুকে যদি দৃঢ় বস্তুর ভরকেন্দ্রে ধরা হয় তবে ভরকেন্দ্রের সংজ্ঞানুসারে মধ্যপদটিকে বিলুপ্ত করা যায় এবং আমরা গতিশক্তির রাশিমালাতে কেবলমাত্র চলনের জন্য এবং ঘূর্ণনের জন্য আলাদাভাবে দুটি পদ পাব।

$$T = \frac{1}{2}M\upsilon^2 + \frac{1}{2}\sum m_i(\vec{w}\times\vec{r}_i)^2 \qquad (6.6b)$$

এখন আমরা এই সমীকরণের দ্বিতীয় পদটিকে আর একটু ভালোভাবে বিশ্লেষণ করতে চাই।

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\sum m_i(\vec{w}\times\vec{r}_i)^2 = \frac{1}{2}\sum m_i(\vec{w}\times\vec{r}_i)_\alpha(\vec{w}\times\vec{r}_i)_\alpha$$

$$= \frac{1}{2}\sum m_i\, \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\, w_\beta (x_i)_\gamma\, \epsilon_{\alpha\rho\sigma}\, w_\rho (x_i)_\sigma$$ [$\alpha, \beta, \gamma, \rho, \sigma$ সব কটি সূচক দুবার ব্যবহৃত হওয়ায় প্রত্যেক সূচকের ওপর সমষ্টিকরণ প্রকরণ বোঝাচ্ছে]

$$= \frac{1}{2}\sum m_i\, \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\,\epsilon_{\alpha\rho\sigma}\,(x_i)_\gamma (x_i)_\sigma w_\beta w_\rho$$

$$= \frac{1}{2}\sum m_i(\delta_{\beta\rho}\delta_{\gamma\sigma} - \delta_{\beta\sigma}\delta_{\gamma\rho})(x_i)_r(x_i)_\sigma w_\beta w_\rho$$

[পঞ্চম এককের পরিশিষ্ট দ্রষ্টব্য]

$$= \frac{1}{2}\sum m_i(\delta_{\beta\rho}\delta_{\gamma\sigma}(x_i)_\gamma(x_i)_\sigma - \delta_{\beta\sigma}(x_i)_\sigma\delta_{\gamma\rho}(x_i)_\gamma\}w_\beta w_\rho$$

$$= \frac{1}{2}\sum m_i\{(\delta_{\beta\rho}(x_i)_\gamma(x_i)_\gamma - (x_i)_\beta(x_i)_\rho\}w_\beta w_\rho$$

$$= \frac{1}{2}\sum m_i\{r_i^2.\delta_{\beta\rho} - (x_i)_\beta(x_i)_\rho\}w_\beta w_\rho$$

$$= \frac{1}{2} w_\beta w_\rho \sum m_i \{r_i^2 \delta_{\beta\rho} - (x_i)_\beta (x_i)_\rho\}$$

$$= \frac{1}{2} I_{\beta\rho} w_\beta w_\rho \qquad (6.7)$$

যেখানে $I_{\beta\rho} = \sum m_i \{r_i^2 \delta_{\beta\rho} - (x_i)_\beta (x_i)_\rho\}$ (6.8)

$I_{\beta\rho}$-কে বলা হয় জড়তা ভ্রামক টেনসর। এটি একটি দ্বিক্রম প্রতিসম টেনসর (symmetric tensor of rank two)। ত্রিমাত্রিক দেশে এর নিরপেক্ষ উপাংশ হল 6। আগেই বলা হয়েছে এই নিরপেক্ষ উপাংশ ছয়টির সাহায্যে দৃঢ় বস্তুর গতির সম্পূর্ণ বিবরণ দেওয়া সম্ভব। যে কোনও প্রতিসম টেনসরকে কর্ণীয় টেনসর (diagonal tensor) পরিণত করা যায়। (পরিশিষ্ট ২)। যে নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে এই $I_{\beta\rho}$ প্রতিসম টেনসরকে কর্ণীকরণ (diagonalisation) করা হয়, সেই নির্দেশতন্ত্রের অক্ষগুলিকে প্রধান অক্ষ (principal axes) বলা হয়। প্রধান অক্ষগুলির সাপেক্ষে জড়তা ভ্রামকের মানগুলিকে প্রধান জড়তা ভ্রামক বলা হয়।

দৃঢ় বস্তুর পদার্থ অবিচ্ছিন্ন হলে যোগফলের বদলে সমাকলন নিতে হবে অর্থাৎ $I_{\beta\rho}$ জাড্য ভ্রামক টেনসরটি হবে,

$$I_{\beta\rho} = \int \rho (r^2 \delta_{\beta\rho} - x_\beta x_\rho) dv$$ (যেখানে ρ হল দৃঢ় বস্তুর ঘনত্ব) ..... (6.9)

এই টেনসরটির 6টি নিরপেক্ষ উপাংশ হল,

$$I_{11} = \int \rho (y^2 + z^2) dv, \quad I_{22} = \int \rho (z^2 + x^2) dv \quad I_{33} = \int \rho (x^2 + y^2) dv$$

$$I_{12} = -\int \rho xy\, dv, \quad I_{31} = -\int \rho\, zx dv \quad I_{23} = -\int \rho yz\, dv$$

কর্ণীয় উপাংশগুলিকে স্থির বিন্দুর সাপেক্ষে জড়তা ভ্রামক বলে এবং বিকর্ণীয় (non-diagonal) উপাংশগুলিকে জড়তা গুণফল (products of inertia) বলা হয়।

6.5 জড়তা ভ্রামক টেনসরের ধর্মাবলি

(a) চলনের ফলে জড়তা ভ্রামকের রূপান্তর

দৃঢ় বস্তুর মধ্যে অবস্থিত নির্দেশতন্ত্রটির কৌণিক বিন্যাস অপরিবর্তিত রেখে যদি মূলবিন্দুটির $\vec{a}$ পরিমাণ সরণ হয়, তবে প্রত্যেক বিন্দুরই সম পরিমাণ সরণ হবে এবং i-তম কণার পরিবর্তিত স্থান ভেক্টর দাঁড়াবে,

$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{a}$$

ফলে জড়তা ভ্রামক টেনসরের উপ-পরিবর্তিত $(\alpha\beta)$ উপাংশ দাঁড়াবে,

$$I'_{\alpha\beta} = \sum m_i\left(r_i'^2\ \delta_{\alpha\beta} - (x_i')_\alpha (x_i')_\beta\right)$$

$$= \sum m_i[\{(\vec{r}_i - \vec{a}).(\vec{r}_i - \vec{a})\}\delta_{\alpha\beta} - \{(x_i)_\alpha - a_\alpha\}\{(x_i)_\beta - a_\beta\}]$$

$$= \sum m_i[\{r_i^2 - 2(\vec{r}_i . \vec{a}) + \vec{a}\}\delta_{\alpha\beta} - \{(x_i)_\alpha (x_i)_\beta - a_\beta (x_i)_\alpha - a_\alpha (x_i)_\beta + a_\alpha a_\beta\}]$$

$$\therefore \quad I'_{\alpha\beta} = \sum m_i[r_i^2\delta_{\alpha\beta} - (x_i)_\alpha (x_i)_\beta] + \sum m_i[a^2\delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta]$$

$$+\sum m_i[(x_i)_\alpha a_\beta + (x_i)_\beta a_\alpha] - 2\sum m_i(\vec{r}_i . \vec{a})\delta_{\alpha\beta}$$

$$= I_{\alpha\beta} + M(a^2\delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta) - 2\,\vec{a}.M\vec{R}\,\delta_{\alpha\beta}$$

$$+ \left\{\sum m_i (x_i)_\alpha\right\}a_\beta + \left\{\sum m_i (x_i)_\beta\right\}a_\alpha$$

$$= I_{\alpha\beta} + M(a^2\delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta) - 2\,\vec{a}.M\vec{R}\,\delta_{\alpha\beta} + \left\{M(\vec{R})_\alpha\right\}a_\beta + \left\{M(\vec{R})_\beta\right\}a_\alpha$$

সুতরাং প্রাথমিক মূলবিন্দুটি যদি ভরকেন্দ্রে অবস্থিত থাকে, তবে উপরের রাশিমালার শেষ তিনটি পদ শূন্য হয় এবং $I'_{\alpha\beta}$ রাশিটি দাঁড়ায়

$$I'_{\alpha\beta} = I_{\alpha\beta} + M(a^2\delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta) \qquad .....(6.10)$$

এই সমীকরণের $I_{\alpha\beta}$ রাশিটি হল ভরকেন্দ্রের সাপেক্ষে দৃঢ় বস্তুর জড়তা ভ্রামকের $(\alpha\beta)$ উপাংশ এবং $I'_{\alpha\beta}$ হল ভরকেন্দ্র থেকে মূলবিন্দুটির $\vec{a}$ সরণের পর জড়তা ভ্রামকের $(\alpha\beta)$ উপাংশ। এইবার আমরা যদি ধরে নিই যে ভরকেন্দ্রকে মূলবিন্দু ধরে নির্দেশাক্ষটি প্রধান নির্দেশতন্ত্র নির্দেশ করে তবে $\alpha \neq \beta$ হলে $I_{\alpha\beta} = 0$ এবং যদি মূলবিন্দুর সরণটি যে কোনও একটি অক্ষ বরাবর হয় (ধরা যাক x-অক্ষ বরাবর), তবে $\vec{a} = (a, 0, 0)$ এবং (6.10) সমীকরণটি দাঁড়ায়

$$I_{\alpha\beta}' = I_{\alpha\beta} = 0\ (\alpha \neq \beta)$$

$$I_{11}' = I_{11}$$

এবং $I_{22}' - I_{22} = I_{33}' - I_{33} = Ma^2$

(6.11) সমীকরণগুলি দৃঢ় বস্তুর সমান্তরাল অক্ষের উপপাদ্য নির্দেশ করে।

(6.8) সমীকরণ থেকে আমরা অভিলম্ব অক্ষ উপপাদ্যটিও প্রমাণ করতে পারি। এই সমীকরণ থেকে আমরা পাই,

$$I_{11} = \sum m_i(y_i^2 + z_i^2), \quad I_{22} = \sum m_i(z_i^2 + x_i^2)$$

$$\therefore \quad I_{11} + I_{22} = \sum m_i(y_i^2 + x_i^2 + 2z_i^2) = I_{33} + 2\sum m_i z_i^2$$

ধরা যাক, দৃঢ় বস্তুর কণাগুলি একই সমতলে অবস্থিত অর্থাৎ সামতলিক। ধরা যাক সেই সমতলটি x-y সমতলে অবস্থিত। সেক্ষেত্রে সমতলটির সমীকরণ $z = 0$ ধরা যেতে পারে।

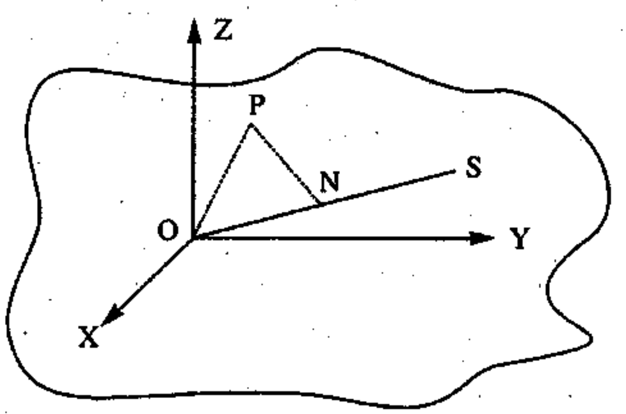
$\therefore$ এক্ষেত্রে $I_{33} = I_{11} + I_{22}$ .... (6.12)

এটিই জড়তা ভ্রামক সংক্রান্ত অভিলম্ব অক্ষের উপপাদ্য।

$\therefore$ সাধারণভাবে বলা যায় $I_{33} \le I_{11} \le I_{22}$

(b) মূলবিন্দুগামী যে কোনো অক্ষের সাপেক্ষে জড়তা ভ্রামক নির্ণয় :

দৃঢ়বস্তুর সঙ্গে গতিশীল যেকোনো একটি নির্দেশতন্ত্র নেওয়া হল। নির্দেশতন্ত্রের মূলবিন্দু হল O। যে কোনও একটি অক্ষ OS-এর সাপেক্ষে জড়তা ভ্রামক হল [চিত্র (6.3)]



চিত্র 6.3

$I_{OS} = \sum_p m_{[p]} PN^2$ (এখানে সম্ভাব্য সমস্ত বিন্দুর P-এর উপর সমষ্টিকরণ বোঝানো হচ্ছে।)

এখন $PN^2 = OP^2 \sin^2\theta$

$$= \frac{OP^2 . OS^2}{OS^2}\sin^2\theta = \frac{|\vec{OP} \times \vec{OS}|}{OS^2}$$

$\vec{OP} = \vec{r}$ এবং $\vec{OS} = \vec{s}$ হলে

$$I_{OS} = \frac{\sum m(\vec{r} \times \vec{s})^2}{s^2} = \frac{\sum m[r^2 s^2 - (\vec{r}.\vec{s})^2]}{s^2}$$

$$\text{or, } I_{OS}\, s^2 = \sum m\,[r^2 s_\alpha s_\beta \delta_{\alpha\beta} - x_\alpha s_\alpha n_\beta s_\beta]$$

$$= \sum m\,[r^2\, \delta_{\alpha\beta} - x_\alpha x_\beta] s_\alpha s_\beta$$

$$= I_{\alpha\beta} s_\alpha s_\beta$$

$$\therefore \quad I_{os} = \frac{I_{\alpha\beta} s_\alpha s_\beta}{s^2}$$

$$= \frac{1}{s^2}\,[I_{11} s_1{}^2 + I_{22} s_2{}^2 + I_{33} s_3{}^2 + 2I_{12} s_1 s_2 + 2I_{23} s_2 s_3 + 2I_{31} s_3 s_1]$$

অর্থাৎ $I_{11}, I_{22}, I_{33}, I_{12}, I_{31}, I_{23}$ এই 6টি নিরপেক্ষ জড়তা ভ্রামকের উপাংশগুলি জানা থাকলে যে কোনও অক্ষ বরাবর দৃঢ় বস্তুর জড়তা ভ্রামক (6.13) সমীকরণ দ্বারা জানা যাবে।

(c) জড়তা ভ্রামকের উপগোলক (Ellipsoid of inertia) :

(6.13) সমীকরণে $s = \frac{1}{\sqrt{I_{OS}}}$ ধরলে পাওয়া যায় $I_{\alpha\beta} s_\alpha s_\beta = I_{os}\, s^2 = 1$.

অর্থাৎ $I_{11} s_1{}^2 + I_{22} s_2{}^2 + I_{33} s_3{}^2 + 2I_{12} s_1 s_2 + 2I_{23} s_2 s_3 + 2I_{31} s_3 s_1 = 1$ ... (6.14)

এই সমীকরণটি একটি উপগোলকের সমীকরণ। $\vec{OS}$ ভেক্টরের মান $|\vec{OS}| = \frac{1}{\sqrt{I_{OS}}}$ ধরলে S বিন্দুর সঞ্চারপথটি হবে একটি উপগোলক। যদি নির্দেশতন্ত্রটি এরকম হয় যাতে $I_{12} = I_{23} = I_{31} = 0$, অর্থাৎ মুখ্য নির্দেশতন্ত্রের অক্ষগুলি প্রধান অক্ষ হয় তবে মুখ্য জাড্য অক্ষগুলিই ইলিপসয়েডের তিনটি মূল অক্ষ নির্দেশ করবে।

(d) কয়েকটি বিশেষ আকারের বস্তুর মুখ্য জাড্য অক্ষ

দৃঢ় বস্তুর যদি কোনও অক্ষের সাপেক্ষে ঘূর্ণন প্রতিসাম্য (rotational symmetry) থাকে, তবে মুখ্য অক্ষ হবে ঘূর্ণন অক্ষটি এবং তার লম্ব সমতলে অবস্থিত পরস্পর সমকোণী যে কোনও দুটি অক্ষ। নীচের যুক্তির সাহায্যে এই কথাটির সত্যতা বুঝতে পারা যাবে। ধরুন, কোনও দৃঢ় বস্তুর z-অক্ষ বরাবর একটি ঘূর্ণন প্রতিসাম্য আছে। ঐ অক্ষের সাপেক্ষে দৃঢ় বস্তুকে 180° ঘোরালে বস্তুটির সত্যিকার কোনও পরিবর্তন হবে না। কিন্তু x ও y নির্দেশাঙ্কের চিহ্ন উল্টে যাবে। অর্থাৎ $x \to -x$ এবং $y \to -y$ হবে।

$$\therefore \quad I_{31} = -\sum m\,zx = +\sum m\,xz = 0$$

$$I_{23} = -\sum m\,yz = +\sum m\,yz = 0$$

আবার z-অক্ষের সাপেক্ষে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে 90° ঘোরালে $x \to y$ এবং $y \to -x$ হবে। কাজেই

$$I_{12} = -\sum m\,xy = +\sum m\,xy = 0$$

সুতরাং এক্ষেত্রে জাড্য টেনসরটি কর্ণীয় টেনসর (diagonalised tensor) এবং z-অক্ষ ও তার সমকোণী সব অক্ষই মূল জাড্য অক্ষ।

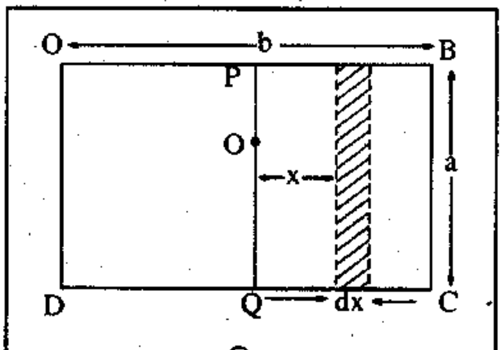
6.6 কয়েকটি প্রতিসম বস্তুর জাড্য ভ্রামক

বস্তু সমসত্ত্ব (homogeneous) ও সরল জ্যামিতিক আকারের হলে অনেকক্ষেত্রেই সমাকলনের সাহায্যে বিভিন্ন অক্ষের সাপেক্ষে সহজেই বস্তুর জাড্য ভ্রামক নির্ণয় করা সম্ভব। কয়েকটি উদাহরণ নীচে দেওয়া হল।

(a) আয়ত পাত (Rectangular lamina) ঃ

(1) অক্ষ একটি বাহুর সমান্তরাল এবং কেন্দ্রগ

(6.4) চিত্রে ABCD হল সমসত্ত্ব ভরের একটি আয়ত পাত ও O পাতটির কেন্দ্র। $BC = a$ এবং $AB = b$, PQ অক্ষ BC বাহুর সমান্তরাল ও কেন্দ্রগ। আমরা এই অক্ষটির সাপেক্ষে পাতটির জড়তা ভ্রামক নিরূপণ করব। PQ অক্ষের সমান্তরালভাবে পাতটিকে অনেকগুলি সরু সরু ফালিতে ভাগ করা হল। চিত্রে PQ থেকে x দূরত্বে dx চওড়া একটি ফালি দেখানো হয়েছে। যদি পাতটির ভর M ধরা হয় তবে এই ফালিটির ভর হবে $\frac{M}{b}dx$। ফালিটির সব কণাগুলিই PQ অক্ষ থেকে x দূরত্বে। ফলে



চিত্র 6.4

PQ অক্ষের সাপেক্ষে ফালির জড়তা ভ্রামক হল $\left(\frac{M}{b}\right)dx\cdot x^2$। নির্ণেয় জড়তা ভ্রামক হবে

$$I = \int_{-b/2}^{b/2} \frac{M}{b} x^2 dx = \frac{M}{b}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-b/2}^{b/2} = \frac{1}{12} M b^2 \qquad \dots (6.15)$$

অক্ষটি AB বাহুর সমান্তরাল হলে অনুরূপভাবে জড়তা ভ্রামক হত

$$I = \frac{1}{12} Ma^2 \qquad \ldots \quad (6.16)$$

(2) অক্ষ পাতের কিনারায়

অক্ষ AD বাহু বরাবর হলে সমান্তরাল অক্ষের উপপাদ্য অনুযায়ী (সমীকরণ 6.11) জড়তা ভ্রামক হত

$$I = \frac{1}{12} Mb^2 + \frac{1}{4} Mb^2 = \frac{1}{3} Mb^2 \qquad \ldots \quad (6.17)$$

অনুরূপভাবে অক্ষ AB বাহু বরাবর হলে জড়তা ভ্রামক হত

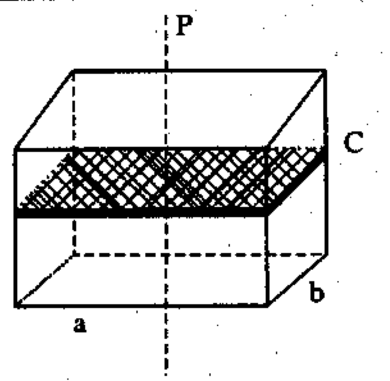
$$I = \frac{1}{12} Ma^2 + \frac{1}{4} Ma^2 = \frac{1}{3} Ma^2 \qquad \ldots \quad (6.18)$$

(3) অক্ষ কেন্দ্রগ এবং পাতের তলের অভিলম্বে

পাতের বাহুর সমান্তরাল ও কেন্দ্রগ দুই সমকোণী অক্ষে আমরা জড়তা ভ্রামক পেলাম $\frac{1}{12} Ma^2$ এবং $\frac{1}{12} Mb^2$ [(6.16) এবং (6.15) সমীকরণ অনুযায়ী]। অভিলম্ব অক্ষের উপপাদ্য অনুযায়ী (সমীকরণ 6.12) নির্ণেয় জড়তা ভ্রামক হবে

$$I = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2) \qquad \ldots. \quad (6.19)$$

(b) আয়তাকার বস্তু (Rectangular parallelopiped) : ধরা যাক, বস্তুটির তিনটি বাহু a, b এবং c। c বাহুর সমান্তরাল কেন্দ্রগ PQ অক্ষের সাপেক্ষে জড়তা ভ্রামক নির্ণয় করতে হবে। বস্তুটিকে PQ অক্ষের অভিলম্বে অনেকগুলি পাত্‌লা আয়তাকার পাতে ভাগ করা হল। PQ অক্ষের সাপেক্ষে যে কোনো পাতের জড়তা ভ্রামক = $\frac{\text{পাতের ভর}}{12}(a^2 + b^2)$ (6.19নং সমীকরণ অনুযায়ী)। অতএব বস্তুটির ভর M হলে PQ অক্ষের সাপেক্ষে বস্তুটির মোট জাড্য ভ্রামক



চিত্র 6.5

$$I_c = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2) \qquad \ldots \quad (6.20c)$$

a বাহুর সমান্তরাল কেন্দ্রগ অক্ষে জড়তা ভ্রামক I_a এবং b বাহুর সমান্তরাল কেন্দ্রগ অক্ষ I_b দ্বারা সূচিত হয় তবে অনুরূপভাবে I_a এবং I_b-র মান হবে

$$I_a = \frac{M}{12}(b^2 + c^2) \quad ... \quad (6.20a)$$

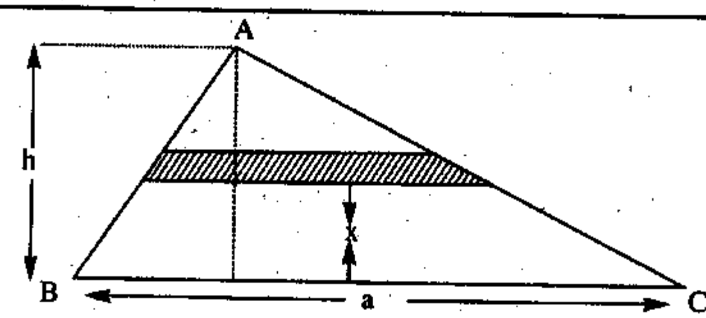
$$I_b = \frac{M}{12}(c^2 + a^2) \quad ... \quad (6.20b)$$

এই তিনটি অক্ষেই বস্তুটি প্রতিসম বলে এই তিনটি অক্ষই কেন্দ্রগ বিন্দুতে জাড্য উপগোলকের মুখ্য অক্ষ।

(c) ত্রিভুজাকার পাত (triangular lamina) :

অক্ষ যে কোনও একটি বাহু।

ধরে নিই M ভরের সুষম ত্রিভুজাকার পাত ABC-র BC অক্ষ সাপেক্ষে জড়তা ভ্রামক নির্ণয় করতে হবে।



চিত্র 6.6

ত্রিভুজাকার পাতটিকে BC বাহুর সমান্তরালে সরু সরু ফালিতে ভাগ করা হল। BC থেকে x দূরত্বে dx প্রস্থের একটি ফালির দৈর্ঘ্য হবে $\frac{a(h-x)}{h}$। পাতের একক ক্ষেত্রের ভর σ হলে ফালির ভর হল $\frac{\sigma a(h-x)}{h}dx$। BC অক্ষ থেকে এই ফালিটির সব কণাই সম দূরত্বে আছে। অতএব এই ফালিটির জড়তা ভ্রামক $= \frac{\sigma a(h-x)}{h}x^2\,dx$। সম্পূর্ণ পাতের জড়তা ভ্রামক

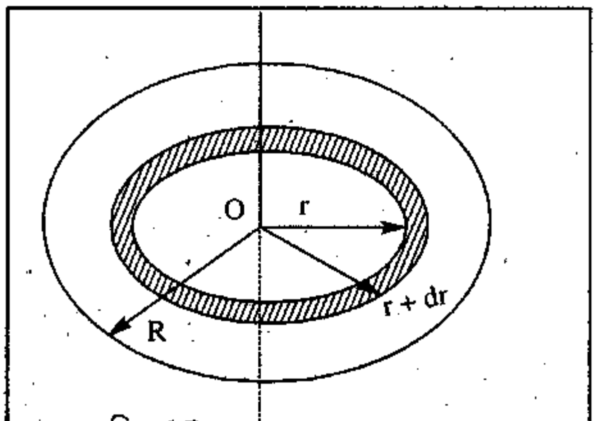
$$I = \frac{\sigma a}{h}\int_0^h (hx^2 - x^3)dx = \frac{1}{12}\sigma ah^3 = \frac{1}{6}Mh^2 \qquad (6.21)$$

কারণ, পাতের ভর $M = \sigma \times$ পাতের ক্ষেত্রফল $= \sigma \cdot \frac{1}{2}ah$।

(d) গোল (বা বৃত্তীয়) পাত (Circular lamina)

ধরা যাক, পাতের অভিলম্বে কেন্দ্রগ অক্ষ আছে। পাতের ভর M ও ব্যাসার্ধ R হলে প্রতি বর্গক্ষেত্রের

ভর $\sigma = M/\pi R^2$ । পাতকে অনেকগুলি সমকেন্দ্রিক সরু সরু বলয়ে ভাগ করা হল। ঐ বলয়গুলির যে



চিত্র 6.7

কোনও একটির ব্যাসার্ধ r এবং r + dr ধরলে এই বলয়ের ভর $dm = 2\pi r dr\sigma$ এবং প্রদত্ত অক্ষের সাপেক্ষে সরু বলয়টির জড়তা ভ্রামক হল $2\pi r^3 dr\sigma$। অতএব নির্ণেয় জড়তা ভ্রামক

$$I = 2\pi\sigma\int_0^R r^3 dr = 2\pi\sigma\frac{R^4}{4} = \frac{1}{2}MR^2 \qquad (6.22)$$

অভিলম্ব অক্ষের সূত্র প্রয়োগ করলে দেখা যায় যে কোনো ব্যাসকে অক্ষ ধরলে জড়তা ভ্রামক হবে

$$I_d + I_d = \frac{1}{2}MR^2 \quad \text{বা} \quad I_d = \frac{1}{4}MR^2 \qquad (6.23)$$

চওড়া বলয়ের ভিতরের ও বাইরের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে R_1 ও R_2 হলে বলয়ের অভিলম্ব এবং কেন্দ্রগ অক্ষের সাপেক্ষে জড়তা ভ্রামক হবে

$$I = \int_{R_1}^{R_2} 2\pi r^3\sigma dr = 2\pi\sigma\frac{R_2^4 - R_1^4}{4}$$

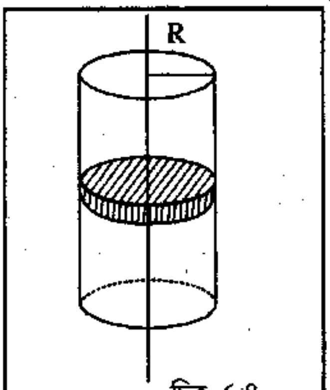
পাতের ভর M হলে $\sigma = \dfrac{M}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}$

অতএব, $I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$ (6.24)

যে কোনও ব্যাসে জড়তা ভ্রামক এই রাশিটির অর্ধেক।

(e) বেলন (Cyllinder)

(1) অক্ষ বেলনের অক্ষ।



চিত্র 6.8

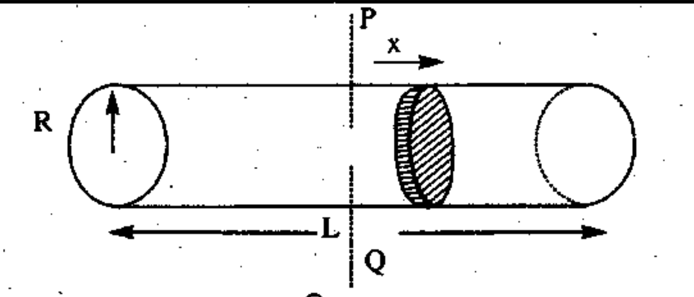
বেলনের অক্ষের অভিলম্বে বেলনকে সরু সরু গোল পাতে ভাগ করা হল। যে কোনও পাতের ব্যাসার্ধ R হল বেলনের ব্যাসার্ধের সমান।

যে কোনও পাতের জড়তা ভ্রামক হল [(6.22) সমীকরণ অনুযায়ী)] $\frac{1}{2}$ পাতের ভর $\times R^2$। সুতরাং বেলনের ভর M হলে বেলনের অক্ষের

সাপেক্ষে সমগ্র বেলনের জড়তা ভ্রামক হল

$$I = \frac{1}{2}MR^2 \tag{6.25}$$

(2) অক্ষ বেলনের অক্ষের অভিলম্বে এবং কেন্দ্রগ



চিত্র 6.9

চিত্র অনুযায়ী PQ অক্ষে বেলনের জাড্য ভ্রামক নির্ণয় করতে হবে। বেলনকে তার নিজের অক্ষের অভিলম্বে অনেকগুলি সরু গোলাকার পাতে ভাগ করা হল। এরকম যে কোনও একটি পাতের বেধ dx এবং PQ থেকে দূরত্ব x হলে পাতের ভর $m = \pi R^2 dx\rho$ (বেলনের ঘনত্ব $\rho = \frac{M}{\pi R^2 L}$)

PQ-র সমান্তরাল গোলকের পাতের ব্যাসে জড়তা ভ্রামক $\frac{mR^2}{4}$ [(6.23) সমীকরণ অনুযায়ী] এবং সমান্তরাল অক্ষের সূত্র অনুযায়ী PQ অক্ষের সাপেক্ষে জড়তা ভ্রামক

$$m\frac{R^2}{4} + mx^2 = \left(\frac{R^2}{4} + x^2\right)\pi R^2 \rho dx$$

অতএব নির্ণেয় জড়তা ভ্রামক হল PQ অক্ষের সাপেক্ষে সব পাতগুলির জড়তা ভ্রামকের সমষ্টি। বেলনের দৈর্ঘ্য = L।

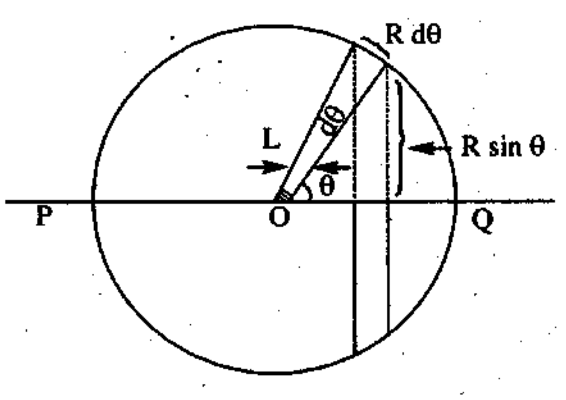
$$\therefore I = \int_{-L/2}^{L/2} \left(x^2 + \frac{R^2}{4}\right)\pi R^2 \rho dx$$

$$= \pi R^2 \rho \left(\frac{L^3}{12} + \frac{R^2 L}{4}\right) = M\left(\frac{L^2}{12} + \frac{R^2}{4}\right) \tag{6.26}$$

(f) গোলীয় পাত (Spherical Shell)

অক্ষ হল যে কোনো ব্যাস বরাবর গোলকের ভর M এবং ব্যাসার্ধ R হলে খোলকের ক্ষেত্রফল $4\pi R^2$ এবং প্রতি একক ক্ষেত্রের ভর $\sigma = M/4\pi R^2$। যে কোনও ব্যাস PQ-র অভিলম্বে খোলককে অনেকগুলি

সরু বলয়ে ভাগ করা হল। এই রকম একটি বলয়ের ব্যাসার্ধ R sin θ, চওড়া Rdθ এবং বলয়ের ভর $= 2\pi\sigma R^2 \sin\theta\, d\theta$। এই বলয়ের প্রত্যেক কণাই PQ অক্ষ থেকে সমদূরত্বে। অতএব PQ অক্ষের সাপেক্ষে এই বলয়ের জড়তা ভ্রামক



চিত্র 6.10

$$= 2\pi\sigma R^2 \sin\theta d\theta \times (R\sin\theta)^2$$

$$= 2\pi\sigma R^4 \sin^2\theta d\theta$$

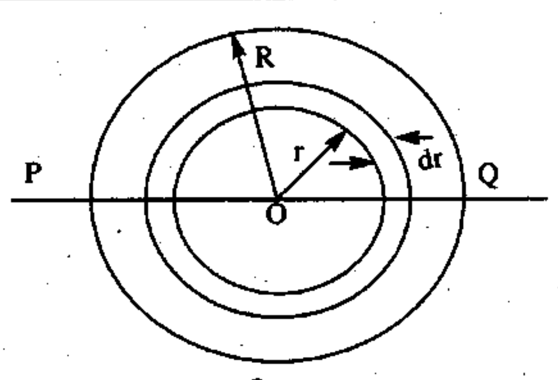
সুতরাং নির্ণেয় গোলকের জড়তা ভ্রামক

$$I = 2\pi\sigma R^4 \int_0^{\pi} \sin^2\theta\, d\theta = \frac{2}{3} MR^2 \quad (6.27)$$

(g) **নিরেট গোলক** **:**

অক্ষ যে কোনো ব্যাস গোলককে সরু সরু অনেকগুলি সমকেন্দ্রিক গোলকে ভাগ করা যায়। যে কোনো একটি গোলকের ব্যাসার্ধ ধরুন r এবং $r + dr_1 \rho$ গোলকের ঘনত্ব হলে এই গোলকের ভর $m = 4\pi r^2 dr\rho$। (6.27) সমীকরণ অনুযায়ী যে কোনও ব্যাসে এই খোলকের জড়তা ভ্রামক,

$$= \frac{2}{3} . 4\pi r^2 dr\rho . r^2 = \frac{8\pi}{3} r^4 \rho dr \quad ।$$



চিত্র 6.11

এখানে $\rho = \frac{\text{ভর}}{\text{আয়তন}} = \frac{3M}{4\pi R^3}$

অতএব নির্ণেয় জড়তা ভ্রামক

$$I = \frac{8\pi\rho}{3} \int_0^R r^4\, dr = \frac{8\pi\rho}{3} . \frac{R^5}{5} = \frac{2}{5} MR^2 \qquad (6.28)$$

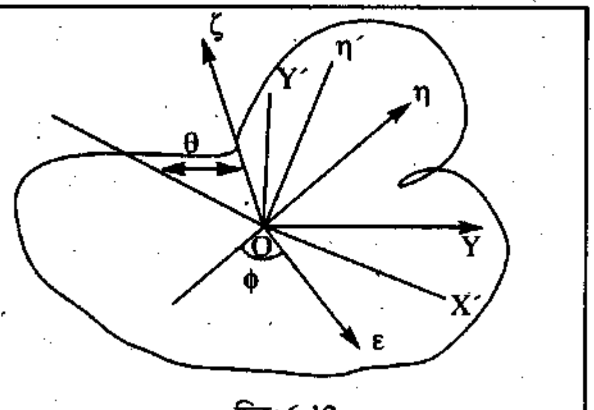
(h) **ঘূর্ণন ব্যাসার্ধ।**

জাড্য ভ্রামকের মাত্রা (dimension) ML^2। এইজন্য জড়তা ভ্রামক রাশিটিকে বস্তুর ভর এবং উপযুক্ত দৈর্ঘ্য K-র বর্গের গুণফলরূপে প্রকাশ করা যায়। অর্থাৎ সব সময়ই লেখা যায় $I = MK^2$ যেখানে k-কে ঘূর্ণন ব্যাসার্ধ (Radius of gyration) বলা হয়।

নিরেট গোলকের ক্ষেত্রে $K^2 = \frac{2}{5}R^2$ বা $K = \sqrt{\frac{2}{5}}R$

6.7 অয়লারীয় কোণ এবং কৌণিক বেগ ও অয়লারের সমীকরণ

আগেই বলা হয়েছে দৃঢ় বস্তুর অবস্থান ও বিন্যাস প্রকাশ করবার জন্য 6টি নির্দেশাঙ্কের প্রয়োজন। এর মধ্যে ভরকেন্দ্রের 3টি নির্দেশাঙ্ক দ্বারা দৃঢ় বস্তুর অবস্থান নির্দিষ্ট হয়। দৃঢ় বস্তুর কৌণিক বিন্যাস নির্দিষ্ট করবার জন্য অয়লার তিনটি কোণের উদ্ভাবন করেন। পদার্থ বিজ্ঞানে যেগুলি অয়লারীয় কোণ নামে পরিচিত। এই কোণগুলি পরস্পর নিরপেক্ষ। অর্থাৎ অন্য কোণ দুটিকে না বদলিয়ে যে কোনও একটি কোণ বদলানো যায়। এই কোণগুলি স্থির নির্দেশতন্ত্র (x, y, z)-এর সাপেক্ষে গতীয় নির্দেশতন্ত্র (x′, y′, z′)-এর কৌণিক বিন্যাস বোঝায়। যেহেতু আমরা (x, y, z) এবং (x′, y′, z′) দুটি নির্দেশতন্ত্রের মধ্যকার কোণ নিয়ে আগ্রহী, সেজন্য আমরা দুটি নির্দেশতন্ত্রের মূলবিন্দু এক বলে ধরে নিতে পারি। এখন স্থির নির্দেশতন্ত্র (x, y, z) থেকে গতীয় নির্দেশতন্ত্র (x′, y′, z′) যেটি গতিশীল দৃঢ় বস্তুর সাথে আবদ্ধ তাতে আমরা নীচের রূপান্তরগুলির মাধ্যমে যেতে পারি।



চিত্র 6.12

(i) প্রথম (x, y, z) তন্ত্র থেকে (z) অক্ষের সাপেক্ষে বামাবর্তে (anticlockwise) ϕ কোণে ঘুরিয়ে (ξ, η, ζ) নির্দেশতন্ত্রে পৌঁছানো।

(ii) দ্বিতীয়, $O\xi$ অক্ষের সাপেক্ষে আবার বামাবর্তে θ কোণে ঘুরিয়ে (ξ, η, ζ) নির্দেশতন্ত্র থেকে (ξ', η', ζ') নির্দেশতন্ত্রে পৌঁছোনো। এক্ষেত্রে xy তল এবং (ξ', η') তলের ছেদ রেখা হল $O\xi$। একে পাতরেখা (line of nodes) বলা হয়।

(iii) তৃতীয় $O\eta'$ অক্ষের সাপেক্ষে (ξ', η', ζ') তন্ত্রটি আবার বামাবর্তে ψ কোণে ঘুরিয়ে (x′, y′, z′) গতীয় নির্দেশতন্ত্রে পৌঁছোনো।

θ, ϕ এবং ψ কোণ তিনটিকে অয়লারীয় কোণ বলে। অয়লারের কোণের উপরোক্ত সংজ্ঞানুসারে দেখা যায় যে

$\dot{\phi}$ হল ζ বা Z-অক্ষ সাপেক্ষে কৌণিক বেগ,

$\dot{\theta}$ হল ξ অক্ষ বা পাতরেখা সাপেক্ষে কৌণিক বেগ

এবং $\dot{\psi}$ হল η' (বা γ') অক্ষ সাপেক্ষে কৌণিক বেগ।

গতীয় নির্দেশতন্ত্রের সাথে স্থির নির্দেশতন্ত্রের সম্পর্ক হল নিম্নরূপ।

$$(x, y, z) \overset{D}{\rightarrow} (\xi, \eta, \zeta) \overset{C}{\rightarrow} (\xi', \eta', \zeta') \overset{B}{\rightarrow} (x', y', z')$$

B, C, D রূপান্তর ম্যাট্রিক্স চিহ্নিত করছে।

অর্থাৎ
$$\begin{aligned}(x', y', z') &= B(\xi', \eta', \zeta') \\ &= BC(\xi, \eta, \zeta) \\ &= BCD(x, y, z)\end{aligned}$$

যেখানে
$$D = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.29a}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{6.29b}$$

এবং
$$B = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.29c}$$

গতীয় নির্দেশতন্ত্র (x´, y´, z´)-এর সাপেক্ষে কৌণিক বেগ হবে

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}_{x',y',z'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}_{x',y',z'} + \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\xi',\eta',\zeta'} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}_{\xi,\eta,\zeta}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}_{x',y',z'} + B\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{x',y',z'} + BC\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}_{x',y',z'}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin\theta \sin\dot{\varphi} + \cos\dot{\theta} \\ \sin\theta \cos\dot{\varphi} - \sin\dot{\theta} \\ \cos\theta\dot{\varphi} + \dot{\psi} \end{pmatrix} \tag{6.30}$$

অতএব কেবলমাত্র ঘূর্ণনের জন্য দৃঢ় বস্তুর গতিশক্তিকে লেখা যায়,

$$T = \frac{1}{2} I_{\alpha\beta} w_\alpha w_\beta$$

এখন যদি ধরা হয় যে, দৃঢ় বস্তুর সাথে আবদ্ধ গতীয় নির্দেশতন্ত্রটি প্রধান অক্ষগুলি (principal axes) নির্দেশ করে, তবে গতিশক্তিকে লেখা যায়

$$T = \frac{1}{2}\left(I_{11}w_1^2 + I_{22}w_2^2 + I_{33}w_3^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(I_1 w_1^2 + I_2 w_2^2 + I_3 w_3^2\right)$$

এখানে আমরা I_{11}, I_{22}, I_{33}-কে যথাক্রমে I_1, I_2, I_3 ধরে নিয়েছি।

অতএব ল্যাগ্রাঞ্জের ψ সমীকরণটিকে লেখা যায়,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\alpha}{\partial\dot{\psi}} - \frac{\partial\alpha}{\partial\psi} = 0$$

$$\text{বা,}\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}} - \frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}} = -\frac{\partial\upsilon}{\partial\psi} \qquad ...(6.31)$$

কারণ, সাধারণত স্থিতিশক্তি $\upsilon, \dot{\psi}$ নিরপেক্ষ হয়,

$$\text{এখন}\quad \frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}} = \frac{\partial T}{\partial w_1}\frac{\partial w_1}{\partial\dot{\psi}} + \frac{\partial T}{\partial w_2}\frac{\partial w_2}{\partial\dot{\psi}} + \frac{\partial T}{\partial w_3}\frac{\partial w_3}{\partial\dot{\psi}}$$

$$= I_3 w_3 \quad [\text{(6.30) সমীকরণ থেকে}]$$

$$\text{আবার}\quad \frac{\partial T}{\partial\psi} = \frac{\partial T}{\partial w_1}\frac{\partial w_1}{\partial\dot{\psi}} + \frac{\partial T}{\partial w_2}\frac{\partial w_2}{\partial\dot{\psi}} + \frac{\partial T}{\partial w_3}\frac{\partial w_3}{\partial\dot{\psi}}$$

$$I_1 w_1 w_2 - I_2 w_2 w_1 = (I_1 - I_2) w_1 w_2$$

$\therefore$ (6.31) সমীকরণটিকে এখন লেখা যায়,

$$\frac{d}{dt}(I_3 w_3) - (I_1 - I_2) w_1 w_2 = -\frac{\partial\upsilon}{\partial\psi} = \phi_\psi = \Gamma_3 \qquad ...(6.32a)$$

সাধারণীকৃত বল (generalised force) ϕ_ψ-কে আমরা গতীয় তন্ত্রের Z′ দিকে টর্ক হিসেবে লিখতে পারি। এটা বুঝতে হলে প্রথমে ধরে নিন যে দৃঢ় বস্তুর উপর প্রযুক্ত বল সংরক্ষী। ফলে সাধারণীকৃত বল ϕ_ψ-কে লেখা যায়,

$$\phi_\psi = -\frac{\partial \upsilon}{\partial \psi} = \sum \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \psi}$$

এখন $d\vec{r}_i = d\vec{\psi} \times \vec{r}_i$ [(6.3) সমীকরণ দ্রষ্টব্য]

$$= (\hat{n} \times \vec{r}_i) d\psi \quad [\hat{n} \text{ হল ঘূর্ণনের দিকে একক ভেক্টর}]$$

$$\therefore \quad \frac{\delta \vec{r}_i}{\delta \psi} = (\hat{n} \times \vec{r}_i)$$

$$\therefore \quad Q_\psi = \sum \vec{F}_i \cdot (\hat{n} \times \vec{r}_i) = \hat{n} \sum (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = \hat{n} \cdot \vec{\Gamma} = \Gamma_3$$

কোনও দৃঢ় বস্তুর প্রধান অক্ষগুলিকে z′ অক্ষ বা 3নং অক্ষ হিসেবে পছন্দ করার কোনও বাধ্যবাধকতা নেই। আমরা যদি অক্ষগুলির বিন্যাস বদল (অবশ্য অক্ষগুলির দক্ষিণাবর্তী) চরিত্র বজায় রেখে) করি তবে (6.32a) সমীকরণের মতো আরও দুটি সমীকরণ পাওয়া যায়,

$$\frac{d}{dt}(I_1 w_1) - (I_2 - I_3) w_2 w_3 = \Gamma_1 \qquad \text{...(6.32b)}$$

$$\frac{d}{dt}(I_2 w_2) - (I_3 - I_1) w_3 w_1 = \Gamma_2 \qquad \text{...(6.32c)}$$

[6.32(a), (b), (c)] সমীকরণ তিনটি একত্রে দৃঢ় বস্তুর গতীয় সমীকরণ প্রকাশ করে। এদের অয়লারের সমীকরণ বলা হয়। (a) সমীকরণটি ল্যাগ্রাঞ্জের ψ-সমীকরণ হলেও (b) ও (c) সমীকরণগুলির সাথে কিন্তু ল্যাগ্রঞ্জের θ ও φ সমীকরণের সম্পর্ক নেই।

স্থির নির্দেশতন্ত্র এবং ঘূর্ণন নির্দেশতন্ত্রের মধ্যে সময়ের অবকলের নিম্নলিখিত সম্পর্ক প্রযোজ্য

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{fixed} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{rot} + \vec{w} \times \vec{L} \qquad \text{...(6.33a)}$$

এবং $$\left(\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_{fixed} = \left(\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_{rot} + \vec{w} \times \vec{P} \qquad \text{...(6.33b)}$$

6.8 দৃঢ় বস্তুর মুক্ত আবর্তনের উদ্ভূত ধ্রুবকসমূহ

বলযুক্ত আবর্তনের ক্ষেত্রে অয়লারের গতীয় সমীকরণগুলি হয়

$$\frac{d}{dt}(I_1w_1) - (I_2 - I_3)w_2w_3 = 0 \qquad ...(6.34a)$$

$$\frac{d}{dt}(I_2w_2) - (I_3 - I_1)w_3w_1 = 0 \qquad ...(6.34b)$$

$$\frac{d}{dt}(I_3w_3) - (I_1 - I_2)w_1w_2 = 0 \qquad ...(6.34c)$$

সমীকরণ তিনটিকে যথাক্রমে w_1, w_2 এবং w_3 দিয়ে গুণ করে যোগ করলে

$$w_1\frac{d}{dt}(I_1w_1) + w_2\frac{d}{dt}(I_2w_2) + w_3\frac{d}{dt}(I_3w_3) = 0$$

বা, $$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}I_1w_1^2 + \frac{1}{2}I_2w_2^2 + \frac{1}{2}I_3w_3^2\right] = 0$$

অর্থাৎ, $$\frac{dT}{dt} = 0 \qquad ...(6.35)$$

বলযুক্ত আবর্তনে গতিশক্তি ধ্রুবক।

এখন (6.34a), (6.34b) ও (6.34c) সমীকরণগুলিকে যথাক্রমে I_1w_1, I_2w_2 ও I_3w_3 দিয়ে গুণ করে পাওয়া যায়,

$$I_1^2w_1\dot{w}_1 + I_2^2w_2\dot{w}_2 + I_3^2w_3\dot{w}_3 = 0$$

বা, $$\frac{d}{dt}(I_1^2w_1^2 + I_2^2w_2^2 + I_3^2w_3^2) = 0$$

এখন (6.33) সমীকরণ অনুযায়ী কৌণিক ভরবেগ,

$$L_\alpha = I_{\alpha\beta}w_\beta$$

$\therefore\ L_1 = I_{11}w_1 = I_1w_1$ অনুরূপে $L_2 = I_2w_2$, $L_3 = I_3w_3$

যেহেতু আমরা দৃঢ় বস্তুর সাথে আবদ্ধ নির্দেশতন্ত্রটির অক্ষগুলিকে প্রধান অক্ষ ধরেছি।

এক্ষেত্রে ওপরের সমীকরণটি দাঁড়ায়

$$\frac{d}{dt}L^2 = 0$$

$$\text{বা,}\quad L^2 \ \text{ধ্রুবক} \qquad \text{...(6.36)}$$

যেহেতু $T = \frac{1}{2} I_{\alpha\beta} w_\alpha w_\beta$

$$\text{বা,}\quad \frac{dT}{dt} = \frac{1}{2} I_{\alpha\beta} \dot{w}_\alpha w_\beta + \frac{1}{2} I_{\alpha\beta} w_\alpha w_\beta$$

$$= I_{\alpha\beta} \dot{w}_\alpha w_\beta = w_\beta \frac{d}{dt}(I_{\alpha\beta} w_\alpha)$$

$$= w_\beta \frac{d}{dt} L_\beta = w_\beta \dot{L}_\beta$$

$$= \vec{w}.\dot{\vec{L}} = 0 \quad \text{[(6.36) নং সমীকরণ অনুসারে]}$$

অতএব $\vec{w}$ এবং $\dot{\vec{L}}$ পরস্পর সমকোণী।

প্রসঙ্গত উল্লেখ করা যেতে পারে এই সমীকরণগুলি আমরা একটু অন্যভাবে পেতে পারি। ধরা যাক, আমরা দুটি নির্দেশতন্ত্র নিয়েছি যার একটি হল (S) পরীক্ষাগার সাপেক্ষে স্থির এবং অন্যটি (S′) দৃঢ় বস্তুর সাথে আবর্তনশীল। ধরা যাক, এই আবর্তনশীল নির্দেশতন্ত্রের মূলবিন্দু দৃঢ় বস্তুর ভরকেন্দ্র এবং এরই সাপেক্ষে দৃঢ় বস্তুটি আবর্তনশীল। এই অবস্থায় দুটি নির্দেশতন্ত্রের কোনও ভেক্টরের সময়ের সাপেক্ষে অবকলন নীচের সমীকরণ দ্বারা নির্দিষ্ট

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{S'} + \vec{w} \times \vec{A}$$

এখন $\vec{A}$ ভেক্টরটিকে কৌণিক ভরবেগ ভেক্টর ধরে নিলে আমরা পাই

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{S'} + \vec{w} \times \vec{L} \qquad \text{...(6.37)}$$

সুতরাং মুক্তভাবে আবর্তনশীল দৃঢ়বস্তুর ক্ষেত্রে (6.37) নং সমীকরণটি হয়

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{S'} + \vec{w}\times\vec{L} = 0$$

বা, $$\vec{L}.\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{S'} + \vec{L}.(\vec{w}\times\vec{L}) = 0$$

বা, $$\vec{L}.\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{S'} = 0$$

বা, $$\left(\frac{dL^2}{dt}\right)_{S'} = 0$$

আবর্তনশীল অক্ষের সাপেক্ষে L^2 ধ্রুবক

আবার $$\vec{w}.\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{s'} = 0$$

বা, $$\frac{dT}{dt} = 0$$

অতএব গতিশক্তিও ধ্রুবক।

6.9 অয়লারের সমীকরণের ব্যবহারিক প্রয়োগ

I_1, I_2 এবং I_3-র মান অনুযায়ী দৃঢ় বস্তু বিভিন্ন ধরনের হয়। যেমন $I_1 \neq I_2 \neq I_3$ হলে বস্তুটিকে অপ্রতিসম লাট্টু (asymmetrical top) বলে। যে কোনও দুটি জড়তা ভ্রামক সমান হলে (ধরা যাক, $I_1 = I_2 \neq I_3$) বস্তুটিকে প্রতিসম লাট্টু বলে। তিনটি জড়তা ভ্রামক সমান হলে বস্তুটিকে গোলীয় লাট্টু (spherical top) বলে।

কোন প্রতিসম বস্তু নিলে অয়লারের সমীকরণগুলি দাঁড়ায়

$$I_3 \dot{w}_3 = 0 \qquad ...(6.88a)$$

$$I_1 \dot{w}_1 - (I_1 - I_3)w_2 w_3 = 0 \qquad ...(6.38b)$$

$$I_1\dot{w}_2 - (I_3 - I_1)w_3w_1 = 0 \qquad \text{...(6.38c)}$$

(6.38a) সমীকরণ থেকে দেখা যায় w_3 = ধ্রুবক

(6.38b) এবং (6.38c) সমীকরণ দুটি থেকে পাওয়া যায়

$$\dot{w}_1 + kw_2w_3 = 0$$

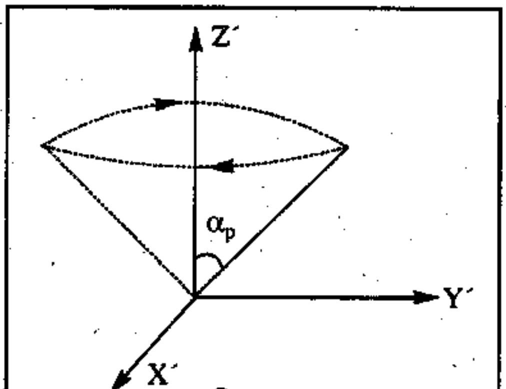
$$\dot{w}_2 - kw_1w_3 = 0$$

এখানে আমরা $I_1 = I_2 = A,\ I_3 = C$ এবং $\frac{C-A}{A} = k$ ধরেছি,

ওপরের দুটি সমীকরণকে আর একবার অবকলন করে পাওয়া যায়,

$$\ddot{w}_1 = -(k^2w_3^2)w_1 \qquad \text{...(6.39a)}$$

$$\ddot{w}_2 = -(k^2w_3^2)w_2 \qquad \text{...(6.39b)}$$



চিত্র 6.13

এই সমীকরণ দুটির সমাধান হল,

$$w_1 \pm iw_2 = Ae^{\pm ikw_3t}$$

$$\therefore \quad w_1^2 + w_2^2$$

$$= (w_1 + iw_2)(w_1 - iw_2) = A^2 = \text{ ধ্রুবক}$$

অতএব $w^2 = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = A^2 + w_3^2 =$ ধ্রুবক

যেহেতু A^2 এবং w_3^2 উভয়েই ধ্রুবক সেইজন্য $\vec{w}$ ভেক্টরের সূচিমুখ প্রতিসম অক্ষ z′-এর সাপেক্ষে kw_3 বেগে ঘোরে। এর ফলে উৎপন্ন দেহশঙ্কুর (Body Cone) অর্ধ কোণ α_p হলে

$$\tan\alpha_p = \frac{\sqrt{w_1^2 + w_2^2}}{w_3} = \frac{A}{w_3}$$

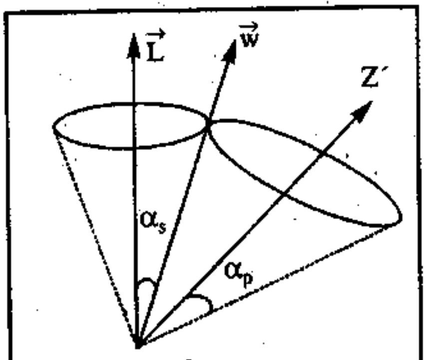
এখন স্থির নির্দেশতন্ত্র (S)-এর সাপেক্ষে $\vec{L}$ ধ্রুবক $\left[\text{ যেহেতু } \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_S = 0 \right]$

এখন $\frac{\vec{w}.\vec{L}}{|\vec{w}||\vec{L}|} = \cos L\left(\vec{w}, \vec{L}\right) =$ ধ্রুবক

যেহেতু $2T = \vec{w}.\vec{L} =$ ধ্রুবক

অতএব এক্ষেত্রে $\vec{w}$ ভেক্টরের সূচিমুখ স্থির ভেক্টর $\vec{L}$ -এর সাপেক্ষে ঘুরে একটি দেশশঙ্কু (space cone) উৎপন্ন করবে যার

অর্ধ কোণ $\alpha_S = \cos^{-1}\left[\frac{\vec{w}.\vec{L}}{|\vec{w}||\vec{L}|}\right]$



চিত্র 6.14

অবশ্য এক্ষেত্রে $\vec{w}$ যে কৌণিক বেগে ঘুরবে তার মান kw_3 হবে না এবং সেই মান নির্ণয় করা সহজ নয়। এই ধরনের গতিকে **পুরঃসরণ** (precession) বলে। প্রমাণ করা যায় দেশশঙ্কু, দেহশঙ্কুর গা ঘেঁষে গড়িয়ে চলে। পৃথিবীর ক্ষেত্রে এই গাইরোস্কোপীয় ক্রিয়া আলোচনা করলে দেখা যায় পৃথিবীর নিরক্ষীয় ব্যাস দুই মেরুর দূরত্বের চেয়ে কিছু বড় বলে প্রতিসম অক্ষে জড়তা ভ্রামক I_3 নিরক্ষীয় ব্যাসে জড়তা ভ্রামক $I_1 = I_2$ অপেক্ষা একটু বড়ো। অতএব পূর্বে বর্ণিত সকল সিদ্ধান্তগুলিই পৃথিবীর ক্ষেত্রে প্রযোজ্য। পৃথিবীর ক্ষেত্রে $\frac{I_1 - I_3}{I_1} = \frac{A - C}{A} = 0.0033$

w_3 কার্যত পৃথিবীর দৈনিক আবর্তনের সমান।

$$\therefore \quad kw_3 = .0033 \text{ পাক / দিন}$$

$$= \frac{1}{300} \text{ পাক / দিন}$$

এর ফলে ভূপৃষ্ঠে অবস্থিত দর্শকের মনে হবে পৃথিবীর দৈনিক আবর্তন অক্ষ উত্তর মেরুর চারদিকে বৃত্তাকার পথে প্রায় 300 দিনে 1 পাক ঘুরবে। স্যাণ্ডলার এই জাতীয় আবর্তনের যে পরীক্ষা করেছেন তাতে তিনি 300 দিনের জায়গায় প্রায় 427 দিনে পেয়েছেন। তত্ত্বীয় মান ও পর্যবেক্ষণ লব্ধ মানের এই পার্থক্যের জন্য নানা ধরনের ব্যাখ্যা আছে। অপ্রয়োজনীয় বোধে সেগুলি এখানে আর উল্লেখ করা হল না।

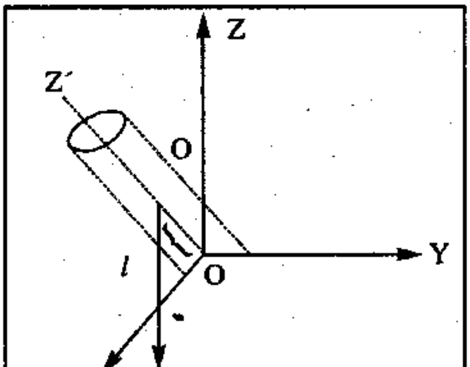
6.10 প্রতিসম লাটিমের আবর্তনে ল্যাগ্রাঞ্জের সমীকরণের প্রয়োগ

(6.30) সমীকরণের সাহায্যে প্রতিসম লাটিমের গতিশক্তি হল—

$$T = \frac{1}{2}I_1\left(w_1^2 + w_2^2\right) + \frac{1}{2}I_3 w_3^2$$

$$= \frac{1}{2}A(\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}C(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2$$

প্রতিসমতার জন্য ভরকেন্দ্র z′ অক্ষের ওপর অবস্থিত এবং z অক্ষকে উল্লম্ব অক্ষ ধরা হয়েছে। মূলবিন্দুর সাপেক্ষে বস্তুর স্থিতিশক্তি



চিত্র 6.15

$v = mgl\cos\theta$। অতএব দৃঢ় বস্তুর ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান

$$\propto = \frac{1}{2}A(\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^2)$$

$$+\frac{1}{2}C(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2 - mgl\cos\theta \quad ...(6.40)$$

ল্যাগ্রাঞ্জিয়ানের এই রাশিমালা φ, ψ এবং t পরস্পর নিরপেক্ষ। অতএব p_ϕ, p_ψ এবং হ্যামিল্টনিয়ান H, তিনটি ধ্রুব রাশি পাওয়া যাবে

$$p_\varphi = \frac{\partial\alpha}{\partial\dot{\varphi}} = A\sin^2\theta\dot{\varphi} + C(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)\cos = b \quad ...(6.41a)$$

$$p_\psi = \frac{\partial\alpha}{\partial\dot{\psi}} = C(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta) = a \quad ...(6.41b)$$

এবং $$H = \frac{1}{2}A(\dot{\theta}^2 + \sin\theta\dot{\phi}^2) + \frac{1}{2}C(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta^2)^2 + mgl\cos\theta = E \quad ...(6.41c)$$

আর অগ্রসর হবার আগে আমরা লাটিমের গতি সম্বন্ধে কিছু সাধারণ সংজ্ঞা দিয়ে নেব। প্রতিসম অক্ষের সাপেক্ষে বস্তুর আবর্তনকে আমরা ঘূর্ণন (spin) বলব। ঘূর্ণনবেগ হল w_3 এবং (6.41b) সমীকরণ অনুযায়ী বা পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদের বর্ণনা অনুযায়ী এটি ধ্রুবক। উল্লম্ব অক্ষ OZ-এর সাপেক্ষে প্রতিসম অক্ষ θ অচর রেখে আবর্তন করতে পারে। এই আবর্তনকে বলা হবে **পুরঃসরণ** (precession)।

উলম্ব তলের সাথে আবর্তন অক্ষের কোণ অর্থাৎ θ সময়ের সঙ্গে বদলাবে। অর্থাৎ আবর্তন অক্ষের পুরঃসরণ শঙ্কুর সময়ের সঙ্গে পরিবর্তনকে অক্ষ মিলন (nutation) বলা হয়।

(6.41a) এবং (6.41b) সমীকরণ দুটির সাহায্যে লেখা যায়,

$$\dot{\varphi} = \frac{b - a\cos\theta}{A\sin^2\theta} \quad ...(6.42)$$

$\dot{\varphi}$ -এর এই মান (6.41c)-তে বসালে পাওয়া যায়,

$$\frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}A\frac{(b - a\cos\theta)^2}{A^2\sin^2\theta} + \frac{1}{2}\frac{a^2}{C} + mgl\cos\theta = E \quad ...(6.41d)$$

উভয়দিকে $2\sin^2\dfrac{\theta}{2}$ দিয়ে গুণ করে পাওয়া যায়

$$\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2+\left(\frac{b-a\cos\theta}{A}\right)^2+\frac{a^2}{CA}\sin^2\theta+\frac{2mgl\cos\theta\sin^2\theta}{A}=\frac{2E}{A}\sin^2\theta$$

$\cos\theta = u$ প্রতিস্থাপন করে এবং

$$\frac{b}{A}=\mu \qquad \text{...(6.43a)}$$

$$\frac{a}{A}=\lambda \qquad \text{...(6.43b)}$$

$$\frac{2E}{A}-\frac{a^2}{CA}=\alpha \qquad \text{...(6.43c)}$$

$$2mgl\,/\,A=\beta \qquad \text{...(6.43d)}$$

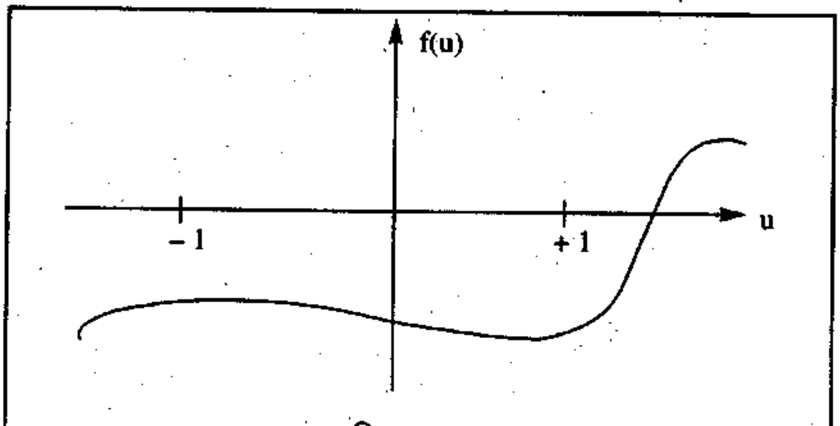
ধরলে উপরের সমীকরণকে লেখা যায়,

$$\dot{u}^2=-(\mu-\lambda u)^2+(\alpha-\beta u)(1-u^2) \qquad \text{...(6.44)}$$

$$\therefore \quad \int\frac{du}{\sqrt{f(u)}}=\int dt \qquad \text{...(6.45)}$$

যেখানে $\quad f(u)\equiv(\alpha-\beta u)(1-u^2)-(\mu-\lambda u)^2 \qquad$ ...(6.46)

দুর্ভাগ্যক্রমে (6.45) সমীকরণটির বিশ্লেষণী সমাধান করা যায় না। এই সমীকরণে θu অর্থাৎ θ-ই

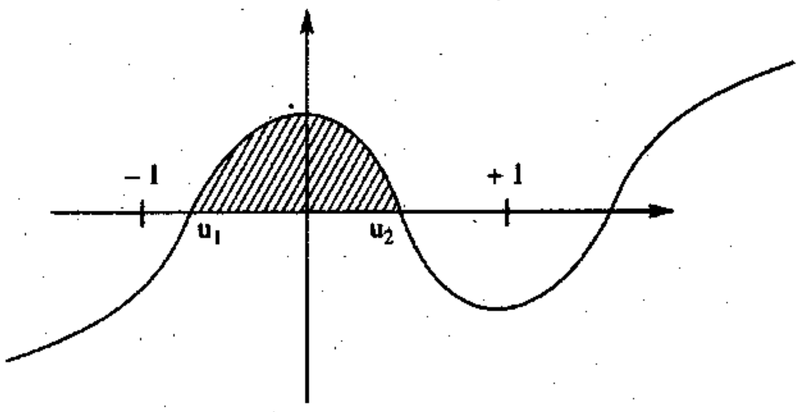


চিত্র 6.16

একমাত্র চলরাশি। t-এর সঙ্গে θ-র সম্পর্ক জানতে পারলে (6.42) সমীকরণের সাহায্যে $\dot{\varphi}$ পাওয়া যায়

এবং θ ও $\dot{\phi}$ জানতে পারলে (6.41b) সমীকরণের সাহায্যে $\dot{\psi}$ জানা যাবে। এই প্রকার সমাধান না করে অন্যভাবে আমরা এখন প্রতিসম লাটিমের গতি সংক্রান্ত বিশ্লেষণ করতে পারব।

$u = \cos\theta$ এর মান -1 এবং $+1$ এর মধ্যে সীমাবদ্ধ। কিন্তু আমরা যদি সেটা ভুলে গিয়ে u-কে $-\infty$ থেকে $+\infty$-র মধ্যে সীমাবদ্ধ ধরে নিই তাহলে দেখব, f(u)-র মধ্যে প্রধান পদটি হল βu^3। সেজন্য $u \to \pm\infty$ হলে $f(u) \to \pm\infty$ আবার যখন $u = \pm 1$, সেক্ষেত্রে $f(u) < 0$ (যদি $\mu = \pm\lambda$ না হয়)। এই দুটি সীমাবদ্ধতা মেনে নিলে u-এর সাথে f(u)-র লেখচিত্রটি 5 ধরনের হতে পারে।



চিত্র 6.17

যেহেতু (6.45) সমীকরণে $\sqrt{f(u)}$ পদটি আছে, বাস্তব θ অর্থাৎ যখন $-1 \le u \le +1$ -এর সীমাবদ্ধতা মেনে f(u) কে ধনাত্মক হতে হবে। তাই চিত্র (6.16) কোনও বাস্তব গতির বিবরণ দিতে পারবে না। কিন্তু চিত্র (6.17)-র আচ্ছাদিত অংশ লাটিমের গতির বিবরণ দিতে পারে। এক্ষেত্রে লাটিমের অয়নবিচলন $\theta_1 = \cos^{-1} u_1$ এবং $\theta_2 = \cos^{-1} u_2$-এর মধ্যে সীমাবদ্ধ।

● **গতির প্রারম্ভিক শর্ত (initial candities)**

আমরা লাটিমের গতির প্রকৃতি সংক্রান্ত কিছু মূল তথ্য সহজেই পেতে পারি। ধরে নেওয়া যায় গতির প্রারম্ভে $\dot{\theta} = \dot{\phi} = 0, \quad \dot{\psi} \ne 0$। অর্থাৎ প্রথমে লাটিমটির কেবমলাত্র ঘূর্ণন আছে পুরঃসরণ বা অয়নবিচলন কিছু নেই। (6.42) সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়,

$b = au_0$ যেখানে u_0 হল u-এর প্রারম্ভিক মান। আবার এই মান এবং (6. 43a) ও (6.43b) এর সাহায্যে পাওয়া যায় $\mu = \lambda u_0$ এবং (6.44) সমীকরণের সাহায্যে পাওয়া যায়, $\alpha = \beta u_0$। ফলে (6.44) সমীকরণকে লেখা যায়,

$$\dot{u}^2 = -\lambda^2(u_0 - u)^2 + \beta(u_0 - u)(1 - u^2) \qquad ...(6.47)$$

এবার আমরা লাটিমের গতিকে আরও একটু বিশিষ্টতা দিয়ে নির্দিষ্ট করব। আমরা ধরে নেব লাটিমের ঘূর্ণন গতি খুবই বেশি, অর্থাৎ এর গতিশক্তি >> স্থিতিশক্তি

এখন স্থিতিশক্তি = $mgl\cos\theta \le mgl = \frac{A\beta}{2}$

প্রারম্ভিক গতিশক্তি

$$T_0 = \frac{1}{2}C\dot{\psi}^2 = \frac{a^2}{2C} = \frac{A^2\lambda^2}{2C}$$

দ্রুত ঘূর্ণনশীল লাটিম হবার জন্য $\frac{A\beta}{2} << \frac{A^2\lambda^2}{2C}$

$$\text{বা} \quad \frac{\beta}{\lambda^2} << \frac{A}{C} \qquad ...(6.48)$$

যদিও $A \neq C$ আমরা ধরে নেব $\frac{A}{C}$ খুব বড়ো নয়। সুতরাং (6.48) থেকে আমরা পাই $\frac{\beta}{\lambda^2} \to 0$।

এবার আমরা আবার ফিরে যাই সমীকরণ (6.47)-এ।

$\dot{u} = 0$ যখন $u = u_0$। ধরি $u = u_1$ হলে $\dot{u}$ আবার 0 হয়।

$$\therefore \quad -\lambda^2(u_0 - u_1)^2 + \beta(u_0 - u_1)(1 - u_1^2) = 0$$

$$\text{বা} \quad (u_0 - u_1) = \frac{\beta}{\lambda^2}(1 - u_1^2) \to 0$$

অর্থাৎ u_0 এবং u_1-র মধ্যে তফাৎ সামান্যই। ঘূর্ণনশীল লাটিমের ক্ষেত্রে অতি অল্পই অয়ন বিচলন হয়।

যেহেতু $(u_0 - u_1) \to 0$

আমরা ধরতে পারি $1 - u^2 \sim 1 - u_0^2 \sim \sin^2\theta_0$

$$\therefore \quad \dot{u}^2 = -\lambda^2(u_0 - u)^2 + \beta\sin^2\theta_0(u_0 - u)$$

$$= -\lambda^2\left[(u_0 - u) - \frac{\beta\sin^2\theta_0}{2\lambda^2}\right]^2 + \frac{\beta^2\sin^4\theta_0}{4\lambda^2}$$

$$= -\lambda^2(u - \overline{u})^2 + \frac{\beta^2\sin^4\theta_0}{4\lambda^2}$$

যেখানে $\bar{u} = u_0 - \frac{\beta \sin^2 \theta_0}{2\lambda^2}$

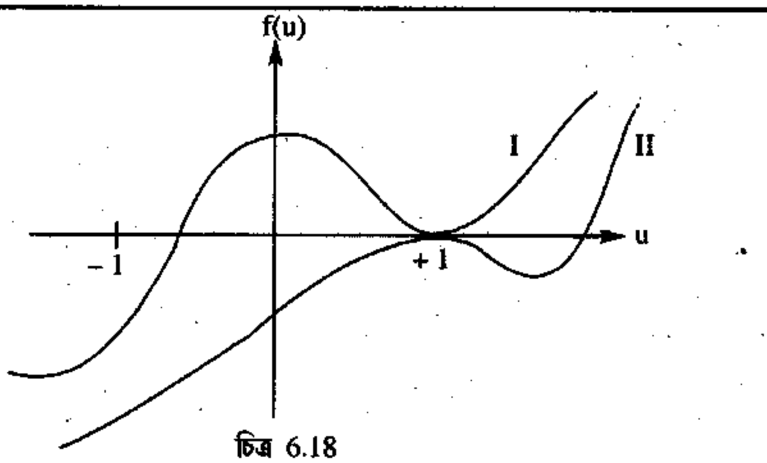
বা, $$\left[\frac{d}{dt}(u - \bar{u})\right]^2 + \lambda^2 (u - \bar{u})^2 = \frac{\beta^2 \sin^4 \theta_0}{4\lambda^2}$$

এই সমীকরণটি সরল দোলগতির শক্তি সমীকরণ। অর্থাৎ ঘূর্ণনশীল লাটিমের অয়নবিচলন গতিটি সরল দোলগতি হয়।

এবার যদি আমরা প্রারম্ভিক শর্তকে আরও একটু সহজ করে দিই, যদি ধরে নিই $u_0 = 1$ অর্থাৎ লাটিমটি উল্লম্বভাবে ঘূর্ণন করেছে তবে (6.47) নং সমীকরণটিকে লেখা যায়

$$\dot{u}^2 = (1-u)^2\left[-\lambda^2 + \beta(1+u)\right] \qquad ...(6.49)$$

অর্থাৎ $f(u) = 0$ সমীকরণের তিনটি বীজের দুটি $u = 1$। অর্থাৎ এক্ষেত্রে $f(u) - u$ লেখচিত্রটি নীচের দুটির যে কোনও একটি হতে পারে। II নং বক্ররেখাটির ক্ষেত্রে লাটিমটির প্রারম্ভিক গতির কোনও পরিবর্তন হয় না। অর্থাৎ যদি (6.49)-এ u-এর মানটি 1 এর চেয়ে বেশি হয়, তবে সেটি ঘুমন্ত লাটিমের (sleeping top) শর্ত বোঝাবে। এক্ষেত্রে লাটিমের ঘূর্ণন (spin) ছাড়া অন্য কোনও গতিই সম্ভব নয়। $u > 1$ হবার শর্ত হল



চিত্র 6.18

$$1 + u_1 = \frac{\lambda^2}{\beta} > 2$$

বা, $\frac{C^2}{A}\dot{\psi}^2 > 4mgl$ বা, $\dot{\psi} > \left(\frac{4mglA}{C^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ (6.50)

ঘূর্ণন গতি $\left(\frac{4mglA}{C^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ -এর চেয়ে বড়ো হলেই ঘুমন্ত লাটিম পাওয়া যায়। কিন্তু ঘর্ষণ বলের জন্য ঘুমন্ত লাটিমের ঘুম ভাঙে অর্থাৎ পুরঃসরণ ও অয়নবিচলন শুরু হয়।

6.11 সারাংশ

এই এককটিতে আমরা দেখিয়েছি যে দৃঢ় বস্তুর স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা হবে 6 এবং অয়লারের উপপাদ্য অনুযায়ী দৃঢ় বস্তুর সাধারণ গতিকে চলন এবং ঘূর্ণনের সমন্বয় হিসেবে ভাবা যায়। আমরা আরও দেখিয়েছি কোনো অক্ষ বা স্থির বিন্দুর সাপেক্ষে আবর্তনরত দৃঢ় বস্তুর প্রত্যেক বিন্দুর কৌণিক বেগ সমান। আবর্তনরত দৃঢ়বস্তুর গতিশক্তিকে লেখা যায়,

$$T = \frac{1}{2} I_{\alpha\beta}\omega_{\alpha}\omega_{\beta}$$

জড়তা ভ্রামকের এই টেনসরটি একটি ক্রম প্রতিসম টেনসর। যে কোনও প্রতিসম টেনসরকে কর্ণীকরণ করা যায়। অতএব, এমন এক নির্দেশতন্ত্র পাওয়া সম্ভব যেখানে $I_{\alpha\beta}$ কে টেনসরে রূপান্তরিত করা যায়। যে নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে এই কর্ণীকরণ করা হয় তাকে প্রধান নির্দেশতন্ত্র বলে।

জড়তা ভ্রামকের সমান্তরাল অক্ষের উপপাদ্য অনুসারে মূল বিন্দুর মধ্য দিয়ে কোনো অক্ষের সাপেক্ষে জড়তা ভ্রামক I হলে ঐ অক্ষ থেকে a দূরত্বে কোনো সমান্তরাল অক্ষের সাপেক্ষে জড়তা ভ্রামক হবে

$$I' = I + Ma^2$$

অভিলম্ব অক্ষের উপপাদ্য অনুসারে কোনো প্রতিসম বস্তুর প্রতিসম অক্ষে জড়তা ভ্রামক I_3 হলে এবং তার লম্ব সমতলে অবস্থিত অন্য দুই প্রধান অক্ষের জড়তা ভ্রামক I_1 এবং I_2 হলে

$$I_3 = I_1 + I_2 \text{ হবে।}$$

আমরা এই এককে প্রতিসম কিছু বিশেষ ধরনের বস্তুর জড়তা ভ্রামক নির্ণয় করেছি।

অয়লারীয় কোণের সংজ্ঞা দিয়ে দৃঢ় বস্তুর সঙ্গে গতিশীল অক্ষের সাপেক্ষে দৃঢ় বস্তুর কৌণিক বেগ নির্ণয় করেছি। তা হল

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}_{body} = \begin{pmatrix} \sin\theta\sin\psi\dot{\phi} + \cos\psi\dot{\theta} \\ \sin\theta\cos\psi\dot{\phi} - \sin\psi\dot{\theta} \\ \cos\dot{\phi} + \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

বলমুক্ত আবর্তনের ক্ষেত্রে আমরা অয়লারের গতীয় সমীকরণ পেয়েছি

$$\frac{d}{dt}(I_1w_1) - (I_2 - I_3)w_2w_3 = 0$$

$$\frac{d}{dt}(I_2w_2) - (I_3 - I_1)w_3w_1 = 0$$

$$\frac{d}{dt}(I_3w_3) - (I_1 - I_2)w_1w_2 = 0$$

এই সমীকরণের সাহায্যে প্রতিসম বস্তুর ক্ষেত্রে আমরা দেশশঙ্কু এবং দেহশঙ্কুর সংজ্ঞা দিয়েছি। বিশ্লেষণী পদ্ধতিতে নির্ণীত ফল আমরা পৃথিবীর আবর্তনের ক্ষেত্রে মেলে কিনা যাচাই করেছি। পরিশেষে প্রতিসম লাট্টুর আবর্তন গতি আমরা ল্যাগ্রাঞ্জের সমীকরণের সাহায্যে বিশ্লেষণ করেছি। এই বিশ্লেষণে উদ্ভূত উপবৃত্তীয় সমাকল (elliptic integral) হল

$$\int \frac{du}{\sqrt{f(u)}} = \int dt$$

গাণিতিক সূত্রের সাহায্যে এর সমাধান পাওয়া যায় না। তাহলেও লেখচিত্রের সাহায্যে আমরা লাটিমের গতিশক্তি বিশ্লেষণ করতে সমর্থ হয়েছি।

6.12 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

1. a, b, c বাহুবিশিষ্ট আয়তাকার সমসত্ত্ব বস্তুর দুটি অনুরূপ বিপরীত কোণের যোগকারী রেখার সাপেক্ষে জড়তা ভ্রামক কত ?

2. কৌণিক ভরবেগ এবং রৈখিক ভরবেগের ভ্রামকের সমান হবার শর্ত কি ?

3. কৌণিক বেগ ভেক্টর $\vec{w}$ এবং কৌণিক ভরবেগ ভেক্টর $\vec{L}$ এর অভিমুখ কখন সমান হবে ? সেই অবস্থায় জড়তা ভ্রামক এবং কৌণিক ভরবেগের সম্পর্ক কী হবে ?

4. সুষম সমসত্ত্ব বেলনের দৈর্ঘ্য এবং ব্যাসার্ধের মধ্যে কী সম্পর্ক থাকলে জড়তা ভ্রামকের উপগোলীয় আকার গোলীয় হবে ?

5. একটি লাটিমের ল্যাগ্রাঞ্জিয়নকে নিম্নলিখিতভাবে লেখা যায়। লাটিমের কার্যকরী স্থিতিবিভব নির্ণয় করুন।

$$\alpha = \frac{1}{2}A(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta) + \frac{1}{2}C(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})^2 - mgl\cos\theta$$

6. স্থির নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে কৌণিক বেগের মান কি হবে ?

6.13 উত্তরমালা

1. (6.20a), (6.20b) এবং (6.20c) সমীকরণে মূলবিন্দুগামী তিনটি প্রধান অক্ষের জড়তা ভ্রামক দেওয়া হয়েছে। বিপরীত কোণ যোগকারী ভেক্টরটির একক ভেক্টর হবে $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\left(a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k}\right)$

অতএব এবার (6.13) সমীকরণ অনুযায়ী আলোচ্য অক্ষের সাপেক্ষে জড়তা ভ্রামক নির্ণয় করুন।

2. রৈখিক ভরবেগের ভ্রামক $= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$

$$= \sum \left\{\vec{r}_i \times m(\vec{u} + \vec{w} \times \vec{r}_i)\right\}$$

$$= \sum \vec{r}_i \times m\vec{u} + \sum \left\{\vec{r}_i \times m(\vec{w} \times \vec{r}_i)\right\}$$

$$= \left(\sum m\vec{r}_i\right) \times \vec{u} + \sum \left\{\vec{w}mr_i^2 - m\vec{r}_i(\vec{r}_i . \vec{w}_i)\right\}$$

$$= M\vec{R} \times \vec{U} + \sum \left\{mr_i^2 \vec{w} - m(\vec{r}_i . \vec{w}_i)\vec{r}_i\right\}$$

যদি ভরকেন্দ্রে মূলবিন্দু ধরা হয় তবে,

$$\left(\sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i\right)_\alpha = \sum \left\{mr_i^2 w_\alpha - m(x_i)_\beta w_\beta (x_i)_\alpha\right\}$$

$$= \sum \left\{mr_i^2 \delta_{\alpha\beta} w_\beta - m(x_i)_\alpha (x_i)_\beta w_\beta\right\}$$

$$= w_\beta \sum m\left\{r_i^2 \delta_{\alpha\beta} - (x_i)_\alpha (x_i)_\beta\right\}$$

$$= w_\beta I_{\alpha\beta}$$

ল্যাগ্রাঞ্জীয় পদ্ধতিতে কৌণিক ভরবেগ হল

$$L_\alpha = \frac{\partial L}{\partial w_\alpha} = \frac{\partial(T-V)}{\partial \omega_\alpha} = \frac{\partial T}{\partial w_\alpha} - \frac{\partial V}{\partial w_\alpha}$$

$$= \frac{\partial}{\partial w_\alpha}\left(\frac{1}{2} I_{\beta\gamma} w_\beta w_\gamma\right) - \frac{\partial V}{\partial w_\alpha}$$

$$= \frac{1}{2} I_{\beta\gamma} \partial_{\alpha\beta} w_\gamma + \frac{1}{2} I_{\beta\gamma} w_\beta \partial_{\alpha\gamma} - \frac{\partial V}{\partial w_\alpha}$$

$$\therefore \quad L_\alpha = \frac{1}{2} I_{\alpha\gamma} w_\gamma + \frac{1}{2} I_{\beta\alpha} w_\beta - \frac{\partial V}{\partial w_\alpha}$$

$$= I_{\alpha\beta} w_\beta - \frac{\partial V}{\partial w_\alpha}$$

অতএব কৌণিক ভরবেগ এবং রৈখিক ভরবেগের ভ্রামক সমান হবে যদি $\frac{\partial V}{\partial w_\alpha} = 0$ হয়।

3. $L_\alpha = I_{\alpha\beta} w_\beta = n w_\alpha$ হবে যদি $I_{\alpha\beta} = n\delta_{\alpha\beta}$ হয়। (6.8) নং সমীকরণের সাথে তুলনা করলে দেখা যায়

$$n\delta_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \sum_i m_i r_i^2 \text{ হচ্ছে}$$

অর্থাৎ এক্ষেত্রে $n = \sum m_i r_i^2$

$$\therefore \quad L_1 = \left(\sum m_i r_i^2\right) w_1 = I_{11} w_1$$

$$L_2 = \left(\sum m_i r_i^2\right) w_2 = I_{22} w_2$$

∴ এক্ষেত্রে কৌণিক বেগের উপাংশগুলির সাথে জড়তা ভ্রামক গুণ করলে কৌণিক ভরবেগ পাওয়া যাবে।

4. প্রতিসাম্যের জন্য বেলনের কেন্দ্রগ তিনটি প্রধান অক্ষগুলির একটি হল বেলনের অক্ষ, অন্য দুটি তার অভিলম্ব তলে কেন্দ্রগামী দুটি পরস্পর লম্ব সরলরেখা। অর্থাৎ (6.24) এবং (6.25) নং সমীকরণ অনুযায়ী .

$$I_1 = \frac{1}{2} MR^2$$

$$I_2 = I_3 = M\left(\frac{L^2}{12} + \frac{R^2}{4}\right)$$

জড়তা ভ্রামকের উপগোলক হল

$$I_1 s_1^2 + I_2 s_2^2 + I_3 s_3^2 = 1$$

$$\text{বা,} \quad I_1 s_1^2 + I_2 (s_2^2 + s_3^2) = 1$$

এই উপগোলকটি গোলীয় হবে যদি $I_1 = I_2 = I_3$ হয়

অর্থাৎ $\frac{1}{2}MR^2 = \frac{ML^2}{l_2} + \frac{MR^2}{4}$

বা, $\frac{1}{4}MR^2 = M\frac{L^2}{12}$ বা $R^2 = \frac{L^2}{3}$ $\therefore R = \frac{L}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}L}{3}$

5. লক্ষ করুন এই ল্যাগ্রাঞ্জিয়ানটি (6.40) সমীকরণের ল্যাগ্রাঞ্জিয়ানের সাথে অবিকল এক। এই ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান থেকে দেখুন আমরা পেয়েছি (6.41d) সমীকরণ

$$\frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}A\frac{(b - a\cos\theta)^2}{A^2\sin^2\theta} + \frac{a^2}{2C} + mgl\cos\theta = E$$

বা $\frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}A\left(\frac{b - a\cos\theta}{A\sin^2\theta}\right)^2 \sin^2\theta + mgl\cos\theta = E - \frac{a^2}{2C}$

$\frac{1}{2}A\dot{\theta}^2$ কে θ-গতির দিকে গতিশক্তি ধরলে

আমরা একটা কার্যকরী বিভব

$V_{elf} = \frac{1}{2}A\left(\frac{b - a\cos\theta}{A\sin^2\theta}\right)^2 \sin^2\theta + mgl\cos\theta$ পাই।

6. লক্ষ করুন, (6.30) নং সমীকরণ

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}_{body} = \begin{pmatrix} \sin\theta\sin\psi\dot{\phi} + \cos\psi\dot{\theta} \\ \sin\theta\cos\psi\dot{\phi} - \sin\psi\dot{\theta} \\ \cos\theta\dot{\phi} + \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}_{body} = BCD\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}_{fixed}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}_{fixed} = (BCD)^{-1}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}_{body} = \tilde{D}\tilde{C}\tilde{B}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}_{body}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\phi\dot{\theta} + \sin\theta\sin\phi\dot{\psi} \\ \sin\phi\dot{\theta} - \sin\theta\cos\phi\dot{\psi} \\ \dot{\phi} + \cos\theta\dot{\psi} \end{pmatrix}$$

একক 7 ☐ অতি অল্প বিস্তারের কম্পন

গঠন

7.1 প্রস্তাবনা

উদ্দেশ্য

7.2 দুই স্বাতন্ত্র্যসংখ্যার বস্তুতন্ত্র

7.3 n স্বাতন্ত্র্যসংখ্যার বস্তুতন্ত্র

7.4 দুই স্বাতন্ত্র্যসংখ্যার যুগ্মিত দোলন

7.4.1 যুগ্মিত দোলক

7.4.2 জোড়া দোলক

7.4.3 প্রতিসম সরলরৈখিক ত্রিপরমাণুক অণু

7.5 দুই-এর অধিক স্বাতন্ত্র্যসংখ্যার বস্তুতন্ত্রের কম্পন

7.6 সারাংশ

7.7 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

7.8 উত্তরমালা

7.1 প্রস্তাবনা

আমাদের চারদিকে দৃষ্টিপাত করলে আমরা কম্পনের বহু নিদর্শন দেখতে পাই। ঘড়ির পেন্ডুলাম বা গাছের ডালে ঝোলানো দোলনার দোলন, বাজনার তারের কম্পন, ওজনদাঁড়ির পাল্লার ওঠানামা এসব আপনি নিশ্চয়ই লক্ষ করেছেন। প্রকৃতিতে যে সব কম্পন দেখা যায় সেগুলিকে সবক্ষেত্রে ঠিক সরল দোলগতি বলা যায় না। প্রথমত, দোলনশীল বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল বল সাম্যাবস্থা থেকে বস্তুর সরণের ঠিক সমানুপাতী হয় না, বরং সরণের উচ্চতর ঘাতের সঙ্গে সমানুপাতী কিছু বলও বস্তুর উপর ক্রিয়া করে। এক্ষেত্রে দোলনগতি একটিমাত্র কম্পাঙ্কে হয় না। কম্পনের মূলসুরের সঙ্গে উচ্চতর কম্পাঙ্কের অনেক উপসুর মিশ্রিত থাকে। দ্বিতীয়ত, কম্পনশীল বস্তু বা বস্তুতন্ত্রের উপর নানা ধরনের মন্দন বল ক্রিয়া করে। অন্যদিকে বস্তুতন্ত্রের অন্তর্গত এমন একাধিক অংশ থাকতে পারে যার প্রতিটি স্বতন্ত্রভাবে কম্পনক্ষম কিন্তু একে অপরের সঙ্গে যুগ্মিত থাকায় একটির কম্পন অন্যগুলির কম্পনকে প্রভাবিত করে।

এ জাতীয় বস্তুতন্ত্রের কম্পনের সার্বিক সমাধান আপনার কাছে নিশ্চয়ই এক জটিল গাণিতিক সমস্যা বলে মনে হচ্ছে। কিন্তু কয়েকটি সরলীকরণ মেনে নিলে এ ধরনের সমস্যার সুষ্ঠু সমাধান পাওয়া যেতে পারে। এক্ষেত্রে আমরা যে মূল অঙ্গীকারটি ধরে নেব তা হল, কম্পনের বিস্তার অতি অল্প মানে সীমিত থাকে। বিস্তার অতি অল্প হওয়ায় প্রত্যাবর্তী বলের মধ্যে যে অংশগুলি সরণের বর্গ, ঘন বা উচ্চতর ঘাতের সমানুপাতী হয়, সেগুলিকে উপেক্ষা করা যায় অর্থাৎ প্রত্যাবর্তী বল সরণের সমানুপাতী বলে ধরা যায়। এর ফলে কম্পনের মূলসুরের কম্পাঙ্ক ছাড়া অন্য কম্পাঙ্কগুলি অনুপস্থিত থাকে। কম্পনের বিস্তার অতি অল্প হলে বস্তুর বেগও অল্প হয় এবং স্বাভাবিকভাবেই মন্দনের প্রভাবও উপেক্ষা করা যায়।

এই এককে আমরা একাধিক স্বাতন্ত্র্যসংখ্যার (degree of freedom) বস্তুতন্ত্রের গতির বিশ্লেষণ করব। এই বিশ্লেষণ পদ্ধতি যুগ্মিত কম্পন এবং স্বনবিদ্যার বিভিন্ন ক্ষেত্রে কম্পনশীল বস্তুর গতি বিশ্লেষণের কাজে লাগে। এই পদ্ধতিতে সনাতন বলবিদ্যার প্রয়োগ হলেও এটি একাধিক পরমাণুবিশিষ্ট অণুর কম্পন ও আণবিক বর্ণালির বিশ্লেষণেও কার্যকরী হয়।

উদ্দেশ্য

এই এককটির সাহায্যে আপনি অতি অল্প বিস্তারের কম্পনের তাত্ত্বিক বিশ্লেষণ পদ্ধতিটি আয়ত্ত করতে পারবেন। আপনি বিশেষ যে কাজগুলি করতে সক্ষম হবেন সেগুলি হল ঃ

- যে কোনো স্বাতন্ত্র্যসংখ্যার বস্তুতন্ত্রের ক্ষেত্রে লাগ্রাঞ্জীয় সমীকরণ ব্যবহার করে গতি সমীকরণগুলি নির্ণয় করতে পারবেন।
- যে কোনো সংখ্যক গতি সমীকরণ থেকে মেট্রিক্স পদ্ধতি ব্যবহার করে বস্তুতন্ত্রের স্বাভাবিক কম্পাঙ্কগুলি বার করতে পারবেন এবং সংশ্লিষ্ট সাধারণ কম্পনশৈলীগুলি বর্ণনা করতে পারবেন।
- দুই স্বাতন্ত্র্যসংখ্যার বস্তুতন্ত্রের উদাহরণ হিসাবে যুগ্মিত দোলক, জোড়া দোলক ও প্রতিসম সরলরৈখিক ত্রিপরমাণুক অণুর কম্পনের বিশ্লেষণ করতে পারবেন।
- টান দেওয়া তারের সংলগ্ন দুই, তিন বা ততোধিক সংখ্যক অনুরূপ বিন্দুভরের কম্পনের বিশ্লেষণ করতে পারবেন।

7.2 দুই স্বাতন্ত্র্যসংখ্যার বস্তুতন্ত্র

আমরা প্রথমে একটি সরল বস্তুতন্ত্র কল্পনা করব যেটি সংরক্ষী (conservative) এবং যার স্বাতন্ত্র্যসংখ্যা দুই। x_1 ও x_2, এই দুই সাধারণীকৃত নির্দেশাঙ্ক (generalised coordinates) দিয়ে বস্তুতন্ত্রটির অবস্থা সম্পূর্ণরূপে বর্ণনা করা যায়।

প্রথমে বস্তুতন্ত্রের স্থৈতিক শক্তির কথা চিন্তা করা যাক। ধরে নিন, স্থৈতিক শক্তি V কেবলমাত্র x_1 ও x_2 এর উপর নির্ভরশীল ($\dot{x}_1, \dot{x}_2$ ইত্যাদির উপর নয়) এবং যখন $x_1 = x_{10}, x_2 = x_{20}$, তখন V এর মান নিম্নতম। $V(x_1, x_2)$ কে (x_{10}, x_{20}) বিন্দুকে ঘিরে শ্রেণিতে প্রকাশ করা যায় ঃ

$$V(x_1, x_2) = V(x_{10}, x_{20}) + \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)_0 (x_1 - x_{10}) + \left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)_0 (x_2 - x_{20})$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}\right)_0 (x_1 - x_{10})^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}\right)_0 (x_2 - x_{20}) + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2}\right)_0 (x_1 - x_{10})(x_2 - x_{20})$$

$$+ \ldots \qquad (7.1)$$

(7.1) সমীকরণটির বেশ কিছুটা সরলীকরণ করা যায়। লক্ষ করুন ঃ

(i) $V(x_{10}, x_{20})$ হল স্থৈতিক শক্তির নিম্নতম মান। এই মান যদৃচ্ছ (arbitrary) কেননা স্থৈতিক শক্তির পরিবর্তনই বস্তুর গতিকে নির্ধারিত করে, ঐ শক্তির প্রকৃত মান ইচ্ছামতো নেওয়া যায়। আমরা $V(x_{10}, x_{20}) = 0$ ধরে নেব।

(ii) x_1 ও x_2 নির্দেশাঙ্ক অভিমুখে বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল বলের উপাংশ যথাক্রমে $-\frac{\partial V}{\partial x_1}$ ও $-\frac{\partial V}{\partial x_2}$। যদি (x_{10}, x_{20}) বিন্দুতে বস্তুতন্ত্রটির স্থৈতিক শক্তি সর্বনিম্ন হয়, তবে ঐ বিন্দুটি সেটির সাম্যবিন্দু এবং ঐ বিন্দুতে কোনো বল ক্রিয়াশীল থাকতে পারে না। সুতরাং $\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)_0 = \left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)_0 = 0$

(iii) এছাড়া (x_{10}, x_{20}) বিন্দুকে মূলবিন্দু হিসাবে ধরে নিয়ে আমরা দুটি নূতন নির্দেশাঙ্ক ব্যবহার করতে পারি ঃ $q_1 = x_1 - x_{10}$ এবং $q_2 = x_2 - x_{20}$। যেহেতু $dq_1 = dx_1, dq_2 = dx_2$।

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2} = \frac{\partial V}{\partial q_2}, \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} \text{ ও } \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2}$$

এখন আপনি 7.1 সমীকরণটিকে নূতন রূপে লিখতে পারেন ঃ

$$V(q_1, q_2) = \frac{1}{2} V_{11} q_1^2 + \frac{1}{2} V_{22} q_2^2 + V_{12} q_1 q_2 \qquad (7.2)$$

এখানে আমরা $\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}$ ও $\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2}$ এর জায়গায় যথাক্রমে V_{11}, V_{22} ও V_{12} লিখেছি। এছাড়া, যেহেতু আমরা কেবলমাত্র অতি অল্প বিস্তারের কম্পন নিয়ে আলোচনা করতে যাচ্ছি, সেজন্য q_1 ও q_2 এর দুই এর অধিক ঘাতের (যথা $q_1^3, q_1^2 q_2$ ইত্যাদি) রাশিগুলিকে আমরা উপেক্ষা করেছি।

(7.2) সমীকরণটিকে এভাবেও লেখা যায় ঃ

$$V(q_1, q_2) = \frac{1}{2}\sum_i \sum_j V_{ij} q_i q_j \qquad (7.3)$$

এখানে $i, j = 1, 2$ এবং $V_{ij} = V_{ji}$।

বস্তুতন্ত্রের গতিশক্তিকেও একইভাবে লেখা যায়—

$$T(\dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2}\sum_i \sum_j T_{ij}\, \dot{q}_i\, \dot{q}_j \qquad (7.4)$$

এখানে T_{ij} সহগগুলি q_1 ও q_2 এর উপর নির্ভরশীল হতে পারে।

[উদাহরণস্বরূপ, সমতলীয় গোলীয় নির্দেশতন্ত্রে বস্তুকণার গতিশক্তি $T(\dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{1}{2} mr^2\dot{\theta}^2$।

এখানে সহগগুলি $\frac{1}{2}m$ এবং $\frac{1}{2}mr^2$]

(7.3) ও (7.4) সমীকরণ দুটি থেকে আপনি লাগ্রাঞ্জীয় অপেক্ষক পাবেন—

$$L = T - V = \frac{1}{2}\sum_i \sum_j T_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j - \frac{1}{2}\sum_i \sum_j V_{ij} q_i q_j \qquad (7.5)$$

এবার আপনি লাগ্রাঞ্জীয় গতি সমীকরণগুলি লিখতে পারেন—

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(T_{11}\dot{q}_1 + T_{12}\dot{q}_2\right) + \left(V_{11}q_1 + V_{12}q_2\right) = 0$$

বা, $$T_{11}\ddot{q}_1 + T_{12}\ddot{q}_2 + V_{11}q_1 + V_{12}q_2 = 0 \qquad (7.6\ (a)$$

একই উপায়ে $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0$ থেকে

$$T_{12}\ddot{q}_1 + T_{22}\ddot{q}_2 + V_{21}q_1 + V_{22}q_2 = 0 \qquad (7.6\ (b)$$

(7.6 a) ও (7.6 b) সমীকরণদুটিকে একত্রিত করে মেট্রিক্স সমীকরণের রূপে লেখা যায়—

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = 0$$

বা $$T\ddot{q} + Vq = 0 \qquad (7.7)$$

এখানে T ও V দ্বারা দুটি 2×2 বর্গমেট্রিক্স এবং $\ddot{q}$ ও q দ্বারা দুটি দুই সারির স্তম্ভ মেট্রিক্সকে বোঝানো হয়েছে।

(7.7) সমীকরণকে বাম দিক থেকে T^{-1} মেট্রিক্স দিয়ে গুণ করা যাক।

[আপনি নিশ্চয়ই জেনেছেন যে T এর অনোন্যক মেট্রিক্স T^{-1} এর সংজ্ঞা হল $T^{-1} = \mathrm{Adj}T / \mathrm{Det}\,T$

অর্থাৎ $(T^{-1})_{ij} = \mathrm{cof}\ T_{ij} / \mathrm{Det}\,T$

এক্ষেত্রে $$T^{-1} = \begin{pmatrix} T_{22} & -T_{12} \\ -T_{21} & T_{11} \end{pmatrix} / (T_{11}.T_{22} - T_{12}.T_{21})]$$

এখন আপনি পাবেন $T^{-1}T\ddot{q} + T^{-1}Vq = 0$

বা, $$I\ddot{q} + Mq = 0$$

যেখানে $T^{-1}T = I$ (I = একক মেট্রিক্স) এবং $M = T^{-1}V$ (7.8)

কোন বস্তুতন্ত্রে সবকটি সাধারণীকৃত নির্দেশাঙ্ক বরাবর একই কম্পাঙ্কে কম্পন হতে পারে। এই কম্পাঙ্ককে আমরা স্বাভাবিক কম্পাঙ্ক (normal frequency) নামে অভিহিত করব। স্বাভাবিক কম্পাঙ্কের সংখ্যা স্বাতন্ত্র্যসংখ্যার সমান হয়ে থাকে। আমরা যে দুই স্বাতন্ত্র্যসংখ্যার বস্তুতন্ত্রের কথা আলোচনা করছি, তার ক্ষেত্রে q_1 ও q_2 স্বাভাবিক কম্পাঙ্কে আন্দোলিত হয়। অর্থাৎ এগুলিকে লেখা যায় $q_1 = q_{10}e^{iwt}$, $q_2 = q_{20}e^{iwt}$ রূপে, যেখানে $w = 2\pi \times$ স্বাভাবিক কম্পাঙ্ক এবং q_{10}, q_{20} দুই নির্দেশাঙ্ক বরাবর কম্পনের বিস্তার।

এখন $\ddot{q}_1 = -w^2 q_1, \ddot{q}_2 = -w^2 q_2$

সুতরাং $\begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix} = -w^2 \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ এবং (7.8) মেট্রিক্স সমীকরণটিকে লেখা যায় ঃ

$$-Iw^2 q + Mq = 0$$

বা, $$(M - w^2 I)\, q = 0 \tag{7.9}$$

M ($=T^{-1}V$) মেট্রিক্সের পদগুলিকে M_{11}, M_{12} ইত্যাদি লিখে এই মেট্রিক্স সমীকরণটিকে লেখা যায় ঃ

$$\begin{pmatrix} M_{11} - w^2 & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} - w^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad [7.10\,(a)]$$

7.10 (a) সমীকরণের অর্থ Det $(M - w^2I) = 0$,

$$\text{বা, } (M_{11} - w^2)(M_{22} - w^2) - M_{12}M_{21} = 0 \quad [7.10\text{ (b)}]$$

এটি 'w^2'-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ, যেটির সমাধান করে w^2 এর দুটি মান পাওয়া যেতে পারে। সুতরাং এক্ষেত্রে আপনি দুটি সাধারণ কম্পাঙ্ক পাবেন এবং এর যে কোনো কম্পাঙ্কে q_1 ও q_2 রাশিগুলি একত্রে কম্পিত হতে পারে।

আপনার মনে প্রশ্ন জাগতে পারে, এই দুই কম্পাঙ্কে q_1 ও q_2 এর কম্পাঙ্কের বিস্তার কত হবে ? যে কোনো মুহূর্তে q_1 ও q_2 এর অনুপাত নির্ণয় করা মোটেই শক্ত নয়। ধরুন, w^2 এর যে মানগুলি আপনি 7.10 (b) সমীকরণ থেকে পেয়েছেন সেগুলি হল w_1^2 ও w_2^2। 7.10 (a) মেট্রিক্স সমীকরণ থেকে

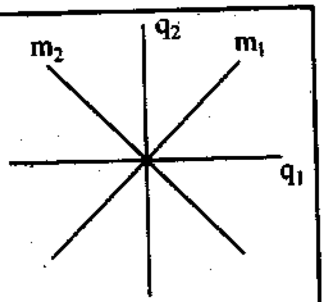
$$(M_{11} - w^2)q_1 + M_{12}q_2 = 0 \qquad \text{বা} \qquad \frac{q_1}{q_2} = -\frac{M_{12}}{M_{11} - w^2}$$

$$\text{এবং} \quad M_{21}q_1 + (M_{22} - w^2)q_2 = 0 \qquad \text{বা} \qquad \frac{q_1}{q_2} = -\frac{M_{22} - w^2}{M_{21}}$$

$\frac{q_1}{q_2}$ অনুপাতের যে দুটি রাশিমালা পাওয়া গেল, তার যে কোনো একটিতে w^2 এর জায়গায় w_1^2 ও w_2^2 বসিয়ে w^1 ও w_2 কৌণিক কম্পাঙ্কে কম্পনের ক্ষেত্রে q_1/q_2 অনুপাতের মান পাওয়া যায়। এই অনুপাত দুটি হল

$$q_1/q_2 = \frac{M_{12}}{w_1^2 - M_{11}} \quad [7.11\text{ (a)}]$$

$$\text{এবং} \qquad q_1/q_2 = \frac{w_2^2 - M_{22}}{M_{21}} \quad [7.11\text{ (b)}]$$



চিত্র 7.1

7.11 (a) ও (b) সম্বন্ধ দুটিকে একটি সমকোণী কার্তেজীয় নির্দেশাঙ্কে q_1 ও q_2 কে অক্ষ রূপে ধরে লেখচিত্র হিসাবে প্রকাশ করা যায় (চিত্র 7.1)। লেখচিত্র দুটি আসলে দুটি সরলরেখা, যেগুলির নতি w_1 ও w_2 স্বাভাবিক কৌণিক কম্পাঙ্কের ক্ষেত্রে যথাক্রমে $m_1 = (w_1^2 - M_{11}) / M_{12}$ ও $m_2 = M_{21} / (w_2^2 - M_{22})$। বস্তুতন্ত্রটি যখন w_1 অথবা w_2 কৌণিক কম্পাঙ্কে কম্পিত হয়, তখন q_1 ও q_2 নির্দেশাঙ্কগুলি এই সরলরেখা দুটির এক একটি বরাবর আন্দোলিত হতে

থাকে। বস্তুতন্ত্রের এই দুটি কম্পনশৈলীকে স্বাভাবিক কম্পনশৈলী (normal mode of oscillation) বলা হয়।

এ পর্যন্ত আপনি দুই স্বাতন্ত্র্যসংখ্যার বস্তুতন্ত্রের অতি অল্প বিস্তারের কম্পন সম্বন্ধে জেনেছেন। এবার আমরা দুই স্বাতন্ত্র্যসংখ্যায় সীমাবদ্ধ না থেকে আরও সাধারণ একটি ক্ষেত্রের কথা বিবেচনা করব যেখানে স্বাতন্ত্র্যসংখ্যার মান n।

7.3 n স্বাতন্ত্র্যসংখ্যার বস্তুতন্ত্র

আগের অনুচ্ছেদে আমরা বিশ্লেষণের যে পদ্ধতি অনুসরণ করেছি এক্ষেত্রেও আমরা সেটিই ব্যবহার করব। আমরা ধরে নিই যে বস্তুতন্ত্রটি সংরক্ষী এবং এর স্বাতন্ত্র্যসংখ্যা n। অর্থাৎ বস্তুতন্ত্রের অবস্থা বোঝাতে $x_1, x_2, ..., x_n$, এই n সংখ্যক সাধারণীকৃত নির্দেশাঙ্কের প্রয়োজন।

পূর্বের মতো ধরা যাক এই বস্তুতন্ত্রের স্থৈতিক শক্তি $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ তখনই সর্বনিম্ন হয় যখন $x_1 = x_{10}, x_2 = x_{20}, ... x_n = x_{n0}$। এখন আমরা V কে $(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$ বিন্দুর সন্নিহিত অঞ্চলে এভাবে প্রকাশ করতে পারি—

$$\begin{aligned} & V(x_1, x_2, ..., x_n) \\ = \quad & V(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}) \end{aligned}$$

$$+\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)_0 (x_1 - x_{10}) + \left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)_0 (x_2 - x_{20}) + ... + \left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)_0 (x_n - x_{n0})$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}\right)_0 (x_1 - x_{10})^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}\right)_0 (x_2 - x_{20})^2 + ... + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_n^2}\right)_0 (x_n - x_{n0})^2$$

$$+\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2}\right)_0 (x_1 - x_{10})(x_2 - x_{20}) + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_3}\right)_0 (x_1 - x_{10})(x_3 - x_{30}) + ...$$

('0' পাদলিপিটি অবকলগুলির $x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}$ বিন্দুতে নির্ণীত মান বোঝাচ্ছে)

$$= V(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}) + \sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)_0 (x_i - x_{i0}) + \frac{1}{2}\sum_i \sum_j \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0 (x_i - x_{i0})(x_j - x_{j0})$$

$+(x_i - x_{i0})$ এর উচ্চতর ঘাতের রাশিসমূহ (7.12)

এখন আপনি আগের অনুচ্ছেদের আলোচনা মতো $V(x_{10}, x_{20}, ..., x_{40})$ কে শূন্য ধরে নিতে পারেন। উপরন্তু, সর্বনিম্ন স্থৈতিক শক্তির অবস্থাটিই সাম্যাবস্থা হওয়ায় এই অবস্থায় সাধারণীকৃত

বলের উপাংশগুলিকে, অর্থাৎ $\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)_0$ প্রভৃতি রাশিকে আমরা শূন্য ধরতে পারি। এছাড়া $(x_i - x_{i0})$ কে q_i হিসাবে এবং $\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}$ রাশিকে V_{ij} হিসাবে নির্দেশ করে লেখা যায় ঃ

$$V(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \frac{1}{2}\sum_i \sum_j V_{ij} q_i q_j (i, j = 1, \ldots, n) \tag{7.13}$$

এখানে আমরা 'q' এর উচ্চতর ঘাতগুলিকে উপেক্ষা করেছি কেননা কম্পনের বিস্তার অতি অল্প বলে ধরা হয়েছে।

লক্ষ করুন, এই সমীকরণ 7.3 সমীকরণের অনুরূপ।

বস্তুতন্ত্রের গতিশক্তিকেও আগের মতো লেখা যায়

$$T(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n) = \frac{1}{2}\sum_i \sum_j T_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j (i, j = 1, \ldots, n) \tag{7.14}$$

এখন আমরা লাগ্রাঞ্জীয় অপেক্ষকটিকে লিখতে পারি ঃ

$$L = T - V = \frac{1}{2}\sum_i \sum_j T_{ij}\, \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{1}{2}\sum_i \sum_j V_{ij} q_i q_j \tag{7.15}$$

আগের অনুচ্ছেদে আমরা দুটি লাগ্রাঞ্জীয় গতি সমীকরণ পেয়েছিলাম। কিন্তু এখন n-সংখ্যক সাধারণীকৃত নির্দেশাঙ্ক থাকায় আমরা n-সংখ্যক গতি সমীকরণ পেতে পারি ঃ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

এই সমীকরণে 7.15 সমীকরণ থেকে L-এর মান বসিয়ে আমরা পাই

$$\frac{d}{dt}\sum_j T_{ij}\dot{q}_j + \sum_j V_{ij} q_i = 0$$

$$\text{বা} \qquad \sum_j T_{ij}\ddot{q}_j + \sum_j V_{ij} q_j = 0 \tag{7.16}$$

[আপনি ভাবতে পারেন 7.15 সমীকরণের $\frac{1}{2}$ উৎপাদকটি এই সমীকরণে অনুপস্থিত কেন। যখন $i = j$ তখন $\frac{1}{2}T_{ii}\,\dot{q}_i^2$ কে $\dot{q}_i$ দিয়ে অবকলনের ফলে $\frac{1}{2}$ উৎপাদকটি থাকে না। যখন $i \neq j$ তখন $\frac{1}{2}T_{ij}\,\dot{q}_i \dot{q}_j$ ও $\frac{1}{2}T_{ji}\,\dot{q}_j\,\dot{q}_i$ এই দুটি সমমান রাশি পাওয়া যায় যেগুলি যোগ করা হয়। সুতরাং সেক্ষেত্রেও $\frac{1}{2}$ উৎপাদকটি আর থাকে না।]

উপরের 7.16 সমীকরণটি আসলে n-সংখ্যক সমীকরণ কেননা $i = 1, 2, \ldots, n$। এগুলিকে আলাদা করে লিখলে পাবেন ঃ

$$T_{11}\ddot{q}_1 + T_{12}\ddot{q}_2 + \ldots + T_{1n}\ddot{q}_n + V_{11}q_1 + V_{12}q_2 + \ldots + V_{1n}q_n = 0$$

$$T_{21}\ddot{q}_1 + T_{22}\ddot{q}_2 + \ldots + T_{2n}\ddot{q}_n + V_{21}q_1 + V_{22}q_2 + \ldots + V_{2n}q_n = 0$$

$$T_{n1}\ddot{q}_1 + T_{n2}\ddot{q}_2 + \ldots + T_{nn}\ddot{q}_n + V_{n1}q_1 + V_{n2}q_2 + \ldots V_{nn}q_n = 0$$

উপরের n সংখ্যক সমীকরণকে আপনি সহজেই মেট্রিক্সের রূপে লিখতে পারেন ঃ

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & \cdots & T_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ T_{n1} & T_{n2} & \cdots & T_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \cdots \\ \ddot{q}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & \cdots & V_{1n} \\ V_{21} & V_{22} & \cdots & V_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ V_{n1} & V_{n2} & \cdots & V_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdots \\ q_n \end{pmatrix} = 0$$

বা $\quad T\ddot{q} + Vq = 0 \qquad (7.17)$

যেখানে T ও V উভয়ই $n \times n$ বর্গমেট্রিক্স এবং $\ddot{q}$ ও q উভয়ই n সারির স্তম্ভমেট্রিক্স। 7.17 সমীকর টিকে বামদিক থেকে T^{-1} মেট্রিক্স দিয়ে গুণ করলে পাওয়া যাবে

$$T^{-1}T\ddot{q} + T^{-1}Vq = 0$$

বা $\quad I\ddot{q} + Mq = 0 \quad$ যেখানে $T^{-1}T = I$ এবং $M = T^{-1}V \qquad (7.18)$

এবার আমরা বস্তুতন্ত্রের স্বাভাবিক কম্পনশৈলীগুলি বিবেচনা করব। যদি কোন স্বাভাবিক কম্পনশৈলীর কৌণিক কম্পাঙ্ক w হয় তবে $q_1, q_2, \ldots q_n$ সবগুলিই ঐ কম্পাঙ্কে আন্দোলিত হতে থাকবে, অর্থাৎ প্রত্যেক q_i নির্দেশাঙ্কই e^{iwt} এর সমানুপাতী হবে। এক্ষেত্রে আমরা $\ddot{q} = -w^2q$ লিখতে পারি। (7.18) সমীকরণটির রূপ এখন হবে—

$$-Iw^2q + Mq = 0$$

বা, $\quad (M - w^2I)q = 0 \qquad 7.19\ (a)$

যেখানে $I = n \times n$ একক মেট্রিক্স। 7.19 সমীকরণটির প্রকৃত রূপ হল ঃ

$$\begin{pmatrix} M_{11} - w^2 & M_{21} & \cdots & Mn_1 \\ M_{12} & M_{22} - w^2 & \cdots & Mn_2 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ M_{1n} & M_{2n} & \cdots & M_{nn} - w^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ q_n \end{pmatrix} = 0 \qquad 7.19\ (b)$$

এই সমীকরণটি সিদ্ধ হওয়ার অর্থ $(M - w^2 I)$ মেট্রিক্স-এর ডিটারমিন্যান্টের মান শূন্য অর্থাৎ

$$|M - w^2 I| = 0 \qquad 7.20\,(a)$$

আপনি ইচ্ছা করলে 7.17 সমীকরণ থেকে সরাসরি পেতে পারেন

$$|V - w^2 T| = 0 \qquad 7.20\,(b)$$

7.19 (b) মেট্রিক্সটি লক্ষ করলে বুঝতে পারবেন যে এর ডিটারমিন্যান্টের একটি পদ হল

$$(M_{11} - w^2)(M_{22} - w^2)\ldots\ldots(M_{nn} - w^2)$$

যেটির মধ্যে 'w^2'-এর n তম ঘাত, অর্থাৎ $(w^2)^n$ পর্যন্ত রয়েছে।

সুতরাং $Der\,(M - w^2 I) = 0$ আসলে w^2 এর একটি n ডিগ্রির সমীকরণ। স্বভাবতই এর n সংখ্যক বীজ থাকবে। ধরা যাক এই বীজগুলি হল $w_1^2, w_2^2, \ldots, w_n^2$ । $w_1, w_2, \ldots, w_n$ ই হল n সংখ্যক স্বাভাবিক কম্পনশৈলীর কৌণিক কম্পাঙ্ক।

w^2 এর বীজগুলি কি বাস্তব ?

এ প্রশ্ন আপনি নিশ্চয়ই করতে পারেন। 7.17 সমীকরণে $q \sim e^{iwt}$ ধরলে লেখা যায় $(V - w^2 T)q = 0$

এর অনুবন্ধী (conjugate) বিপর্যস্ত (transposed) সমীকরণটি হল

$$(V - \overline{w}_2 T)\overline{q} = 0$$

এখানে V ও T মেট্রিক্স দুটি প্রতিসম (symmetric) এবং বাস্তবরাশির দ্বারা গঠিত হওয়ায় এগুলি অপরিবর্তিত আছে। $\overline{w}_2$ রাশিটি w^2 এর অনুবন্ধী এবং $\overline{q}$ হল একটি সারি ও n স্তম্ভবিশিষ্ট একটি মেট্রিক্স যার পদগুলি q মেট্রিক্সের পদগুলির অনুবন্ধী। এখন উপরের দুটি মেট্রিক্স সমীকরণের প্রথমটিকে বামদিকে $\overline{q}$ দিয়ে এবং দ্বিতীয়টিকে বামদিকে q দিয়ে গুণ করলে পাওয়া যায়

$$\overline{q}\,V q - w^2\,\overline{q}\,T q = 0 \qquad 7.21\,(a)$$

$$q\,V\overline{q} - \overline{w}^2\,q\,T\,\overline{q} = 0 \qquad 7.21\,(b)$$

কিন্তু দেখুন, $q\,V\,\overline{q} = \sum_i q_i (V\overline{q})_i$

$$= \sum_i q_i \sum_j V_{ij}\overline{q}_j$$

$$= \sum_j \overline{q}_j \sum_i V_{ji} q_i \qquad (\because V_{ji} = V_{ij})$$

$$= \sum_j \overline{q}_j (V_q)_j = \overline{q}\,V q$$

$\therefore$ 7.21 (a) ও (b) সমীকরণ থেকে, $w^2 \bar{q} Tq = \bar{w}^2 q T \bar{q}$

আগের মতো দেখানো যায় $\bar{q} T q = q T \bar{q}$ । উপরন্তু, T মেট্রিক্সের পদগুলির কোনটি নেগেটিভ নয়, বরং এক বা একাধিক পদ ধনাত্মক। সুতরাং $q T \bar{q} \neq 0$ । $\therefore w^2 = \bar{w}^2$ অর্থাৎ w^2 রাশিটি বাস্তব।

এবার আমরা স্বাভাবিক কম্পনশৈলীতে বিভিন্ন নির্দেশাঙ্ক বরাবর কম্পনের বিস্তারের অনুপাতগুলি নির্ণয় করব। আপনি আগেই দেখেছেন, n স্বাতন্ত্র্যসংখ্যার বস্তুতন্ত্রের n সংখ্যক স্বাভাবিক কম্পাঙ্ক আছে। ধরা যাক, k-তম কম্পনশৈলীর ক্ষেত্রে w-এর মান w_k । i-তম নির্দেশাঙ্ক q_i এর সময়ের সঙ্গে পরিবর্তন এভাবে লেখা যায়

$$q_i = A_i e^{iw_k t}$$

যেখানে $A_i = q_i$ এর বিস্তার। 7.19 সমীকরণ থেকে আপনি পাবেন ঃ

$$\left(M - w_k^2 I\right)A = 0 \tag{7.22}$$

এখানে q এর মতো A একটি স্তম্ভ মেট্রিক্স।

7.22 সমীকরণটি আসলে n সংখ্যক রৈখিক সমীকরণ, যেগুলির মধ্যে $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ অজ্ঞাত। প্রতিটি সমীকরণের ডানদিকের রাশিটি শূন্য হওয়ায় কম্পনের বিস্তার $A_1, A_2, \ldots, A_n$ এর মান নির্দিষ্ট নয়। বরং প্রত্যেক সমীকরণকে A_1 (বা অন্য কোনো A_i) দ্বারা ভাগ করে $A_2/A_1, A_3/A_1, \ldots A_n/A_1$ নির্ণয় করা যায়। আমরা পরে নির্দিষ্ট সমস্যার সমাধানে এই কাজটি করব।

কোনো বস্তুতন্ত্র সাধারণভাবে একটিমাত্র স্বাভাবিক কম্পনশৈলীতে কম্পিত হয় না। বরং তার কম্পনে সব কম্পনশৈলী উপস্থিত থাকে এটি ধরে নেওয়াই ভালো। সেক্ষেত্রে t সময়ে কোনো এক নির্দেশাঙ্ক 'q_i' এর মান হবে।

$$q_i(t) = \sum_k A_{ik} e^{iw_k t}$$

এক্ষেত্রে A_{ik} = k-তম সাধারণ কম্পনশৈলীতে q_i এর বিস্তার। এই k-তম কম্পনশৈলীতে $q_1, q_2, \ldots q_n$ নির্দেশাঙ্কগুলির কম্পনের বিস্তার যথাক্রমে $A_{1k}, A_{2k}, \ldots, A_{nk}$ । ধরুন,

$$A_{1k}^2 + A_{2k}^2 + \ldots + A_{nk}^2 = \sum_i A_{ik}^2 = B_k^2$$

এবং $$A_{1k}/B_k = \alpha_{1k}, A_{2k}/B_k = \alpha_{2k}, \ldots, A_{nk}/B_k = \alpha_{nk}$$ ।

আপনি নিশ্চয়ই বুঝতে পারছেন যে $\sum \alpha_{ik}^2 = \sum A_{ik}^2/B_k^2 = 1$

অর্থাৎ কোনো এক n-মাত্রার নির্দেশতন্ত্রে B_k যেন একটি ভেক্টরের দৈর্ঘ্য, A_{ik} $(i = 1, 2 \ldots, n)$ তার উপাংশ এবং 'α_{ik}'-গুলি ঐ ভেক্টরের দিক-কোসাইন।

ভেক্টরের সঙ্গে তুলনাটি আরও কিছুদূর নিয়ে যাওয়া যায়। ধরুন, q_i নির্দেশাঙ্ক বরাবর একক দৈর্ঘ্যের ভেক্টর e_i। কোনো এক স্বাভাবিক কম্পনশৈলীতে বস্তুতন্ত্রের কম্পনকে যে n মাত্রার ভেক্টর দিয়ে নির্দেশ করা যায় তা হল ঃ

$$\left(A_{1k}e_1 + A_{2k}e_2 + \ldots + A_{nk}e_n\right)e^{iw_k t} = \left(\sum_i A_{ik}e_i\right)e^{iw_k t}$$

এই কম্পনের দিক বরাবর একক দৈর্ঘ্যের ভেক্টর পেতে হলে এর বিস্তার অর্থাৎ $\sum_i A_{ik}e_i$ রাশিকে $\left[\sum A_{ik}^2\right]^{1/2}$ বা B_k দিয়ে ভাগ করতে হবে। এর ফলে আমরা পাই, k-তম কম্পনশৈলীর জন্য একক ভেক্টর

$$\sum\left(A_{ik}/B_k\right)e_i = \sum \alpha_{ik}e_i \tag{7.23}$$

অতি অল্প বিস্তারের কম্পনকে বিশ্লেষণের সাধারণ পদ্ধতিটি আপনি নিশ্চয়ই বুঝতে পেরেছেন। এবার একটি অনুশীলনীর উত্তর দিন। এর পর আমরা নির্দিষ্ট কয়েকটি ক্ষেত্রে পূর্বে আলোচিত পদ্ধতিটি ব্যবহার করব।

অনুশীলনী 1

(i) 7.6 (a, b) অথবা 7.16 সমীকরণগুলি অতি অল্প বিস্তারের কম্পনের গতি সমীকরণ। এগুলি কেবলমাত্র অতি অল্প বিস্তারের ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য কেন?

(ii) w^2 এর মান ঋণাত্মক হতে পারে কি?

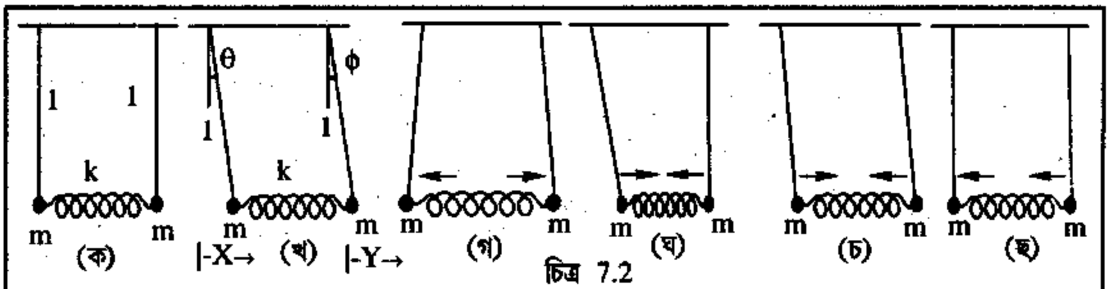
7.4 দুই স্বাতন্ত্র্যসংখ্যার যুগ্মিত দোলন

আগের অনুচ্ছেদে আপনি অতি অল্প বিস্তারের কম্পনের জন্য যে বিশ্লেষণ প্রণালী সম্বন্ধে জেনেছেন, এই অনুচ্ছেদে আমরা দুই স্বাতন্ত্র্যসংখ্যার কয়েকটি বস্তুতন্ত্রের ক্ষেত্রে তার প্রয়োগ করব।

7.4.1 যুগ্মিত দোলক

ধরা যাক, পাশাপাশি ঝোলানো দুটি অনুরূপ সরল দোলকের প্রতিটির দৈর্ঘ্য l এবং পিন্ডের ভর m। পিন্ডদুটি একটি ভরহীন স্প্রিং দ্বারা যুক্ত, যার স্প্রিং ধ্রুবক k। দোলক দুটি যখন খাড়াভাবে সাম্য অবস্থায় থাকে তখন স্প্রিংটি স্বাভাবিক অবস্থায় থাকে [চিত্র 7.2 (ক)]। যখন সেগুলি উল্লম্ব সমতলে থেকে আন্দোলিত হয়, তখন স্প্রিংটি প্রসারিত বা সংকুচিত হয়। যার ফলে পিণ্ডদুটির উপর সমমান ও বিপরীত বল ক্রিয়া করে। দোলকের সুতা ভরহীন ও অপ্রসার্য বলে ধরা হবে।

দোলক দুটির দোলনের বিস্তার অতি অল্প ধরে নিলে সাম্যাবস্থা থেকে পিন্ডদুটির সরণ x ও y কে অনুভূমিক বলে ধরে নেওয়া যায়। দোলনদুটির সাম্যাবস্থা থেকে কৌণিক সরণ θ ও φ কেও অতি ক্ষুদ্র কোণ বলে ধরা যায় [চিত্র 7.2 (খ)]।



চিত্র 7.2

দোলকের পিন্ড দুটির গতিশক্তি $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ ও $\frac{1}{2}m\dot{y}^2$।

সুতরাং বস্তুতন্ত্রের মোট গতিশক্তি

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2$$

আমরা যদি x ও y কে দুটি সাধারণীকৃত নির্দেশাঙ্ক বলে ধরে নিই তবে T মেট্রিক্সটি লিখতে পারি ($T = \frac{1}{2}\sum\sum T_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$ এর সঙ্গে তুলনা করে) :

$$T = \begin{pmatrix} m & o \\ o & m \end{pmatrix}$$

দোলকদুটির স্থৈতিক শক্তির দুটি ভাগ আছে, একটি পিন্ডদুটির অভিকর্ষণ স্থৈতিক শক্তি, অপরটি প্রসারণ বা সংকোচনের ফলে স্প্রিং-এর স্থৈতিক শক্তি। প্রথমটির মান $\frac{1}{2}mgl(\theta^2 + \phi^2)$, যেখানে কোণ দুটির মান ক্ষুদ্র হওয়ায় $(1-\cos\theta)$ ও $(1-\cos\phi)$ কে যথাক্রমে $\theta^2/2$ ও $\phi^2/2$ লেখা হয়েছে। অন্যদিকে স্প্রিং-এর সংকোচনের মান $(x-y)$ এবং এর ফলে উদ্ভূত স্থৈতিক শক্তি $\frac{1}{2}k(x-y)^2$। দুটিকে একত্রিত করে বস্তুতন্ত্রের স্থৈতিক শক্তি

$$V = \frac{1}{2}mgl(\theta^2 + \phi^2) + \frac{1}{2}k(x-y)^2$$

$$= \frac{mg}{2l}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}k(x-y)^2 \qquad (\because x = l\theta, y = l\phi)$$

$$= \frac{m}{2}\left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right)(x^2 + y^2) - kxy$$

$\frac{g}{l} = w_0^2, \frac{h}{m} = w_1^2$ লিখে,

$$V = \frac{m}{2}\left(w_0^2 + w_1^2\right)\left(x^2 + y^2\right) - mw_1^2 xy$$

অর্থাৎ V মেট্রিক্সটি দাঁড়ায়

$$V = \begin{pmatrix} m\left(w_0^2 + w_1^2\right) & -mw_1^2 \\ -mw_1^2 & m\left(w_0^2 + w_1^2\right) \end{pmatrix}$$

$$\therefore \left(V - w^2T\right) = \begin{pmatrix} m\left(w_0^2 + w_1^2 - w^2\right) & -mw_1^2 \\ -mw_1^2 & m\left(w_0^2 + w_1^2 - w^2\right) \end{pmatrix}$$

আপনি আগেই দেখেছেন w^2 এর মান পাওয়া যায় $\left|V - w^2T\right| = 0$ সমীকরণ থেকে। এক্ষেত্রে

$$\left|V - w^2T\right| = \begin{vmatrix} m(w_0^2 + w_1^2 - w^2) & -mw_1^2 \\ -mw_1^2 & m\left(w_0^2 + w_1^2 - w^2\right) \end{vmatrix} = 0$$

অর্থাৎ, $\quad m^2\left(w_0^2 + w_1^2 - w^2\right)^2 - m^2w_1^4 = 0$

বা $\quad w_0^2 + w_1^2 - w^2 = \pm w_1^2$

সুতরাং $w^2 = w_0^2$ অথবা $w^2 = w_0^2 + 2w_1^2 = w_2^2$ ধরুন।

x ও y সরণের বিস্তার যদি A_x ও A_y হয় তবে

$$(V - w^2T)\,q = 0$$

মেট্রিক্স সমীকরণে $q_1 = x = A_x e^{iwt}, q_2 = y = A_y e^{iwt}$ লিখে পাওয়া যায়

$$\frac{A_x}{A_y} = \frac{w_1^2}{w_0^2 + w_1^2 - w^2} \qquad (7.24)$$

যখন $w^2 = w_0^2,\ A_x = A_y = A$ ধরুন

এবং যখন $w^2 = w_0^2 + 2w_1^2,\ A_x = -A_y = B$ ধরুন।

প্রথম ক্ষেত্রে দোলক দুটির সরণ সমীকরণ

$$x = A\cos w_0 t, \qquad y = A\cos w_0 t$$

এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে

$$x = B\cos w_2 t, \qquad y = -B\cos w_2 t$$

দুই কম্পাঙ্কে দোলনগুলির উপরিপাতের ফলে লব্ধি সরণ হবে

$$x = A\cos w_0t + B\cos w_2t \qquad 7.25\text{ (a)}$$

$$y = A\cos w_0t - B\cos w_2t \qquad 7.25\text{ (b)}$$

A ও B এখানে অনির্দিষ্ট দুই ধ্রুবক। দোলক দুটির পিন্ডের প্রাথমিক অবস্থান ও বেগ জানা থাকলে ধ্রুবক দুটির মান জানা যাবে। ধরুন, যখন $t = 0, x = a, y = 0$।

7.25 (a) ও (b) সমীকরণে এই মানগুলি বসিয়ে পাবেন

$$a = A + B\,; \quad 0 = A - B$$

সুতরাং $A = B = \frac{a}{2}$

$$\therefore \quad x = \frac{1}{2}a\left(\cos w_0t + \cos w_2t\right) \qquad 7.26\text{ (a)}$$

$$y = \frac{1}{2}a\left(\cos w_0t - \cos w_2t\right) \qquad 7.26\text{ (b)}$$

স্পষ্টই বোঝা যায়, x ও y এর মান দুটি পৃথক কম্পাঙ্কের সরল দোলগতির উপরিপাতনে ফলে উদ্ভূত। এ সম্বন্ধে আপনি EPH 03 পাঠক্রমে অনেকটাই জেনেছেন। স্প্রিংটি যদি খুব আলগা হয় অর্থাৎ যদি $\kappa << \frac{mg}{l}$ হয় তবে $w_1^2 << w_0^2$ লেখা যায় এবং w_0 ও w_2 এর পার্থক্য খুব কম হয়। এই অবস্থায় x ও y এর মান আপনি এভাবে লিখতে পারেন : 7.26 (a) থেকে

$$x = a\cos\frac{w_0 + w_2}{2}t \ \cos\frac{w_2 - w_0}{2}t$$

এখন $\frac{w_0 + w_2}{2} = w_0'$ লেখা যাক, যেখানে $w_0' = w_0$ ও w_2 এর গড় মান।

আবার $w_2^2 = w_0^2\left(1 + 2\frac{w_1^2}{w_0^2}\right)$

বা $w_2 \approx w_0\left(1 + \frac{w_1^2}{w_0^2}\right)$ কেননা $w_1^2 << w_0^2$

$$\therefore \quad w_2 - w_0 = \frac{w_1^2}{w_0}$$

$$\therefore x = a\cos w_0't \ \cos\frac{w_1^2}{2w_0}t \qquad 7.27\text{(a)}$$

একই ভাবে 7.26 (b) থেকে $y = a \sin w'_0 t \;\; \sin \frac{w_1^2}{2w_0} t$ 7.27(b)

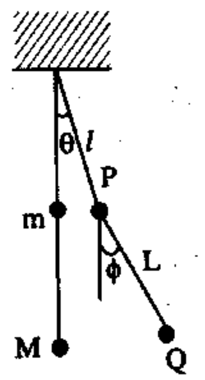
7.27 (a) ও (b) সমীকরণ দুটি থেকে বোঝা যায় যে দুটি দোলকই $\frac{w'_0}{2\pi}$ কম্পাঙ্কে আন্দোলিত হয় কিন্তু তাদের দোলনের বিস্তার $\frac{1}{2\pi}\frac{w_1^2}{2w_0}$ কম্পাঙ্কে বা $4\pi\frac{w_0}{w_1^2} = 4\pi\sqrt{\frac{g}{l}}.\frac{m}{k}$ পর্যায়কালে ওঠানামা করে।

আপনি নিশ্চয়ই লক্ষ করেছেন, এক্ষেত্রে বস্তুতন্ত্রের স্বাতন্ত্র্যসংখ্যা 2। এবার আমরা দুই স্বাতন্ত্র্যসংখ্যার আর একটি বস্তুতন্ত্রের কথা বিবেচনা করব।

7.4.2 জোড়া দোলক (Double pendulum)

যখন একটি সরল দোলকের পিন্ড থেকে আর একটি দোলক ঝোলানো থাকে তখন সমগ্র ব্যবস্থাটিকে জোড়া দোলক বলা হয়। এক্ষেত্রে নীচের দোলকটির সুতার টান সরাসরি উপরের দোলকের পিন্ডের উপর ক্রিয়া করে। আবার উপরের পিন্ডটি নীচের দোলকের আলম্বন বিন্দু হওয়ায় সেটির সরণের ফলে নীচের দোলকের সুতার এবং তার পিন্ডের উপর ক্রিয়াশীল বলের দিক পরিবর্তিত হয়।

ধরা যাক, দৃঢ় আলম্ব থেকে ঝোলানো উপরের দোলকটির দৈর্ঘ্য L এবং পিন্ডের ভর M। এই পিন্ড থেকে ঝোলানো নীচের দোলকটির দৈর্ঘ্য l এবং পিন্ডের ভর m। উল্লম্ব অবস্থা থেকে উপরের ও নীচের দোলকের সুতার কৌণিক সরণ যথাক্রমে θ ও ϕ। আমরা ধরে নেব দোলকদুটি সর্বদা একই সমতলে থেকে আন্দোলিত হয় [চিত্র 7.3]।



চিত্র 7.3

θ কৌণিক সরণের ফলে উপরের পিন্ড P সাম্যাবস্থান থেকে $L(1 - \cos\theta)$ পরিমাণ উচ্চতা লাভ করে। নীচের পিন্ড Q ϕ কৌণিক সরণের ফলে $l(1 - \cos\phi)$ উচ্চতা লাভ করে আবার সেটির আলম্বন বিন্দু $L(1 - \cos\theta)$ পরিমাণ উঠে যাওয়ার ফলে সাম্যাবস্থান থেকে তার মোট উচ্চতা হয় $L(1 - \cos\theta) + l(1 - \cos\phi)$। দোলকের সুতাগুলি ভরহীন ও অপ্রসার্য হওয়ায় বস্তুতন্ত্রটির স্থৈতিক শক্তি হবে

$$V = MgL(1 - \cos\theta) + mg\left[L(1 - \cos\theta) + l(1 - \cos\phi)\right]$$

$$= MgL.\theta^2/2 + mg\left[L.\theta^2/2 + l.\phi^2/2\right] \quad \text{(কেননা θ ও ϕ অতি ক্ষুদ্র কোণ।)} \quad (7.28)$$

বস্তুতন্ত্রের গতিশক্তি

$$T = \frac{1}{2}M(L\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}m(L\dot{\theta} + l\dot{\phi})^2 \tag{7.29}$$

কেননা উপরের পিন্ডের বেগ $L\dot{\theta}$ এবং নীচের পিন্ডের বেগ = উপরের পিন্ডের বেগ + $l\dot{\phi} = L\dot{\theta} + l\dot{\phi}$ । উভয় বেগই অনুভূমিক বলে ধরা যায়। T এর রাশিমালার সরলীকরণের জন্য ধরুন

$$\dot{x}^2 = ML^2\dot{\theta}^2$$

এবং $$\dot{y}^2 = m(L\dot{\theta} + l\dot{\phi})^2$$

অর্থাৎ $$x = \sqrt{M}\,L\theta \text{ এবং } y = \sqrt{m}(L\theta + l\phi)$$

x ও y কে আমরা সাধারণীকৃত নির্দেশাঙ্ক q_1 ও q_2 রূপে ধরতে পারি।

∴ x ও y এর হিসাবে, 7.29 সমীকরণ থেকে গতিশক্তি

$$T = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2$$

সুতরাং 7.4 অনুচ্ছেদের আলোচনা অনুযায়ী মেট্রিক্স $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

আবার, $$L\theta = x/\sqrt{M}$$

$$l\phi = y/\sqrt{m} - L\theta = y/\sqrt{m} - x/\sqrt{M}$$

লক্ষ্য করুন দোলক দুটির পিন্ডদ্বয়ের সাম্যাবস্থা থেকে সরণ যথাক্রমে $S = L\theta = x/\sqrt{M}$ এবং $s = L\theta + l\phi = y/\sqrt{m}$ ।

এখন 7.28 সমীকরণ থেকে উপরের $L\theta$ ও $l\phi$ এর মান বসিয়ে আমরা পাই

$$V = \frac{1}{2}Mg\frac{x^2}{ML} + \frac{1}{2}mg\left[\frac{x^2}{ML} + \frac{1}{l}\left(y/\sqrt{m} - x/\sqrt{M}\right)^2\right]$$

$$= \frac{g}{2}\left[\left(1 + \frac{m}{M}\right)\frac{1}{L} + \frac{m}{M}\frac{1}{l}\right]x^2 + \frac{g}{2l}y^2 - g\sqrt{\frac{m}{M}}\frac{1}{l}xy$$

এই সমীকরণে $\frac{m}{M} = e, \frac{g}{L} = w_1^2, \frac{g}{l} = w_2^2$ লিখে আমরা পাই

$$V = \frac{1}{2}\left[(1+e)w_1^2 + ew_2^2\right]x^2 + \frac{1}{2}w_2^2y^2 - \sqrt{e}w_2^2xy$$

এখন আমরা V মেট্রিক্সটি লিখতে পারি—

$$V = \begin{pmatrix} (1+e)w_1^2 + ew_2^2 & -\sqrt{e}w_2^2 \\ -\sqrt{e}w_2^2 & w_2^2 \end{pmatrix}$$

কাজেই জোড়া দোলকের মেট্রিক্স সমীকরণ হল

$$(V - w^2T)q = \begin{pmatrix} (1+e)w_1^2 + ew_2^2 - w^2 & -\sqrt{e}w_2^2 \\ -\sqrt{e}w_2^2 & w_2^2 - w^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad \ldots\ 7.30$$

কিন্তু এই সমীকরণটি সিদ্ধ হওয়ার অর্থ (পূর্ব অনুচ্ছেদ দ্রষ্টব্য) ডিটারমিন্যান্ট

$$| V - w^2T | = 0$$

বা
$$\begin{vmatrix} (1+e)w_1^2 + ew_2^2 - w^2 & -\sqrt{e}w_2^2 \\ -\sqrt{e}w_2^2 & w_2^2 - w^2 \end{vmatrix} = 0$$

বা ডিটারমিন্যান্টের মান নির্ণয় করে,

$$w^4 - w^2(1+e)(w_1^2 + w_2^2) + (1+e)w_1^2w_2^2 = 0 \qquad (7.31)$$

এই সমীকরণ থেকে আপনি w^2 এর দুটি মান পেতে পারেন।

x ও y এর বিস্তার যদি A_x ও A_y হয়, তবে 7.30 মেট্রিক্স সমীকরণ থেকে পাবেন

$$\frac{A_x}{A_y} = \frac{\sqrt{e}w_2^2}{(1+e)w_1^2 + ew_2^2 - w^2} = \frac{w_2^2 - w^2}{\sqrt{e}w_2^2} \qquad (7.32)$$

দোলক দুটির প্রকৃত সরণের বিস্তারের অনুপাত

$$\frac{A_P}{A_Q} = \frac{A_x/\sqrt{M}}{A_y/\sqrt{m}} = \frac{A_x}{A_y}.\sqrt{e} = \frac{w_2^2 - w^2}{w_2^2} \qquad (7.33)$$

w^2 এর নির্ণীত মান ব্যবহার করে এই অনুপাতটি নির্ণয় করা যায়।

এবার আমরা কয়েকটি বিশেষ ক্ষেত্র বিবেচনা করব।

ক্ষেত্র I ঃ ধরুন, $M = m, l = L$। তাহলে $e = 1$, $w_1^2 = w_2^2 = w_0^2$ (ধরুন) 7.31 সমীকরণটি এখন দাঁড়ায়

$$w^4 - 4w^2w_0^2 + 2w_0^4 = 0$$

বা $w^2 = \frac{1}{2}\left[4w_0^2 + \left(16w_0^4 - 8w_0^4\right)^{1/2}\right] = w_0^2\left(2 \pm \sqrt{2}\right)$

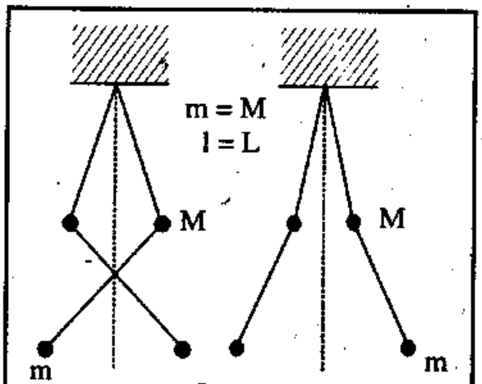
অর্থাৎ $w = 1.848\ w_0, 0.765 w_0$ ।

7.33 সমীকরণ থেকে উপর ও নীচের দোলকের পিন্ড দুটির সরণের অনুপাত

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{w_0^2 - w^2}{w_0^2}$$

$$= \frac{w_0^2 - w_0^2\left(2+\sqrt{2}\right)}{w_0^2} = -2.414\text{, যখন } w^2 = w_0^2\left(2+\sqrt{2}\right)$$

এবং $$\frac{w_0^2 - w_0^2\left(2-\sqrt{2}\right)}{w_0^2} = 0.414 \text{ যখন } w^2 = w_0^2\left(2-\sqrt{2}_2\right)$$



চিত্র 7.4

প্রথম ক্ষেত্রে পিন্ড দুটির সরণ পরস্পর বিপরীত দিকে এবং তাদের অনুপাত 2.414 : 1। দ্বিতীয় ক্ষেত্রে তাদের সরণ একই দিকে এবং অনুপাত 0.414 : 1। 7.4 চিত্রে দোলনের প্রকৃতি দেখানো হয়েছে।

ক্ষেত্র II ঃ

ধরুন, $l = L$, কিন্তু $M >> m$ অর্থাৎ $w_1^2 = w_2^2 = w_0^2$ কিন্তু $e << 1$।

7.31 সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়

$$w^4 - 2w^2w_0^2(1+e) + (1+e)w_0^4 = 0$$

$$\therefore w^2 = w_0^2\left[1+e \pm \left\{(1+e)^2 - (1+e)\right\}^{1/2}\right]$$

$$\approx w_0^2\left[1+e \pm \sqrt{e}\right]$$ (এখানে আমরা e^2 কে উপেক্ষা করেছি)

বা $w \approx w_0$

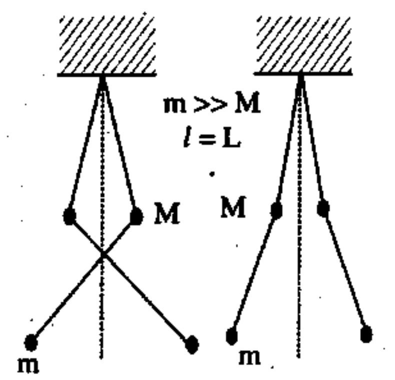
7.32 সমীকরণ থেকে, w^2এর এই দুই মানের জন্য

$$A_x / A_y = \frac{w_0^2 - w^2}{\sqrt{e}\, w_0^2}$$

বা $A_P / A_Q = (A_x/A_y).\sqrt{e} = \frac{w_0^2 - w^2}{w_0^2} = 1 - \left[1 + e \pm \sqrt{e}\right]$

$$= -e \mp \sqrt{e} \approx \mp\sqrt{e} \quad \text{কেননা} \quad e << \sqrt{e}$$

লক্ষ করুন, w^2 এর দুই মানই প্রায় w_0^2 এর সমান। সুতরাং দুই ক্ষেত্রেই পিন্ডগুলি প্রায় w_0 কৌণিক কম্পাঙ্কে আন্দোলিত হবে। যখন $w = w_0\left[1 + e + \sqrt{e}\right]^{1/2}$, তখন নীচের Q পিন্ডের সরণ উপরের P পিন্ডের তুলনায় $\sqrt{\frac{M}{m}}$ গুণ বেশি ও বিপরীত দিকে হবে। আবার যখন $w = w_0\left[1 + e - \sqrt{e}\right]^{1/2}$, তখনও নীচের Q পিন্ডের সরণ উপরেরটির তুলনায় $\sqrt{\frac{M}{m}}$ গুণ বেশি কিন্তু একই দিকে হবে। 7.5 চিত্র থেকে দোলনের প্রকৃতিটি আপনি বুঝতে পারবেন।



চিত্র 7.5

ক্ষেত্র III ঃ

এবার ধরুন $l = L$, $m >> M$। তখন $w_1^2 = w_2^2 = w_0^2$ কিন্তু $e >> 1$। e এর তুলনায় 1 কে উপেক্ষা করে 7.31 সমীকরণটিকে লেখা যায় ঃ

$$w^4 - 2ew^2w_0^2 + ew_0^4 = 0$$

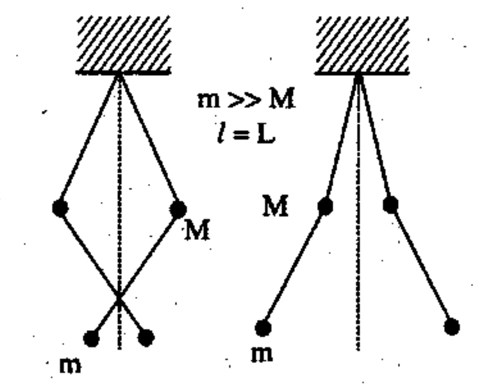
$$\therefore w^2 = ew_0^2 \pm \left(e^2w_0^4 - ew_0^4\right)^{1/2}$$

$$= w_0^2\left[e \pm \sqrt{e^2 - e}\right]$$

$$= ew_0^2\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{e}}\right]$$

$$= ew_0^2\left[1 \pm \left(1 - \frac{1}{2e}\right)\right]$$

$$= 2ew_0^2 \quad \text{অথবা} \quad \frac{1}{2}w_0^2$$



চিত্র 7.6

যখন $w^2 = 2ew_0^2$, উপরের ও নীচের পিন্ড দুটির সরণের অনুপাত

$$\frac{A_P}{A_Q} = \frac{w_0^2 - w^2}{w_0^2} = \frac{w_0^2 - 2ew_0^2}{w_0^2} = 1 - 2e \approx -2e \quad \text{বা} \quad -2\frac{m}{M}$$

এক্ষেত্রে P পিন্ডের সরণ Q পিণ্ডের তুলনায় 2m/M গুণ বেশি ও বিপরীতমুখী।

যখন $w^2 = \frac{1}{2}w_0^2$, $\frac{A_P}{A_Q} = \frac{w_0^2 - \frac{1}{2}w_0^2}{w_0^2} = \frac{1}{2}$

এক্ষেত্রে জোড়া দোলকটি 2l দৈর্ঘ্যের একটি সরল দোলকের মত আচরণ করে এবং স্বভাবতই p পিন্ডের সরণ Q এর অর্ধেক হয়। 7.6 চিত্রে দোলনের প্রকৃতি দেখানো হয়েছে।

7.4.3 প্রতিসম সরলরৈখিক ত্রিপরমাণুক অণু (Linear Symmetric Triatomic Molecule) :

কার্বন ডাই-অক্সাইড গ্যাসের একটি অণুর গঠন কেমন জানেন ?

একটি কার্বন পরমাণুর দুপাশে 116 pm (1 pm = 10^{-12} m) দূরত্বে দুটি অক্সিজেন পরমাণু থাকে আর এই তিনটি পরমাণু থাকে এক সরলরেখায়। এবার আমরা এরকম একটি অণুর কম্পন সম্বন্ধে আলোচনা করব।

ধরুন, কেন্দ্রের M ভরের পরমাণুর সঙ্গে তার দুপাশে m ভরের দুটি পরমাণু দুটি স্প্রিং দিয়ে যুক্ত, যেগুলির স্প্রিং ধ্রুবক κ। সাম্যাবস্থান থেকে পরমাণুগুলির সরণ সংযোগকারী সরলরেখা বরাবর যথাক্রমে y_1, y_2 ও y_3 এবং এগুলিকে প্রাথমিকভাবে আমরা সাধারণীকৃত নির্দেশাঙ্ক হিসাবে ধরে নেব।

অণুটির মোট গতিশক্তি

$$T = \frac{1}{2}m\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{y}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}_3^2 \tag{7.34}$$

অণুর স্থৈতিক শক্তি দুটি স্প্রিং-এর সংকোচন ও প্রসারণ থেকে উদ্ভূত হয়। এই শক্তির মান

$$V = \frac{1}{2}\kappa(y_2 - y_1)^2 + \frac{1}{2}\kappa(y_3 - y_2)^2$$

$$= \frac{1}{2}\kappa\left(y_1^2 + 2y_2^2 + y_3^2 - 2y_1y_2 - 2y_2y_3\right) \tag{7.35}$$

এখন আমরা T ও V মেট্রিক্সগুলি লিখতে পারি :

$$T = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}, \quad V = \kappa\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

এখন মেট্রিক্স

$$M = T^{-1}V = \kappa\begin{pmatrix} 1/m & 0 & 0 \\ 0 & 1/M & 0 \\ 0 & 0 & 1/m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\kappa}{m} & -\frac{\kappa}{m} & 0 \\ -\frac{\kappa}{M} & 2\frac{\kappa}{m} & -\frac{\kappa}{M} \\ 0 & -\frac{\kappa}{m} & \frac{\kappa}{m} \end{pmatrix}$$

স্বাভাবিক কম্পাঙ্কগুলি নির্ণয় করার জন্য আমরা $|M - w^2 I| = 0$ শর্তটি ব্যবহার করতে পারি। এর থেকে পাওয়া যায় $\left(\frac{\kappa}{m} = w_1^2, \frac{\kappa}{M} = w_2^2\right.$ লিখে)

$$\begin{vmatrix} \frac{\kappa}{m} - w^2 & -\frac{\kappa}{m} & 0 \\ -\frac{\kappa}{M} & 2\frac{\kappa}{M} - w^2 & -\frac{\kappa}{M} \\ 0 & -\frac{\kappa}{m} & \frac{\kappa}{m} - w^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w_1^2 - w^2 & -w_1^2 & 0 \\ -w_2^2 & 2w_2^2 - w^2 & -w_2^2 \\ 0 & -w_1^2 & w_1^2 - w^2 \end{vmatrix} = 0$$

অর্থাৎ $\left(w_1^2 - w^2\right)^2\left(2w_2^2 - w^2\right) - 2w_1^2 w_2^2\left(w_1^2 - w^2\right) = 0$

বা $\left(w_1^2 - w^2\right)\left(2w_1^2 w_2^2 - w_1^2 w^2 - 2w_2^2 w^2 + w^4 - 2w_1^2 w_2^2\right) = 0$

বা $w^2\left(w_1^2 - w^2\right)\left(w^2 - w_1^2 - 2w_2^2\right) = 0$ (7.36)

সুতরাং $w^2 = 0, w_1^2$ বা $w_1^2 + 2w_2^2$,

প্রথম বীজটির দিকে লক্ষ করুন। যখন $w^2 = 0$ বা $w = 0$।

y_1, y_2 বা y_3 এর ক্ষেত্রে $\ddot{y}_i = 0$ অর্থাৎ অণুটির কোনো কম্পন ঘটার বদলে প্রতিটি পরমাণু একই বেগে সরতে থাকবে। এটি আসলে অণুর সার্বিক চলনগতি বোঝায়।

যখন $w^2 = w_1^2$ বা $w_1^2 + 2w_2^2$ তখন y_1, y_2 ও y_3 এর বিস্তার যথাক্রমে A_1, A_2 ও A_3 ধরা যাক। $(M - w^2 I)\,A = 0$, এই মেট্রিক্স সমীকরণ থেকে লেখা যায়

$$\begin{pmatrix} w_1^2 - w^2 & -w_1^2 & 0 \\ -w_2^2 & 2w_2^2 - w^2 & -w_2^2 \\ 0 & -w_1^2 & w_1^2 - w^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = 0$$

মেট্রিক্স গুণের পর,

$$(w_1^2 - w^2)A_1 - w_1^2 A_2 = 0$$

$$-w_2^2 A_1 + (2w_2^2 - w^2)A_2 - w_2^2 A_3 = 0$$

এবং $$-w_1^2 A_2 + (w_1^2 - w^2)A_3 = 0$$

$$\therefore \frac{A_2}{A_1} = \frac{w_1^2 - w^2}{w_1^2}$$

আবার $w_2^2 A_3 = -w_2^2 A_1 + (2w_2^2 - w^2)A_2$

$$= -w_2^2 A_1 + (2w_2^2 - w^2).\frac{w_1^2 - w^2}{w_1^2}.A_1$$

$$\therefore \frac{A_3}{A_1} = -1 + (2w_2^2 - w^2)\frac{w_1^2 - w^2}{w_1^2 w_2^2}$$

যখন $w^2 = w_1^2, \frac{A_2}{A_1} = 0, \frac{A_3}{A_1} = -1$ বা $A_2 = 0, A_3 = -A_1$

এর অর্থ এই, যে কেন্দ্রের পরমাণুটি অনড় থাকে এবং দুই প্রান্তের পরমাণুগুলির সরণ সমমান ও বিপরীতমুখী হয়।

অন্য একটি স্বাভাবিক কম্পনশৈলীতে $w^2 = w_1^2 + 2w_2^2$

$$\therefore \frac{A_2}{A_1} = \frac{w_1^2 - w_1^2 - 2w_2^2}{w_1^2} = -\frac{2w_2^2}{w_1^2} = -2\frac{m}{M}$$

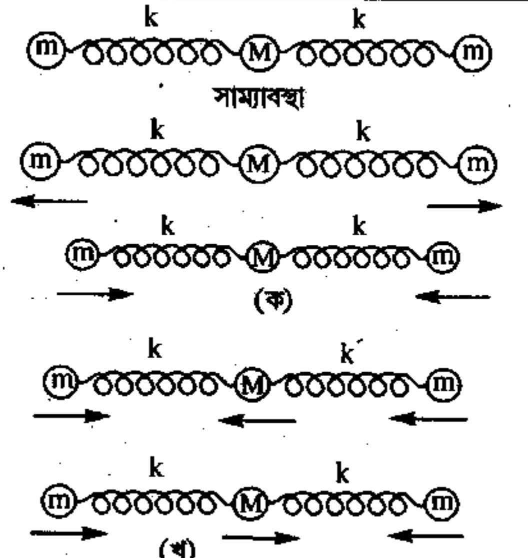
$$\frac{A_3}{A_1} = -1 + (2w_2^2 - w_1^2 - 2w_2^2)\frac{w_1^2 - w_1^2 - 2w_2^2}{w_1^2 w_2^2}$$

$$= -1 + 2 = 1$$

অর্থাৎ এক্ষেত্রে প্রান্তের পরমাণু দুটির সরণ অনুরূপ কিন্তু কেন্দ্রের পরমাণুটির সরণ এগুলির সরণের $\frac{2m}{M}$ গুণ এবং বিপরীতমুখী।

এই উদাহরণে যে বিষয়টি লক্ষ্যণীয় তা হল এই যে আমরা তিনটি পরমাণুর একটি করে নির্দেশাঙ্ক ধরে গণনা শুরু করলেও দুটিমাত্র স্বাভাবিক কম্পনশৈলী দেখতে পেয়েছি। এর কারণ,

নির্দেশাঙ্কগুলি একটি শর্ত পালন করে। শর্তটি এই যে অণুর ভরকেন্দ্রটি স্থির থাকে। 7.7 চিত্রে অণুর কম্পনশৈলীগুলি দেখানো হয়েছে, যার থেকে আপনি এই শর্তটি বুঝতে পারবেন।



চিত্র 7.7

এবার একটি অনুশীলনীর উত্তর দিন।

অনুশীলনী 2

একটি ঘর্ষণহীন অনুভূমিক তলে $(0, \pm a)$ বিন্দুদ্বয়ে দুটি আধান q, q এবং $(\pm 2a, 0)$ বিন্দুদ্বয়ে দুটি আধান 6q, 6q রয়েছে। মূলবিন্দুতে (0, 0) একটি m ভরের বিন্দুভর আছে যার আধান q।

(i) মূলবিন্দুর নিকটবর্তী অঞ্চলে (x, y) বিন্দুতে তড়িৎ-বিভব নির্ণয় করুন।

(ii) দেখান যে মূলবিন্দুতে বিন্দুভরটি সুস্থিত সাম্যে (stable equlibrium) থাকবে।

(iii) বিন্দুভরের স্বাভাবিক কম্পনশৈলীর কম্পাঙ্কগুলি নির্ণয় করুন।

7.5 দুই-এর অধিক স্বাতন্ত্র্যসংখ্যার বস্তুতন্ত্রের কম্পন

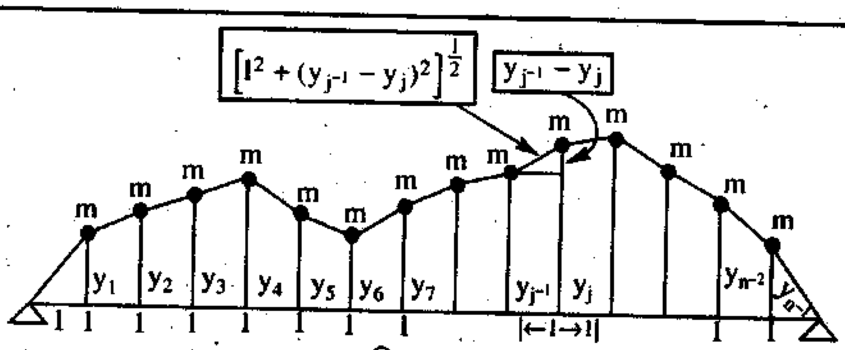
আগের অনুচ্ছেদে আপনি দুই স্বাতন্ত্র্যসংখ্যার কয়েকটি বস্তুতন্ত্রের অতি অল্প বিস্তারের কম্পন সম্বন্ধে জানতে পেরেছেন। এগুলির ক্ষেত্রে আমরা দুটি করে স্বাভাবিক কম্পনশৈলী দেখতে পেয়েছি। এবার আমরা অপেক্ষাকৃত জটিল বস্তুতন্ত্রের কথা আলোচনা করব, যার স্বাতন্ত্র্যসংখ্যা দুই বা ততোধিক হতে পারে।

● **টান দেওয়া তারের সংলগ্ন n সংখ্যক অনুরূপ বিন্দুভর**

ধরা যাক, দুই প্রান্তে আবন্ধ একটি ভরহীন তারের টান F এবং m ভরের n-সংখ্যক বিন্দুভর ঐ তারের সঙ্গে l দূরত্ব অন্তর সংলগ্ন আছে (চিত্র 7.8)। প্রথম ও শেষ বিন্দুভর দুটিও তারের দুই প্রান্ত থেকে l দূরত্বে আছে। বিন্দুভরগুলি এক নির্দিষ্ট সমতলে থেকে অনুপ্রস্থভাবে কম্পিত হয়। তারের মোট দৈর্ঘ্য স্পষ্টতই $(n+1)l$। বিন্দুভরগুলির সরণ যথাক্রমে $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ বলে ধরা যাক। স্বল্পবিস্তারের কম্পনের ক্ষেত্রে $y_i << l$। যেহেতু আবন্ধ প্রান্ত দুটিতে সরণের মান শূন্য, আমরা y_0 এবং y_{n+1} কে শূন্য ধরব।

তারের প্রথম খণ্ডটির দৈর্ঘ্য l থেকে বেড়ে হয়

$$\left(l^2 + y_1^2\right)^{1/2} = l\left(1 + y_1^2/l^2\right)^{1/2} = l\left(1 + y_1^2/2l^2\right)$$



চিত্র 7.8

অর্থাৎ এই খণ্ডটির প্রসারণ $l\left(1 + y_1^2/2l^2\right) - l = y_1^2/2l$

এইভাবে তারের j-তম খণ্ডটির দৈর্ঘ্য বেড়ে হয়

$$\left[l^2 + \left(y_j - y_{j-1}\right)^2\right]^{1/2} = l\left[1 + \left(\frac{y_j - y_{j-1}}{l}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$= l + \left(y_i - y_{j-1}\right)^2 / 2l$$

সুতরাং এই খণ্ডটির প্রসারণ $l + \left(y_i - y_{j-1}\right)^2 / 2l - l$

$$= \left(y_i - y_{j-1}\right)^2 / 2l$$

যেহেতু টান F এর মান স্থির থাকে, এই প্রসারণ ঘটাতে কৃতকার্য

$$= F\left(y_j - y_{j-1}\right)^2 / 2l$$

সুতরাং সমগ্র তারের স্থৈতিক শক্তি

$$V = \sum_{j=1}^{n+1} F\left(y_j - y_{j-1}\right)^2 / 2l \quad \text{যেখানে} \quad y_0 = y_{n+1} = 0 \tag{7.37}$$

বস্তুতন্ত্রটির গতিশক্তি বিন্দুভরগুলির গতিশক্তির যোগফলের সমান।

অর্থাৎ $T = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} m\dot{y}_j^2$ (7.38)

V মেট্রিক্সটি লিখতে হলে 7.37 এর রাশিমালাটিকে ভেঙে লিখতে হবে ঃ

$$V = \frac{F}{2l}\left[y_1^2 + (y_2 - y_1)^2 + (y_3 - y_2)^2 + \ldots + (y_n - y_{n-1})^2 + y_n^2\right]$$

$$= \frac{F}{2l}\left[2y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2 + \ldots + 2y_n^2 - 2y_1y_2 - 2y_2y_3 - \ldots - 2y_ny_{n-1}\right]$$

আপনি নিশ্চয়ই বুঝতে পারছেন যে V মেট্রিক্সটি একটি $n \times n$ আকারের বর্গমেট্রিক্স। অনুরূপভাবে T মেট্রিক্সটিও একটি $n \times n$ বর্গমেট্রিক্স। এখন আমরা স্বাভাবিক কম্পাঙ্কগুলির জন্য সাধারণ সমাধান বার না করে, বিশেষ দুটি ক্ষেত্রে বস্তুতন্ত্রের কম্পনের বিশ্লেষণ করব।

যখন $n = 2$ ঃ

বিন্দুভরের সংখ্যা যখন 2, তখন স্বাতন্ত্র্যসংখ্যার মানও 2। আগের অনুচ্ছেদে আপনি এই অবস্থার সঙ্গে পরিচিত হয়েছেন। এক্ষেত্রে $T = \frac{1}{2}m\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2$, সুতরাং T মেট্রিক্সটি হল

$$T = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} = mI \text{ এবং } T^{-1} = \frac{1}{m}I$$

অন্যদিকে $V = \frac{F}{2l}\left(2y_1^2 + 2y_2^2 - 2y_1y_2\right)$

সুতরাং মেট্রিক্স $V = \frac{F}{l}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\therefore T^{-1}V - w^2I = \frac{E}{ml}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - w^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2w_0^2 - w^2 & -w_0^2 \\ -w_0^2 & 2w_0^2 - w^2 \end{pmatrix} \qquad (7.39)$$

এখানে আমরা $F/ml = w_0^2$ লিখেছি। w^2 এর মান পাওয়ার জন্য এই মেট্রিক্সের ডিটারমিন্যান্টটির মান শূন্য ধরতে হবে।

সুতরাং $\begin{vmatrix} 2w_0^2 - w^2 & -w_0^2 \\ -w_0^2 & 2w_0^2 - w^2 \end{vmatrix} = 0$

বা $\left(2w_0^2 - w^2\right)^2 - w_0^4 = 0$

বা $\left(2w_0^2 - w^2 + w_0^2\right)\left(2w_0^2 - w^2 - w_0^2\right) = 0 \qquad (7.40)$

সুতরাং $w^2 = 3w_0^2$ বা w_0^2।

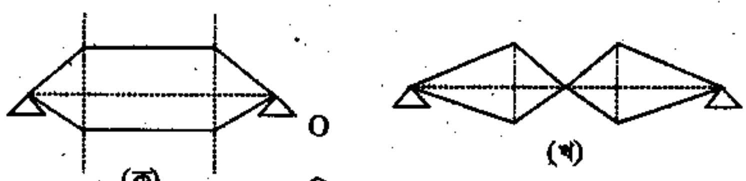
এখন আপনি 7.20 (a) সমীকরণটি ব্যবহার করে দুটি বিন্দুভরের কম্পনের বিস্তারের অনুপাত বার করতে পারেন। y_1 ও y_2 এর বিস্তার যথাক্রমে A_1 ও A_2 ধরলে

$$\left(2w_0^2 - w^2\right)A_1 - w_0^2 A_2 = 0$$

বা $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{w_0^2}{2w_0^2 - w^2}$।

যখন $w^2 = 3w_0^2$ তখন $A_1/A_2 = -1$ অর্থাৎ বিন্দুভর দুটির সরণ সমমান ও বিপরীতমুখী।

যখন $w^2 = w_0^2$, তখন $A_1/A_2 = 1$ অর্থাৎ বিন্দুভর দুটির সরণ একেবারেই অনুরূপ। 7.9 চিত্রে বিন্দুভর দুটির কম্পনের প্রকৃতি দেখতে পাবেন।



চিত্র 7.9

যখন n = 3 :

এখন $T = \frac{1}{2}m\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}_3^2$

সুতরাং মেট্রিক্স $T = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$

এক্ষেত্রে $V = \frac{F}{2l}\left(2y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2 - 2y_1y_2 - 2y_2y_3\right)$

এবং মেট্রিক্স $V = \frac{F}{l}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\therefore T^{-1}V - w^2 I = \frac{F}{ml}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\-1 & 2 & -1\\0 & -1 & 2\end{pmatrix} - w^2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2w_0^2 - w^2 & -w_0^2 & 0\\-w_0^2 & 2w_0^2 - w^2 & -w_0^2\\0 & -w_0^2 & 2w_0^2 - w^2\end{pmatrix} \left(\frac{F}{ml} = w_0^2 \text{ লিখে}\right)$$

আগের মতো, $$\begin{vmatrix}2w_0^2 - w^2 & -w_0^2 & 0\\-w_0^2 & 2w_0^2 - w^2 & -w_0^2\\0 & -w_0^2 & 2w_0^2 - w^2\end{vmatrix} = 0 \qquad (7.41)$$

বা, $\left(2w_0^2 - w^2\right)^3 - 2w_0^4\left(2w_0^2 - w^2\right) = 0$

বা $\left(2w_0^2 - w^2\right)\left(w^4 - 4w_0^2w^2 + 2w_0^4\right) = 0 \qquad (7.42)$

এর বীজগুলি হল ঃ $w^2 = 2w_0^2, \quad w_0^2\left(2 \pm \sqrt{2}\right)$

সুতরাং স্বাভাবিক কম্পনশৈলীর কৌণিক কম্পাঙ্কগুলি w_1, w_2 ও w_3 হলে, $w_1^2 = 2w_0^2, w_2^2 = w_0^2\left(2+\sqrt{2}\right)$ এবং $w_3^2 = w_0^2\left(2-\sqrt{2}\right)$

কোনো একটি স্বাভাবিক কম্পনশৈলীতে y_1, y_2 ও y_3 এর বিস্তার যথাক্রমে A_1, A_2 ও A_3 হলে $(T^{-1}V - w^2 I)A = 0$ মেট্রিক্স সমীকরণ থেকে লেখা যায় ঃ

$$\left(2w_0^2 - w^2\right)A_1 - w_0^2 A_2 = 0$$

$$-w_0^2 A_2 + \left(2w_0^2 - w^2\right)A_3 = 0$$

$$\therefore \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{w_0^2}{2w_0^2 - w^2}, \frac{A_2}{A_3} = \frac{2w_0^2 - w^2}{w_0^2}$$

অর্থাৎ $A_1 : A_2 : A_3 :: w_0^2 : 2w_0^2 - w^2 : w_0^2$

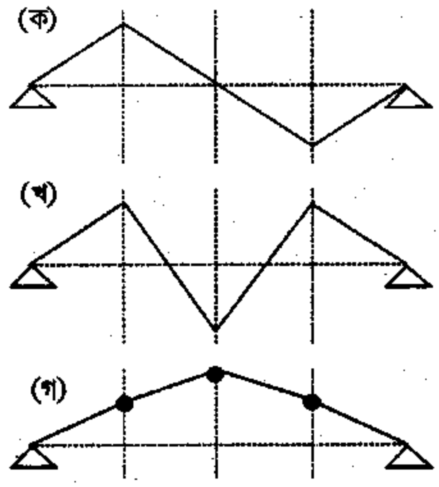
সুতরাং A_1, A_2 ও A_3 এর অনুপাত

যখন $w^2 = 2w_0^2$ তখন $1 : 0 : 1$

যখন $w^2 = w_0^2\left(2+\sqrt{2}\right)$ তখন $1 : -\sqrt{2} : 1$

যখন $w^2 = w_0^2\left(2-\sqrt{2}\right)$ তখন $1:\sqrt{2}:1$

7.10 চিত্রে তিনটি স্বাভাবিক কম্পাঙ্কের জন্য কম্পনশৈলী দেখানো হয়েছে।



চিত্র 7.10

অনুশীলনী 3

আগের অনুচ্ছেদে টান দেওয়া তারে যখন তিনটি বিন্দুভর সংলগ্ন আছে, তখন মাঝের বিন্দুভরটির ভর m না হয়ে nm হল 7.41 সমীকরণের কী পরিবর্তন হত ?

7.6 সারাংশ

এই এককের প্রথমেই আপনি অতি অল্প বিস্তারের কম্পনের বিশ্লেষণ পদ্ধতির সঙ্গে পরিচিত হয়েছেন। বিষয়টি বোঝার সুবিধার জন্য আমরা প্রথমে মাত্র দুটি স্বতন্ত্র নির্দেশাঙ্কবিশিষ্ট বস্তুতন্ত্রের সম্বন্ধে আলোচনা করেছি এবং তার পরেই যে কোনো সংখ্যক স্বাতন্ত্র্যসংখ্যার বস্তুতন্ত্রের ক্ষেত্রে বিশ্লেষণের একই পদ্ধতি প্রয়োগ করেছি। এই প্রসঙ্গে আপনি বস্তুতন্ত্রের সাধারণ কম্পনশৈলী ও স্বাভাবিক কম্পাঙ্কের ধারণার সঙ্গে পরিচিত হয়েছেন।

অতি অল্পবিস্তারের কম্পনের উদাহরণ হিসাবে আমরা প্রথমে দুই স্বাতন্ত্র্যসংখ্যার কয়েকটি বস্তুতন্ত্র সম্বন্ধে আলোচনা করেছি। এগুলি হল স্প্রিং দ্বারা যুগ্মিত দোলক, একটি দোলক থেকে অন্যটি আলম্বিত, এমন জোড়া দোলক এবং কার্বন ডাই-অক্সাইড অণুর মতো সরলরৈখিক ত্রিপরমাণুক অণু।

আরও বেশি সংখ্যক স্বাতন্ত্র্যের উদাহরণ হিসাবে টান দেওয়া তারে পরপর সমদূরত্বে সংলগ্ন বিন্দুভরসমূহের কম্পন আলোচনা করা হয়েছে।

7.7 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

1. কোনও একটি বস্তুতন্ত্রকে দুটি স্বতন্ত্র নির্দেশাঙ্ক দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বর্ণনা করা যায়। সাম্যাবস্থার নিকটবর্তী অঞ্চলে সেটির অতি অল্প বিস্তারের কম্পনের স্বাভাবিক কম্পনশৈলীর কম্পাঙ্কগুলি কীভাবে নির্ণয় করা যায়?

2. একজোড়া অনুরূপ দোলককে পাশাপাশি রেখে তার পিণ্ডগুলিকে ভরহীন স্প্রিং দিয়ে যুক্ত করে যুগ্মিত করা হল। দোলক দুটি এক উল্লম্ব সমতলে থাকে ধরে নিয়ে যেগুলির স্বাভাবিক কম্পনশৈলীগুলি নিরূপণ করুন।

   স্প্রিংটি অত্যন্ত দুর্বল হলে দোলনে কী বৈশিষ্ট্য দেখা যাবে?

3. একটি সরল দোলক অপর একটি সরল দোলকের পিন্ড থেকে আলম্বিত আছে। দোলক দুটি একই উল্লম্ব সমতলে অতি অল্প বিস্তারে আন্দোলিত হলে ঐ জোড়া দোলকের স্বাভাবিক কম্পনশৈলীগুলি নির্ণয় করুন।

   যখন দোলকের পিন্ডগুলির ভর সমান কিন্তু উপরের দোলকের দৈর্ঘ্য নীচের দোলকের দ্বিগুণ, তখন স্বাভাবিক কম্পাঙ্কগুলির মান নির্ণয় করুন।

4. একটি প্রতিসম সরলরৈখিক ত্রিপরমাণুক অণুর স্বল্পবিস্তারের কম্পনের কম্পাঙ্কগুলি নির্ণয় করুন।

   CS_2 অণুর ক্ষেত্রে দুই কম্পাঙ্কের অনুপাত কত হবে?

5. কোনও বস্তুতন্ত্রের দুই-এর অধিক যে কোনও সংখ্যক স্বাতন্ত্র্যসংখ্যা থাকলে তার স্বাভাবিক কম্পনশৈলীগুলি কীভাবে নির্ণয় করা যায়, ব্যাখ্যা করুন।

6. একটি টান দেওয়া তারে n-সংখ্যক বিন্দুভর পর পর সমান দূরত্বে সংলগ্ন আছে, যাতে তারটি $(n-1)$-সংখ্যক সমান দৈর্ঘ্যের অংশে বিভক্ত হয়। বিন্দুভরগুলি স্বল্প বিস্তারে এক সমতলে কম্পিত হলে সমগ্র বস্তুতন্ত্রটির T ও V মেট্রিক্সগুলি লিখুন। যখন বিন্দুভরের সংখ্যা 3, তখন স্বাভাবিক কম্পনের কম্পাঙ্কগুলি নির্ণয় করুন।

7.8 উত্তরমালা

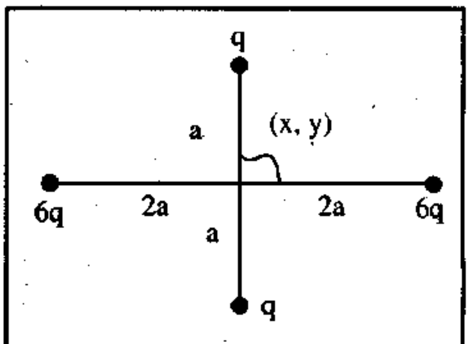
অনুশীলনী 1

(i) সমীকরণগুলি প্রতিষ্ঠিত করতে আমরা স্থৈতিক শক্তির রাশিমালা 'q' এর তৃতীয় ও তদূর্ধ্ব ঘাত, অর্থাৎ $q_i^3, q_i^2q_2, q_1q_2q_3$ প্রভৃতি রাশিগুলিকে উপেক্ষা করেছি। কেবলমাত্র অতি অল্পবিস্তারের কম্পনের ক্ষেত্রেই এটি করা যুক্তিযুক্ত।

(ii) w^2 এর কোনও একটি মান যদি ঋণাত্মক হয় তবে ধরুন সেটি হল $-w_k^2$। সেক্ষেত্রে $q_i(t)$ এর অন্তর্গত একটি রাশি হবে $A_{ik}e^{i(\pm iw_k).t}$ বা $A_{ik}e^{\pm w_k t}$ এই রাশিটি কোনও কম্পন নির্দেশ করে না বরং বস্তুর ক্রমবর্ধমান বা ক্রমহ্রাসমান সরণ নির্দেশ করে। সুতরাং w^2 এর মান ভৌত কারণেই ঋণাত্মক হতে পারে না।

অনুশীলনী 2

(i) 7.11 চিত্রে আধানগুলির অবস্থান দেখানো হয়েছে।



চিত্র 7.11

x ও y এর মান 'a' এর তুলনায় ক্ষুদ্র হলে (x, y) অবস্থানে তড়িৎ বিভবের মান $\cup$ লেখা যায় ঃ

$$4\pi\varepsilon_0 \cup$$

$$= \frac{6q}{AP} + \frac{6q}{BP} + \frac{q}{CP} + \frac{q}{DP}$$

$$= 6q\left[(2a+x)^2 + y^2\right]^{-1/2} + 6q\left[(2a-x)^2 + y^2\right]^{-1/2}$$

$$+q\left[(a+y)^2 + x^2\right]^{-1/2} + q\left[(a-y)^2 + x^2\right]^{-1/2}$$

$$= \frac{6q}{2a}\left[\left(1+\frac{x}{2a}\right)^2 + \left(\frac{y}{2a}\right)^2\right]^{-1/2} + \frac{6q}{2a}\left[\left(1-\frac{x}{2a}\right)^2 + \left(\frac{y}{2a}\right)^2\right]^{-1/2}$$

$$+\frac{q}{a}\left[\left(1+\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2\right]^{-1/2} + \frac{q}{a}\left[\left(1-\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2\right]^{-1/2}$$

$$= \frac{6q}{2a}\left[1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{4a^2}+\frac{y^2}{4a^2}\right]^{-1/2} + \frac{6q}{2a}\left[1-\frac{x}{a}+\frac{x^2}{4a^2}+\frac{y^2}{4a^2}\right]^{-1/2}$$

$$+\frac{q}{a}\left[1+\frac{2y}{a}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{a^2}\right]^{-1/2} + \frac{q}{a}\left[1-\frac{2y}{a}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{a^2}\right]^{-1/2}$$

$$= \frac{q}{a}\left[1-\frac{x}{2a}-\frac{x^2}{8a^2}-\frac{y^2}{8a^2}+\frac{3}{8}\cdot\frac{x^2}{a^2}\right]+\frac{q}{a}\left[1+\frac{x}{2a}-\frac{x^2}{8a^2}-\frac{y^2}{8a^2}+\frac{3}{8}\frac{x^2}{a^2}\right]$$

$$+\frac{q}{a}\left[1-\frac{y}{a}-\frac{y^2}{2a^2}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{3}{2}\frac{y^2}{a^2}\right]+\frac{q}{a}\left[1+\frac{y}{a}-\frac{y^2}{2a^2}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{3}{2}\frac{y^2}{a^2}\right]$$

$$= \frac{3q}{a}\left[2-\frac{x^2}{4a^2}-\frac{y^2}{4a^2}+\frac{3}{4}\frac{x^2}{a^2}\right]+\frac{q}{a}\left[2-\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{a^2}+3\frac{y^2}{a^2}\right]$$

$$= \frac{8q}{a}+\frac{q}{4a^3}\left[-3x^2-3y^2+9x^2-4y^2-4x^2+12y^2\right]$$

$$= \frac{8q}{a}+\frac{q}{4a^3}(2x^2+5y^2)$$

সুতরাং $\cup = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\left(8a^2+\frac{x^2}{2}+\frac{5}{4}y^2\right)$

(ii) মূলবিন্দুতে $(x=0, y=0)$ $\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial y}=0$, সুতরাং ঐ বিন্দুতে অবস্থিত আধানের উপর কোনও বল কাজ করে না। উপরন্তু ঐ বিন্দুতে তড়িৎ বিভবের মান সর্বনিম্ন কেননা x^2 ও y^2 রাশিগুলি সর্বত্রই ধনাত্মক। সুতরাং মূলবিন্দুতে আধানটি সুস্থিত সাম্যে থাকবে।

(iii) x ও y কে সাধারণীকৃত নির্দেশাঙ্ক হিসাবে ধরে নেওয়া যাক। তড়িৎ বিভব হিসাবে $\cup$ এর পরিবর্তে

$$\cup' = \cup - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}.8a^2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{5}{4}y^2\right)$$

ব্যবহার করলে q আধানের স্থৈতিক শক্তি

$$V = q\cup' = \frac{1}{2}\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a^3}(2x^2+5y^2)$$

$\therefore$ মেট্রিক্স $V = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a^3}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix} = C\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$ ধরুন।

m ভরের বিন্দুবস্তুর গতিশক্তি $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2$

সুতরাং গতিশক্তির মেট্রিক্স $T = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$

এখন $|T^{-1}V - w^2 I| = 0$ সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়

$$\begin{vmatrix} \frac{2C}{m} - w^2 & 0 \\ 0 & \frac{5c}{m} - w^2 \end{vmatrix} = 0$$

বা $w^2 = \frac{2C}{m}$ বা $\frac{5}{6}m$, অর্থাৎ $\frac{2q^2}{8\pi\varepsilon_0 a^3 m}$ বা $\frac{5q^2}{8\pi\varepsilon_0 a^3 m}$

সুতরাং $w_1^2 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^3 m}, w_2^2 = \frac{5q^2}{8\pi\varepsilon_0 a^3 m}$ হলে

স্বাভাবিক কম্পাঙ্কগুলি হল

$$\frac{w_1}{2\pi} \text{ এবং } \frac{w_2}{2\pi} \text{ ।}$$

অনুশীলনী 3

টান দেওয়া তারে সংলগ্ন বিন্দুভরগুলির মাঝেরটির ভর M এবং অন্য দুটির ভর m হলে T মেট্রিক্সটি হবে

$$T = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad T^{-1}V - w^2 I = \frac{F}{ml}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} - w^2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= w_0^2\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} - w^2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(এখানে $M/m = k$ লেখা হয়েছে)

$$= \begin{pmatrix} 2w_0^2 & -w_0^2 & 0 \\ -kw_0^2 & 2kw_0^2 - w^2 & -kw_0^2 \\ 0 & -w_0^2 & 2w_0^2 - w^2 \end{pmatrix}$$

সুতরাং নির্ণেয় সমীকরণটি হল $\begin{vmatrix} 2w_0^2 & -w_0^2 & 0 \\ -kw_0^2 & 2kw_0^2 - w^2 & -kw_0^2 \\ 0 & -w_0^2 & 2w_0^2 - w^2 \end{vmatrix} = 0$

সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. 7.2 অনুচ্ছেদে এ বিষয়ে আলোচনা করা হয়েছে।

2. 7.4.1 অনুচ্ছেদটি দেখুন।

   প্রশ্নের দ্বিতীয় অংশের উত্তর দিতে লক্ষ করুন যে স্প্রিংটি অত্যন্ত দুর্বল হলে k অত্যন্ত ক্ষুদ্র হবে এবং $w_1^2 << w_0^2$ হবে। এর ফলে $w_2 \approx w_0$ এবং $w_0' = w_0$ ধরা যাবে। আবার $\sin$ (বা $\cos$) $\frac{w_1^2}{2w_0}t$ রাশিটি সময়ের সঙ্গে অত্যন্ত ধীরে পরিবর্তিত হবে। মোটের উপর বলা যায় যে দোলক দুটিই প্রায় w_0 কৌণিক কম্পাঙ্কে আন্দোলিত হবে এবং তাদের দোলনের বিস্তার অত্যন্ত ধীরগতিতে a এবং শূন্যের মধ্যে ওঠানামা করবে।

3. প্রশ্নের প্রথম অংশের উত্তর 7.4.2 অনুচ্ছেদে পাবেন।

   দ্বিতীয় অংশের উত্তর ঃ যদি $M = m, L = 2l$ হয় তবে $e = 1,\ w_1^2 = \frac{g}{L} = \frac{g}{2l} = \frac{1}{2}w_2^2$ ।

   ধরুন, $w_2^2 = 2w_0^2, w_1^2 = w_0^2$ । 7.31 সমীকরণটি এখন দাঁড়ায়

$$w^4 - 2w^2\left(w_0^2 + 2w_0^2\right) + 2w_0^2.2w_0^2 = 0$$

বা $$w^4 - 6w^2w_0^2 + 4w_0^4 = 0$$

$$\therefore \quad w^2 = \left(3 \pm \sqrt{5}\right) w_0^2$$

w^2 এর এই মান দুটি থেকে স্বাভাবিক কম্পাঙ্কগুলির মান পাওয়া যাবে।

4. প্রশ্নের প্রথম অংশের উত্তর 7.4.3 অনুচ্ছেদে পাবেন। কম্পাঙ্ক দুটির অনুপাত $\left(w_1^2 + 2w_2^2\right)$ এবং w_1^2 এর পাওয়া যাবে। এই অনুপাত

$$\frac{\sqrt{w_1^2 + 2w_2^2}}{w_1^2} = \sqrt{1 + 2\frac{w_2^2}{w_1^2}} = \sqrt{1 + 2\frac{m}{M}} = \sqrt{\frac{19}{3}} = 2.52$$

($\because CS_2$ অণুর ক্ষেত্রে $\frac{m}{M} = \frac{32}{12} = \frac{8}{3}$)

5. প্রশ্নটির উত্তর 7.3 অনুচ্ছেদে পাবেন।

6. 7.5 অনুচ্ছেদে প্রশ্নটির উত্তর পাওয়া যাবে।

একক ৪ ❑ কণা ও তরঙ্গের দ্বিচারিতা

গঠন ঃ

৪.1 প্রস্তাবনা ও উদ্দেশ্য

৪.1.1 প্রস্তাবনা

৪.1.2 উদ্দেশ্য

৪.2 পদার্থের কণাতত্ত্ব

৪.2.1 প্রাচীন কণাতত্ত্ব

৪.2.2 ডালটনের পরমাণুতত্ত্ব

৪.2.3 অ্যাভোগেড্রোর প্রকল্প

৪.2.4 সনাতন বলবিদ্যা

৪.2.5 ব্রাউনীয় গতি

৪.2.6 গ্যাসের গতীয় তত্ত্ব

৪.2.7 আয়নের গতি

৪.2.8 ইলেকট্রনের আবিষ্কার

৪.2.9 এক্স-রশ্মির আবিষ্কার

৪.2.10 সনাতন বলবিদ্যা ও বিশেষ আপেক্ষিকতা

৪.3 আলোকের তরঙ্গ-তত্ত্ব

৪.3.1 আলোকের ধর্মের প্রাচীন ধারণা ও ফারমাটের নীতি

৪.3.2 হাইগেনসের নীতি

৪.3.3 নিউটনের পরীক্ষা ও করপাস্কল তত্ত্ব

৪.3.4 আলোকের ব্যবর্তন ও ব্যতিচার

৪.3.5 আলোকের সমবর্তন

৪.3.6 ফ্রেনেলের ইথার তত্ত্ব

৪.3.7 ম্যাক্সওয়েলের তড়িচ্চুম্বকীয় তরঙ্গ তত্ত্ব

৪.3.8 তড়িচ্চুম্বকীয় তত্ত্বের কয়েকটি সিদ্ধান্ত

8.4 তরঙ্গের কোয়ান্টাম তত্ত্ব

8.4.1 কৃষ্ণবস্তুর বিকিরণ ও প্ল্যাঙ্কের কোয়ান্টাম তত্ত্ব

8.5 আলোক-তড়িৎ ক্রিয়া ও আইনস্টাইনের ফোটন তত্ত্ব

8.5.1 আলোক-তড়িৎ ক্রিয়ার বৈশিষ্ট্য

8.5.2 আইনস্টাইনের ফোটনতত্ত্ব ও আলোক-তড়িৎ ক্রিয়ার সমীকরণ

8.5.3 আইনস্টাইনের ফোটন তত্ত্ব ও প্ল্যাঙ্কের কম্পক তত্ত্বের তুলনা

8.5.4 আইনস্টাইনের ফোটনতত্ত্ব ও নিউটনের কণাস্কল তত্ত্বের তুলনা ও ফোটনের দ্বিচারিতা

8.6 বোহ্‌রের হাইড্রোজেন পরমাণুর তত্ত্ব

8.7 কম্পটন ক্রিয়া

8.7.1 কম্পটনের আবিষ্কার

8.7.2 ফোটনের ভরবেগ

8.7.3 কম্পটন ক্রিয়ার তত্ত্ব

8.8 তরঙ্গের দ্বিচারিতা

8.9 পদার্থের তরঙ্গ ধর্ম

8.9.1 ডি ব্রগলির প্রকল্প

8.9.2 ডি ব্রগলির প্রকল্পের সত্যতা পরীক্ষা

8.9.3 কণার দ্বিচারিতা

8.10 সারাংশ

8.11 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

8.12 অনুশীলনী ও সর্বশেষ প্রশ্নাবলির উত্তর

8.1.1 প্রস্তাবনা

আপনারা জানেন যে পদার্থ অণু এবং অণুগুলি পরমাণুরূপ কণার দ্বারা গঠিত। পরমাণুগুলিও আবার ইলেকট্রন, প্রোটন, নিউট্রন প্রভৃতি অধিকতর মৌলিক কণার দ্বারা গঠিত। অপরপক্ষে আলোক হল একপ্রকার তরঙ্গ। নিউটনের সময়কালেই আলোকের তরঙ্গ ধর্ম আবিষ্কৃত হয়। ম্যাক্সওয়েলের তত্ত্ব অনুযায়ী আলোক হল তড়িচ্চুম্বকীয়

তরঙ্গ। তরঙ্গধর্ম কণাধর্ম থেকে সম্পূর্ণ পৃথক। কিন্তু পরবর্তীকালে দেখা যায় যে আলোক তরঙ্গ হলেও কোনও কোনও ক্ষেত্রে তা কণার মতো আচরণ করে। একেই আলোকের দ্বিচারিতা বলে। অদৃশ্য অতিবেগুনীরশ্মি, এক্সরশ্মি ও গামারশ্মিগুলিও আলোকের চেয়ে ক্ষুদ্রতর তরঙ্গদৈর্ঘের তড়িচ্চুম্বকীয় তরঙ্গ। কিন্তু আলোকের মতো এই রশ্মিগুলিও কোনও কোনও ক্ষেত্রে কণার অনুরূপ ক্রিয়া করে। তরঙ্গের এই দ্বিচারিতাধর্ম লক্ষ করে ডি ব্রগলি প্রস্তাব করেন যে কণারও দ্বিচারিতা অর্থাৎ তরঙ্গধর্ম আছে। পরে পরীক্ষার দ্বারা ডি ব্রগলির এই প্রকল্প সত্য প্রমাণিত হয় এবং কোয়ান্টাম বলবিদ্যার ভিত্তি স্থাপিত হয়।

8.1.2 উদ্দেশ্য

এই এককটি আয়ত্ত করলে আপনি—

- পদার্থের কণাগুলি কি ও কিভাবে আবিষ্কৃত হয় ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- নিউটনের বলবিদ্যা কণার ক্ষেত্রে কতটা প্রযোজ্য, তা বুঝতে পারবেন।
- আলোকের তরঙ্গতত্ত্বের কিভাবে উদ্ভব হয় এবং এই তত্ত্বের সাফল্যের দিকগুলি ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- তরঙ্গতত্ত্বের ব্যর্থতা ও প্ল্যাঙ্কের কোয়ান্টামতত্ত্বের সাফল্য ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- আইনস্টাইনের ফোটনতত্ত্ব কি ও এর সাফল্য ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- প্ল্যাঙ্ক ও আইনস্টাইনের কোয়ন্টাম তত্ত্ব বোহ্‌রের হাইড্রোজেন পরমাণুর তত্ত্ব ও কম্পটনের ইলেকট্রন নিক্ষেপনের তত্ত্বদ্বারা কিরূপ সমর্থিত হয়, তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- আলোক ও অন্যান্য তড়িচ্চুম্বকীয় তরঙ্গের দ্বিচারিতা ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- ডি ব্রগলির প্রকল্প কি ও এর সত্যতা কিভাবে পরীক্ষিত হয়, তা জানতে পারবেন এবং কণার দ্বিচারিতা ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

8.2 পদার্থের কণাতত্ত্ব (Particle Theory of Matter) ও কণার গতিবিদ্যা (Particle Dynamics)

8.2.1 প্রাচীন কণাতত্ত্ব

আপনারা জানেন যে, পদার্থের ক্ষুদ্রতম কণা হল 'অণু' এবং এই অণুগুলি এক বা একাধিক 'পরমাণু' দ্বারা গঠিত। কিন্তু খুবই আশ্চর্যের বিষয়, পরীক্ষার দ্বারা এই অণু ও পরমাণুর আবিষ্কার করতে মানুষের দু-হাজার বৎসরের চেয়েও বেশী সময় লেগেছে। প্রাচীন গ্রীক দার্শনিকগণ মনে করতেন যে মাটি, জল, অগ্নি ও বায়ু —এই চারটি হল সকল পদার্থের উপাদান এবং এগুলি নিরবচ্ছিন্ন, অর্থাৎ এগুলির কোনও ক্ষুদ্রতম কণা নেই। বিখ্যাত প্রাচীন গ্রীক পণ্ডিত অ্যারিস্টটল (Aristotle, 384—322 B.C.)-ও এই মতবাদে বিশ্বাসী ছিলেন। অপরপক্ষে অপর একজন গ্রীক

দার্শনিক ডেমোক্রিটাস (Democritus, about 420 B.C.)-এর মতবাদ ছিল যে পদার্থ অতি ক্ষুদ্রক্ষুদ্র বিভিন্ন আকৃতির কণাদ্বারা গঠিত যেগুলিকে আর বিভক্ত করা যায় না। এরূপ অবিভাজ্য বলে ডেমোক্রিটাস এই কণাগুলির নাম দেন **'অ্যাটম'** (atom)।

যদিও ডেমোক্রিটাসের মতবাদ ছিল খুবই বৈপ্লবিক, তবুও এর কোনও বৈজ্ঞানিক ভিত্তি না থাকায়, এই দার্শনিক মতবাদদ্বারা তদানিন্তন অ্যারিস্টটলীয় মতবাদকে খণ্ডন করা যায়নি এবং কোনও বৈজ্ঞানিক অগ্রগতিও সম্ভব হয়নি।

আনুমানিক 600 খ্রীষ্টপূর্বাব্দে ভারতীয় দার্শনিক মহর্ষি কণাদ রচিত 'বৈশেষিক দর্শনম'-এ পদার্থের উপাদান, অণু প্রভৃতি সম্বন্ধে আলোচনা পাওয়া যায়। কিন্তু এই সকল আলোচনার মধ্যে মন, অদৃষ্ট, কর্মফল প্রভৃতি অভৌতিক বিষয়গুলিও যুক্ত হওয়ায় কণাদের তত্ত্বের কোনও বৈজ্ঞানিক মূল্য নেই।

8.2.2 ডালটনের পরমাণুতত্ত্ব

1808 খ্রীষ্টাব্দে জন ডালটন (John Dalton, 1766—1844) বিভিন্ন রাসায়নিক পরীক্ষালব্ধ ফল ব্যাখ্যা করার জন্য তাঁর প্রায় দু'হাজার দুশ বৎসর পূর্বের ডেমোক্রিটাসের অ্যাটমের ধারণা অনুসরণে একটি নতুন অ্যাটমতত্ত্ব গঠন করেন, যাকে **ডালটনের পারমাণবিক তত্ত্ব** (Dalton's atomic theory) অ্যাখ্যা দেওয়া হয়। এই তত্ত্বে ডালটন ধরে নেন যে প্রত্যেক মৌলিক পদার্থই অতিক্ষুদ্রক্ষুদ্র অবিভাজ্য একপ্রকার কণা—'অ্যাটম' (পরমাণু)-দ্বারা গঠিত / প্রত্যেক মৌলিক পদার্থের এই অ্যাটমগুলির ওজন ও ধর্ম অভিন্ন, কিন্তু বিভিন্ন মৌলিক পদার্থের অ্যাটমগুলির ওজন ও ধর্ম বিভিন্ন / রাসায়নিক ক্রিয়ায় এই অ্যাটমগুলি সরল অনুপাতে যুক্ত হয়ে কোনও যৌগ গঠন করে।

8.2.3 অ্যাভোগেড্রোর প্রকল্প

ডালটনের এই তত্ত্ব সেই সময়ের জানা রাসায়নিক বিক্রিয়াগুলি সঠিকভাবে ব্যাখ্যা করতে সমর্থ হয়। ফলে এই তত্ত্ব প্রতিষ্ঠালাভ করে। কিন্তু পরবর্তীকালে দেখা যায় যে এই তত্ত্বদ্বারা গেই-লুস্যাক (L.J. Gay-Lussac 1778—1850) আবিষ্কৃত গ্যাস-আয়তন সূত্র ব্যাখ্যা করা যায় না। ডালটন তত্ত্বের এই অসুবিধা দূর করার জন্য অ্যামিদিও অ্যাভোগেড্রো (Count Amedeo Avogadro di Quaregna, 1776—1856) 1811 খ্রীষ্টাব্দে ডালটন তত্ত্ব সংশোধন করে একটি প্রকল্প উপস্থাপন করেন, যাকে বলা হয় অ্যাভোগেড্রোর প্রকল্প (Avogadro's hypothesis)। এই প্রকল্প অনুযায়ী পদার্থের অভিন্ন ধর্মসহ ক্ষুদ্রতম কণা হল 'মলিকিউল' (Molecule), যাকে আমরা 'অণু' বলে থাকি এবং এই অণুগুলিই ডালটন কথিত এক বা একাধিক পরমাণুদ্বারা গঠিত। অ্যাভোগেড্রোর প্রকল্পদ্বারা রাসায়নিক বিক্রিয়া ব্যাখ্যার যাবতীয় অসুবিধা দূর হয়, ফলে অণুতত্ত্ব প্রতিষ্ঠিত হয়।

8.2.4 সনাতন বলবিদ্যা (Classical Mechanics)

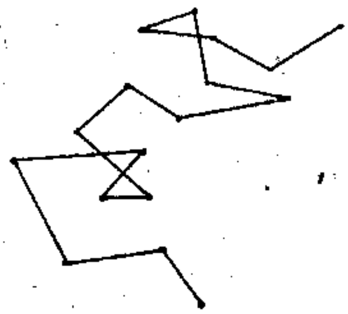
কণার গতি বিষয়ক বিজ্ঞানকে আমরা কণার গতিবিদ্যা বা গতিবিজ্ঞান (Particle Dynamics) বলে থাকি। এটি বৃহত্তর বলবিদ্যা বা বলবিজ্ঞানের (Mechanics) একটি শাখা। গ্যালিলিও (Galiles Galilei, 1564—1642) তাঁর রচিত Dialogues Concerning Two New Sciences গবেষণাগ্রন্থের দ্বারা এই বিজ্ঞানের সূত্রপাত করেন এবং নিউটন (Sir Isaac Newton, 1642—1727) 1686 খ্রীষ্টাব্দে প্রকাশিত তাঁর Principia Mathematica Philosophiae Naturalis গবেষণাগ্রন্থের দ্বারা এই বিজ্ঞানকে একটি দৃঢ় ভিত্তির ওপর প্রতিষ্ঠা করেন। এজন্য এই বিজ্ঞানকে নিউটনীয়

বলবিদ্যা (Newtonian Mechanics)-ও বলা হয়। নিউটনীয় বলবিদ্যাকে আমরা বর্তমানে সনাতন বলবিদ্যা আখ্যা দিয়ে থাকি। কারণ, পরবর্তীকালে নিউটনীয় বলবিদ্যার নানারূপ পরিবর্তন ঘটেছে, এবং সে অনুযায়ী বলবিদ্যার নামকরণও বদলেছে। পরবর্তী অধ্যায় সমূহে আপনারা এ বিষয়ে আরও জানতে পারবেন।

নিউটনীয় বলবিদ্যার মূল ভিত্তি হল এর তিনটি গতিসূত্র। আপনারা নিশ্চয় পূর্বেই এই গতিসূত্রগুলি অধ্যয়ন করেছেন। আপনারা নিশ্চয়ই লক্ষ করেছেন যে প্রথম গতিসূত্র থেকে আমরা বস্তুর জাড্য ও বলের সংজ্ঞা, দ্বিতীয় গতিসূত্র থেকে বলের মান ও দিক এবং তৃতীয় সূত্র থেকে রৈখিক ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র পাই। নিউটন পরবর্তীকালে মহাকর্ষ সূত্র (Law of Gravilation) আবিষ্কার করেন, এবং এই সূত্রও বলবিদ্যার অন্তর্গত হয়। নিউটন গণনা করে দেখিয়েছেন যে সৌর মণ্ডলের প্রতিটি গ্রহ ও উপগ্রহ থেকে শুরু করে পৃথিবীর উপরিস্থিত ক্ষুদ্র বা বৃহৎ প্রতিটি বস্তুই তাঁর এই সূত্রগুলি নির্ভুলভাবে মেনে চলে। জ্যোতির্বিদ্যায় প্রমাণিত হয় যে মহাবিশ্বের প্রতিটি জ্যোতিষ্ক নিউটনের বলবিদ্যার দ্বারা পরিচালিত। বর্তমান যুগে আমরা মহাকাশে যে রকেট ও কৃত্রিম উপগ্রহ প্রেরণ করে থাকি, সেগুলির গতি নিউটনের বলবিদ্যার দ্বারা নির্ভুলভাবে পাওয়া যায়। নিউটন মনে করতেন যে তাঁর সূত্রগুলি পদার্থের ক্ষুদ্রতম কণার ক্ষেত্রেও সমভাবে প্রযোজ্য হবে। কিন্তু তাঁর সময়ে অণু ও পরমাণু আবিষ্কার হয়নি। সুতরাং এরূপ ক্ষুদ্র কণার ক্ষেত্রে তাঁর গতিবিদ্যা খাটে কিনা তা পরীক্ষার দ্বারা প্রমাণ হয়নি।

8.2.5 ব্রাউনীয় গতি (Brownian Motion)

অণুবীক্ষণ যন্ত্রের সাহায্যে দেখা যায়—এরূপ অতি ক্ষুদ্রক্ষুদ্র কণা কোনও তরলের ভিতর ভাসমান অবস্থায় থাকলে দেখা যায় যে প্রতিটি কণা তরলের মধ্যে সর্বদা অনিয়মিতভাবে এদিক-ওদিক ছোটাছুটি করছে (চিত্র 8.2.1)। রবার্ট ব্রাউন (Robert Brown) 1827 খ্রীষ্টাব্দে কণার এই গতি আবিষ্কার করেন এবং এজন্য এই গতিকে ব্রাউনীয় গতি এবং কণাগুলিকে ব্রাউনীয় কণা বলা হয়। যদি ধরা হয় যে তরল অণুর দ্বারা গঠিত এবং এই অণুগুলি সর্বদা চতুর্দিকে গতিশীল, তাহলে ব্রাউনীয় কণাগুলি অণুগুলির তুলনায় বহুগুণ বড় হওয়ায় প্রতি মুহূর্তে চতুর্দিক থেকে বহু সংখ্যক অণুর দ্বারা আঘাত প্রাপ্ত হবে। কিন্তু কণার আকার যথেষ্ট বড় না হলে অণুগুলির দ্বারা আঘাতজনিত বল সব দিকে সমান হবে না। ফলে যে দিকে বল সমূহের লব্ধি ক্রিয়া করবে ব্রাউনীয় কণাটিও সেই দিকে চলবে। কিন্তু যেহেতু লব্ধি



চিত্র 8.2.1 ব্রাউনীয় গতি

বলের দিক যেকোন সময় পরিবর্তিত হতে পারে, কণাটিরও গতির দিক সে অনুযায়ী পরিবর্তিত হবে এবং এভাবে কণাটি সতত বিরামহীনভাবে বিভিন্ন দিকে ছোটাছুটি করতে থাকবে। ব্রাউনীয় গতি পর্যবেক্ষণ করে গ্যাসের গতীয়

তত্ত্বের সাহায্যে তরলের প্রতি মোল আয়তনে কত সংখ্যক অণু আছে, তা গণনা করা যায়। এই সংখ্যাকে অ্যাভোগেড্রো সংখ্যা (N_0) বলে। দেখা গেছে ব্রাউনীয় গতির সাহায্যে প্রাপ্ত এবং রাসায়নিক পরীক্ষার দ্বারা প্রাপ্ত N_0-র মান পরস্পর সমান ($N_0 = 6.03 \times 10^{23}$ / mole)। এর দ্বারা তরল যে অণুর দ্বারা গঠিত এবং অণুগুলি যে নিউটনীয় গতিবিদ্যা অনুসরণ করে তা প্রমাণিত হয়।

8.2.6 গ্যাসের গতীয় তত্ত্ব (Kinetic Theory of Gases)

গ্যাসের গতীয় তত্ত্বে একটি পাত্রের মধ্যে আবদ্ধ গ্যাসকে স্বাধীনভাবে যেকোন দিকে ভ্রমণশীল ক্ষুদ্রক্ষুদ্র বিন্দুবৎ নিরেট গ্যাসীয় অণুর সমষ্টিরূপে ধরা হয়। এই তত্ত্বে নিউটনীয় বলবিদ্যার সূত্রগুলি প্রয়োগ করে বিভিন্ন উষ্ণতায় গ্যাসের আয়তন চাপের পরিবর্তনে কিরূপ পরিবর্তিত হয়, তার সূত্র নির্ণয় করা যায়। এই সূত্র পরীক্ষালব্ধ বয়েল ও চার্লসের সূত্রের সঙ্গে অভিন্ন। এছাড়া এই তত্ত্বদ্বারা আরও বহু সূত্র (যেমন, ডালটনের আংশিক চাপ সূত্র, ব্যাপন ও সান্দ্রতার সূত্র, ম্যাক্সওয়েলের আণবিক বেগ বন্টন সূত্র, ভ্যান-ডার-ওয়ালের সমীকরণ প্রভৃতি) নির্ণয় করা যায় এবং এগুলি পরীক্ষালব্ধ ফলের সঙ্গে সম্পূর্ণ সঙ্গতিপূর্ণ। এই সূত্রগুলি হিলিয়াম, নিয়ন, আর্গন প্রভৃতি এক পরমাণুক অণুর ক্ষেত্রেও সমভাবে প্রযোজ্য। সুতরাং নিঃসন্দেহে প্রমাণ হয় যে অণু ও পরমাণুর মতো অতিক্ষুদ্র কণাগুলিও নিউটনীয় বলবিদ্যা অনুসরণ করে।

8.2.7 আয়নের গতি (Motion of Ions)

দুটি সমধর্মী চুম্বকীয় মেরু পরস্পরকে বিকর্ষণ করে, কিন্তু দুটি বিপরীতধর্মী মেরু পরস্পরকে আকর্ষণ করে। দুটি চুম্বকীয় মেরুর মধ্যে আকর্ষণ বা বিকর্ষণ বল কুলম্বের চুম্বকীয় বলের সূত্র (Coulomb's law of magnetic force)-দ্বারা নির্ধারিত হয়। অনুরূপে দুটি তড়িৎ আধানের মধ্যে আকর্ষণ বা বিকর্ষণ বল কুলম্বের স্থিরতড়িৎ বলের সূত্র (Coulomb's law of electrostatic force)-দ্বারা নির্ধারিত হয়। মহাকর্ষীয় বলের মতো চুম্বকীয় বল বা তড়িৎ বলের ক্ষেত্রেও নিউটনীয় বলবিজ্ঞান সমভাবে প্রযোজ্য হয়। স্বাভাবিক অবস্থায় একটি অণু বা পরমাণুর তড়িৎধর্ম নেই। কিন্তু তড়িৎ-আধানদ্বারা আহিত হলে অণু বা পরমাণুটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক আয়নে (ion) পরিবর্তিত হয়। এরূপ একটি আয়ন (ion) তড়িৎক্ষেত্রের মধ্যদিয়ে গেলে এর গতি নিউটনীয় বলবিদ্যার দ্বারা নির্ণয় করা যায়। একটি চুম্বকীয় ক্ষেত্রের দ্বারাও একটি আয়নের গতির পরিবর্তন ঘটে। এক্ষেত্রেও নিউটনীয় বলবিদ্যা প্রযোজ্য।

8.2.8 ইলেকট্রনের আবিষ্কার (Discovery of Electron)

একটি কাঁচের নলে অত্যন্ত নিম্নচাপে আবদ্ধ গ্যাসের মধ্যদিয়ে **তড়িৎমোক্ষণ** (electric discharge) ঘটালে নলের ক্যাথোড-তল থেকে একপ্রকার অদৃশ্য রশ্মির উদ্ভব ঘটে। প্লুয়েকার (Pluecker) 1859 খ্রীষ্টাব্দে এই ঘটনা প্রথম লক্ষ করেন। কিন্তু তখন এর গুরুত্ব বিশেষ উপলব্ধি হয়নি। ক্যাথোড-তল থেকে উৎপন্ন হয় বলে এই রশ্মির নাম দেওয়া হয় **ক্যাথোড রশ্মি** (cathode rays)। প্রথমে ভাবা হয়েছিল যে বিকীর্ণ তাপ বা আলোকের মতো ক্যাথোড রশ্মিও একপ্রকার বিকীর্ণ শক্তি। কিন্তু ঊনবিংশ শতাব্দির শেষ দিকে ক্রুক্স, জে জে থমসন, পেরিন ও অন্যান্য বৈজ্ঞানিকগণের বিভিন্ন পরীক্ষার দ্বারা নিশ্চিতভাবে প্রমাণিত হয় যে বস্তুকণার মতো ক্যাথোড রশ্মিরও যথেষ্ট ভরবেগ আছে এবং এই রশ্মিকে তড়িৎক্ষেত্র বা চুম্বকীয় ক্ষেত্রের মধ্যদিয়ে পাঠালে এদের গতিপথের বিচ্যুতি (deflection) হয়। এই বিচ্যুতির দিক থেকে প্রমাণিত হয় যে রশ্মিগুলি ঋণাত্মক তড়িৎধর্মী। ক্যাথোড রশ্মিগুলির এ সমস্ত ধর্ম থেকে জে জে থমসন (Sir Joseph John Thomson, 1856—1940) সিদ্ধান্ত গ্রহণ করেন যে এই

রশ্মিগুলি বস্তুত অতি উচ্চবেগে গতিশীল একপ্রকার অতিক্ষুদ্র ঋণাত্মক তড়িৎধর্মী কণার প্রবাহ। জনস্টোন স্টোনি (Johnstone Stoney) এই কণাগুলির নাম দেন 'ইলেকট্রন' (electron)। 1897 খ্রীষ্টাব্দে থমসন তাঁর উদ্ভাবিত একটি ক্যাথোড নলের মধ্যে তড়িৎক্ষেত্র ও চুম্বকীয় ক্ষেত্রের প্রয়োগে ক্যাথোড রশ্মির বিচ্যুতি ঘটিয়ে ইলেকট্রনের আধান (e) ও ভর (m)-এর অনুপাত (e/m) নির্ণয় করতে সক্ষম হন এবং এভাবেই ইলেকট্রনের আবিষ্কার নিশ্চিত হয়। জে জে থমসনের এই অসাধারণ আবিষ্কারের জন্য 1906 খ্রীষ্টাব্দে তাঁকে নোবেল পুরস্কারে ভূষিত করা হয়।

1913 খ্রীষ্টাব্দে মিলিকান (Robert Andrews Millikan) তাঁর উদ্ভাবিত 'তৈলবিন্দু পরীক্ষার' (Oil-drop experiment)-দ্বারা ইলেকট্রনের আধানের মান অত্যন্ত নির্ভুলভাবে নির্ণয় করতে সমর্থ হন। তিনি তাঁর পরীক্ষায় বিভিন্ন তৈলবিন্দুর আধান নির্ণয় করতে গিয়ে দেখেন যে সেটি ইলেকট্রন আধান বা তার অখণ্ড গুণিতকের সমান। তার ফলে ইলেকট্রনের e / m এর মান থেকে এর ভরও সঠিকভাবে গণনা করা সম্ভব হয়। নীচে এই রাশিগুলির মান দেওয়া হল

ইলেকট্রনের $e / m = 5.1 \times 10^7$ e.s.u. $= 1.76 \times 10^7$ e.m.u.

ইলেকট্রনের আধান $e = 4.8036 \times 10^{-10}$ e.s.u. $= 1.6012 \times 10^{-20}$ e.m.u.

ইলেকট্রনের ভর $m = \dfrac{e}{e / m} = \dfrac{1.6012 \times 10^{-20}}{1.76 \times 10^7} = 9.0977 \times 10^{-28}$ gm $\simeq 9.1 \times 10^{-28}$ gm.

এখন, সব মৌলের মধ্যে হাইড্রোজেনই সবচেয়ে হাল্কা। এর একটি পরমাণুর ভর $M_H = 1.67 \times 10^{-24}$ gm.

সুতরাং $\dfrac{M_H}{m_e} = \dfrac{1.67 \times 10^{-24}}{9.1 \times 10^{-28}} = 1836$

অর্থাৎ একটি হাইড্রোজেনের পরমাণু একটি ইলেকট্রনের চেয়ে প্রায় 1836 গুণ ভারী।

মিলিকান ইলেকট্রনের আধানের মান নিরূপণ ছাড়াও আলোক-তড়িৎ ক্রিয়ার বিভিন্ন ধর্ম নিপুনভাবে নির্ণয় করেন (এ বিষয়ে পরে আরও আলোচনা পাবেন)। তাঁর এরূপ দুটি অসাধারণ কাজের জন্য 1923 খ্রীষ্টাব্দে তাঁকে নোবেল পুরস্কার দেওয়া হয়।

এখানে যে বিষয়টি লক্ষণীয়, তা হল যে ইলেকট্রনের উপরি উল্লেখিত ধর্মগুলিরপরীক্ষায় নিউটনীয় বলবিদ্যা সম্পূর্ণরূপে প্রযোজ্য হয়। যেমন, থমসনের e/m নির্ণয়ের পরীক্ষায় প্রযুক্ত তড়িৎক্ষেত্র বা চুম্বকীয় ক্ষেত্রের মধ্যদিয়ে যাওয়ার সময় ইলেকট্রনের গতিপথের যে বক্রতা হয় নিউটনের বলবিদ্যার সাহায্যে তা নির্ভুলভাবে পরিমাপ করা যায়, এবং এই পরিমাপ থেকেই e/m নির্ণীত হয়। ইলেকট্রন এতই ক্ষুদ্র এবং উচ্চগতিসম্পন্ন যে এর প্রকৃত গতিপথ সরাসরি দৃষ্টিগোচর হওয়া সম্ভব নয়। কিন্তু তড়িৎদ্বারা আহিত হওয়ায় একটি উচ্চগতিসম্পন্ন ইলেকট্রনকে একটি উইলসনের (C.T.R. Wilson, 1869—1959) মেঘ প্রকোষ্ঠের (cloud chamber) ভিতর পাঠালে, তা এর গতিপথের সন্নিকটবর্তী গ্যাসীয় অণুগুলিকে আয়নিত করে। এই সময়ে প্রকোষ্ঠের চাপ অকস্যাৎ কমিয়ে দিলে প্রকোষ্ঠে বর্তমান সংপৃক্ত জলীয় বাষ্প শীতল হয়ে আয়নগুলির ওপর ক্ষুদ্রক্ষুদ্র জলবিন্দু গঠন করে। উপযুক্ত আলোকদ্বারা এই জলবিন্দুগুলি দৃশ্যমান হয় এবং এভাবে ইলেকট্রনের গতিপথ সূচিত হয়। এই গতিপথই ইলেকট্রনের কণা ধর্ম প্রমাণিত করে। এখানে উল্লেখযোগ্য যে উইলসন 1897 খ্রীষ্টাব্দে তাঁর মেঘ প্রকোষ্ঠ উদ্ভাবন করেন এবং এজন্য 1927 খ্রীষ্টাব্দে নোবেল পুরস্কার লাভ করেন।

8.2.9 এক্সরশ্মির আবিষ্কার ও এর ধর্ম (Discovery of X-rays and their properties)

এক্স-রশ্মির ধর্ম আলোচনা করলে ইলেকট্রনের কণাধর্ম আরও পরিস্ফুট হবে। 1895 খ্রীষ্টাব্দে রন্টজেন (Wilhelm Konrad Rontgen, 1845—1923) ক্যাথোড রশ্মি উৎপন্ন করার একটি মোক্ষণ-নলে (discharge tube) অতি উচ্চগতির ক্যাথোড রশ্মি উৎপন্ন করে দেখতে পান যে এই রশ্মি যখন অ্যানোড তড়িৎ-দ্বারকে (Anode plate)-কে সরাসরি আঘাত করে, তখন ঐ অ্যানোড থেকে একটি নতুন অজানা রশ্মির সৃষ্টি হয়। অজানা হওয়ায় রন্টজেন এই রশ্মির নামকরণ করেন 'এক্স-রশ্মি' (X-rays)। রন্টজেনের এই অভূতপূর্ব আবিষ্কারের জন্য তাঁকে 1901 খ্রীষ্টাব্দে পদার্থবিজ্ঞানের প্রথম নোবেল পুরস্কার দেওয়া হয়।

ক্যাথোড রশ্মির সঙ্গে এক্সরশ্মির পার্থক্য হল যে এক্স-রশ্মির ভরবেগ নেই এবং কোনও আধান নেই। সুতরাং নিউটনীয় গতিসূত্রগুলি এক্ষেত্রে প্রযোজ্য হয় না। ক্যাথোড রশ্মির বেগ বিভিন্ন হতে পারে, কিন্তু এক্স-রশ্মির বেগ অভিন্ন এবং তা আলোকের বেগের সমান। আলোকের মতোই এক্সরশ্মিরও তরঙ্গধর্ম আছে, তবে আলোকের তরঙ্গ-দৈর্ঘ্যের চেয়ে এক্স-রশ্মির তরঙ্গ দৈর্ঘ্যগুলি অনেক কম। সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে ইলেকট্রনের প্রকৃতি এবং এক্স-রশ্মির প্রকৃতি পরস্পর থেকে সম্পূর্ণ ভিন্ন এবং উভয়কে একই বলবিদ্যার অন্তর্গত করা যায় না।

8.2.10 সনাতন বলবিদ্যা ও বিশেষ আপেক্ষিকতা (Classical Mechanics and Special Theory of Relativity)

পূর্ববর্তী খণ্ডে (Block-I) আপনারা বিশেষ আপেক্ষিকতা বিষয়ে অধ্যয়ন করেছেন। আপনারা অবশ্যই লক্ষ করেছেন যে যখন কোনও কণার বেগ V আপেক্ষিকতার চরম বেগ (অর্থাৎ শূন্য মাধ্যমে আলোকের বেগ) c-র নিকটবর্তী হয় ($V \approx c$), তখন সনাতন বলবিদ্যার সূত্রগুলি অর্থাৎ নিউটনের সূত্রগুলি আর খাটে না, সেক্ষেত্রে কণার সঠিক অবস্থান নিরূপনের জন্য বিশেষ আপেক্ষিকতার সূত্রগুলি ব্যবহার করতে হয়। c-র মানের নিকটবর্তী কণার এরূপ বেগকে **আপেক্ষিকীয়** (relativistic) বেগ বলা হয়। আবার অপরপক্ষে V-এর মান c-র মানের চেয়ে খুব কম হলে ($V << c$) বিশেষ আপেক্ষিকতার সমীকরণগুলি সনাতন বলবিদ্যার সমীকরণগুলির সঙ্গে অভিন্ন হয়। সুতরাং বলা যায় যে বিশেষ আপেক্ষিকীয় গতিবিদ্যা হল সনাতন গতিবিদ্যারই একটি সাধারণীকৃত রূপ যখন $V \approx c$। অথবা বিপরীতভাবে বলা যায় যে সনাতন গতিবিদ্যা হল বিশেষ আপেক্ষিকীয় গতিবিদ্যারই একটি বিশেষ রূপ যখন $V << c$। সুতরাং যখন কোনও কণা আপেক্ষিকীয় বেগে চলে, তখন এর ভর, ভরবেগ, গতীয় শক্তি ইত্যাদির বৃদ্ধি ঘটে বটে, কিন্তু তাহলেও সনাতন গতিবিদ্যার মতো আপেক্ষিকীয় গতিবিদ্যার দ্বারাও যেকোন সময়ে কণার অবস্থান, ভরবেগ বা শক্তির মান যুগপৎ নির্ভুলভাবে নির্ণয় করা যায়। অর্থাৎ আপেক্ষিকীয় গতিবিদ্যাতেও একটি কণার কণারূপ ধর্ম বজায় থাকে।

অনুশীলনী—1

অনুশীলনী 8.2.1 ডালটনের পরমাণু তত্ত্ব কি? ডেমোক্রিটাসের অ্যাটম তত্ত্ব থেকে এর পার্থক্য কোথায়?

অনুশীলনী 8.2.2 অ্যাভোগেড্রোর প্রকল্পটি বলুন। অণু ও পরমাণুর মধ্যে পার্থক্য কি?

অনুশীলনী 8.2.3 ব্রাউনীয় গতি কি? এই গতির দ্বারা অণুগুলি যে নিউটনীয় গতিবিদ্যা মেনে চলে, তা কিভাবে বোঝা যায়?

অনুশীলনী 8.2.4 ইলেকট্রনের আবিষ্কার কিভাবে হয় বর্ণনা করুন।

8.3 আলোকের তরঙ্গ তত্ত্ব (Wave Theory of Light)

সপ্তদশ শতাব্দিতে হাইগেনস (Huygens, 1629—1695) প্রথম আলোকের তরঙ্গ তত্ত্বের সূচনা করেন। সে সময়ে আলোকের সরলরৈখিক গতি, প্রতিফলন ও প্রতিসরণ— প্রধানতঃ এই তিনটি ধর্মই জানা ছিল। পরবর্তীকালে ইয়ং, ফ্রেনেল, ফ্রাউন হপার প্রভৃতি বিজ্ঞানীগণ আলোকের আরও বিভিন্ন ধর্ম আবিষ্কার করেন এবং তরঙ্গ তত্ত্বের প্রসার ঘটান। উনবিংশ শতাব্দিতে ম্যাক্সওয়েল তাঁর তড়িচ্চুম্বকীয় তরঙ্গ তত্ত্ব দ্বারা পূর্বের তরঙ্গ তত্ত্বের আমুল পরিবর্তন সাধন করেন এবং তরঙ্গ তত্ত্বের পরিপূর্ণতা আনয়ন করেন। আপনি অবশ্যই আলোকের বিভিন্ন ধর্ম ও তরঙ্গ তত্ত্বসম্বন্ধে অবহিত আছেন। সেজন্য এই ধর্ম ও তত্ত্বগুলি এখানে বিস্তৃতভাবে আলোচনার প্রয়োজন নেই। তবে আলোকের দ্বিচারিতা বোঝর জন্য আমরা এখানে এইসব ধর্ম ও তত্ত্বগুলির ঐতিহাসিক পটভূমিকা সংক্ষেপে আলোচনা করব।

8.3.1 আলোকের ধর্মের প্রাচীন ধারণা ও ফারমাটের নীতি (Properties of light known to ancient people and Fermat's Principle)

আলোকের সরলরৈখিক গতির ফলে বস্তুর ছায়া গঠিত হয়। আলোকের এই ধর্মকে অবলম্বন করে প্রায় তিন হাজার বৎসর পূর্বে ব্যাবিলনে ও তারপর মিশরে সূর্যঘড়ি (Sundial) উদ্ভাবিত হয়। সম্ভবত ইউক্লিড (Euclid) (আনুমানিক ৩০০ খ্রীঃপূঃ) এবং আর্কিমিডিস (Archimedes) (আনুমানিক ২০০ খ্রীঃপূঃ) উভয়েই আলোকের প্রতিফলনের নিয়মগুলি জানতেন। সপ্তদশ শতাব্দির প্রথমার্ধে স্নেল (Willebrod Snell, 1591—1626) পরীক্ষামূলকভাবে আলোকের প্রতিসরণের সূত্রগুলি আবিষ্কার করেন।

1650 খ্রীষ্টাব্দে ফারমাট (Pierre Fermat) একটি গুরুত্বপূর্ণ নীতি উদ্ভাবন করেন, যাকে ফারমাটের নীতি (Fermat's Principle) বলা হয়। নীতিটি এভাবে বিবৃত করা যায় ঃ **আলোক এক বিন্দু থেকে অন্য বিন্দুতে কেবল ঐ পথেই যায়, যার জন্য সময় ন্যূনতম বা সবচেয়ে কম (বা ক্ষেত্রবিশেষ সবচেয়ে বেশী) লাগে।** ফারমাটের এই নীতির দ্বারা আলোকের সরলরৈখিক গতি, প্রতিফলন ও প্রতিসরণের সূত্রগুলি সহজেই ব্যাখ্যা করা যায়। ফারমাটের নীতিটি হল আলোকের তিনটি ধর্মের প্রথম বৈজ্ঞানিক সংশ্লেষণ। পরবর্তীকালে এই নীতিকে অনুসরণ করেই গতিবিদ্যায় 'ন্যূনতম ক্রিয়ার নীতি' (Principle of least action) প্রবর্তিত হয়।

8.3.2 হাইগেনসের নীতি (Huygens' Principle)

ফারমাটের নীতিতে আলোকের প্রকৃতি সম্বন্ধে কিছু জানা যায় না। বহু প্রাচীনকাল থেকে মানুষের ধারণা ছিল যে আলোক হল একপ্রকার অতি ক্ষুদ্রক্ষুদ্র কণা (corpuscles) যা উৎস থেকে অতি দ্রুতবেগে ছুটে আসে এবং আমাদের চোখে প্রবেশ করে আলোকের অনুভূতি জাগায়। 1678 খ্রীষ্টাব্দে হাইগেন্স প্রস্তাব করেন যে আলোক হল জলতরঙ্গ বা শব্দতরঙ্গের অনুরূপ 'লুমিনিফেরাস ইথার' (Luminiferous ether) নামক মাধ্যমের কম্পনজাত একটি তরঙ্গ বিশেষ এবং এর বিস্তার একটি নীতির দ্বারা বিবৃত করা যায়। হাইগেনসের এই নীতিটি এরূপ ঃ বিস্তারশীল তরঙ্গমুখের (wave front) প্রতিটি বিন্দু একটি গৌণ অনুতরঙ্গের (secondary wavelet) উৎসরূপে ক্রিয়া করে। *t* সময় পর এই গৌণ অনুতরঙ্গগুলির কেবল সম্মুখের স্পর্শকতলই হল তরঙ্গমুখটির নতুন অবস্থান। হাইগেন্সের

এই নীতির দ্বারা জ্যামিতিক অঙ্কনের সাহায্যে আলোকের সরলরৈখিক গতি, প্রতিফলন ও প্রতিসরণ সঠিকভাবে ব্যাখ্যা করা যায়। হাইগেনসের নীতিটি খুবই সরল হওয়ায় এখনও সাধারণ স্তরের পাঠ্যপুস্তকে এই নীতির সাহায্যে আলোকের বিভিন্ন ধর্মগুলি ব্যাখ্যা করা হয়। তবে এখানে উল্লেখযোগ্য যে প্রতিসরণ ব্যাখ্যার জন্য এই নীতিতে আলোকের বেগ ঘনতর মাধ্যমের চেয়ে শূন্যমাধ্যমে বেশী ধরতে হয়। কিন্তু ঐ সময়ে আলোকের বেগ জানা না থাকায় এই ফলটি সঠিক কিনা, তা প্রমাণ করা সম্ভব ছিল না।

8.3.3 নিউটনের পরীক্ষা ও 'করপাস্‌কুল' তত্ত্ব (Newton's Experiments and Corpuscular Theory)

নিউটন আলোক সম্বন্ধে দুটি বিখ্যাত পরীক্ষা করেন। প্রথম পরীক্ষায় তিনি সূর্যের আলোক একটি প্রিজমের মধ্যদিয়ে পাঠিয়ে প্রমাণ করেন যে সাদা আলোক প্রকৃতপক্ষে সাতটি বর্ণের (লাল, কমলা, হলুদ, সবুজ, নীল, অতিনীল ও বেগুনি) সমষ্টি। দ্বিতীয় পরীক্ষায় তিনি একটি কাঁচের সমতল প্লেটের ওপর একটি উত্তল লেন্স রেখে তার ওপর লম্বভাবে আলোক ফেলে দেখলেন যে প্রতিফলিত আলোক বহু সংখ্যক সমকেন্দ্রিক বলয়ে বিভক্ত। এই বলয়গুলিকে নিউটনের বলয় (Newton's rings) বলে।

হাইগেন্‌সের তরঙ্গ তত্ত্বে তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের বিভিন্নতা ও ব্যাতিচার ধরে নিলে নিউটনের উভয় পরীক্ষাই সঠিক ব্যাখ্যা করা যায়। কিন্তু নিউটন হাইগেন্‌সের তত্ত্ব গ্রহণ করেন নি। তার কারণ নিউটনের শব্দের বেগ তত্ত্ব ছিল হাইগেন্‌সের ইথার তত্ত্বের বিরোধী।

নিউটন কোনও মাধ্যমে তরঙ্গের যে বেগ হয়, তার গাণিতিক সূত্র নির্ধারণ করেছিলেন। যদি E স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক ও p ঘনত্বযুক্ত কোনও মাধ্যমে কোনও তরঙ্গ V বেগে বিস্তারলাভ করে, তবে

$$V = \sqrt{\frac{E}{p}} \qquad \text{... ... (8.3.1)}$$

নিউটন বায়ুতে শব্দের বিস্তারের ক্ষেত্রে প্রমাণ করেন যে বায়ুর চাপ P ধরলে, $E = P$ এবং এ থেকে তিনি বায়ুতে শব্দের বেগ $V = 280$ m/sec নির্ণয় করেন। [এখানে উল্লেখ্য, বায়ুতে শব্দের বেগ নির্ণয়ে নিউটনের সমীকরণে সামান্য ত্রুটি ছিল, পরে ল্যাপলাস এই ত্রুটি সংশোধন করে পান $E = \gamma P$, যেখানে γ হল গ্যাসের দুটি আপেক্ষিক তাপের অণুপাত এবং সে অনুযায়ী $V = 331.4$ m/sec, যা পরীক্ষালব্ধ ফলের সমান।]

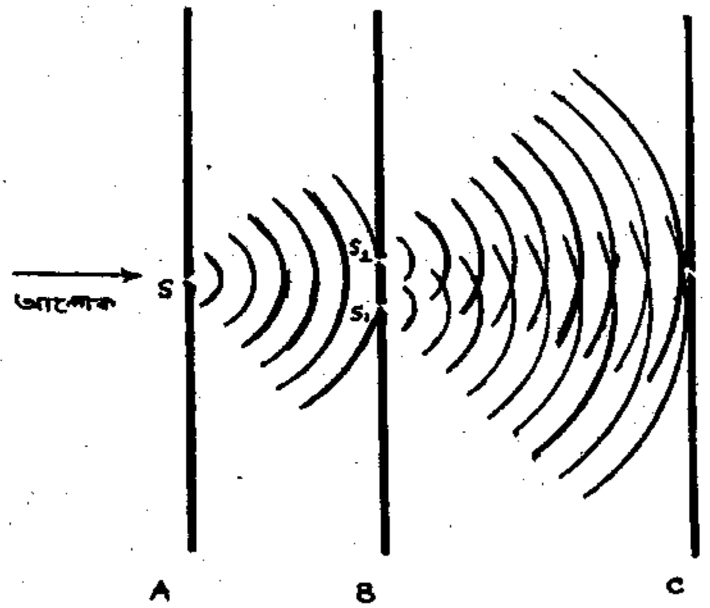
নিউটন লক্ষ করেন যে সূর্য ও নক্ষত্র থেকে আমরা যে আলোক পাই তা শূন্যের ভিতরদিয়ে আসে। নিউটনের সময়েই 1675 খ্রীষ্টাব্দে রোমার (Ole Roemer) বৃহস্পতির চাঁদগুলির গ্রহণকাল পরিমাপ করে প্রথম শূন্যমাধ্যমে আলোকের বেগ পরিমাপ করতে সমর্থ হন। এই মান হল $c = 2 \times 10^8$ m/sec (পরবর্তীকালে নির্নীত নির্ভুল মান $c = (2.997929 \pm 0.000002) \times 10^8$ m/sec)। এখন যদি হাইগেনসের ইথার মাধ্যমের $E = 0$, $P = 0$ ধরা হয়, তবে (8.3.1) সমীকরণ অনুযায়ী V অনির্ণেয় হয়। আবার যদি E ও P শূন্য না হয়, তবে আলোকের বেগের মান পেতে গেলে E-র তুলনায় P-কে অত্যন্ত ক্ষুদ্র ধরতে হয়। কিন্তু বাস্তবক্ষেত্রে দেখা যায় যে কোনও গ্যাসের ঘনত্ব যত কমতে থাকে, তার চাপ বা স্থিতিস্থাপকতা গুণাঙ্কও তত কমে যায়। সুতরাং ইথার মাধ্যমের ক্ষেত্রে (8.3.1) সমীকরণ প্রযোজ্য হয় না এবং আলোককেও ইথারের তরঙ্গরূপে ধরা যায় না।

এই অবস্থায় নিউটন পূর্বের কণাতত্ত্বকেই পুনরায় নতুনভাবে গ্রহণ করেন। নিউটন কণাগুলির নাম দেন **করপাসকল** (corpuscle) এবং এজন্য এই তত্ত্বকে বলা হয় করপাসক্লীয় তত্ত্ব (corpuscular theory)। এই তত্ত্ব অনুযায়ী আলোক অতি ক্ষুদ্রক্ষুদ্র করপাস্কলদ্বারা গঠিত যেগুলি উৎস থেকে নির্গত হয়ে আলোকের বেগে শূন্য বা অন্যকোনও মাধ্যমের মধ্যদিয়ে বিস্তৃত হয়। এই তত্ত্বদ্বারা আলোকের সরলরৈখিক গতি ও প্রতিফলন সহজেই ব্যাখ্যা করা যায়। কিন্তু প্রতিসরণের সূত্রগুলি পেতে ধরতে হয় যে শূন্য মাধ্যমের চেয়ে ঘনতর মাধ্যমে আলোকের বেগ বেশী। তাছাড়া বিভিন্ন প্রকারের করপাস্কল ধরে নিয়ে আলোকের বর্ণগুলিও ব্যাখ্যা করা যায়। কিন্তু এই তত্ত্বদ্বারা তাঁরই আবিষ্কৃত বলয় গঠন পরীক্ষাটির কোনও ব্যাখ্যা পাওয়া যায় না. তাছাড়া হাইগেনসের তত্ত্বদ্বারা প্রতিসরণের ব্যাখ্যা করতে হলে ধরতে হয় যে আলোকের বেগ ঘনতর মাধ্যমের চেয়ে শূন্য মাধ্যমেই বেশী। আমরা বর্তমানে জানি যে শূন্য মাধ্যমেই আলোকের বেগ সর্বোচ্চ এবং অন্যকোনও ঘনতর মাধ্যমে এই বেগ শূন্য মাধ্যমে বেগের চেয়ে অনেক কম। এথেকে আমরা এখন এই সিদ্ধান্তে পৌঁছাতে পারি যে হাইগেনসের তরঙ্গ তত্ত্বই বরং ঠিক এবং নিউটনের করপাস্কল তত্ত্বই ভুল। কিন্তু নিউটনের সময়ে বিভিন্ন ঘন মাধ্যমে আলোকের বেগ সম্বন্ধে কোনও ধারণা ছিল না (একমাত্র রোমার নির্নীত শূন্য মাধ্যমে বেগের আসন্ন মান ছাড়া)। আলোকের ব্যতিচার ধর্ম তখনও আবিষ্কৃত হয়নি। তাছাড়া হাইগেনসের তত্ত্বে আলোক তরঙ্গের স্বরূপ, এর তরঙ্গ দৈর্ঘ্য, বেগ এবং শূন্য মাধ্যমে কিরূপে এই তরঙ্গ উৎপন্ন হয়, সে বিষয়ে কোনও উল্লেখ নেই। এর উপর নিউটন ছিলেন সে যুগের সর্বশ্রেষ্ঠ বিজ্ঞানী। সেজন্য হাইগেনসের চেয়ে নিউটনের তত্ত্বই সেযুগে অধিকতর মর্যাদা লাভ করে।

8.3.4 আলোকের ব্যবর্তন ও ব্যতিচার (Diffraction and Interference of light)

1801 খ্রীষ্টাব্দে টমাস ইয়ং (Thomas Yong) একটি পরীক্ষা করেন। এই পরীক্ষায় সূর্যের আলোক A পর্দার একটি ক্ষুদ্র ছিদ্র S (চিত্র 8.3.1)-র মধ্যদিয়ে গিয়ে B পর্দার ওপর আপতিত হয়। B পর্দাটি A পর্দার সমান্তরাল এবং এর ওপর দুটি ক্ষুদ্র ছিদ্র S_1 ও S_2 পরস্পরের কাছাকাছি এবং S থেকে সমান দূরত্বে আছে। B পর্দার পিছনে C আর একটি সমান্তরাল পর্দা। যদি সূর্যের সমান্তরাল রশ্মিগুলি A পর্দার ওপর লম্বভাবে আপতিত হয়, তবে নিউটনের করপাস্কল তত্ত্ব অনুযায়ী যে রশ্মিগুলি S ছিদ্রের মধ্যদিয়ে যায়, সেগুলি B পর্দার S_1 ও S_2 ছিদ্রদুটির মধ্যবর্তী অংশে বাধা পাবে এবং S_1 ও S_2-র মধ্যদিয়ে কোনও রশ্মিই C পর্দার দিকে যেতে পারবে না। সুতরাং C পর্দাটি সম্পূর্ণ অন্ধকার থাকবে। কিন্তু ইয়ং-এর পরীক্ষায় দেখা যায় যে আলোক প্রকৃতপক্ষে B পর্দারদ্বারা বাধাপ্রাপ্ত না হয়ে S_1 ও S_2-র মধ্যদিয়ে যায় এবং C পর্দার ওপর কোথাও আলোক, কোথাও অন্ধকারের ঝালরের বিন্যাস বা নক্শা তৈরী করে। এই নক্শার অন্তর্গত আলোক ও অন্ধকারের ঝালরগুলিকে ব্যতিচার ঝালর (Interference fringes) বলে। ব্যতিচার ঝালরগুলি নিউটনের করপাস্কল তত্ত্বের ব্যর্থতা ও হাইগেনসের তত্ত্বের সত্যতা প্রমাণিত করে। কারণ হাইগেনসের তত্ত্ব অনুযায়ী আলোক S ছিদ্রের মধ্যদিয়ে গেলে ছিদ্রটি একটি বিন্দু উৎসরূপে ক্রিয়া করবে এবং আলোকের গোলীয় তরঙ্গমুখ S থেকে B পর্দার দিকে বিস্তৃত হবে। কোনও ক্ষুদ্র ছিদ্র বা বাধার প্রান্ত অতিক্রম করার সময় আলোকের এরূপ বেঁকে যাওয়া বা ছড়িয়ে পড়াকে ব্যবর্তন (diffraction) বলে। S ছিদ্রের মধ্যদিয়ে বিস্তৃত তরঙ্গ মুখ S_1 ও S_2 ছিদ্রের ওপর আপতিত হয় এবং এই দুটি ছিদ্র থেকে একইভাবে ব্যবর্তিত দুটি ভিন্ন তরঙ্গমুখ উৎপন্ন হয়ে c পর্দার দিকে বিস্তৃত হয়। এরফলে দুটি তরঙ্গমুখের পরস্পরের ওপর উপরিপাতন (Superposition) ঘটে। এই উপরিপাতনকে ব্যতিচার (interference) বলে। তরঙ্গের সমীকরণ দ্বারা দেখানো যায় যে দুটি তরঙ্গের উপরিপাতনের ফলে পর্দার ওপর ব্যতিচার কোথাও গঠনকার (constructive) আবার কোথাও বিনাশকর (destructive) হয়।

গঠনকর ব্যতিচারের ফলে সর্বোচ্চ আলোক ও বিনাশকর ব্যতিচারের ফলে সর্বনিম্ন আলোক (অনালোক বা অন্ধকার)-এর অঞ্চল বা ঝালর তৈরী হয়।



চিত্র 8.3.1 আলোকের ব্যবর্তন ও ব্যতিচার

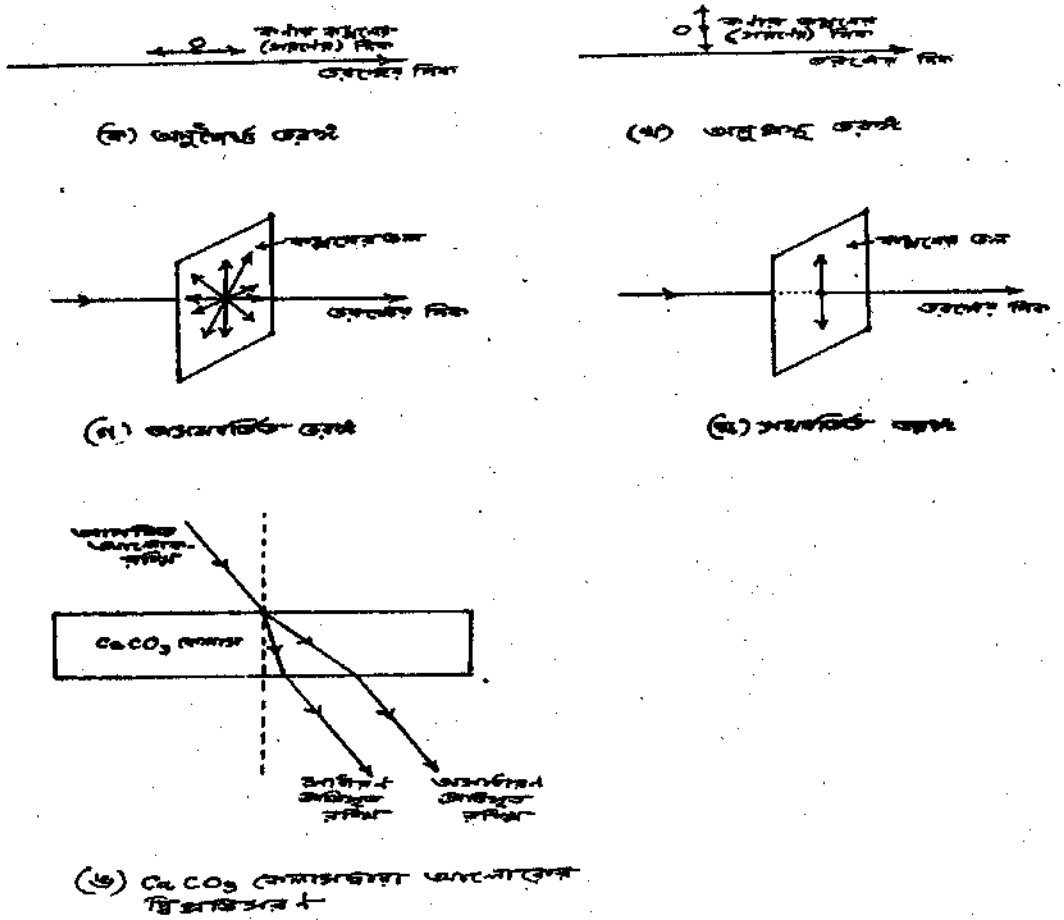
ইয়ং দুটি ঝালরের ব্যবধান থেকে আলোকের তরঙ্গদৈর্ঘ্য (wave length) পরিমাপ করতে সমর্থ হন। এভাবেই আলোকের তরঙ্গদৈর্ঘ্য প্রথম পরিমাপ করা সম্ভব হয়। দেখা যায় যে এই তরঙ্গদৈর্ঘ্য বর্ণের ওপর নির্ভরশীল। ইয়ং এর পরিমাপ অনুযায়ী বর্ণালির লাল বর্ণের তরঙ্গদৈর্ঘ্য সবচেয়ে বেশী $\left(\text{প্রায় } \frac{1}{36,000} \text{ inch}\right)$ এবং বেগুনি বর্ণের তরঙ্গদৈর্ঘ্য সবচেয়ে কম $\left(\text{প্রায় } \frac{1}{60,000} \text{ inch}\right)$। এই পরিমাপ বর্তমান পরিমাপের সঙ্গে বেশ সঙ্গতিপূর্ণ।

হাইগেনসের তরঙ্গ তত্ত্বের পূর্বেই ফ্রেন্সেস্কো মারিয়া গ্রিমাল্ডি (Francesco Maria Grimaldi, 1618—1663) নামে একজন বিজ্ঞানী আলোকের ব্যবর্তন আবিষ্কার করেন। কিন্তু আশ্চর্যের বিষয় হাইগেনস এবং নিউটন উভয়েই এই আবিষ্কারটিকে সম্পূর্ণ উপেক্ষা করেন। পরে ফ্রেনেল (Augustin Jean Fresnel, 1788—1827) 8.3.4। চিত্রের অনুরূপ একটি পরীক্ষায় দেখেন যে S ছিদ্রের মধ্যদিয়ে যাওয়ার সময় আলোকরশ্মি সরলরৈখিক পথে না গিয়ে ব্যবর্তনের ফলে চারদিকে ছড়িয়ে পড়ে। ফলে B পর্দাটি সরিয়ে দিলে C পর্দার কেন্দ্রে সর্বোচ্চ এবং কেন্দ্র থেকে যত দূরে যাওয়া যায় তত কম তীব্রতার আলোক পাওয়া যায়। ফ্রেনেল হাইগেনের তরঙ্গ তত্ত্ব অনুযায়ী এই তীব্রতার মান গণনা করে দেখেন যে তা পরীক্ষালব্ধ ফলের সঙ্গে সঙ্গতিপূর্ণ। সুতরাং ব্যবর্তন যে তরঙ্গ তত্ত্বেরই ফল তা প্রমাণিত হয়।

শব্দ তরঙ্গের ক্ষেত্রেও ব্যবর্তন ও ব্যতিচার লক্ষ করা যায়। ব্যবর্তন ও ব্যতিচার তরঙ্গ তত্ত্ব ভিন্ন আর কোনওভাবে ব্যাখ্যা করা যায় না। সুতরাং আলোক যে অবশ্যই একটি তরঙ্গ, সে বিষয়ে কোনও সংশয় থাকে না।

8.3.5 আলোকের সমবর্তন (Polarization of Light)

ফ্রেনেল এবং এরাগো (Dominique—Francois Arago, 1786—1853) 1817 খ্রীষ্টাব্দ নাগাদ আলোকের এমন একটি ধর্ম আবিষ্কার করেন যা কেবল অনুপ্রস্থ (trans verse) তরঙ্গের ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য। এই বিজ্ঞানীগণ লক্ষ করেন যে সাধারণ আলোকের একটি সমান্তরাল রশ্মিগুচ্ছ একটি কেলসাইট ($CaCO_3$) কেলাসের (crystal) ওপর আপতিত হলে রশ্মিগুচ্ছটি দুভাগে বিভক্ত হয়ে কেলাস থেকে নির্গত হয়। একভাগের রশ্মিগুলিকে বলা হয় সাধারণ রশ্মি (ordinary rays), কারণ এই রশ্মিগুলির প্রতিসরণ স্নেলের সূত্র অনুযায়ী হয়। কিন্তু অন্যভাগের রশ্মিগুলি স্নেলের সূত্র অনুসরণ করে না, পরিবর্তে অন্য সূত্র অনুসরণ করে। এজন্য এই রশ্মিগুলিকে বলা হয় অসাধারণ (extraordinary) রশ্মি। কেলসাইট কেলাসদ্বারা প্রতিসরিত রশ্মির এরূপ বিভক্তিকরণকে বলা হয় **দ্বিপ্রতিসরণ** (Double Refractions) (চিত্র 8.3.2)।



চিত্র 8.3.2 আলোকের সমবর্তন

দ্বিপ্রতিসরিত রশ্মিগুলি সুসঙ্গত (coherent), কিন্তু এসত্ত্বেও এদের ব্যতিচার হয় না। ইয়ং এথেকে সিদ্ধান্ত করেন যে আলোক তরঙ্গের কম্পন অনুপ্রস্থ, অর্থাৎ কম্পনশীল কণাগুলির সরণ (একটি ভেক্টর) সর্বদা তরঙ্গের গতির অভিমুখের সঙ্গে সমকোণে (90°) থাকে। ইয়ং অনুপ্রস্থ তরঙ্গকে **সমবর্তিত** (polarized) ও **অসমবর্তিত** (unpolarized) এই দুই শ্রেণীতে ভাগ করেন। যখন অনুপ্রস্থ কম্পনশীল কণাগুলির সরণ পরস্পরের সঙ্গে বিভিন্ন দিকে বা বিভিন্ন তলে থাকে, তখন ঐ তরঙ্গকে অসমবর্তিত বলা হয়। সাধারণ আলোক এরূপ অসমবর্তিত অনুপ্রস্থ তরঙ্গ। কিন্তু যখন অনুপ্রস্থ কম্পনশীল কণাগুলির সরণ একটি নির্দিষ্ট দিকে বা একই সমতলে থাকে, তখন ঐ অনুপ্রস্থ তরঙ্গকে সমবর্তিত বা সমতল সমবর্তিত (plane polarized) তরঙ্গ বলে। পরীক্ষার দ্বারা প্রমাণ করা যায় যে দ্বিপ্রতিসরণে কেলসাইট কেলাসের ওপর আপতিত রশ্মিগুচ্ছ অসমবর্তিত, কিন্তু প্রতিসরণের পর সাধারণ রশ্মিগুচ্ছ এবং অসাধারণ রশ্মিগুচ্ছ উভয়ই সমতল সমবর্তিত রশ্মিগুচ্ছে পরিণত হয় এবং এই দুই রশ্মিগুচ্ছের সমবর্তনের সমতল দুটি পরস্পরের সঙ্গে সমকোণে (90°) থাকে। ইয়ং এর ব্যাখ্যা অনুযায়ী এজন্যই এই দুই রশ্মিগুচ্ছের মধ্যে ব্যতিচার হয় না। অনুপ্রস্থ তরঙ্গের সমবর্তিত হওয়ার ধর্মকেই ইয়ং **সমবর্তন** (polarization) অ্যাখ্যা দেন (চিত্র 8.3.2)।

আলোকের সমবর্তন নানা পরীক্ষার দ্বারা প্রমাণ করা যায়। পক্ষান্তরে দেখা যায় যে শব্দ-তরঙ্গের সমবর্তন ধর্ম নেই। শব্দ তরঙ্গে কম্পনশীল কণাগুলির সরণ সর্বদা শব্দের গতির অভিমুখের সঙ্গে সমান্তরাল থাকে। এইরূপ কম্পনকে অণুদৈর্ঘ্য (longitudinal) কম্পন এবং তরঙ্গকে অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ বলে। অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গের সমবর্তন হয় না। এজন্যই শব্দের সমবর্তন পাওয়া যায় না।

8.3.6 ফ্রেনেলের ইথার তত্ত্ব (Fresnel's Ether Theory)

আলোকের তরঙ্গধর্মগুলি এভাবে প্রতিষ্ঠিত হওয়ার পর স্বভাবতই নিউটনের কণাসক্ল তত্ত্বের অবসান ঘটে এবং ফ্রেনেল হাইগেনসের ইথারতত্ত্বকে পরিমার্জিতরূপে পুনঃ প্রতিষ্ঠা করেন। ফ্রেনেলের ইথার তত্ত্বে বলা হয় যে বস্তু ও মহাশূন্য ইথারদ্বারা পরিপূর্ণ এবং এবং এই ইথারের কণাগুলি যখন সরল দোলনে কম্পিত হতে থাকে, তখন এদের সরণের অভিলম্ব দিকে আলোক তরঙ্গের বিস্তার ঘটে।

কিন্তু ফ্রেনেলের এই তত্ত্বের পরই এই তত্ত্বের বিরুদ্ধে আপত্তি উঠতে থাকে। কারণ সে সময়ে আলোকের বেগ মোটামুটি নির্ভুলভাবে জানা গেছে। তা হল $c = 3 \times 10^8\ m/\text{sec.}$। কাজেই ইথার মাধ্যমে তরঙ্গের বেগের ক্ষেত্রে পূর্বে আলোচিত্র নিউটনের সূত্র

$$V = \sqrt{\frac{E}{p}}$$

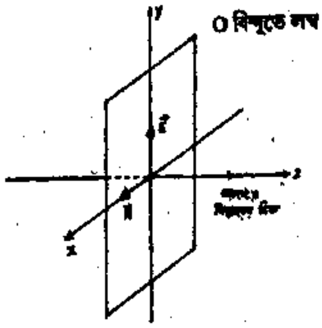
ব্যবহার করলে দেখা যায় V-এর মান c-র মানের সমান হতে গেলে ইথারের স্থিতিস্থাপন গুণাঙ্ক (E) স্টীলের স্থিতিস্থাপকগুণাঙ্কের চেয়েও বহুগুণ বেশী এবং ঘনত্ব (P), সবচেয়ে হাল্কা হাইড্রোজেন গ্যাসের চেয়েও বহুগুণ কম হওয়া প্রয়োজন, যা বাস্তব সম্মত মনে হয় না। অপর দিকে ইথারের তরঙ্গ অনুপ্রস্থ হতে গেলে মাধ্যমটি অত্যন্ত দৃঢ়, স্থিতিস্থাপক ও কঠিন হওয়া প্রয়োজন। কাজেই, ইথারের একইসঙ্গে এইরূপ পরস্পর-বিরোধী ধর্ম কিভাবে থাকতে পারে, তা ভাবা যায় না।

উনিশ শতকের মধ্যভাগে ম্যাক্সওয়েলের তড়িচ্চুম্বকীয় তত্ত্ব ফ্রেনেলের বস্তুতাত্ত্বিক ইথার তত্ত্বের ত্রুটিগুলি দূর করতে সক্ষম হয়।

8.3.7 ম্যাক্সওয়েলের তড়িচ্চুম্বকীয় তরঙ্গ তত্ত্ব (Maxwell's Electromagnetic Wave Theory)

1864 খ্রীষ্টাব্দে ম্যাক্সওয়েল (james clerk Maxwell, 1831—1879) প্রমাণ করেন যে একটি অপরিবাহী মাধ্যমে তড়িৎক্ষেত্রের পরিবর্তন ঘটলে একটি তড়িৎপ্রবাহ উৎপন্ন হয় এবং তা পরিবাহীর মধ্যদিয়ে যে তড়িৎ প্রবাহ যায়, তার মতো একইভাবে প্রবাহের চারদিকে একটি চৌম্বক আবেশক্ষেত্র উৎপন্ন করে। ম্যাক্সওয়েল তাঁর আবিষ্কৃত এই প্রবাহের নাম দেন 'ভ্রংশ প্রবাহ' (displacement current)। অতঃপর ম্যাক্সওয়েল তড়িৎক্ষেত্র ও চৌম্বকক্ষেত্রের সঙ্গে সংশ্লিষ্ট গাউসের দুটি সূত্র (Gauss's laws for electricity and magnetism), তাঁর ভ্রংশ প্রবাহ যোগে অ্যাম্পিয়ারের বর্ধিত সূত্র (Ampere's law as extended by Maxwell) ও ফ্যারাডের আবেশের সূত্র (Faradays's laws of induction) একত্রিত করে চারটি সমীকরণ গঠন করেন যেগুলি কোনও মাধ্যমে তড়িৎ ও চুম্বকীয় ক্ষেত্রের যৌথ ক্রিয়ার ক্ষেত্রে প্রযোজ্য। ম্যাক্সওয়েলের এই চারটি সমীকরণকে তাঁর তড়িচ্চুম্বকীয় ক্ষেত্রের সমীকরণ (Maxwell's equations of electromagnetic field) বলা হয়, যেগুলি পরবর্তীকালে নিউটনের গতিবিদ্যার সমীকরণগুলির মতোই মৌলিক ও মূল্যবানরূপে বিবেচিত হয়।

1865 খ্রীষ্টাব্দে ম্যাক্সওয়েল তাঁর সমীকরণগুলির সাহায্যে প্রমাণ করেন যে শূন্যমাধ্যমে তড়িচ্চুম্বকীয় ক্ষেত্রে কোনও কম্পন ঘটলে একটি তড়িচ্চুম্বকীয় তরঙ্গ উৎপন্ন হয়, যার প্রতিবিন্দুতে তড়িৎ ও চুম্বকীয় ভেক্টর দুটি (এই ভেক্টর দুটি আসলে হল তড়িৎক্ষেত্র প্রাবল্য $\vec{E}$ এবং চুম্বকীয় ক্ষেত্রপ্রাবল্য $\vec{H}$) তরঙ্গের-বিস্তারের অভিমুখের সঙ্গে সমকোণে অঙ্কিত সমতলের ওপর পরস্পরের লম্ব (চিত্র 8.3.3) এবং



চিত্র 8.3.3 তড়িচ্চুম্বকীয় তরঙ্গের বিস্তার

এই তরঙ্গের বেগ হল $c = \frac{1}{\sqrt{k_0 \mu_0}}$ ... ... (8.3.2)

যেখানে k_0 এবং μ_0 হল যথাক্রমে শূন্য মাধ্যমের আপেক্ষিক প্রবেশ্যতা (Specific inductive capacity) ও ভেদ্যতা (permeability) ম্যাক্সওয়েল (8.3.2) সমীকরণে k_0 ও μ_0-র পরীক্ষা লব্ধ মান বসিয়ে দেখতে পান যে

$c = 3 \times 10^8$ m/sec.

আপনি নিশ্চয় লক্ষ করবেন যে এই মান আলোকের বেগের সমান। এ থেকে ম্যাক্সওয়েল সিদ্ধান্ত করেন যে আলোক বস্তুতপক্ষে একপ্রকার তড়িচ্চুম্বকীয় তরঙ্গ। ম্যাক্সওয়েল আরও লক্ষ করেন যে $\vec{E}$ ও $\vec{H}$ ভেক্টর দুটি সর্বদাই পরস্পরের লম্ব এবং এই দুটি ভেক্টর সর্বদা যুগ্মভাবে থাকে। সুতরাং এই দুটি ভেক্টরের যেকোনও একটির দ্বারাই তড়িচ্চুম্বকীয় তরঙ্গকে প্রকাশ করা যায়। ম্যাক্সওয়েলের তত্ত্বে $\vec{E}$ বা $\vec{H}$) ভেক্টরের কম্পনের ফলেই তড়িচ্চুম্বকীয় তরঙ্গ উৎপন্ন হয়। কিন্তু এই ভেক্টর সর্বদা তরঙ্গের গতিমুখের সঙ্গে সমকোণে থাকে। সুতরাং তড়িচ্চুম্বকীয় তরঙ্গ একটি অনুপ্রস্থ তরঙ্গ। তাছাড়া দেখা যায় যে তরঙ্গের $\vec{E}$ (বা $\vec{H}$) ভেক্টরগুলির দিক এক অর্থাৎ এই ভেক্টরগুলি একই সমতলে কম্পিত হয়। সুতরাং তড়িচ্চুম্বকীয় তরঙ্গগুলি হল সমতল সমবর্তিত।

ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণদ্বারা আলোকের সরলরৈখিক গতি, প্রতিফলন, প্রতিসরণ, ব্যবর্তন, ব্যতিচার ও সমবর্তন ধর্মগুলির সন্তোষজনক ব্যাখ্যা পাওয়া যায়। তাছাড়া এই তত্ত্বে শূন্যকে বস্তুতান্ত্রিক ইথার মাধ্যমের পরিবর্তে কম্পনশীল $\vec{E}$ ও $\vec{H}$ ভেক্টরের তড়িচ্চুম্বকীয় মাধ্যমরূপে ভাবা যায়। সুতরাং ফ্রেনেলের ইথার মাধ্যমের প্রকল্পের অসুবিধাগুলি ম্যাক্সওয়েলের তত্ত্বদ্বারা দূর হয়। ফলে ম্যাক্সওয়েলের আলোকের তড়িচ্চুম্বকীয় তত্ত্ব সকলের নিকট সহজেই গ্রহণযোগ্য হয়।

ম্যাক্সওয়েলের তত্ত্বের প্রায় 20 বৎসরপর আনুমানিক 1888 খ্রীষ্টাব্দে হার্ট্জ (Heinrich Hertz) পরীক্ষাগারে দুটি উচ্চ বিভব পার্থক্যযুক্ত তড়িৎ-দ্বারের মধ্যে স্ফুলিঙ্গ (spark) উৎপাদন করে প্রমাণ করেন যে ঐ সঙ্গে দীর্ঘতর তরঙ্গদৈর্ঘ্য-সম্পন্ন তড়িচ্চুম্বকীয় তরঙ্গও উৎপন্ন হয়। এই তড়িচ্চুম্বকীয় তরঙ্গগুলির পরবর্তীকালে নাম হয় রেডিও-ওয়েভ্স (Radio waves) এবং এগুলিকে আমরা বেতার তরঙ্গ বলে থাকি। এই বেতার তরঙ্গের সাহায্যেই পরবর্তীকালে মার্কনি (Guglielmo Marconi, 1874—1937) এবং জগদীশচন্দ্র (Acharya Jagadish Chandra Bose, 1858—1937) বেতার সংকেত প্রেরণ কৌশল (Wireless telegraphy) উদ্ভাবন করেন। 1909 খ্রীষ্টাব্দে এজন্য মার্কনিকে নোবেল পুরষ্কার দেওয়া হয়।

পরবর্তীকালে প্রমাণিত হয় যে এক্স-রশ্মি, গামা-রশ্মি, অতিবেগুনিরশ্মি এবং অবলোহিত রশ্মিগুলিও তড়িচ্চুম্বকীয় তরঙ্গ, তবে এদের তরঙ্গদৈর্ঘ্যগুলি বিভিন্ন। নীচের (8.3.1) সারণীতে আপনি বিভিন্ন তড়িচ্চুম্বকীয় তরঙ্গগুলির তরঙ্গদৈর্ঘ্য ও কম্পাঙ্কের মোটামুটি সীমা লক্ষ্য করতে পারেন, তবে এই সীমা সুনির্দিষ্ট নয়। প্রসঙ্গত একটি বিষয় মনে রাখা প্রয়োজন যে তরঙ্গদৈর্ঘ্য (λ) ও কম্পাঙ্কের (ν) গুণফলই হল তরঙ্গের বেগ (c)। সুতরাং আপনি যদি তরঙ্গের তরঙ্গ দৈর্ঘ্য ও বেগ জানেন, তবে এর কম্পাঙ্ক নীচের সূত্রদ্বারা সহজেই গণনা করতে পারেন।

অর্থাৎ $\nu = \frac{c}{\lambda}$ ... ... (8.3.3)

সারণী 8.3.1

বিভিন্ন তড়িচ্চুম্বকীয় তরঙ্গ তালিকা (বর্ণালি)

নাম	তরঙ্গদৈর্ঘ্য (মিটার)	কম্পাঙ্ক (হার্টজ)
বেতার তরঙ্গ	$10^6 - 0.1$	$3 \times 10^2 — 3 \times 10^9$
মাইক্রোওয়েভ	$0.1 — 10^{-3}$	$3 \times 10^9 — 3 \times 10^{11}$

নাম	তরঙ্গদৈর্ঘ্য (মিটার)	কম্পাঙ্ক (হার্টজ)
অবলোহিতরশ্মি	10^{-3} — 8×10^{-7}	3×10^{11} — 3.75×10^{14}
(দৃশ্য) আলোক	8×10^{-7} — 4×10^{-7}	3.75×10^{14} — 7.5×10^{14}
অতিবেগুনিরশ্মি	4×10^{-7} — 10^{-8}	7.5×10^{14} — 3×10^{16}
এক্স-রশ্মি	10^{-8} — 10^{-11}	3×10^{16} — 3×10^{19}
গামা-রশ্মি	10^{-11} — 10^{-13}	3×10^{19} — 3×10^{21}

তরঙ্গদৈর্ঘ্যের বিভিন্ন একক, $1A^{\circ}$ (অ্যাংস্ট্রং) $= 10^{-10}$ m, $1 \times U$ (এক্সএকক) $= 10^{-13}$ m

কম্পাংকের বিভিন্ন একক, 1H (হার্টজ) = 1 cps (সাইকেল পার সেকেণ্ড), 1KH (কিলোহার্টজ) $= 10^{3}$ H,

1MH (মেগা হার্টজ) $= 10^{6}$ H

8.3.8 তড়িচ্চুম্বকীয় তত্ত্বের কয়েকটি সিদ্ধান্ত (conclusions of the electromagnetic theory)

তড়িচ্চুম্বকীয় তত্ত্ব থেকে তিনটি গুরুত্বপূর্ণ সিদ্ধান্ত করা যায়। পরীক্ষার মাধ্যমে এই সিদ্ধান্তগুলির যথার্থতা পরীক্ষা করে তড়িচ্চুম্বকীয় তত্ত্বের সীমা নির্দিষ্ট করা যায়।

(a) বিভিন্ন ধরনের বিকীর্ণ তরঙ্গের সমন্বয় সাধন (unification of different types of radiations) :

(8.3.1) সারণীতে বেতার তরঙ্গ থেকে গামা-রশ্মি পর্যন্ত যে বিভিন্ন ধরনের বিকীর্ণ রশ্মির উল্লেখ আছে, এগুলির সবই এক অভিন্ন প্রকৃতির তড়িচ্চুম্বকীয় তরঙ্গরূপে প্রমাণিত হয়। তড়িচ্চুম্বকীয় তত্ত্ব আবিষ্কারের ফলেই এই সমন্বয়সাধন সম্ভবপর হয়েছে। সুতরাং এটি তড়িচ্চুম্বকীয় তত্ত্বের এক বিরাট সাফল্য, যা আর কোনওভাবে সম্ভব ছিল না।

(b) ত্বরিত আধান অবশ্য শক্তি বিকীর্ণ করে (An accelerated charge must radiate energy) :

তড়িচ্চুম্বকীয় তত্ত্বের এটিও একটি বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ সিদ্ধান্ত। পরীক্ষার দ্বারা দেখা যায় যে একটি ইলেকট্রন তড়িৎক্ষেত্র বা চৌম্বকক্ষেত্রের দ্বারা ত্বরণ বা মন্দন লাভ করলে, ইলেকট্রন শক্তি বিকীর্ণ করে এবং বিকীর্ণ শক্তির মান সাধারণভাবে তড়িচ্চুম্বকীয় তত্ত্বের দ্বারা গণনাকৃত মানের সমান হয়। এ থেকে তড়িচ্চুম্বকীয় তত্ত্বের সত্যতা প্রমাণিত হয়। কিন্তু দেখা যায় যে কিছু বিশেষ বিশেষ ক্ষেত্রে এই সিদ্ধান্তের ব্যতিক্রম হয়। এরূপ দুটি বিশেষ ক্ষেত্র হল :

(i) এক্স-রশ্মির উৎপত্তি ও (ii) পরমাণুর স্থির কক্ষপথে ইলেকট্রনের আবর্তন।

(i) **এক্স-রশ্মির উৎপত্তি :** একটি ক্যাথোড রশ্মির নলে ইলেকট্রনের ত্বরণ ঘটালে, তা উচ্চ বেগে অ্যানোড পৃষ্ঠে গিয়ে আঘাত করে এবং বেগশূন্য হয়। ইলেকট্রনের এই মন্দনের ফলে শক্তি এক্স-রশ্মিরূপে বিকীর্ণ হয়।

তড়িচ্চুম্বকীয় তত্ত্বের দ্বারা এই শক্তির পরিমাণ গণনা করলে দেখা যায় যে তা পরীক্ষালব্ধ ফলের সঙ্গে সম্পূর্ণ মেলে না।

(ii) পরমাণুর কেন্দ্রে একটি ধনাত্মক আধানযুক্ত ভারি নিউক্লিয়াস (কেন্দ্রক) থাকে এবং একে ঘিরে পরমাণুর অভ্যন্তরে উপস্থিত ইলেকট্রনগুলি বিভিন্ন স্থির কক্ষপথে আবর্তন করে। নিউক্লিয়াসের ধনাত্মক আধান ও ইলেকট্রনের ঋণাত্মক আধারে মধ্যে যে আকর্ষণ বল ক্রিয়া করে, তার জন্যই ইলেকট্রনগুলি বিভিন্ন কক্ষপথে আবর্তন করে। কিন্তু এই আবর্তনের ফলে প্রত্যেক ইলেকট্রনের ওপরই একটি অভিকেন্দ্রিক ত্বরণ ক্রিয়া করে। এই অভিকেন্দ্রিক ত্বরণের ফলে তড়িচ্চুম্বকীয় তত্ত্ব অনুযায়ী ইলেকট্রনটির শক্তি বিকীর্ণ হবে এবং এর কক্ষপথের ব্যাসার্ধ ক্রমশ কমতে থাকবে। এভাবে ইলেকট্রনের শক্তি কমতে কমতে এক সময় তা শূন্য হবে এবং ইলেকট্রনটি নিউক্লিয়াসের ওপর পড়বে। সুতরাং ইলেকট্রনগুলির শেষপর্যন্ত কোনও কক্ষপথই থাকবে না, যা পরমাণুর গঠন তত্ত্বের সম্পূর্ণ বিরোধী। সুতরাং পরমাণুর গঠনে ইলেকট্রনের স্থির (Stable) কক্ষের শর্ত আরোপ করতে হলে, তড়িচ্চুম্বকীয় তত্ত্বের ত্বরণশীল আধানদ্বারা শক্তি বিকিরণের সিদ্ধান্ত অস্বীকার করতে হয়, এবং এটিই বোহ্‌রের হাইড্রোজেন পরমাণুর তত্ত্বের ভিত্তি।

(c) **ক্রিয়ার নিরবচ্ছিন্নতা (continuity of action)**

তড়িচ্চুম্বকীয় ক্ষেত্রের তড়িৎক্ষেত্র ভেকটর ($\vec{E}$) ও চৌম্বকক্ষেত্র ভেক্টর ($\vec{H}$) সময়ের সঙ্গে নিরবচ্ছিন্নভাবে পরিবর্তিত হয়। ফলে এই তত্ত্ব অনুযায়ী তড়িচ্চুম্বকীয় শক্তি সর্বদা নিরবচ্ছিন্নভাবে প্রবাহিত হবে। কিন্তু প্ল্যাঙ্ক ও আইনস্টাইনের ফোটন তত্ত্বের তড়িচ্চুম্বকীয় তত্ত্বের এই সিদ্ধান্তকে অস্বীকার করা হয়েছে।

সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে কোনও কোনও ক্ষেত্রে তড়িচ্চুম্বকীয় তত্ত্ব থেকে সঠিক সিদ্ধান্ত পাওয়া যায় না। কিন্তু তড়িচ্চুম্বকীয় তত্ত্বের এই দুর্বলতাগুলি সত্ত্বেও এর সাফল্যগুলির গুরুত্ব কখনও অস্বীকার করা যায় না। বিশেষত তড়িচ্চুম্বকীয় তরঙ্গতত্ত্ব ছাড়া আলোকের ব্যবর্তন, ব্যতিচার ও সমবর্তনের সম্পূর্ণ সন্তোষজনক ব্যাখ্যা আর কোনভাবে পাওয়া যায় না।

অনুশীলনী—2

অনুশীলনী ৪.3.1 ফারমাটের নীতিটি বলুন। এই নীতির দ্বারা কি প্রমাণ করা যায়?

অনুশীলনী ৪.3.2 নিউটনের করপাসকল তত্ত্ব কি? এই তত্ত্ব কেন গ্রহণযোগ্য নয়?

অনুশীলনী ৪.3.3 হাইগেনের তত্ত্ব কি? ইয়ং এর পরীক্ষাদ্বারা হাইগেনের তত্ত্ব কিভাবে সমর্থিত হয়?

অনুশীলনী ৪.3.4 তড়িচ্চুম্বকীয় বর্ণালিতে বিভিন্ন রশ্মিগুলির নাম ও এদের তরঙ্গদৈর্ঘ্যের সীমা নির্দেশ করুন।

অনুশীলনী ৪.3.5 তড়িচ্চুম্বকীয় তত্ত্বদ্বারা সমবর্তন কিভাবে ব্যাখ্যা করা যায়?

8.4 তরঙ্গের কোয়ান্টাম তত্ত্ব (Quantum Theory of Wave)

পূর্ব অনুচ্ছেদে আপনি জেনেছেন যে তড়িচ্চুম্বকীয় তত্ত্বদ্বারা ক্যাথোড নলে উৎপন্ন এক্স-রশ্মির শক্তি, পরমাণুর অভ্যন্তরে ইলেকট্রনের স্থির কক্ষপথ ও তরঙ্গের বিচ্ছিন্নতা ব্যাখ্যা করা যায় না। কৃষ্ণবস্তুর দ্বারা তাপের বিকিরণ পরীক্ষায়ও তড়িচ্চুম্বকীয় তত্ত্বের অনুরূপ ত্রুটি ধরা পড়ে এবং প্ল্যাঙ্ক প্রথম তাঁর কোয়ান্টাম তত্ত্বদ্বারা এই ত্রুটি দূর করেন। আইনস্টাইন, বোহ্‌র, কম্পটন প্রভৃতি বিজ্ঞানীগণ পরে এই তত্ত্বকে অন্যান্য ক্ষেত্রে প্রয়োগ করেন। এখানে আমরা এই কোয়ান্টাম তত্ত্বের উদ্ভব ও বিভিন্ন ক্ষেত্রে প্রয়োগ সংক্ষেপে আলোচনা করব।

8.4.1. কৃষ্ণবস্তুর বিকিরণ ও প্ল্যাঙ্কের কোয়ান্টাম তত্ত্ব (Blackbody Radiation and Planck's Quantum Theory)

সকল বস্তু সমানভাবে তাপ বিকিরণ বা শোষণ করে না। বিকীর্ণ (বা শোষিত) তাপের তরঙ্গদৈর্ঘ্যও বিভিন্ন। যে বস্তু সকল তরঙ্গদৈর্ঘ্যের তাপ সম্পূর্ণ শোষণ করে তাকে **কৃষ্ণবস্তু** (Blackbody) বলে। কিরশফের সূত্র (Kirchoff's law, 1859) অনুযায়ী একটি প্রকৃত কৃষ্ণবস্তু শীতল অবস্থায় যেমন সকল তরঙ্গদৈর্ঘ্যের তাপ সম্পূর্ণ শোষণ করে, উত্তপ্ত অবস্থায় তেমনি সকল তরঙ্গদৈর্ঘ্যের তাপ সম্পূর্ণ বিকীর্ণ করে এবং তাপের এই বিকিরণের পরিমাণ কেবল বস্তুটির উষ্ণতার ওপর নির্ভর করে।

1884 খ্রীষ্টাব্দে স্টিফান ও বোলট্‌জ্‌ম্যান (Stefan and Boltzmann) তড়িচ্চুম্বকীয় তত্ত্ব ও তাপগতিবিদ্যা (thermodynamics) প্রয়োগ করে প্রমাণ করেন যে কৃষ্ণবস্তু থেকে বিভিন্ন তরঙ্গদৈর্ঘ্যের যে বিকিরণ হয়, তার মোট ঘনত্ব (v), (অর্থাৎ একক আয়তনে বিকিরণ শক্তির মোট পরিমাণ), পরম উষ্ণতা (T)-র চতুর্থ ঘাতের সমানুপাতিক। অর্থাৎ

$$v = \sigma T^4 \qquad \dots\dots (8.4.1)$$

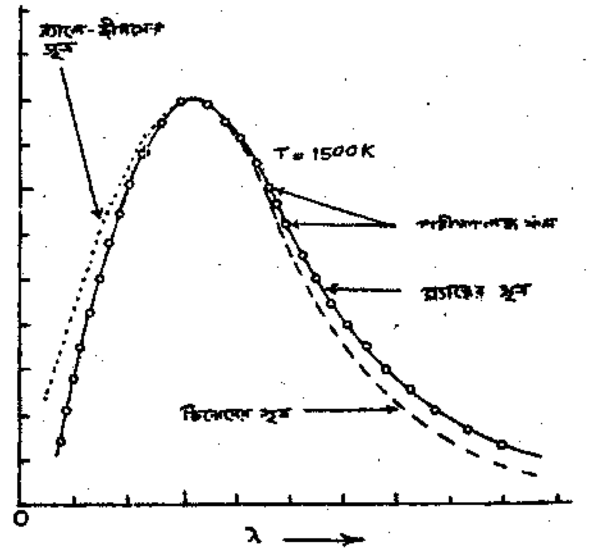
এই সূত্রকে স্টিফান বোলট্‌জম্যানের সূত্র এবং σ (সিগমা)-কে স্টিফান বোলট্‌জ্‌ম্যানের ধ্রুবক বলা হয়। পরীক্ষার দ্বারা স্টিফান-বোলট্‌জ্‌ম্যানের সূত্র নির্ভুল প্রমাণিত হয়। কিন্তু এই সূত্রদ্বারা কোনও উষ্ণতায় বিভিন্ন তরঙ্গদৈর্ঘ্যের ঘনত্ব কিভাবে বন্টিত থাকে, তা জানা না। এজন্য ভিয়েন (Wilhelm Wien, 1864—1928) তড়িচ্চুম্বকীয় তরঙ্গ তত্ত্ব, তাপগতিবিদ্যা ও ম্যাক্সওয়েলের আণবিক বেগ বন্টন সূত্র (Maxwell's law of molecular velocity distribution) প্রয়োগ করে একটি সূত্র প্রমাণ করেন, যা ভিয়েনের সূত্র (Wien's formula) নামে পরিচিত। সূত্রটি এরূপ

$$dE = k\lambda^{-5} e^{-a/\lambda T} d\lambda \qquad \dots\dots (8.4.2)$$

ভিয়েনের এই সূত্রে E হল কৃষ্ণবস্তুর একক তল থেকে প্রতি সেকেণ্ডে মোট যে পরিমাণ তাপ বিকীর্ণ হয়, এবং dE হল কেবল λ ও $\lambda + d\lambda$-র মধ্যবর্তী তরঙ্গদৈর্ঘ্যগুলির জন্য E-র অংশ। এই সূত্রে k ও a হল দুটি ধ্রুবক।

ভিয়েনের সূত্রটি পরীক্ষার জন্য পাশেন, লুমার, প্রিংস্‌হাইম, রুবেন্‌স্‌, কার্লবাউম প্রভৃতি (Paschen, Lummer, Pringsheim, Rubens, Karlbaum) বসু বিজ্ঞানী উদ্যোগ গ্রহণ করেন এবং তাঁদের প্রচেষ্টায় λ ও dE-র মধ্যে বিভিন্ন উষ্ণতায় বহু বক্রের লেখচিত্র পাওয়া যায়। এই বক্রগুলিকে কৃষ্ণবস্তুর বিকীর্ণ তাপের বন্টন বর্ণালি (Distribution spectrum of blackbody radiation) বলে। (8.4.1) চিত্রে প্রায় 1500 k উষ্ণতায় যে বক্র পাওয়া যায়, তার লেখচিত্রের নমুনা দেখানো হল। চিত্রে ছোটছোট বৃত্তের দ্বারা পরীক্ষা লব্ধ ফল এবং ড্যাশ চিহ্নযুক্ত

রেখাদ্বারা (8.4.2) সমীকরণটির অঙ্কন দেখানো হল। দেখা যাচ্ছে যে কম তরঙ্গদৈর্ঘ্যের ক্ষেত্রে পরীক্ষা লব্ধ ফলের সঙ্গে ভিয়েনের সূত্র সম্পূর্ণ মিলে যায়, তবে অধিক তরঙ্গদৈর্ঘ্যের ক্ষেত্রে ভিয়েনের সূত্র পরীক্ষালব্ধ বক্র থেকে ক্রমশই পৃথক হয়ে যায়। অন্যান্য উষ্ণতার বক্রের ক্ষেত্রেও এরূপ একই পার্থক্য দেখা যায়। ভিয়েনের সূত্রের আরেকটি ত্রুটি হল যে $T \to \infty$ ধরলে E-র একটি নির্দিষ্ট মান পাওয়া যায়। কিন্তু স্টিফান-বোলট্জ্ম্যান সূত্র অনুযায়ী এই মান ∞ (অসীম) হওয়ার কথা।



চিত্র 8.4.1 কৃষ্ণবস্তুর দ্বারা বিকীর্ণ তাপের বর্ণালি

ভিয়েনের সূত্রর ত্রুটিগুলি সত্ত্বেও এই সূত্রটিকে তাপের বিকিরণ আলোচনার একটি উল্লেখযোগ্য অবদান হিসাবে গণ্য করা হয়, এবং এজন্য 1911 খ্রীষ্টাব্দে ভিয়েনকে নোবেল পুরস্কার দেওয়া হয়।

ভিয়েনের সূত্রের এই ত্রুটিগুলি দূর করার জন্য 1900 খ্রীষ্টাব্দে র‍্যালে ও জীন্স্ (Rayleight and Jeans) ম্যাক্সওয়েলের বেগ বন্টন সূত্রের পরিবর্তে পরিসংখ্যান তত্ত্ব প্রয়োগ করে ভিয়েনের সূত্রের নিম্নলিখিত পরিমার্জিত রূপ পান। $dE = B\lambda^{-4}\, Te^{-a/\lambda T}.d\lambda$ ... ... (8.4.3)

এই সূত্রে a ও B হল দুটি ধ্রুবক এবং এই সূত্রকে র‍্যালে-জীনস্ সূত্র (Rayleigh-Jeans formula) বলে। (8.4.1) লেখচিত্রে র‍্যালে-জীন্সের সূত্র অঙ্কন করা হলে দেখা যায় যে অধিক তরঙ্গদৈর্ঘ্যের ক্ষেত্রে সূত্রটি পরীক্ষালব্ধ ফলের সঙ্গে মিলে যায়। কিন্তু কম তরঙ্গদৈর্ঘ্যের ক্ষেত্রে সূত্রটি থেকে dE-র মান পরীক্ষালব্ধ মানের চেয়ে বেশী হয়। তাছাড়া dE-কে λ-র 0 থেকে ∞ পর্যন্ত সমাকলন করলে প্রাপ্ত E-র মান ∞ হয়, কিন্তু এটি বাস্তবিকপক্ষে অসম্ভব। সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে র‍্যালে-জীন্স সূত্রও তাপ বিকিরণ বর্ণালির সম্পূর্ণ নির্দেশক নয়।

1900 খ্রীষ্টাব্দে ম্যাক্স প্ল্যাঙ্ক (Max Planck, 1858—1947) লক্ষ করলেন যে কৃষ্ণবস্তুর দ্বারা তাপের শোষণ ও বিকিরণের ক্ষেত্রে যদি দুটি নূতন অঙ্গিকার গ্রহণ করা হয়, তবে তাপ বিকিরণ বর্ণালির সঠিক সমীকরণ উদ্ভাবন করা যায়। প্ল্যাঙ্কের এই দুটি অঙ্গিকার হল—

(1) কৃষ্ণবস্তুর তলে অবস্থিত কণাগুলি অহরহ সরল দোলনে কম্পিত হয় এবং এদ্বারা তাপের শোষণ বা বিকিরণ ঘটে। তাপের শোষণে কম্পকগুলির (কণাগুলির) কম্পাঙ্ক বৃদ্ধি পায় এবং তাপ বিকিরণে কম্পাঙ্ক হ্রাস পায়।

(2) কম্পাকের শক্তিগুলি বিচ্ছিন্ন এবং কম্পাঙ্ক ও একটি পূর্ণ সংখ্যার গুণফলের সমানুপাতিক। অর্থাৎ কম্পাকের শক্তি E, কম্পাঙ্ক ν এবং পূর্ণসংখ্যাটি n ($n = 1, 2, 3, \ldots \infty$ পর্যন্ত) ধরলে

$$E \propto n\nu$$

বা, $$E = nh\nu$$

এখানে h হল একটি ধ্রুবক যাকে প্ল্যাঙ্কের ধ্রুবক (Planck's constant) বলে। (8.4.4) সমীকরণে E-কে একটি কোয়ান্টাম (quantum) বলা হয়, যার সর্বনিম্ন মান হল $E = h\nu$ $(n = 1)$।

প্ল্যাঙ্ক তাঁর এই কোয়ান্টাম তত্ত্বের সাহায্যে প্রমাণ করেন যে dE-র প্রকৃত রাশিমালা হল

$$dE = \frac{8\pi hc\lambda^{-5}\,d\lambda}{e^{hc/k\lambda T} - 1} \qquad \ldots\ldots (8.4.5)$$

এখানে k হল বোলট্‌জম্যান ধ্রুবক (Bottzmann's Constant)। (8.4.5) সমীকরণটিকে প্ল্যাঙ্কের সূত্র বলা হয়, যারদ্বারা (8.4.1) লেখচিত্রটির বক্র অঙ্কন করা হলে পরীক্ষালব্ধ নির্দেশাঙ্ক বৃত্তগুলির সংযোগকারী রেখাটি পাওয়া যায়। অর্থাৎ প্ল্যাঙ্কের সূত্রদ্বারা পরীক্ষালব্ধ ফলকে সম্পূর্ণরূপে ব্যাখ্যা করা যায়। (8.4.5) সমীকরণে $T \to \infty$ ধরলে $E \to \infty$ হয়। অর্থাৎ প্ল্যাঙ্কের সূত্র থেকে স্টিফান-বোলট্‌জম্যানের সূত্র পাওয়া যায়।

আবার এই সূত্রে λ-র মান কম ধরলে

$$e^{hc/k\lambda T} >> 1$$

সুতরাং (8.4.5) সমীকরণটি লেখা যায়

$$dE = 8\pi hc\,\lambda^{-5}\,e^{-hc/k\lambda T}\,d\lambda \qquad \ldots\ldots (8.4.6)$$

অর্থাৎ এক্ষেত্রে আমরা ভিয়েনের সমীকরণটি পাই।

অনুরূপে λ-র মান বেশী ধরলে, $\frac{hc}{k\lambda T} << 1$

আমরা ধরতে পারি

$$e^{hc/k\lambda T} - 1 \approx \frac{hc}{k\lambda T}\,e^{hc/k\lambda T}$$

সুতরাং (8.4.5) সমীকরণ থেকে আমরা পাই,

$$dE = 8\pi kT\lambda^{-4}\,e^{-hc/k\lambda T}\,d\lambda \qquad \ldots\ldots (8.4.7)$$

কাজেই, এটি র‍্যালে-জীন্‌স সমীকরণের সঙ্গে মিলে যায়।

ওপরের আলোচনা থেকে দেখা যাচ্ছে যে প্ল্যাঙ্কের সমীকরণটিকে আমরা সাধারণ সমীকরণ হিসাবে ধরতে পারি এবং স্টিফান-বোল্টজ্‌ম্যান, ভিয়েন ও র‍্যালে-জীন্‌স্-এর সূত্রগুলি হল বিশেষ বিশেষ শর্ত সাপেক্ষে এই সাধারণ সমীকরণ থেকে প্রাপ্ত বিভিন্ন সীমায়িত রূপ।

প্ল্যাঙ্কের তত্ত্বের এই সাফল্য সত্ত্বেও প্রথম দিকে বিজ্ঞানী মহলে এটি বিশেষ গ্রাহ্য হয়নি। কারণ এই তত্ত্বে কোয়ান্টামগুলিকে বিচ্ছিন্ন ভাবা হয়েছে, যা তড়িচ্চুম্বকীয় তত্ত্বের সম্পূর্ণ বিরোধী এবং বিজ্ঞানীদের কল্পনার সম্পূর্ণ বাইরে ছিল। কিন্তু পরবর্তীকালে যখন আলোক-তড়িৎ ক্রিয়া এবং উষ্ণতার সঙ্গে আপেক্ষিক তাপের পরিবর্তন তড়িচ্চুম্বকীয় তত্ত্বদ্বারা ব্যাখ্যা করতে গিয়ে পরীক্ষালব্ধ ফলের সঙ্গে অসঙ্গতিপূর্ণ ফল পাওয়া গেল, তখন আইনস্টাইন (Albert Einestein, 1879—1955) প্ল্যাঙ্কের কোয়ান্টাম তত্ত্বকে সামান্য পরিবর্তিত করে 1905 খ্রীষ্টাব্দে আলোক-তড়িৎ ক্রিয়ার ক্ষেত্রে এবং 1907 খ্রীষ্টাব্দে আপেক্ষিক তাপের ক্ষেত্রে প্রয়োগ করে অভূতপূর্ব সাফল্যলাভ করেন। এর ফলে কোয়ান্টাম তত্ত্ব প্রতিষ্ঠালাভ করে এবং তার স্বীকৃতিস্বরূপ 1918 খ্রীষ্টাব্দে প্ল্যাঙ্ককে এবং 1921 খ্রীষ্টাব্দে আইনস্টাইনকে নোবেল পুরস্কার দেওয়া। এরপর কোয়ান্টাম তত্ত্বকে বোহ্‌র হাইড্রোজেন বর্ণালির বিশ্লেষণে এবং কম্পটন তাঁর আবিষ্কৃত কম্পটন ক্রিয়া ব্যাখ্যার জন্য ব্যবহার করে বিশেষ সাফল্য লাভ করেন।

আপনারা এই বিষয়গুলি পূর্বে বিশদভাবে অধ্যয়ন করেছেন।

আমরা এখানে আলোকের দ্বিচারিতা ব্যাখ্যার জন্য আলোক-তড়িৎ ক্রিয়া, হাইড্রোজেন বর্ণালি ও কম্পটন ক্রিয়ার কোয়ান্টাম তত্ত্ব সংক্ষেপে আলোচনা করব।

8.5 আলোক-তড়িৎ ক্রিয়া ও আইনস্টাইনের ফোটন তত্ত্ব (Photo-electric Effect and Einstein's Photon Theory)

সোডিয়াম, পটাসিয়াম, ক্যালসিয়াম বা অন্য কোনও ধাতুর তলে দৃশ্যমান আলোক, অতিবেগুনিরশ্মি, বা এক্স-রশ্মি আপাতিত হলে ঐ তল থেকে ইলেকট্রন নির্গত হয়। এই ঘটনাকে আলোক তড়িৎ ক্রিয়া বলে। 1887 খ্রীষ্টাব্দে হার্ট্‌জ্ (Heinrich Hertz) এই ঘটনা আবিষ্কার করেন। তবে 1897 খ্রীষ্টাব্দে ইলেকট্রন আবিষ্কারের পর জে জে থমসন এই ঘটনার সঠিক ব্যাখ্যা দিতে সমর্থ হন।

মিলিকান অত্যন্ত সূক্ষ্ম পরীক্ষার দ্বারা আলোক-তড়িৎ ক্রিয়ার এমন তিনটি বৈশিষ্ট্য আবিষ্কার করেন, যেগুলি দেখা যায় যে তরঙ্গ তত্ত্বদ্বারা কোনভাবেই ব্যাখ্যা করা যায় না। আমরা পূর্বেই উল্লেখ করেছি যে মিলিকান ইলেকট্রনের আধানও অত্যন্ত নির্ভুলভাবে পরিমাপ করতে সমর্থ হয়েছিলেন এবং তাঁর এই দুটি অসামান্য কৃতিত্বের জন্য 1923 খ্রীষ্টাব্দে তাঁকে নোবেল পুরস্কার দেওয়া হয়।

8.5.1 আলোক-তড়িৎ ক্রিয়ার বৈশিষ্ট্য (Characteristics of photoelectric effect)

আলোক-তড়িৎ ক্রিয়ার উপরোক্ত তিনটি বিশেষ বৈশিষ্ট্য হল—

(1) এই ক্রিয়ায় নিক্ষিপ্ত ইলেকট্রনের সর্বোচ্চ বেগ (বা সর্বোচ্চ গতিশক্তি) আলোকের তীব্রতা (Intensity)-র ওপর নির্ভর করে না। কিন্তু আলোকের তরঙ্গ তত্ত্ব অনুযায়ী আলোকের তীব্রতা যত বৃদ্ধি পাবে, ইলেকট্রনের বেগ (বা গতিশক্তি)-ও ততই বৃদ্ধি পাবে।

(2) যদি কোনও ধাতুর তলে আপতিত আলোকের তরঙ্গদৈর্ঘ্য একটি নির্দিষ্ট তরঙ্গদৈর্ঘ্যের চেয়ে বেশী হয় (বা বিপরীতক্রমে যদি কম্পাঙ্ক একটি নির্দিষ্ট কম্পাঙ্কের চেয়ে কম হয়), তবে ঐ ধাতুর তল থেকে কোনও ইলেকট্রন

নিঃসরণ হয় না, এক্ষেত্রে আলোকের তীব্রতা যাই হোক না কেন। কিন্তু আলোকের তরঙ্গ তত্ত্ব অনুযায়ী আপতিত আলোকের তরঙ্গদৈর্ঘ্য (বা কম্পাঙ্ক) যা-ই হোক না কেন, যদি তীব্রতা যথেষ্ট বেশী হয়, বা কম তীব্রতার আলোক অনেকক্ষণ ধরে আপতিত হয়, তবে ইলেকট্রন নিঃসরণ হওয়া উচিত।

(3) আলোক-তড়িৎ ক্রিয়ায় আলোকের আপতন ও ইলেকট্রন নিঃসরণের মধ্যে কালক্ষেপ (lag) প্রায় নেই (বস্তুত এই কালক্ষেপ মাত্র 10^{-8} sec) যার ফলে ইলেকট্রন নিঃসরণ প্রক্রিয়াকে তাৎক্ষণিক বলা যায়। কিন্তু আলোকের তরঙ্গ তত্ত্ব অনুযায়ী যদি আপতিত আলোকের তীব্রতা অত্যন্ত কম হয়, তবে ইলেকট্রন নিঃসরণে যথেষ্ট সময় ব্যয় হওয়ার কথা।

8.5.2 আইনস্টাইনের ফোটন তত্ত্ব ও আলোক-তড়িৎ ক্রিয়ার সমীকরণ (Einestein's photon theory and equation of photoelectric effect)

আলোক-তড়িৎ ক্রিয়ার বৈশিষ্ট্যগুলি আলোচনা থেকে দেখা যাচ্ছে যে তরঙ্গ তত্ত্ব এক্ষেত্রে প্রযোজ্য নয়। এই অবস্থায় আইনস্টাইন 1905 খ্রীষ্টাব্দে প্ল্যাঙ্কের কম্পকের বিচ্ছিন্ন শক্তির তত্ত্ব অনুসরণে আলোকের বিচ্ছিন্ন শক্তির তত্ত্ব উত্থাপন করেন। অর্থাৎ এই তত্ত্বে ধরা হল যে কম্পকের বিচ্ছিন্ন শক্তির মতো আলোকের তরঙ্গগুলিও ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র বিচ্ছিন্ন শক্তির মোড়করূপে (small discontinuous energy packets) শূন্য বা কোনও মাধ্যমের ভিতরদিয়ে আলোকের বেগে বিস্তৃত হয়। আইনস্টাইন এই শক্তির মোড়ক বা কোয়ান্টামের নাম দেন **'ফোটন'** (Photon) এবং ধরে নেন যে একটি ফোটনের শক্তির মান হল—

$$E = h\nu \qquad \text{... ... (8.5.1)}$$

যেখানে ν হল ফোটনের কম্পাঙ্ক এবং h প্ল্যাঙ্কের ধ্রুবক। এখানে লক্ষণীয় যে একটি ফোটনের শক্তি সর্বদাই $h\nu$ অর্থাৎ কম্পকের নিম্নতম শক্তির ($n = 1$) সমান।

আইনস্টাইনের তত্ত্ব অনুযায়ী একটি ফোটন যখন কোনও ধাতুর তলে কোনও ইলেকট্রনের ওপর আপতিত হয়, ইলেকট্রনটি তখন ঐ ফোটনকে শোষণ করে নেয় এবং ইলেকট্রনের শক্তি বৃদ্ধি পায়। যদি এই শক্তি ধাতুর তলে ইলেকট্রনটির কার্য-অপেক্ষক (work-function) π অর্থাৎ বন্ধন শক্তির চেয়ে বেশী হয়, তবে ইলেকট্রনটি ধাতুর তল থেকে নিঃসৃত হবে এবং এর অবশিষ্ট শক্তি গতীয় শক্তিতে পরিণত হবে। কাজেই আইনস্টাইনের আলোক-তড়িৎ ক্রিয়ার সমীকরণটি হল—

$$h\nu - \phi = \frac{1}{2} m V^2$$

বা, $$h\nu = \phi + \frac{1}{2} m V^2 \qquad \text{... ... (8.5.2)}$$

এখানে $h\nu\,(= E)$ হল আপতিত ফোটনের শক্তি, ϕ হল কার্য-অপেক্ষক এবং $\frac{1}{2} m V^2$ হল ইলেকট্রনের গতীয় শক্তি (m = ইলেকট্রনের ভর ও V = ইলেকট্রনের বেগ)

দেখা গেছে যে আইমস্টাইনের এই সমীকরণদ্বারা আলোক-তড়িৎ ক্রিয়ার সবগুলি বৈশিষ্ট্যই সঠিকভাবে ব্যাখ্যা করা যায়। তাছাড়া এই সমীকরণ থেকে মিলিকান h-এর যে মান নির্ণয় করেন, তা প্ল্যাঙ্ক দ্বারা নির্ণীত মানের সমান। সুতরাং আইস্টাইনের ফোটন তত্ত্ব যে সঠিক, সে বিষয়ে কোনও সন্দেহ থাকে না।

8.5.3 আইনস্টাইনের ফোটন তত্ত্ব ও প্ল্যাঙ্কের কম্পক তত্ত্বের তুলনা

আইনস্টাইনের তত্ত্বের সঙ্গে প্ল্যাঙ্কের তত্ত্বের তুলনা করলে দেখা যায় যে প্ল্যাঙ্ক কেবল কম্পকের শক্তিগুলিকেই বিচ্ছিন্ন হিসাবে চিন্তা করেছেন, কিন্তু কম্পকগুলি যে শক্তি শোষণ বা বিকিরণ করে, তাকে বিচ্ছিন্ন হিসাবে চিন্তা করেননি। অপরপক্ষে আইনস্টাইন ধরে নিলেন যে শক্তির বিস্তার কালেও তা বিচ্ছিন্ন ক্ষুদ্রক্ষুদ্র একক বা কণার মতোই বিস্তারলাভ করে, তরঙ্গের মতো নিরবচ্ছিন্নভাবে নয়। দ্বিতীয়ত, প্ল্যাঙ্কের কম্পকগুলি হল কোনও বস্তুকণা (যেমন, অণু বা পরমাণু), যেগুলি সরল দোলনে $n\nu$ কম্পাঙ্কে কম্পিত হয় এবং এগুলির শক্তি $E = nh\nu$, যেখানে $n = 1, 2, 3, \ldots$ ইত্যাদি যেকোন একটি পূর্ণ সংখ্যা (এই পূর্ণ সংখ্যাটিকে কোয়ান্টাম সংখ্যা বলা হয়)। অপরদিকে আইনস্টাইনের ফোটন হল শক্তির একটি মোড়ক বা আধার যা কণার মতোই আচরণ করে। অর্থাৎ একটি ফোটন কখনও তরঙ্গের মতো ছড়িয়ে পড়ে না বা এর কোনও ক্ষুদ্রতর ভগ্নাংশও হয় না। কোনও বস্তুকণা যখন কোনও ফোটন শোষণ করে, তখন ফোটনের সবটাই একসঙ্গে এবং তাৎক্ষণিকভাবে শোষিত হয়, অর্থাৎ ফোটনের কোনও ভগ্নাংশ শোষিত হয় না বা শোষণ ক্রিয়া বহুক্ষণ ধরে চলে না। এছাড়া একটি ফোটনের শক্তি সর্বদাই $h\nu$, কখনও এর 1 ছাড়া অন্যকোনও পূর্ণ সংখ্যার (যেমন, $n = 2, 3, 4, \ldots$ প্রভৃতির) গুণিতক নয়।

8.5.4 আইনস্টাইনের ফোটনতত্ত্ব ও নিউটনের করপাসকাল তত্ত্বের তুলনা ও ফোটনের দ্বিচারিতা

আইনস্টাইনের ফোটনের সঙ্গে নিউটনের করপাস্‌কল-এর একটা সাদৃশ্য লক্ষ করা গেলেও এগুলি সম্পূর্ণ আলাদা। অর্থাৎ উভয়ের মধ্যেই কণা ধর্ম বর্তমান। কিন্তু নিউটনের করপাস্‌কলগুলি বস্তুরই অতি ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র কণারূপে ধরা হয়েছে, অথচ এগুলির ভর বা শক্তি সম্বন্ধে কোনও উল্লেখ করা হয়নি। অপরপক্ষে আইনস্টাইনের ফোটনগুলি হল এক একটি নির্দিষ্ট শক্তির আধার এবং এই শক্তির পরিমাণ হল $E = h\nu$ যা পরিমাপযোগ্য। নিউটনের করপাস্‌কলের সঙ্গে তরঙ্গের ধারণার কোনও সম্পর্ক নেই। কিন্তু একটি ফোটনের কণাধর্মের সঙ্গে তরঙ্গধর্মও অঙ্গাঙ্গীভাবে জড়িত, কারণ ফোটনের কম্পাঙ্ক এর তরঙ্গ ধর্মেরই পরিচায়ক। সুতরাং একটি ফোটন হল একই সঙ্গে কণা ও তরঙ্গ এই দ্বৈত ধর্মের নির্দশন। তবে ফোটনের এই দ্বৈত ধর্ম কখনওই একসঙ্গে প্রকাশ পায় না। যেমন ব্যবর্তনর ক্ষেত্রে ফোটনের কেবল তরঙ্গ ধর্ম প্রকাশ পায়, এবং কণা ধর্ম সম্পূর্ণ উহ্য থাকে। অপরপক্ষে আলোক-তড়িৎ ক্রিয়ার ক্ষেত্রে ফোটনের কেবল কণাধর্মই ক্রিয়াশীল হয়, কিন্তু তরঙ্গধর্ম উহ্য থাকে। ফোটনের এরূপ দুটি বিপরীত আচরণকে এর দ্বিচারিতা (Duality) বলে।

8.6 বোহ্‌রের হাইড্রোজেন পরমাণুর তত্ত্ব (Bohr's Theory of Hydrogen Atom)

তাপ বা তড়িৎদ্বারা কোনও গ্যাসীয় পদার্থকে অতি উচ্চ উষ্ণতায় উত্তপ্ত করা হলে ঐ পদার্থ থেকে আলোক বিকীর্ণ হয়। একটি রেখা ছিদ্রের মধ্যদিয়ে বিকীর্ণ আলোককে পাঠিয়ে একটি প্রিজম বা গ্র্যাটিং-এর সাহায্যে একটি বিশুদ্ধ বর্ণালি গঠন করা হলে, তাতে বিভিন্ন বর্ণের বহু সংখ্যক সমান্তরাল রেখার সমাবেশ দেখা যায়। প্রত্যেক রেখাই আলোকের এক একটি তরঙ্গদৈর্ঘ্য নির্দেশ করে এবং রেখার অবস্থান পরিমাপ করে এর তরঙ্গদৈর্ঘ্য নির্ণয় করা যায়।

গ্যাসীয় পদার্থের পরমাণুগুলিই উত্তেজিত হয়ে আলোক বিকিরণ করে। এইজন্য আলোকের এই রেখা বর্ণালিকে **পারমাণবিক রেখা বর্ণালি** (atomic line spectrum) বলে। নিঃসৃত আলোক থেকে এই বর্ণালি হয় বলে একে **নিঃসরণ রেখা বর্ণালি** (emission line spectrum) বলা হয়। বিপরীতপক্ষে যদি সাদা আলোক (যেমন সূর্যের আলোক) কোনও শীতল গ্যাসের ভিতরদিয়ে পাঠানো হয়, তবে ঐ আলোকের কোনও কোনও তরঙ্গদৈর্ঘ্য গ্যাসের পরমাণুগুলি শোষণ করে নেয়। ফলে এই আলোকের নিরবচ্ছিন্ন বর্ণালিতে শোষিত তরঙ্গদৈর্ঘ্যের স্থানে একটি কালো রেখার উৎপত্তি হয়। এই কালো রেখাগুলিকে শোষণ রেখা বর্ণালি (absorption line spectrum) বলে। কোনও পরমাণু উত্তেজিত অবস্থায় যে তরঙ্গদৈর্ঘ্যগুলি নিঃসরণ করে শীতল অবস্থায় সাদা আলোক থেকে কেবল সেই সেই তরঙ্গদৈর্ঘ্যগুলিই শোষণ করে। এজন্য কোনও পরমাণুর নিঃসরণ বর্ণালি থেকে যে যে তরঙ্গদৈর্ঘ্যগুলি পাওয়া যায়, শোষণ বর্ণালি থেকেও ঠিক সেই সেই তরঙ্গদৈর্ঘ্যগুলিই পাওয়া যায়। অর্থাৎ শোষণ বর্ণালি ও নিঃসরণ বর্ণালি হল পরস্পরের ঠিক বিপরীত।

মৌলগুলির মধ্যে হাইড্রোজেনই সবচেয়ে হাল্কা এবং এর পরমাণুর গঠনও সবচেয়ে সরল। এজন্য এর বর্ণালিতে রেখার সংখ্যাও সবচেয়ে কম এবং এই বর্ণালি বিশ্লেষণ করাও সবচেয়ে সহজ। 1885 খ্রীষ্টাব্দে বামার (Balmer) সূর্য ও নক্ষত্রগুলির বর্ণালি বিশ্লেষণ করে এগুলির মধ্যে হাইড্রোজেনের 14 শোষণ রেখা আবিষ্কার করেন এবং লক্ষ করেন যে এগুলিকে একটি সূত্রদ্বারা আবদ্ধ করা যায়। বামারের সূত্রটি এরূপ —

$$\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a}\frac{n_1^2}{n_2^2} \qquad \ldots\ldots (8.6.1)$$

এখানে λ হল শোষিত রেখার তরঙ্গদৈর্ঘ্য, a = একটি ধ্রুবক, $n_1 = 2$ এবং $n_2 = 3, 4, 5, \ldots$ প্রভৃতি কোনও পূর্ণ সংখ্যা।

বামারের সূত্রদ্বারা হাইড্রোজনের যে তরঙ্গদৈর্ঘ্যগুলি পাওয়া যায়, সেগুলিকে **বামারের শ্রেণী** (Balmer series) বলে। দেখা যায় যে এই শ্রেণীটি দৃশ্যমান বর্ণালির অন্তর্গত।

বামারের এই আবিষ্কারের পর লাইমেন (Lyman) পাশেন (Paschen), ব্র্যাকেট (Brackett) ও ফুন্ড (Pfund) তাঁদের নিজের নিজের পরীক্ষাগারে হাইড্রোজেন গ্যাসের মধ্যদিয়ে তড়িৎপ্রবাহ পাঠিয়ে এক্স-রশ্মি ও অবলোহিত রশ্মির রেখা বর্ণালি গঠন করেন এবং আরও চারটি হাইড্রোজেনের তরঙ্গদৈর্ঘ্যের শ্রেণী আবিষ্কার করেন।

রিট্জ (Ritz) এবং রাইডবার্গ (Rydberg) লক্ষ করেন যে বামার সহ এই চারটি শ্রেণী নীচের সূত্রগুলিদ্বারা প্রকাশ করা যায়।

(1) লাইমেনের শ্রেণী ঃ

$$\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{n_2^2}\right), \text{ যেখানে } n_2 = 2, 3, 4, 5, \qquad \ldots\ldots (8.6.2)$$

(2) বামারের শ্রেণী ঃ

$$\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{n_2^2}\right), \text{ যেখানে } n_2 = 3, 4, 5, \qquad \ldots\ldots (8.6.3)$$

(3) পাশেনের শ্রেণী :

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n_2^2}\right), \text{ যেখানে } n_2 = 4, 5, 6, \qquad \ldots \ldots (8.6.4)$$

(4) ব্র্যাকেটের শ্রেণী :

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n_2^2}\right), \text{ যেখানে } n_2 = 5, 6, 7, \qquad \ldots \ldots (8.6.5)$$

(5) ফুন্ডের শ্রেণী :

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n_2^2}\right), \text{ যেখানে } n_2 = 6, 7, 8, \qquad \ldots \ldots (8.6.6)$$

রাইডবার্গ এই পাঁচটি সূত্রকে একত্রিত করে একটিমাত্র সূত্র গঠন করেন, যা হল

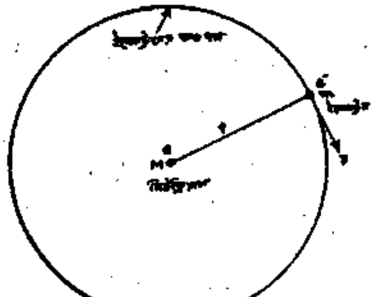
$$\overline{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right), \text{ যেখানে } n_2 = n_1 + 1, n_1 + 2, n_1 + 3 \ldots \qquad \ldots \ldots (8.6.7)$$

এই সমীকরণে $\overline{\nu}\left(= \frac{1}{\lambda}\right)$-কে বলা হয় তরঙ্গ-সংখ্যা অর্থাৎ একক দৈর্ঘ্যের মধ্যে কতগুলি তরঙ্গ আছে, তার সংখ্যা এবং R হল একটি ধ্রুবক, যাকে বলা হয় রাইডবার্গ ধ্রুবক। বামার শ্রেণীর সাহায্যে বার্জ (Birge) এই ধ্রুবকের মান গণনা করে পান

$$R = 109678.6 \ cm^{-1} \qquad \ldots \ldots (8.6.8)$$

লক্ষ্য করুন, আমরা পূর্বে ν (নিউ)-দ্বারা কম্পাঙ্ক নির্দেশ করেছি, যা (8.6.7) সমীকরণে ব্যবহৃত $\overline{\nu}$ থেকে সম্পূর্ণ আলাদা। তাছাড়া (8.6.7) সমীকরণ থেকে আমরা $n_1 = 1, 2, 3, 4$ এবং 5 বসিয়ে যথাক্রমে লাইমেন, বামার, পাশেন, ব্র্যাকেট ও ফুন্ডের শ্রেণী পাই।

রাইডবার্গের (8.6.7) সমীকরণটি বর্ণালীর তত্ত্বে এক গুরুতর সমস্যারূপে দেখা দেয়। কারণ কোনও তরঙ্গ তত্ত্ব দ্বারাই এই সমীকরণটি নির্ণয় করা যায় না। অবশেষে বোহ্‌র (Niels Bohr, 1885—1963) 1913 খ্রীষ্টাব্দে তাঁর হাইড্রোজেন পরমাণুর তত্ত্বে প্ল্যাঙ্কের কোয়ান্টাম তত্ত্ব ব্যবহার করে রাইডবার্গের সূত্রটি প্রমাণ করতে সমর্থ হন এবং এজন্য তাঁকে 1922 খ্রীষ্টাব্দে নোবেল পুরস্কার দেওয়া হয়।



চিত্র 8.6.1 হাইড্রোজেন পরমাণু

বোহ্‌রের তত্ত্বের প্রথম অঙ্গিকার হল যে হাইড্রোজেনের পরমাণু একটি মাত্র ঋণাত্মক আধানযুক্ত ইলেকট্রন এবং একই মানের ধনাত্মক আধানযুক্ত একটি নিউক্লিয়াস (Nucleus) বা কেন্দ্রকদ্বারা গঠিত। নিউক্লিয়াসের তুলনায় ইলেকট্রনের ভর নগণ্য হওয়ায় ইলেকট্রনটি নিউক্লিয়াসের চতুর্দিকে কুলম্ব আকর্ষণ বলের দরুন বৃত্তাকার কক্ষপথে আবর্তিত হয় (চিত্র 8.6.1)।

বোহ্‌রের দ্বিতীয় অঙ্গিকার হল যে সাম্যাবস্থায় ইলেকট্রনটি কেবল এমন কোনও একটি নির্দিষ্ট কক্ষপথে ঘোরে, যার জন্য এর কৌণিক ভরবেগের মান $= nh/2\pi$ এবং এই আবর্তনের ফলে ইলেকট্রনটির কোনও শক্তির বিকিরণ হয় না (লক্ষ্য করুন যে বোহ্‌রের এই অঙ্গিকার তড়িচ্চুম্বকীয় তত্ত্বের সম্পূর্ণ বিরোধী, কারণ তড়িচ্চুম্বকীয় তত্ত্ব অনুযায়ী ত্বরণশীল ইলেকট্রনটির শক্তির বিকিরণ হবে)। এই অঙ্গিকারে n হল একটি পূর্ণ সংখ্যা ($= 1, 2, 3, \ldots$ ইত্যাদি), যাকে বোহ্‌রের কোয়ান্টাম সংখ্যা বলে এবং h হল প্ল্যাঙ্কের ধ্রুবক। $n = 1, 2, 3, \ldots$ ইত্যাদি বসালে যে কক্ষপথগুলি পাওয়া যায়, সেগুলিকে স্বীকৃত (allowed) কক্ষপথ বলে, কারণ ইলেকট্রন কেবল এই কক্ষপথগুলিতেই আবর্তিত হতে পারে, অন্য কোনও কক্ষপথে নয়।

বোহ্‌রের তৃতীয় অঙ্গিকার হল যে বিভিন্ন স্বীকৃত কক্ষপথে আবর্তনের জন্য ইলেকট্রনের বিভিন্ন শক্তির প্রয়োজন হয়। ফলে ইলেকট্রনটি একটি স্বীকৃত কক্ষপথ থেকে অন্য একটি স্বীকৃত কক্ষপথে স্থানান্তরিত হলে শক্তির প্রভেদ একটি কোয়ান্টাম (বা ফোটন)-রূপে ইলেকট্রনদ্বারা বিকীর্ণ বা শোষিত হবে। অর্থাৎ ইলেকট্রনটি E_1 শক্তির কক্ষপথ থেকে E_2 শক্তির কক্ষপথে স্থানান্তরিত হলে শক্তির যে বিকিরণ বা শোষণ হবে তা হল

$$E_2 - E_1 = h\nu, \qquad \ldots \ldots (8.6.9)$$

যেখানে ν হল বিকীর্ণ বা শোষিত ফোটনের কম্পাঙ্ক। (লক্ষ করুন $E_2 - E_1$ ধনাত্মক হলে বিকিরণ ও ঋণাত্মক হলে শোষণ বোঝায়।)

বোহ্‌রের এই তিনটি অঙ্গিকারদ্বারা হাইড্রোজেন পরমাণু থেকে বিকীর্ণ (বা শোষিত) তরঙ্গের তরঙ্গদৈর্ঘ্যের যে সূত্র পাওয়া যায়, তা হল

$$\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{2\pi^2 me^4}{ch^3}\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) \qquad \ldots \ldots (8.6.10)$$

সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে (8.6.10) সমীকরণটি রাইডবার্গের সমীকরণের সঙ্গে অভিন্ন হবে, যদি

$$R = \frac{2\pi^2 me^4}{ch^3} \text{ হয়।} \qquad \ldots \ldots (8.6.11)$$

কিন্তু আমরা জানি যে

ইলেকট্রনের ভর	$m = 9.035 \times 10^{-28}$ gm
ইলেকট্রনের আধান	$e = 4.77 \times 10^{-10}$ e.s.u.
প্ল্যাঙ্কের ধ্রুবক	$h = 6.547 \times 10^{-27}$ erg.sec
এবং আলোকের বেগ	$c = 3 \times 10^{10}$ cm/sec

সুতরাং এই মানগুলি থেকে আমরা পাই

$$R = 109668.8 \text{ cm}^{-1} \qquad \dots\dots (8.6.12)$$

এটি খুবই আশ্চর্যের ব্যাপার যে বোহ্‌রের তত্ত্বের এরূপ বিভিন্ন ধ্রুবকের মান বসিয়ে R-এর যে মান গণনা করা হল, তা (8.6.8) সমীকরণে প্রদত্ত বার্জের পরীক্ষালব্ধ মানের সঙ্গে এত নির্ভুলভাবে মেলে যে এ থেকে বোহ্‌রের কোয়ান্টাম তত্ত্বের নির্ভুলতা সন্দেহাতীতভাবে প্রমাণিত হয়।

8.7 কম্পটন ক্রিয়া (Compton Effect)

আইনস্টাইনের ফোটন তত্ত্বদ্বারা আলোক-তড়িৎ ক্রিয়া সঠিকভাবে ব্যাখ্যা করা যায়। কম্পটন ক্রিয়া থেকে ফোটন তত্ত্বের আরও সমর্থন পাওয়া যায়।

8.7.1 কম্পটনের আবিষ্কার (Compton's Discovery)

1923 খ্রীষ্টাব্দে কম্পটন (Arthur H. Compton, 1892—1962) আবিষ্কার করেন যে একটি নির্দিষ্ট তরঙ্গদৈর্ঘ্যের এক্স-রশ্মি একটি কার্বন পরমাণুর ওপর আপতিত হলে পরমাণুর ইলেকট্রনদ্বারা এক্স-রশ্মির বিক্ষেপণ (scattering) ঘটে, এর তরঙ্গদৈর্ঘ্যের বৃদ্ধি হয় (বা কম্পাঙ্কের হ্রাস হয়)। এই ঘটনাকে **কম্পটন ক্রিয়া** (compton effect) বলে।

কম্পটন প্রমাণ করেন যে তড়িচ্চুম্বকীয় তরঙ্গতত্ত্ব অনুযায়ী বিক্ষিপ্ত এক্স-রশ্মির তরঙ্গদৈর্ঘ্যের পরিবর্তন হয় না, যা পরীক্ষালব্ধ ফলের বিরুদ্ধ। অপরপক্ষে এক্স-রশ্মিকে কোয়ান্টাম বা ফোটনরূপ কণা হিসাবে ধরে নিলে ইলেকট্রনের সঙ্গে সংঘর্ষে এর শক্তির ক্ষয় হবে এবং ফলে তরঙ্গদৈর্ঘ্যের বৃদ্ধি হবে। কণার বিক্ষেপণ তত্ত্বদ্বারা এই শক্তির ক্ষয় গণনা করা যায় এবং তা কম্পটনের পরীক্ষালব্ধ ফলের সঙ্গে সম্পূর্ণ মিলে যায়। সুতরাং এক্স-রশ্মি যে এই ক্রিয়ায় সম্পূর্ণ ফোটন বা কণার মতো আচরণ করে, তা সম্পূর্ণ প্রমাণিত হয় এবং এর দ্বারা আইনস্টাইনের ফোটন তত্ত্বও সমভাবে প্রমাণিত হয়। কম্পটনের এই অসাধারণ আবিষ্কার ও তত্ত্বের জন্য তাঁকে 1927 খ্রীষ্টাব্দে নোবেল পুরস্কার দেওয়া হয়।

8.7.2 ফোটনের ভর ও ভরবেগ (Mass and Mamentum of a Photon)

কম্পটন আইনস্টাইনের আপেক্ষিকতা তত্ত্ব প্রয়োগ করে ফোটনের ভর ও ভরবেগ নির্ণয় করেন এবং তা কম্পটনের বিক্ষেপণ পরীক্ষায় সঠিক বলে প্রমাণিত হয়। সুতরাং কম্পটনের পরীক্ষায় ফোটনের কণাতত্ত্ব ও পরোক্ষভাবে আইনস্টানের আপেক্ষিকতা তত্ত্ব প্রমাণিত হয়।

আইনস্টাইনের বিশেষ আপেক্ষিকতা তত্ত্ব থেকে শক্তি ও ভরের তুল্যমূল্য সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়

$$E = mc^2 \qquad \dots\dots (8.7.1)$$

এখন একটি ফোটনের শক্তি হল $E = h\nu$। সুতরাং এটিকে একটি কণা ধরলে

$$E = h\nu = mc^2$$

বা, $m = \frac{h\nu}{c^2} = \frac{h}{c\lambda}$ $\left[যেহেতু\ \nu = \frac{c}{\lambda}\right]$ ...... (8.7.2)

এখানে m হল ফোটনের ভর, ν এবং λ যথাক্রমে ফোটনের কম্পাঙ্ক ও তরঙ্গদৈর্ঘ্য এবং c হল আলোকের (এক্স-রশ্মির) বেগ।

এখানে একটি বিষয় লক্ষণীয় যে সাধারণ বস্তুকণার ক্ষেত্রে আপেক্ষিকতার বিশেষ তত্ত্ব অনুযায়ী

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad ...... (8.7.3)$$

কিন্তু এই সমীকরণটি ফোটনের ক্ষেত্রে খাটে না। কারণ শূন্য মাধ্যমে ফোটনের বেগ সর্বদাই c এবং এর কোনও স্থৈতিক শক্তি বা ভর নেই। সুতরাং (8.7.3) সমীকরণে $m_0 = 0$, $V = c$ বসালে আমরা পাই

$$m = \frac{0}{0} \quad ...... (8.7.4)$$

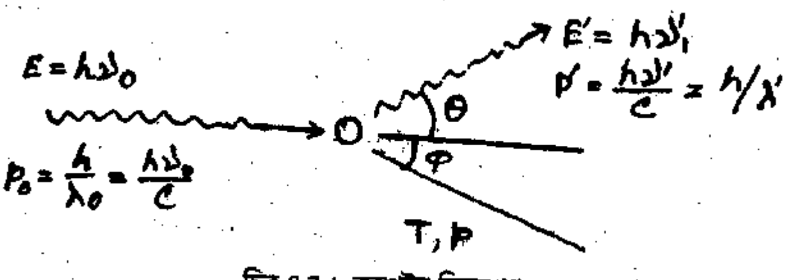
যা একটি অনির্ণেয় রাশি।

যেহেতু ফোটনের বেগ সর্বদা c, অতএব (8.7.2) সমীকরণ অনুযায়ী এর ভরবেগ

$$p = mc = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad ...... (8.7.5)$$

8.7.3. কম্পটন ক্রিয়ার তত্ত্ব

এই তত্ত্ব প্রমাণে অর্থাৎ এক্স-রশ্মি বিক্ষেপণে বিক্ষিপ্ত তরঙ্গে আপতিত তরঙ্গের সহিত একটি উচ্চতর তরঙ্গ দৈর্ঘ্য যুক্ত বিকিরণের উপস্থিতি ব্যাখ্যা করতে গিয়ে এক্স-রশ্মি ফোটনকে কণা ধরেন যা পদার্থের পরমাণু বা ইলেকট্রনের স্থৈতিক ভরের সহিত সংঘর্ষে লিপ্ত। চিত্রে এই সংঘর্ষটি দেখানো হোল (চিত্র 8.7.1)



চিত্র 8.7.1. কম্পটন বিক্ষেপণ

এই সংঘর্ষে ভরবেগ সংরক্ষণ সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$$p_0 = p^1 \cos\theta + p \cos\phi$$

$$O = p^1 \sin\theta - p \sin\phi \quad ...... (8.7.6)$$

এবং শক্তির সংরক্ষণ সূত্র হতে পাই,

$$E_0 - E^1 = T$$

$$\text{or,} \quad p_0 - p^1 = \frac{T}{c} \qquad \dots \dots (8.7.7)$$

প্রথম দুটি সমীকরণ হতে ϕ অপনয়ন করলে,

$$p^2 = p_0^2 + p'^2 - 2p_0p^1 \cos\theta \qquad \dots \dots (8.7.8)$$

8.7.7 এর বর্গ করে $p_0^2 + p'^2 - 2p_0p^1 = T^2/c^2$ ... ... (8.7.9)

8.7.9 সমীকরণ হতে 8.7.8 বিয়োগ করলে,

$$p^2 - \frac{T^2}{c^2} = 2p_0p^1 (1 - \cos\theta) \qquad \dots \dots (8.7.10)$$

সংঘর্ষে পরেও কণাটি আপেক্ষিকতা তত্ত্ব মেনে চললে

$$p^2 = \frac{1}{c^2}(T^2 + 2m_0c^2T) \quad [m_0 = \text{কণার স্থৈতিক ভর}]$$

$$\text{বা,} \quad p^2 - \frac{T^2}{C^2} = 2m_0T = 2m_0c\,(p_0 - p^1)$$

সুতরাং 8.7.10 সমীকরণ হতে

$$2m_0c(p_0 - p') = 2p_op'(1 - \cos\theta)$$

$$\text{বা,} \quad \frac{1}{p^1} - \frac{1}{p_0} = \frac{1}{m_0c}\,(1 - \cos\theta)$$

$$\text{বা,} \quad \lambda^1 - \lambda = \frac{h}{m_0c}\,(1 - \cos\theta) \qquad \dots \dots (8.7.11)$$

এই সমীকরণ অনুসারে তাত্ত্বিক ফল পরীক্ষালব্ধ ফলের সহিত মিলে যাওয়ায় কম্পটন ক্রিয়ার তত্ত্ব ফোটনের কণা ধর্মের ধারণাকে আরও সুদৃঢ় করে।

অনুশীলনী—3

অনুশীলনী 8.7.1 কৃষ্ণবস্তুর বিভিন্ন তরঙ্গদৈর্ঘ্যের তাপবিকিরণ কোন্ কোন্ সূত্রদ্বারা ব্যাখ্যা করা হয়? এদের মধ্যে কোন্ সূত্রটি সম্পূর্ণ সঠিক?

অনুশীলনী 8.7.2 আলোক-তড়িৎ ক্রিয়ার বৈশিষ্ট্যমূলক ধর্মগুলি কি? এই ধর্মগুলি কোন্ সূত্রদ্বারা সঠিকভাবে ব্যাখ্যা করা যায়?

অনুশীলনী 8.7.3 একটি ফোটনের ভর ও ভরবেগের সূত্র কি?

8.8 তরঙ্গের দ্বিচারিতা (Duality of Waves)

আমরা এ যাবৎ আলোক ও অন্যান্য তড়িচ্চুম্বকীয় তরঙ্গের যে ধর্মগুলি আলোচনা করেছি, তা থেকে দেখা যাচ্ছে যে এই ধর্মগুলিকে দুটি শ্রেণীতে ভাগ করা যায়। প্রথম শ্রেণীর ধর্মগুলি হল —তরঙ্গের বিস্তার, প্রতিফলন, প্রতিসরণ, ব্যবর্তন, ব্যতিচার ও সমবর্তন। আর দ্বিতীয় শ্রেণীর ধর্মগুলি হল —কৃষ্ণবস্তুর দ্বারা তাপের বিকিরণ ও শোষণ, হাইড্রোজেন বা অন্যকোনও গ্যাসীয় মৌলদ্বারা আলোক, এক্স-রশ্মি বা অন্যান্য তড়িচ্চুম্বকীয় তরঙ্গের বিকিরণ ও শোষণ, আলোক-তড়িৎ ক্রিয়া, আপেক্ষিক তাপের পরিবর্তন, ও কম্পটন ক্রিয়া।

আপনি নিশ্চয়ই লক্ষ্য করেছেন যে প্রথম শ্রেণীর ধর্মগুলির মধ্যে আলোকের সরলরৈখিক গমন ও প্রতিফলন কণাতত্ত্ব ও তরঙ্গতত্ত্ব এই উভয় প্রকার তত্ত্বদ্বারাই ব্যাখ্যা করা যায়। সুতরাং এদুটি ধর্মদ্বারা আলোকের প্রকৃত স্বরূপ বোঝা যায় না। কিন্তু প্রতিসরণ, ব্যবর্তন, ব্যতিচার ও সমবর্তন তরঙ্গ তত্ত্ব বা বিশেষত তড়িচ্চুম্বকীয় তরঙ্গতত্ত্ব ছাড়া আর কোনভাবে সঠিকভাবে ব্যাখ্যা করা যায় না। সুতরাং এগুলিকেই তরঙ্গের বৈশিষ্ট্যপূর্ণ ধর্ম (Characteristic properties) বলা যায়।

দ্বিতীয় শ্রেণীর ধর্মগুলিকে আমরা বলতে পারি কোয়ান্টাম বা ফোটনের বৈশিষ্ট্যপূর্ণ ধর্ম এবং এগুলির ক্ষেত্রে তরঙ্গ ধর্ম একেবারে প্রযোজ্য হয় না।

তরঙ্গের এই দুই শ্রেণীর ধর্মের আলোচনা থেকে আমরা বলতে পারি যে তরঙ্গের তরঙ্গরূপ এবং কণারূপ এই দুই প্রকার রূপ বা আচরণ আছে। (সরলরৈখিক গতি ও প্রতিফলন বাদে) যে সকল ক্ষেত্রে তরঙ্গের তরঙ্গরূপ আচরণ দেখা যায়, সে সকল ক্ষেত্রে এর কণারূপ আচরণ দেখা যায় না, এবং যে সকলক্ষেত্রে এর কণারূপ আচরণ দেখা যায়, সেসকল ক্ষেত্রে এর তরঙ্গরূপ আচরণ দেখা যায় না। অর্থাৎ তরঙ্গের এই উভয় প্রকার আচরণ এর বৈশিষ্ট্যপূর্ণ ধর্মগুলির ক্ষেত্রে কখনই একসঙ্গে হয় না। তরঙ্গের এইরূপ আচরণকে এর **দ্বিচারিতা** বা **দ্বৈত আচরণ** (Duality) বলে। তরঙ্গের এই দ্বিচারিতার ফলে একটিমাত্র তত্ত্বের দ্বারা এর সকল ধর্ম প্রকাশ করা যায় না।

পরবর্তী অধ্যায়গুলিতে আপনি দেখতে পাবেন যে ডি ব্রগলির তরঙ্গ তত্ত্বের ওপর ভিত্তি করে তরঙ্গ তত্ত্ব ও কোয়ান্টাম তত্ত্বের সমন্বয়ে কিভাবে কোয়ান্টাম বলবিদ্যা গঠিত হয়েছে।

8.9 পদার্থের তরঙ্গ ধর্ম (Wave Nature of Matter)

আপনি পূর্বের অনুচ্ছেদগুলিতে তরঙ্গের কণাধর্ম সম্বন্ধে পাঠ করেছেন। লুইস ডি ব্রগলির (Louis Victor de Broglie, 1892—1987) ধারণা হল যে তরঙ্গের যদি কণা ধর্ম থাকতে পারে, তবে বস্তুকণারও তরঙ্গ ধর্ম থাকা স্বাভাবিক। এই ধারণার ভিত্তিতে 1924 খ্রীষ্টাব্দে তিনি তাঁর 'পি এইচ-ডি' (Ph. D.) থিসিসে একটি প্রকল্প উত্থাপন করেন। এই প্রকল্পকে ডি ব্রগলির প্রকল্প বলা হয়।

8.9.1 ডি ব্রগলির প্রকল্প (de Broglie's Hypothesis)

ডি ব্রগলি লক্ষ্য করেন যে প্রকৃতি পদার্থ ও শক্তি কেবল এই দুটি উপাদানদ্বারা গঠিত। এর মধ্যে পদার্থকে আমরা সাধারণত কণার সমষ্টিরূপে এবং শক্তিকে বিভিন্ন তরঙ্গদৈর্ঘ্যের তড়িচ্চুম্বকীয় তরঙ্গের সমষ্টিরূপে দেখতে

পাই। কিন্তু এই তরঙ্গগুলিই আবার কোনও কোনও ক্ষেত্রে কোয়ান্টাম বা ফোটনরূপ কণার মতো আচরণ করে। একটি ফোটনের শক্তি $E = h\nu$ ধরলে, কণা হিসাবে এর ভর হয় $m = \frac{h\nu}{c^2} = \frac{h}{c\lambda}$ এবং ভরবেগ হয় $p = mc = \frac{h}{\lambda}$।

কিন্তু ডি ব্রগলি এও লক্ষ করেন যে প্রকৃতির মধ্যে বিভিন্নরকমের প্রতিসাম্য (Symmetry) রয়েছে। উদাহরণস্বরূপ বলা যায় আলোকের ক্ষেত্রে যেমন ফারমাটের ন্যূনতম সময়ের নীতি প্রযোজ্য, তেমনি কণার বলবিদ্যাতেও মাউপার্ট-এর (Maupert) ন্যূনতম ক্রিয়ার নীতি (principle of least action) প্রযোজ্য। তাছাড়া আইনস্টাইনের বিশেষ আপেক্ষিকতা তত্ত্ব অনুযায়ী কণার ভর ও শক্তি পরস্পরের তুল্যমূল্য। সুতরাং তরঙ্গের যেমন কর্ণাধর্মী আছে, তেমনি কণারও তরঙ্গ ধর্ম থাকা স্বাভাবিক।

তৃতীয়ত এও লক্ষ্য করার বিষয় যে বোহ্‌রের তত্ত্বে যে n কোয়ান্টাম সংখ্যাটি ধরা হয়েছে, তার কোনও তাত্ত্বিক ব্যাখ্যা নেই। কিন্তু একমাত্র দুটি তরঙ্গের উপরিপাতন দ্বারা যখন স্থানু তরঙ্গ বা, ব্যতিচার ঘটে, কেবল তখনই তাত্ত্বিক শর্ত পূরণের জন্য এরূপ পূর্ণ সংখ্যা গ্রহণ করতে হয়। সুতরাং ডি ব্রগঙ্গির যুক্তি হল যে হাইড্রোজেন পরমাণুর অভ্যন্তরে ইলেকট্রনের আবর্তনকে যদি একটি স্থানু তরঙ্গ হিসাবে বিবেচনা করা যায়, তবে n কোয়ান্টাম সংখ্যাটির একটি তাত্ত্বিক ব্যাখ্যা পাওয়া যাবে। তাছাড়া ইলেকট্রনকে যদি একটি তরঙ্গ দ্বারা প্রতিস্থাপিত করা যায়, তবে ইলেকট্রনের ত্বরণজনিত বিকিরণের সমস্যাও আর থাকে না।

সুতরাং ডি ব্রগলির প্রকল্প হল যে প্রত্যেক গতিশীল বস্তুকণাকেই একটি তরঙ্গরূপে কল্পনা করা যায় এবং এই তরঙ্গের তরঙ্গদৈর্ঘ্য হল

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mV} \qquad \ldots\ldots (8.9.1)$$

যেখানে p হল V বেগে গতিশীল m ভরযুক্ত কণার ভরবেগ।

একটু লক্ষ করলেই দেখা যাবে যে ডি ব্রগলির এই সমীকরণটি ফোটনের ভরবেগের সমীকরণের অনুরূপ। তবে শূন্যমাধ্যমে ফোটনের বেগ সর্বদাই c, কিন্তু বস্তুকণার বেগ V সর্বদাই $< c$।

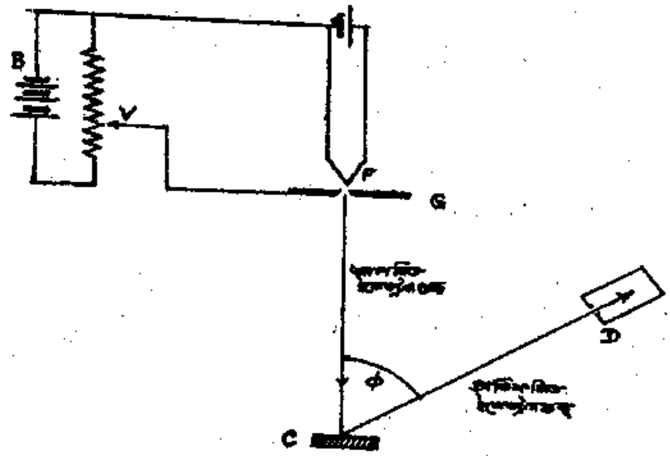
8.9.2 ডি ব্রগলির প্রকল্পের সত্যতা পরীক্ষা (Verification of de Broglie's Hypothesis)

সি. জে. ডেভিসন ও এল এইচ জারমার (C.J. Davisson, 1881—1958, and L.H. Germer) 1926 খ্রীষ্টাব্দে (8.9.1) চিত্রের অনুরূপ একটি পরীক্ষা ব্যবস্থার দ্বারা ডি ব্রগলির প্রকল্পের সত্যতা নির্ণয় করেন।

চিত্রের F ফিলামেন্টকে তড়িৎপ্রবাহ দ্বারা উত্তপ্ত করে ইলেকট্রন নিঃসরণ করা হয় এবং গ্রিড G-র ওপর উচ্চ বিভব পার্থক্য V প্রয়োগ করে একটি উচ্চ শক্তির ইলেকট্রন প্রবাহ উৎপন্ন করা হয়। এই প্রবাহ T অবস্থানে রাখা একটি নিকেল কেলাসের ওপর লম্বভাবে আপতিত হয় এবং কেলাসের বিভিন্ন তল থেকে ϕ কোণে প্রতিফলিত হয়ে D গ্রাহকযন্ত্রে প্রবেশ করে। গ্রাহক যন্ত্রে প্রতিফলিত প্রবাহের মান নির্ণীত হয়। ডেভিসন ও জারমার লক্ষ্য করেন যে বিভব পার্থক্য V পরিবর্তন করে আপতিত ইলেকট্রন প্রবাহের শক্তি পরিবর্তিত করা হলে, প্রতিফলিত ইলেকট্রনগুচ্ছের প্রবাহমানও পরিবর্তিত হয়। পরীক্ষা থেকে দেখা গেল যে যখন $\phi = 50°$ এবং $V = 54$ ভোল্ট, তখন প্রতিফলিত প্রবাহের মান সর্বোচ্চ হয়।

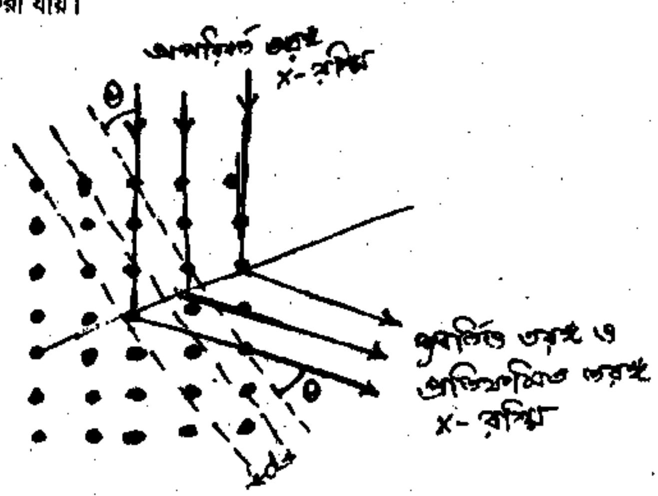
এক্স-রশ্মি একটি কেলাসের ওপর আপতিত হলে কেলাসের অভ্যন্তরে, পরমাণুগুলির সমান্তরাল বিভিন্ন তল থেকে ব্যবর্তিত হয়ে প্রতিফলিত হয় এবং প্রতিফলিত রশ্মিগুলির প্রাবল্য নিজেদের মধ্যে ব্যতিচারের ফলে আপতন কোণ অনুযায়ী পর্যায়ক্রমে সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন হয়। সর্বোচ্চ প্রতিফলনের ক্ষেত্রে ব্র্যাগের সূত্র (Bragg's law) হল

$$m\lambda = 2d \sin \theta \qquad \ldots \ldots (8.9.2)$$



চিত্র 8.9.1 ডেভিসন ও জারমারের পরীক্ষা

যেখানে $m = 1, 2, 3 \ldots$ ইত্যাদি কোনও একটি পূর্ণ সংখ্যা যা যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় প্রভৃতি পর্যায়ক্রমিক সর্বোচ্চ প্রতিফলন নির্দেশ করে, d হল কেলাসের অভ্যন্তরে বিভিন্ন প্রতিফলক তলের অন্তরবর্তী দূরত্ব এবং θ হল প্রতিফলক তল ও প্রতিফলিত রশ্মির মধ্যস্থ কোণ (চিত্র 8.9.2)। d জানা থাকলে ব্র্যাগের সূত্রদ্বারা এক্স-রশ্মির তরঙ্গদৈর্ঘ্য সহজেই নির্ণয় করা যায়।



চিত্র 8.9.2 প্রতিফলন

ডেভিসন ও জারমার ইলেকট্রন প্রতিফলনের ক্ষেত্রে ব্যাগের সূত্র প্রয়োগ করে দেখলেন যে যদি $m = 1$ ধরা হয়, তবে ইলেকট্রনের তরঙ্গদৈর্ঘ্য হল $\lambda = 1.65\ A°$ $(1A° = 10^{-8}\ cm)$। কারণ এক্স-রশ্মির পরীক্ষা থেকে জানা যায় যে $d = 0.91\ A°$ এবং এক্ষেত্রে $\theta = 90° - \frac{1}{2} \times 50° = 65°$।

আবার ডি ব্রগলির সূত্রে 54 ভোল্ট ইলেকট্রনের যে ভরবেগ হয়, তার মান বসিয়ে পাওয়া যায়

$\lambda = 1.64\ A°$।

সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে ডি ব্রগলির প্রকল্প ডেভিসন ও জারমারের পরীক্ষায় চমৎকারভাবে সমর্থিত হয়।

ডেভিসন ও জারমারের পরীক্ষার পর আরও বহু বিজ্ঞানী বিভিন্ন পরীক্ষার দ্বারা ইলেকট্রন, নিউট্রন, প্রোটন প্রভৃতি মৌলিক কণাগুলির ব্যবর্তন ও ব্যতিচার আরও সন্দেহাতীতভাবে প্রতিষ্ঠা করেন এবং ডি ব্রগলির তরঙ্গদৈর্ঘ্যও অত্যন্ত নির্ভুলভাবে পরিমাপ করেন। এভাবে ডি ব্রগলির কণার তরঙ্গ তত্ত্ব পদার্থবিজ্ঞানে প্রতিষ্ঠালাভ করে এবং তারদ্বারা তড়িচ্চুম্বকীয় তরঙ্গতত্ত্ব ও কোয়ান্টাম তত্ত্বকে সংশ্লেষণ করে কোয়ান্টাম বলবিজ্ঞান (Quantum Mechanics) উদ্ভাবনের ভিত্তি স্থাপন করে। ডি ব্রগলির এরূপ একটি সুদূর প্রসারী দিক উন্মোচনকারী প্রকল্পের জন্য তাঁকে 1929 খ্রীষ্টাব্দে এবং এই প্রকল্পকে প্রথম পরীক্ষার দ্বারা প্রতিষ্ঠিত করার জন্য ডেভিসনকে 1937 খ্রীষ্টাব্দে নোবেল পুরস্কারদ্বারা ভূষিত করা হয়।

8.9.3 কণার দ্বিচারিতা (Duality of Particles)

ডি ব্রগলির প্রকল্পদ্বারা পদার্থের দ্বিচারিতা প্রতিষ্ঠিত হয়। সুতরাং যেকোনও পরিমাণ পদার্থকেই আমরা একটি তরঙ্গরূপে কল্পনা করতে পারি। কিন্তু যেহেতু প্ল্যাঙ্কের ধ্রুবক h-এর মান অত্যন্ত ক্ষুদ্র, সেজন্য বৃহৎ আকারের বস্তুর তরঙ্গদৈর্ঘ্য বস্তুর আকারের তুলনায় এতই ক্ষুদ্র হয় যে ঐরূপ বস্তুর গতি এর তরঙ্গের দ্বারা কোনভাবে প্রভাবিত হয় না এবং সাধারণ গতিবিজ্ঞানের সূত্রগুলিই এক্ষেত্রে প্রযোজ্য হয়। অপরপক্ষে ইলেকট্রন, প্রোটন, নিউট্রন প্রভৃতি কণাগুলির ব্যাসার্ধ ডি ব্রগলির তরঙ্গদৈর্ঘ্যের কম বা সমতুল্য। ফলে এই কণাগুলির কণাধর্ম ও তরঙ্গধর্ম সমভাবে লক্ষ্য করা যায়। তবে ফোটনের মতোই যেক্ষেত্রে এই কণাগুলির কণাধর্ম প্রকাশ পায়, সেক্ষেত্রে এদের তরঙ্গধর্ম থাকে না এবং যেক্ষেত্রে তরঙ্গধর্ম ক্রিয়াশীল হয়, সেক্ষেত্রে কণাধর্ম আরোপ করা যায় না। উদাহরণস্বরূপ, জে জে থমসন ক্যাথোড রশ্মির ধর্মগুলি পরীক্ষা করে দেখেন যে এই রশ্মি তড়িৎক্ষেত্র বা চৌম্বক ক্ষেত্রদ্বারা কণার গতিবিজ্ঞান অনুযায়ী বেঁকে যায় এবং কণার মতোই এদের নির্দিষ্ট ভর আছে। এই ধর্মগুলি পরীক্ষা করেই জে জে থমসন এই সিদ্ধান্ত করেন যে ক্যাথোড রশ্মি কোনও তরঙ্গ নয়, ইলেকট্রনরূপ কণার প্রবাহ। আবার ডেভিসন ও জারমারের পরীক্ষায় প্রমাণিত যে এই একই ইলেকট্রন যখন কোনও কেলাসদ্বারা প্রতিফলিত হয়, তখন তা সম্পূর্ণ তরঙ্গরূপে ক্রিয়া করে এবং তার একটি নির্দিষ্ট তরঙ্গদৈর্ঘ্যও আছে। অর্থাৎ এক্ষেত্রে ইলেকট্রনের কণাধর্ম সম্পূর্ণ অনুপস্থিত থাকে। সুতরাং ডি ব্রগলি ও তৎপরবর্তী পরীক্ষাগুলির দ্বারা কণা ও তরঙ্গের প্রতিসাম্যতা (Symmetry) প্রতিষ্ঠিত হয়।

আর একটি কথা এখানে উল্লেখ করা প্রয়োজন যে কণা ও তরঙ্গের দ্বিচারিতা কেবল পারমাণবিক ব্যাসার্ধ বা তারচেয়ে কম দৈর্ঘ্যের ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য। কিন্তু দৈর্ঘ্য বেশী হলে কণার ক্ষেত্রে কেবল কণাধর্ম এবং তরঙ্গের ক্ষেত্রে কেবল তরঙ্গধর্মই প্রকাশ পায়। অবশ্য প্ল্যাঙ্কের ধ্রুবক h-এর মানের ক্ষুদ্রতাই এর জন্য দায়ী।

8.10 সারাংশ (Summary)

আপনি এই এককে তরঙ্গ ও কণার দ্বিচারিতা অধ্যয়ন করেছেন। অধ্যায়ের প্রথমে পরমাণু (atom) ও অণুর (molecule) আবিষ্কার সম্বন্ধে উল্লেখ করা হয়েছে এবং ব্রাউনীয় গতি, গ্যাসের গতীয় তত্ত্ব এবং আয়নীয় গতির উদাহরণদ্বারা দেখানো হয়েছে যে অনু ও পরমাণুগুলি নিউটনের বলবিদ্যার সূত্র অনুসরণ করে। এরপর জে জে থমসন আবিষ্কৃত ইলেকট্রনের ক্ষেত্রেও দেখা যায় যে নিউটনের সনাতন বলবিদ্যা ও তড়িৎ-গতিবিদ্যা প্রযুক্ত হয়। কণার বেগ আলোকের বেগের সমকক্ষ হলে, সনাতন গতিবিদ্যার স্থলে আইনস্টাইনের বিশেষ আপেক্ষিকতা তত্ত্ব ব্যবহার করতে হয়। কিন্তু সনাতন বলবিদ্যার মতো এই তত্ত্বের দ্বারাও কণার সময় ও অবস্থানের নির্দেশাঙ্কগুলি নির্দিষ্টরূপে নির্ণয় করা যায়। এর কারণ বিশেষ আপেক্ষিকতাকে সনাতন বলবিদ্যারই একটি সাধারণীকৃতরূপ বলা যায় (যখন কণার বেগ আলোকের বেগের চেয়ে অত্যল্প হওয়ার কোনও বাধ্যবাধকতা থাকে না)।

এরপর আপনি আলোকের প্রাচীন কণাবাদ ও তরঙ্গবাদ পাঠ করেছেন এবং লক্ষ্য করেছেন যে ম্যাক্সওয়েলের তড়িচ্চুম্বকীয় তত্ত্ব আলোকের বেগ থেকে সমবর্তন পর্যন্ত প্রত্যেকটি ধর্ম সঠিকভাবে ব্যাখ্যা করতে সমর্থ। এছাড়া কেবল এ তত্ত্ব থেকেই আলোকের তরঙ্গগুলি কেন অনুপ্রস্থ তার কারণ জানা যায়। তড়িচ্চুম্বকীয় তত্ত্বের আর একটি বিশেষ সাফল্য হল যে কয়েক কিলোমিটার দীর্ঘ বেতার তরঙ্গ থেকে শুরু করে অভাবনীয়রূপে ক্ষুদ্র ($10^{-19}m$) গামা-রশ্মি পর্যন্ত এই বিশাল তরঙ্গদৈর্ঘ্যের বিস্তৃতির অন্তর্গত বিভিন্ন তরঙ্গগুলির নানা বৈচিত্র্যমূলক ক্রিয়া ও ধর্মগুলির প্রায় সবই এই একটিমাত্র তত্ত্বদ্বারা সঠিকভাবে ব্যাখ্যা করা যায়। এমনকি পরস্পর বিরোধী ধর্ম সমন্বিত বস্তুতান্ত্রিক ইথারের কল্পনাও এ তত্ত্বে প্রয়োজন হয় না।

তড়িচ্চুম্বকীয় তত্ত্বের একমাত্র ব্যর্থতা হল যে যখন এই তরঙ্গগুলি পারমাণবিক দৈর্ঘ্যমাত্রার কোনও বস্তুকণার সঙ্গে ক্রিয়া করে, তখন এই তত্ত্ব প্রযুক্ত হয় না, এবং এর পরিবর্তে কোয়ান্টাম বা ফোটন তত্ত্ব ব্যবহার করতে হয়। তাপ ও আলোকের বিকিরণ, আলোক-তড়িৎ ক্রিয়া, কম্পটন ক্রিয়া প্রভৃতি এর উদাহরণ। অর্থাৎ পরিমাণবিক দৈর্ঘ্যমাত্রায় তরঙ্গের দ্বিচারিতা প্রকাশ পায়। অতঃপর ডি ব্রগলি প্রস্তাব করেন যে পারমাণবিক স্তরের কণাগুলিরও তরঙ্গধর্ম আছে এবং তারফলে এই কণাগুলিরও দ্বিচারিতা আছে, যা পরবর্তীকালে ডেভিসন-জারমার ও অন্যান্যদের পরীক্ষায় প্রমাণিত হয়।

8.11 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

1. পরমাণু ও অণু কিভাবে আবিষ্কৃত হয়? অণু ও পরমাণু যে নিউটনের বলবিদ্যা অণুসরণ করে তার কয়েকটি প্রমাণ বর্ণনা করুন।

2. ক্যাথোড রশ্মিগুলি ইলেকট্রন কণার প্রবাহ, কিন্তু এক্স-রশ্মি তড়িচ্চুম্বকীয় তরঙ্গ—এরূপ সিদ্ধান্তের কারণ কি?

3. তড়িচ্চুম্বকীয় তরঙ্গের মূল ধর্মগুলি কি? কণার ধর্মের সঙ্গে তরঙ্গ ধর্মের পার্থক্য কোথায়?

4. তরঙ্গ যে কণার মতো আচরণ করে তার প্রমাণ কি?

5. তরঙ্গের দ্বিচারিতা বলতে কি বোঝায় ব্যাখ্যা করুন।

6. ডি ব্রগলির প্রকল্পটি বিবৃত করুন। এই প্রকল্পের ভিত্তি কি?

7. ডেভিসন ও জারমারের পরীক্ষাটি বর্ণনা করুন এবং এই পরীক্ষার দ্বারা ডি ব্রগলির প্রকল্প কিরূপে প্রমাণিত হয়, তা ব্যাখ্যা করুন।

8. কণার দ্বিচারিতা করতে কি বোঝায় ব্যাখ্যা করুন?

9. 100 ইলেকট্রন ভোল্ট গতিশক্তির ইলেকট্রনের ডি ব্রগলি তরঙ্গ দৈর্ঘ্য কত?

8.12 অনুশীলনী ও সর্বশেষ প্রশ্নাবলীর উত্তর

(ক) অনুশীলনীর উত্তর ঃ

অনুশীলনী-(1)

অনুশীলনী 8.2.1 ঃ (8.2.2) অনুচ্ছেদ দেখুন। প্রশ্নের দ্বিতীয় অংশের জন্য (8.2.1.) অনুচ্ছেদ দেখুন।

অনুশীলনী 8.2.2 ঃ (8.2.3) অনুচ্ছেদ দেখুন। দ্বিতীয় অংশের জন্য (8.2.2) অনুচ্ছেদ দ্রষ্টব্য।

অনুশীলনী 8.2.3 ঃ (8.2.5) অনুচ্ছেদ দেখুন।

অনুশীলনী 8.2.4 ঃ (8.2.8) অনুচ্ছেদ দেখুন।

অনুশীলনী-(2)

অনুশীলনী 8.3.1 ঃ (8.3.1) অনুচ্ছেদ দেখুন।

অনুশীলনী 8.3.2 ঃ (8.3.3) অনুচ্ছেদ দেখুন।

অনুশীলনী 8.3.3 ঃ (8.3.2) এবং (8.3.4) অনুচ্ছেদ দুটি দেখুন।

অনুশীলনী 8.3.4 ঃ (8.3.1) সারণী দ্রষ্টব্য।

অনুশীলনী 8.3.5 ঃ (8.3.5) অনুচ্ছেদ দেখুন।

অনুশীলনী-(3)

অনুশীলনী 8.7.1 ঃ কৃষ্ণবস্তুর বিভিন্ন তরঙ্গদৈর্ঘ্যের তাপ বিকিরণ ব্যাখ্যা করার জন্য (1) ভিয়েনের সূত্র, (2) র‍্যালে-জীনসের সূত্র এবং (3) প্ল্যাঙ্কের সূত্র ব্যবহার করা হয়। এই তিনটি সূত্রের মধ্যে প্ল্যাঙ্কের সূত্রটিই সম্পূর্ণ সঠিক।

অনুশীলনী 8.7.2 ঃ প্রথম অংশের জন্য (8.5.1) অনুচ্ছেদ এবং দ্বিতীয় অংশের জন্য (8.5.2) অনুচ্ছেদে আইনস্টাইনের সূত্র দ্রষ্টব্য।

অনুশীলনী 8.7.3 : ফোটনের ভরের সূত্র, $m = \frac{h\nu}{c^2} = \frac{h}{c\lambda}$

ঐ ভরবেগের সূত্র, $p = mc = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$

(খ) সর্বশেষ প্রশ্নাবলির উত্তর :

প্র. 1 : অনুচ্ছেদ (8.2.2), (8.2.3), (8.2.5), (8.2.6) ও (8.2.6) দ্রষ্টব্য।

প্র. 2 : অনুচ্ছেদ (8.2.8) ও (8.2.9) দ্রষ্টব্য।

প্র. 3 : তড়িচ্চুম্বকীয় তরঙ্গের মূল ধর্মগুলি হল : প্রতিসরণ, ব্যবর্তন, ব্যতিচার ও সমবর্তন। কণার নির্দিষ্ট (স্থৈতিক) ভর আছে এবং তা কোনও মাধ্যমের মধ্যদিয়ে চলার সময় ছড়িয়ে পড়ে না। কণার বেগ 0 থেকে প্রায় c (শূন্যমাধ্যমে আলোকের বেগ) পর্যন্ত হতে পারে (তবে কখনই c-র সমান বা এর চেয়ে বেশী হয় না)। এর গতি (কম বেগের ক্ষেত্রে) নিউটনের বলবিদ্যাদ্বারা আপেক্ষিকীয় গতির ক্ষেত্রে আইনস্টাইনের আপেক্ষিকতা সূত্রদ্বারা নির্ধারিত হয়। অপর পক্ষে তরঙ্গ উৎস থেকে সর্বদা ছড়িয়ে পড়ে। এর বেগ শূন্যমাধ্যমে সর্বোচ্চ (c), কিন্তু অন্যকোনও মাধ্যমে $\frac{c}{\mu}$ = ধ্রুবক (μ মাধ্যমের প্রতিসরাঙ্ক)। তরঙ্গ তড়িচ্চুম্বকীয় তত্ত্বদ্বারাপরিচালিত হয়।

প্র. 4 : আলোক-তড়িৎ ক্রিয়াও কম্পটন ক্রিয়া।

প্র. 5 : অনুচ্ছেদ (8.8) দ্রষ্টব্য।

প্র. 6 : অনুচ্ছেদ (8.9.1) দ্রষ্টব্য।

প্র. 7 : অনুচ্ছেদ (8.9.2) দ্রষ্টব্য।

প্র. 8 : অনুচ্ছেদ (8.9.3) দ্রষ্টব্য।

প্র. 9 : আপনারা জানেন

$E = \frac{p^2}{2m}$ এবং $1\ eV = 1.6 \times 10^{12}$ erg.

বা, $p = \sqrt{2mE} = \sqrt{2 \times 9 \times 10^{-28} \times 100 \times 1.6 \times 10^{-12}}$ গ্রাম সেমি / সে.

অতএব $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6.62 \times 10^{-27}}{p} = 1.226\ A^0$

একক 9 ❑ অনিশ্চয়তার নীতি (Uncertainty Principle)

গঠন ঃ

9.1 প্রস্তাবনা ও উদ্দেশ্য

9.2 সনাতন কোয়ান্টাম তত্ত্বের ব্যর্থতা

9.3 কোয়ান্টাম বলবিদ্যার উদ্ভাবন

9.4 অনিশ্চয়তার নীতি

9.5 কণা বা ফোটনের তরঙ্গ-স্তূপদ্বারা অনিশ্চয়তা নীতির প্রমাণ

9.6 পরীক্ষার দ্বারা অনিশ্চয়তা নীতির প্রমাণ

9.7 বোহ্‌রের পরিপূরকতার নীতি

9.8 সারাংশ

9.9 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

9.10 সর্বশেষ প্রশ্নাবলির উত্তর

9.1 প্রস্তাবনা ও উদ্দেশ্য

9.1.1 প্রস্তাবনা

এই এককে আমরা কোয়ান্টাম বলবিজ্ঞানের ভিত্তিস্বরূপ অনিশ্চয়তার নীতি আলোচনা করব।

9.1.2 উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করার পর আপনি যে কাজগুলি করতে পারবেন, তা হল—

- অনিশ্চয়তার নীতির ভিত্তি কি, তা বলতে পারবেন।
- এই নীতিটি বিবৃত ও ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- আনুশাসনিক যুগ্ম রাশি বলতে কি বোঝায়, তা বলতে পারবেন।
- কণার (বা ফোটনের) তরঙ্গ-স্তূপের সমীকরণদ্বারা অনিশ্চয়তার নীতি নির্ণয় করতে পারবেন।
- কণার ভরবেগ, অবস্থান ও শক্তি নির্ণয়ের পরীক্ষার উদাহরণদ্বারা এই নীতি ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- বোহ্‌রের পরিপূরকতার নীতিদ্বারা অনিশ্চয়তা নীতির অর্থ ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

9.2 সনাতন কোয়ান্টাম তত্ত্বের ব্যর্থতা (Failure of Classical Quantum Theory)

পূর্ববর্তী এককে আপনি হাইড্রোজেন বর্ণালির বিশ্লেষণে তড়িচ্চুম্বকীয় তত্ত্বের ব্যর্থতা এবং বোহ্‌র উদ্ভাবিত হাইড্রোজেন পরমাণুর কোয়ান্টাম তত্ত্বের অভাবনীয় সাফল্য সম্বন্ধে জেনেছেন। সনাতন কোয়ান্টাম তত্ত্বের এই সাফল্য সত্ত্বেও পরবর্তীকালে এই তত্ত্বের নানা ত্রুটি দেখা যায়। যেমন, বোহ্‌রের তত্ত্ব থেকে হাইড্রোজেন বর্ণালির তরঙ্গ-দৈর্ঘ্যগুলি সঠিকভাবে পাওয়া গেলেও ঐ দৈর্ঘ্যগুলির তীব্রতা জানার জন্য আবার নতুন অঙ্গিকারের প্রয়োজন হয়। এছাড়া আপনি পূর্বেই লক্ষ্য করেছেন যে হাইড্রোজেন পরমাণুর ইলেকট্রনটির ঋণাত্মক আধান নিউক্লিয়াসের ধনাত্মক আধানদ্বারা আকৃষ্ট হতে পারে, অথচ আবর্তন জনিত ত্বরণ থাকা সত্ত্বেও তড়িচ্চুম্বকীয় তত্ত্ব অনুযায়ী শক্তি বিকিরণ করে না—এরূপ দুটি পরস্পর বিরুদ্ধ ধর্মের কারণ কি, বোহ্‌রের তত্ত্ব থেকে তার ব্যাখ্যা পাওয়া যায় না। এমন কি বোহ্‌রের তত্ত্বে যে n কোয়ান্টাম সংখ্যাটি ধরা হয়েছে, তাও যদৃচ্ছ (arbitrary), কেননা তার কোনও তাত্ত্বিক ব্যাখ্যা নেই। বোহ্‌রের কোয়ান্টাম তত্ত্বটি দেখা যায় যে কেবল হাইড্রোজেন এবং একক ইলেকট্রনযুক্ত অন্যান্য পরমাণুর ক্ষেত্রে প্রযোজ্য। কিন্তু কোনও পরমাণুতে ইলেকট্রনের সংখ্যা যখনই একাধিক হয়, তখনই দেখা যায় যে বোহ্‌রের তত্ত্ব আর সেক্ষেত্রে সরাসরি প্রয়োগ করা যায় না এবং সমস্যা সমাধানের জন্য তখন আরও নতুন নতুন অঙ্গিকার গ্রহণ করার প্রয়োজন হয়ে পড়ে। তাছাড়া এই কোয়ান্টাম তত্ত্ব কেবল ইলেকট্রনের পর্যাবৃত্ত গতির ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য। কিন্তু ইলেকট্রনের গতি যদি অপর্যাবৃত্ত হয় (যেমন, ইলেকট্রন বিক্ষেপণ), তবে এই তত্ত্ব প্রয়োগ করা যায় না। পরবর্তীকালে ইলেকট্রনের স্পিন ও আরও নানা ধর্ম বা ক্রিয়া আবিষ্কৃত হওয়ায়, সমগ্র বিষয়টি অত্যন্ত জটিল আকার ধারণ করে।

9.3 কোয়ান্টাম বলবিদ্যার উদ্ভাবন (Creation of Quantum Mechanics)

বোহ্‌রের পূর্ব আলোচিত কোয়ান্টাম তত্ত্বকে সনাতন বলা হয়। তার কারণ এই তত্ত্বের নানা ত্রুটির জন্য এর পরিবর্তে পরে কোয়ান্টাম বলবিদ্যা নামে নতুন একটি কোয়ান্টাম তত্ত্ব গঠিত হয়। নতুন কোয়ান্টাম তত্ত্বের ভিত্তি হল ডি ব্রগলির প্রকল্প। এই প্রকল্পের ওপর ভিত্তি করে 1925 খ্রীষ্টাব্দে ভারনার হাইজেনবার্গ (Werner Heisenberg, 1901—1976) মেট্রিক্স বলবিদ্যা (Matrix Mechanics) এবং 1926 খ্রীষ্টাব্দে আরভিন শ্রোডিংগার (Erwin Schrödinger, 1887—1961) তরঙ্গ বলবিদ্যা (Wave Mechanics) নামে কোয়ান্টাম বলবিদ্যারই দুটি তুল্যমূল্য ভিন্ন বিভাগ উদ্ভাবন করেন। অতঃপর ডিরাক (Paul Andrien Maurice Dirac, 1902—1984) 1928 খ্রীষ্টাব্দে আপেক্ষিকীয় বেগযুক্ত ইলেকট্রন, পজিট্রন ও অনুরূপ কণাগুলির ক্ষেত্রে প্রযোজ্য আপেক্ষিকীয় কোয়ান্টাম বলবিদ্যা (Relativistic Quantum Mechanics) গঠন করেন। এই সব উদ্ভাবনের ফলে কণাসংক্রান্ত তাত্ত্বিক পদার্থবিদ্যায় এক নবযুগের সূচনা হয়। এই অসাধারণ কৃতিত্বের জন্য হাইজেনবার্গ 1932 খ্রীষ্টাব্দে এবং শ্রডিংগ্রার ও ডিরাক যুগ্মভাবে 1933 খ্রীষ্টাব্দে নোবেল পুরস্কার লাভ করেন।

9.4 অনিশ্চয়তার নীতি (Uncertainty Principle) :

হাইজেনবার্গ তাঁর উদ্ভাবিত কোয়ান্টাম বলবিদ্যার দ্বারা 1927 খ্রীষ্টাব্দে অনিশ্চয়তার নীতি নামে একটি মৌলিক নীতি প্রতিষ্ঠা করেন। দেখা যায় যে এই নীতিটি হল কণা ও তরঙ্গের দ্বিচারিতার ফল এবং সমগ্র কোয়ান্টাম বলবিদ্যাই এই নীতির ওপর প্রতিষ্ঠিত। বস্তুত এই নীতিটি হল প্রকৃতির একটি মৌলিক ধর্ম এবং সনাতন বলবিদ্যা ও কোয়ান্টাম বলবিদ্যার পার্থক্যের কারণ।

হাইজেনবার্গের অনিশ্চয়তার নীতিটি এভাবে বিবৃত করা যায় : যে দুটি ভৌত চলরাশির দ্বারা একটি পারমাণবিক তন্ত্রের আচরণ ব্যাখ্যা করা যায় (যেমন, কোনও কণার কার্টেজীয় স্থানাঙ্কক x এবং ভরবেগের x-উপাংশ p_x, বা স্থানাঙ্ক y এবং ভরবেগের y-উপাংশ p_y বা স্থানাঙ্ক z এবং ভরবেগের z-উপাংশ p_z, বা t সময়ে নিরূপিত শক্তি E), তাদের উভয়কেই একই সঙ্গে সম্পূর্ণ নির্ভুভাবে পরিমাপ করা সম্ভব নয়, অর্থাৎ এরূপ ক্ষেত্রে তাদের উভয়ের পরিমাপের মধ্যে কিছুটা অনিশ্চয়তা থাকে, এবং এই দুটি অনিশ্চয়তার গুণফল অন্তত $h/2\pi$ হয়, যেখানে h হল প্ল্যাঙ্কের ধ্রুবক।

কাজেই যদি x ও p_x একই সঙ্গে পরিমাপ করলে এদের পরিমাপের অনিশ্চয়তা যথাক্রমে Δx ও Δp_x হয়, তবে হাইসেনবার্গের অনিশ্চয়তার নীতি অনুযায়ী

$$\Delta x.\Delta p_x \geq \frac{h}{2\pi} \qquad \ldots\ldots (9.4.1)$$

অনুরূপভাবে আমরা লিখতে পারি

$$\Delta y.\Delta p_y \geq \frac{h}{2\pi} \qquad \ldots\ldots (9.4.2)$$

$$\Delta z.\Delta p_z \geq \frac{h}{2\pi} \qquad \ldots\ldots (9.4.3)$$

এবং $$\Delta t.\Delta E \geq \frac{h}{2\pi} \qquad \ldots\ldots (9.4.4)$$

অনিশ্চয়তার নীতিতে যে দুটি ভৌত চলরাশির কথা উল্লেখ করা হয়েছে, এগুলি হল প্রকৃতপক্ষে হ্যামিলটনীয় সমীকরনের সাধারণীকৃত নির্দেশাঙ্ক (generalized coordinates) q_i এবং সাধারণীকৃত ভরবেগ উপাংশ (generalized moments) p_i। যদি কোনও পারমাণবিক তন্ত্রের হ্যামিলটনীয় অপেক্ষক (Hasniltonian function) H হয়, তবে সনাতন বলবিজ্ঞানের সাধারণ নীতি অনুযায়ী

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \ \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \qquad \ldots\ldots (9.4.5)$$

এই দুটি সমীকরণকে হ্যামিশটনের অনুশাসিত গতীয় সমীকরণ (Hamilton's canonical equations of motions) বলে এবং q_i ও p_i-কে হ্যামিলটনীয় অর্থে আনুশাসিতরূপে যুগ্ম চলরাশি (Cononically Conjugate Variables) বলে। লক্ষ করুন, q_i ও p_i সাধারণীকৃত নির্দেশাঙ্ক ও ভরবেগ-উপাংশ হওয়ায়, কার্টেজীয় নির্দেশতন্ত্র অনুযায়ী $q_i = x$ ধরলে $p_i = p_x$ হবে। অনুরূপে $q_i = y$ ধরলে $p_i = p_y$ এবং $q_i = z$ ধরলে

$p_i = p_z$ হবে। এছাড়া আমরা এও দেখাতে পারি যে কোনও পারমাণবিক তন্ত্রের t সময়ে মোটশক্তি E হলে q_i স্থানে t এবং p_i স্থানে E ধরা যায়।

অনিশ্চয়তার নীতিতে আর একটি বিষয় উল্লেখযোগ্য যে পরিমাপের এই অনিশ্চয়তা সংশ্লিষ্ট দুটি রাশিই যখন একযোগে পরিমাপ করা হয়, কেবল তখনই হয়ে থাকে, কেবল একটি রাশির পরিমাপের ক্ষেত্রে হয় না। যেমন, একটি ইলেকট্রন যখন গতিশীল থাকে, তখন যদি আমরা এর অবস্থান ও ভরবেগ এই দুটি রাশি একই সঙ্গে পরিমাপের কোনও চেষ্টা না করে কেবল ভরবেগ পরিমাপ করি, তবে তা সম্পূর্ণ নির্ভুলভাবেই করা সম্ভব। অর্থাৎ, এই পরিমাপের মধ্যে কোনও অনিশ্চয়তা থাকবে না। কিন্তু এক্ষেত্রে ইলেকট্রনটির অবস্থান সম্বন্ধে আমাদের কোনও ধারণাই থাকবে না। অনুরূপভাবে, যদি আমরা কেবল ইলেকট্রনটির অবস্থান পরিমাপ করি, তবে ঐ পরিমাপ সম্পূর্ণ নির্ভুলভাবে করা সম্ভব, যদি এর ভরবেগের মান আমাদের কাছে সম্পূর্ণ অজ্ঞাত থাকে।

9.5 কণা বা ফোটনের তরঙ্গ-স্তূপ দ্বারা অনিশ্চয়তা নীতির প্রমাণ (To prove the Uncertainty Principle by Wave Packets of a Particle or Photon)

আইনস্টাইনের তত্ত্ব অনুযায়ী একটি ফোটনকে বা ডি ব্রগলির প্রকল্প অনুযায়ী একটি বস্তুকণাকে আমরা একটি একগুচ্ছ তরঙ্গের স্থানীয় (localized) স্তূপ (Packet) হিসাবে ধরতে পারি যা V বেগে (ফোটনের ক্ষেত্রে $V = c$) x-অক্ষ অভিমুখে অগ্রসর হয়। আপনি পূর্ব অধ্যায়ে লক্ষ্য করেছেন যে কণা বা ফোটন উভয়ের ক্ষেত্রেই এর ভরবেগ

$$p = \frac{h}{\lambda} = hk \qquad \ldots\ldots (9.5.1)$$

এখানে $k\left(= \frac{1}{\lambda}\right)$-কে বলা হল তরঙ্গ-সংখ্যা অর্থাৎ একক দূরত্বে মোট তরঙ্গ-দৈর্ঘ্যের সংখ্যা।

এখন λ তরঙ্গদৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটিমাত্র তরঙ্গ x-অভিমুখে V বেগে অগ্রসর হলে এর সমীকরণ হল

$$y = A \cos \frac{2\pi}{\lambda}(x - Vt) \qquad \ldots\ldots (9.5.\ 2(a))$$

বা, $$y = A \sin \frac{2\pi}{\lambda}(x - Vt) \qquad \ldots\ldots (9.5.\ 2(b))$$

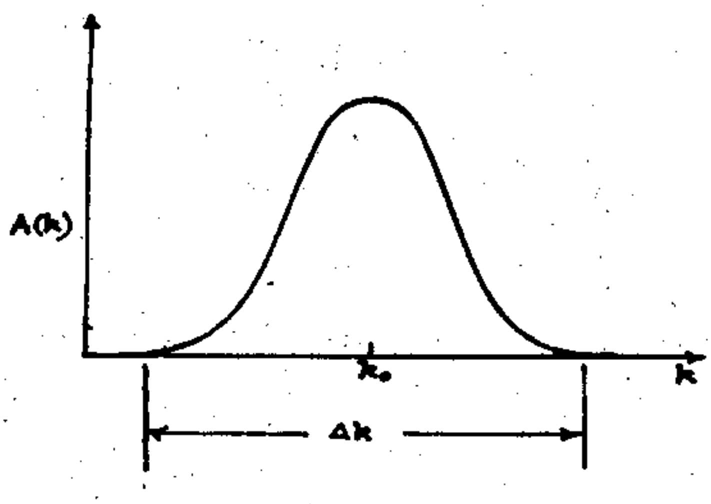
অর্থাৎ এই তরঙ্গের জন্য আমরা উপরের দুটি সমীকরণের যেকোনও একটি গ্রহণ করতে পারি। এ থেকে আমরা একটি তরঙ্গের সাধারণ সমীকরণ পাই

$$\begin{aligned} y &= A\left[\cos \frac{2\pi}{\lambda}(x - Vt) + i \sin \frac{2\pi}{\lambda}(x - Vt)\right] \\ &= A\, e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(x - Vt)} \\ &= A\, e^{2\pi i\,(kx - Vt)},\ i = \sqrt{-1} \qquad \ldots\ldots (9.5.3) \end{aligned}$$

এখানে $\frac{1}{\lambda} = k$ = তরঙ্গ-সংখ্যা এবং $\frac{V}{\lambda} = \nu$ (নিউ) = কম্পাঙ্ক। A-কে তরঙ্গের বিস্তার (amplitude) বলে। কোনও স্থানে তরঙ্গের তীব্রতা এর বিস্তারের বর্গের সমানুপাতিক।

(9.5.3) সমীকরণটি একটি মাত্র তরঙ্গের সাধারণ সমীকরণ। এরদ্বারা একটি ফোটন বা কণাকে বোঝায় না। কারণ এই তরঙ্গের বিস্তার (amplitude) x-অক্ষের সর্বত্র সমান। কিন্তু যদি কোনও তরঙ্গদ্বারা একটি ফোটন বা কণাকে নির্দেশ করতে হয়, তবে ফোটন বা কণাটি কোনও সময়ে যে স্থানে আছে, কেবল সেস্থানেই তরঙ্গটির বিস্তার সর্বোচ্চ এবং অন্যান্য সকলস্থানে এর এই বিস্তার সর্বনিম্ন বা শূন্য হওয়া প্রয়োজন। এরূপ তরঙ্গকে আমরা স্থানীয় তরঙ্গস্তূপ (localized wave Packet) বলতে পারি। কিন্তু এরূপ স্থানীয় তরঙ্গ-স্তূপ আমরা কেবল বিভিন্ন তরঙ্গ দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট বহু তরঙ্গের উপরিপাতদ্বারাই পেতে পারি। এখন এই বহু সংখ্যক তরঙ্গদৈর্ঘ্যের গড়কে আমরা λ_0 $\left(=\frac{1}{k_0}\right)$ দ্বারা প্রকাশ করতে পারি। তাছাড়া আমরা যদি আরও ধরে নিই যে এই গড় তরঙ্গদৈর্ঘ্যের জন্যই তরঙ্গের বিস্তার ($A(k)$) সর্বোচ্চ হয় এবং এই গড় তরঙ্গদৈর্ঘ্যের উভয় পার্শ্বেই বিস্তার অতি দ্রুত কমে যায় (চিত্র 9.5.1), তবে, স্বভাবতই আমরা লিখতে পারি যে ফোটন বা কণার প্রকৃত তরঙ্গ-দৈর্ঘ্য

$$\lambda = \lambda_0 \text{ এবং } k = k_0 \qquad \ldots\ldots (9.5.4)$$



চিত্র 9.5.1

বহুসংখ্যক তরঙ্গের উপরিপাত (Superposition) আমরা ফুরিয়ার শ্রেণী (Fourier Series)-দ্বারা প্রকাশ করতে পারি। যদি তরঙ্গের অপেক্ষক $\psi(x, t)$ ধরা হয়, তবে এই শ্রেণীর সমাকলন প্রসারণ প্রভাবে লেখা যায়—

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{2\pi i (kx - \nu t)}\, dk \qquad \ldots\ldots (9.5.5)$$

এখন ধরা যাক t সময়ে কণাটি x_0 অবস্থানে আছে।

$\therefore \quad x_0 = Vt$ এবং যেহেতু $\nu = \frac{V}{\lambda} = Vk$

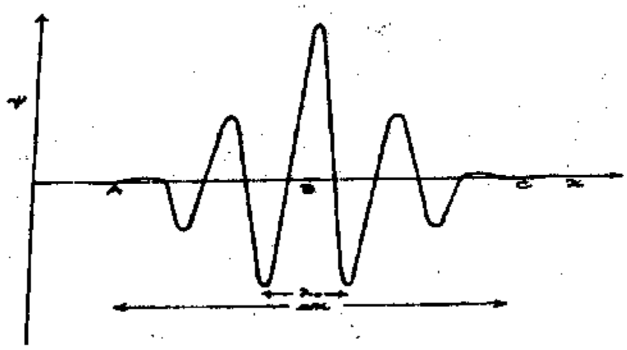
$$\therefore \quad \nu t = Vk\frac{x_0}{V} = kx_0 \qquad \ldots\ \ldots (9.5.6)$$

সুতরাং (9.5.5) সমীকরণ থেকে আমরা পাই,

$$\psi(x, x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{2\pi ik(x - x_0)}\, dk \qquad \ldots\ \ldots (9.5.7)$$

আমরা (9.5.7) সমীকরণদ্বারা t সময়ে x-অক্ষের বিভিন্ন অবস্থানে ψ-এর মান নির্ণয় করতে পারি। (9.5.2) চিত্রে x-অক্ষের বিভিন্নস্থানে ψ মান কিভাবে পরিবর্তিত হয়, তা দেখানো হল। (9.5.7) সমীকরণ থেকে আমরা দেখতে পাই যে যখন $x = x_0$, তখন

$$\psi_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) dk \quad [\text{কারণ এস্থলে } e^0 = 1] \qquad \ldots\ \ldots (9.5.8)$$



চিত্র 9.5.2

সুতরাং এখানে তরঙ্গগুলির প্রত্যেকটির দশাই 0 এবং তার ফলে $A(k)$ বিস্তারগুলি একসঙ্গে যুক্ত হয়ে সর্বোচ্চ লব্ধি বিস্তার ψ_0 উৎপন্ন করে। আবার $x - x_0$ যখন বড়, তখন $exp\{2\pi\, ik\,(x - x_0)\}$ রাশিটি k-র দ্রুত স্পন্দনশীল অপেক্ষকে পরিণত হয় এবং তার ফলে এর সমাকলনটি পরস্পর কাটাকুটি করে শূন্যের কাছে এগিয়ে যায়। কাজেই ψ অপেক্ষকটির মান কেবল $x = x_0$-র সন্নিহিত স্থানেই বেশী এবং অন্যত্র 0। সুতরাং (9.5.2) চিত্র অনুযায়ী আমরা বলতে পারি যে ফোটন বা কণাটি A থেকে C বিন্দুর মধ্যে কোথাও আছে, অর্থাৎ এর অবস্থানের অনিশ্চয়তা Δx। অনুরূপে (9.5.1) চিত্র অনুযায়ী আমরা বলতে পারি যে ফোটন বা কণাটির তরঙ্গ-সংখ্যার অনিশ্চয়তা Δk।

এখন তরঙ্গ গুচ্ছটির দৈর্ঘ্য Δx হবে, যদি বিভিন্ন দৈর্ঘ্যের তরঙ্গগুলি উপরিপাতের দ্বারা A ও C বিন্দুতে বিনাশ হয় এবং B বিন্দুতে নির্মিত হয়। কিন্তু এরূপ উপরিপাত তখনই সম্ভব, কেবল যখন A ও C-র মধ্যে কোনও একটি তরঙ্গের মোট তরঙ্গ-সংখ্যা অন্য একটি তরঙ্গের মোট তরঙ্গ-সংখ্যার চেয়ে অন্তত এক বেশী হবে।

এখন যেহেতু ধরা হয়েছে যে একক দূরত্বে তরঙ্গ-সংখ্যার অনিশ্চয়তা Δk, অতএব Δx দূরত্বে তরঙ্গ-সংখ্যার মোট অনিশ্চয়তা $\Delta k.\Delta x$। সুতরাং তরঙ্গগুলির উপরিপাতের শর্ত অনুযায়ী

$$\Delta k.\Delta x \geq 1 \qquad \ldots\ \ldots (9.5.9)$$

কিন্তু (9.5.1) সমীকরণ অনুযায়ী x-অক্ষ অভিমুখে ভরবেগ-উপাংশ

$$p_x = hk \qquad \ldots\ldots (9.5.10)$$

অতএব $\Delta p_x = h\,\Delta k \qquad \ldots\ldots (9.5.11)$

সুতরাং (9.5.9) ও (9.5.11) সমীকরণ দুটি থেকে আমরা পাই

$$\Delta P_x.\Delta x \geq h \qquad \ldots\ldots (9.5.12)$$

সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে একটি ফোটন বা কণাকে একটি তরঙ্গের স্তূপ হিসাবে ধরলে; তা থেকে হাইজেনবার্গের অনিশ্চয়তা নীতি পাওয়া যায়।

লক্ষ করুন, (9.5.12) অসমীকরণটির সর্বনিম্ন মান h, কিন্তু হাইজেনবার্গের অনিশ্চয়তার নীতিতে এই মান $\frac{h}{2\pi}$। এই পার্থক্যের কারণ (9.5.9) শর্তটি নির্ণয়ে কিছুটা সরলীকরণ। কঠোর গাণিতিক পদ্ধতি অনুসরণ করলে দেখানো যায় যে

$$\Delta k\,\Delta x \geq \frac{1}{2\pi} \qquad \ldots\ldots (9.5.13)$$

অর্থাৎ সেক্ষেত্রে আমরা হাইজেনবার্গের অনিশ্চয়তার নীতিটি অবিকল পাই। অনুরূপে y-অক্ষ এবং z-অক্ষ বিবেচনা করলে আমরা পাই

$$\Delta P_y.\Delta y \geq \frac{h}{2\pi} \qquad \ldots\ldots (9.5.14)$$

এবং $\Delta P_z.\Delta z \geq \frac{h}{2\pi} \qquad \ldots\ldots (9.5.15)$

আবার লক্ষ্য করুন, কণার (বা ফোটনের) অবস্থান ও ভরবেগের অনিশ্চয়তার শর্ত নির্ণয় করার জন্য (9.5.5) সমীকরণে একটি নির্দিষ্ট সময়ে x-এর পরিবর্তনের জন্য ψ অপেক্ষকটির পরিবর্তন বিবেচনা করা হয়েছে। এখন যদি আমরা x-কে নির্দিষ্ট রেখে t সময়ের সঙ্গে ψ কিভাবে পরিবর্তিত হয়, তা বিবেচনা করি, তবে ওপরে বর্ণিত সরলীকৃত পদ্ধতি অবলম্বন করে আমরা দেখাতে পারি যে,

$$\Delta t.\Delta \nu \geq 1 \qquad \ldots\ldots (9.5.16)$$

অনুরূপে কঠোর গাণিতিক পদ্ধতি অবলম্বন করলে আমরা পাই,

$$\Delta t.\Delta \nu \geq \frac{1}{2\pi} \qquad \ldots\ldots (9.5.17)$$

এখন যদি আমরা তরঙ্গ-স্তূপটিকে একটি ফোটনরূপে কল্পনা করি, তবে এর শক্তি

$$E = h\nu \qquad \ldots\ldots (9.5.18)$$

বা, $\Delta E = h\Delta \nu \qquad \ldots\ldots (9.5.19)$

সুতরাং (9.5.16) ও (9.5.19) সম্বন্ধ দুটির দ্বারা আমরা পাই

$$\Delta t.\Delta E \geq h \qquad \ldots\ldots (9.5.20)$$

এবং অনুরূপে (9.5.17) ও (9.5.19) শর্ত দুটি থেকে পাই

$$\Delta t.\Delta E \geq \frac{h}{2\pi} \qquad \ldots \ldots (9.5.21)$$

অনুশীলনী—1

অনুশীলনী 1. 200 ইলেকট্রন ভোল্ট শক্তির একটি ইলেকট্রন 10^{-4} cm ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার ছিদ্র দিয়ে চালিত হলে তার নির্গম কোণে অনিশ্চয়তা কত?

সমাধান : $\frac{p^2}{2m} = E = 200\ eV = 3{\cdot}2 \times 10^{-10}$ আর্গ

$p = (2 \times 9 \times 10^{-28} \times 3{\cdot}2 \times 10^{-10})^{1/2}$ গ্রাম সেমি / সেঃ

এখন $\Delta p_x = \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{10^{-27}}{2 \times 10^{-4}} = 5 \times 10^{-24}$

$$\theta \simeq \frac{\Delta p_x}{p} = \frac{5 \times 10^{-24}}{(2 \times 9 \times 3{\cdot}2 \times 10^{-28})^{1/2}}$$

$$\simeq 6 \times 10^{-6} \text{ rad.}$$

অনুশীলনী 2. 0.1 গ্রাম একটি সীসার বল 10^3 সেমি/সেঃ বেগে 1 সেমি বৃত্তাকার ছিদ্রের মধ্যে চালিত হলে নির্গম কোণের অনিশ্চয়তা কত?

সমাধান : $p = 0{\cdot}1 \times 10^3$ গ্রাম সেমি / সেঃ

এবং $\Delta p = \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{10^{-27}}{2 \times \theta} = 5 \times 10^{-28}$

$\therefore \quad \theta = \frac{5 \times 10^{-28}}{{\cdot}1 \times 10^3} \simeq 5 \times 10^{-30}$ রেডিয়ান।

[বিঃ দ্রঃ → সমাধান দুটি অনিশ্চয়তায় মান লক্ষ করুন।]

অনুশীলনী 3. : অনিশ্চয়তার নীতির সাহায্যে দেখান যে ইলেকট্রন নিউক্লিয়াসের মধ্যে থাকতে পারে না। নিউক্লীয় ব্যাস 10^{-13} সেমি।

সমাধান : এখানে ইলেকট্রন নিউক্লিয়াসে থাকলে $\Delta x = 10^{-13}$ সেমি

$\Delta px = \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{10^{-27}}{10^{-13}} = 10^{-14}$ গ্রাম সেমি / সেঃ

$E = \frac{(\Delta p_x)^2}{2m} \simeq 200$ মিলিয়ন ইলেকট্রন ভোল্ট। এই শক্তির কোন ইলেকট্রন বাস্তবে পাওয়া যায় না।

9.6 পরীক্ষার দ্বারা অনিশ্চয়তা নীতির প্রমাণ (Experimental Proof of Uncertainty Principle)

বিভিন্ন পরীক্ষার দ্বারা অনিশ্চয়তা নীতি প্রমাণ করা যায়। আমরা এখানে একটি কণার কেবল অবস্থান নির্ণয় বা কেবল ভরবেগ বা একসঙ্গে অবস্থান ও ভরবেগ নির্ণয়ের পরীক্ষাদ্বারা কিভাবে অনিশ্চয়তা নীতি প্রমাণিত হয়, তা আলোচনা করব।

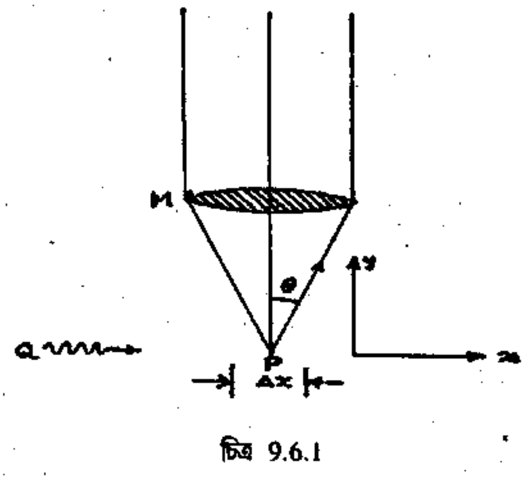
9.6.1 কণার অবস্থান নির্ণয়ের পরীক্ষা (Position Determination Experiment of a Particle)

ধরা যাক, x অক্ষের ওপর p বিন্দুতে একটি ইলেকট্রন স্থির আছে এবং এর এই অবস্থান নির্ণয়ের জন্য এর ওপর M মাইক্রোস্কোপটি (অনুবীক্ষণ যন্ত্র) ফোকাস করা হল (চিত্র 9.6.1)। ধরা যাক, x অক্ষের সমান্তরাল একটি রশ্মিগুচ্ছের একটি ফোটন Q, P বিন্দুতে অবস্থিত ইলেকট্রনটি দ্বারা বিক্ষেপিত হয়ে মাইক্রোস্কোপে প্রবেশ করে এবং এই বিক্ষিপ্ত আলোকদ্বারাই ইলেকট্রনটি দৃষ্টিগোচর হয় (লক্ষ্য করুন, এটি একটি কম্পটন ক্রিয়ার উদাহরণ)।

জ্যামিতিক আলোক বিজ্ঞান দ্বারা প্রমাণ করা যায় যে একটি আদর্শ মাইক্রোস্কোপ দুটি বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব $\frac{\lambda}{\sin\theta}$ অপেক্ষা কম হলে ঐ বিন্দু দুটিকে পৃথক করতে পারে না। এই দূরত্বকে মাইক্রোস্কোপের বিভক্তকরণ ক্ষমতা (resolving power) বলে। এখানে θ হল মাইক্রোস্কোপের উন্মেষ (aperture) p বিন্দুতে যে কোণ উৎপন্ন করে তার অর্ধেক এবং λ হল আপতিত ফোটনের তরঙ্গদৈর্ঘ্য। সুতরাং বিক্ষেপিত ফোটনদ্বারা ইলেকট্রনের অবস্থান নির্ণয়ে যে অনিশ্চয়তা ঘটে, তা হল

$$\Delta x \approx \frac{\lambda}{\sin\theta} \qquad \dots\dots (9.6.1)$$

এখন p বিন্দু থেকে বিক্ষেপিত ফোটনটির উন্মেষের অক্ষের সঙ্গে θ কোণ করে যে শঙ্কু হয়, তারমধ্যে যেকোনও দিকেই মাইক্রোস্কোপে প্রবেশ করতে পারে।



চিত্র 9.6.1

ধরা যাক, ফোটনটির এই কোণ θ', প্রাথমিক ভরবেগ p এবং θ' অভিমুখে বিক্ষেপিত হলে এর ভরবেগ হয় p'। এখানে $0 \leq \theta' \leq \theta$ এবং $p' \approx p$। সুতরাং x-অক্ষ অভিমুখে p'-এর উপাংশ হল $p' \sin \theta'$ এবং বিক্ষেপিত ফোটনের ভরবেগের অনিশ্চয়তা হল

$$\Delta p_x = p' \sin \theta - p' \sin 0° = p' \sin \theta \approx p \sin \theta \qquad \ldots \ldots (9.6.2)$$

সুতরাং ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র অনুযায়ী x-অক্ষ অভিমুখে ইলেকট্রনটিরও একই ভরবেগের অনিশ্চয়তা হবে।

এখন যেহেতু $p = \frac{h}{\lambda}$, অতএব (9.6.1) ও (9.6.2) সমীকরণ দুটি যুক্ত করে আমরা পাই

$$\Delta p_x . \Delta x \approx p \sin \theta \frac{\lambda}{\sin \theta} \approx h \qquad \ldots \ldots (9.6.3)$$

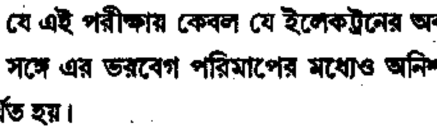
সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে, একটি স্থির (অর্থাৎ ভরবেগ 0) ইলেকট্রনের অবস্থান পরিমাপ করতে চাইলে, ভরবেগ ও অবস্থান উভয় পরিমাপের মধ্যেই অনিশ্চয়তা দেখা দেয় এবং এই অনিশ্চয়তা দুটির গুণফল প্ল্যাঙ্কের ধ্রুবকের প্রায় সমান। কাজেই ইলেকট্রনের অবস্থান নির্ণয়ের পরীক্ষা হাইজেনবার্গের অনিশ্চয়তার নীতিকে সমর্থন করে।

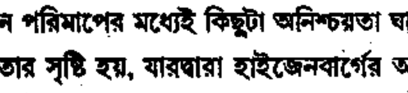
9.6.2 কণার ভরবেগ নির্ণয়ের পরীক্ষা (Momentum Determination Experiment of a Particle)

পূর্বের পরীক্ষায় ইলেকট্রনটি প্রথমে স্থির ছিল, অর্থাৎ এর প্রাথমিক ভরবেগ (= 0) নির্ভুলভাবে জানা ছিল। সেজন্য কেবল এর অবস্থান নির্ণয়ের জন্য একটি আদর্শ মাইক্রোস্কোপ ব্যবহার করা হয়েছিল। কিন্তু এসত্ত্বেও দেখা গেল যে এই পরীক্ষায় কেবল যে ইলেকট্রনের অবস্থান পরিমাপের মধ্যেই কিছুটা অনিশ্চয়তা ঘটে শুধু তাই নয়; সেই সঙ্গে এর ভরবেগ পরিমাপের মধ্যেও অনিশ্চয়তার সৃষ্টি হয়, যারদ্বারা হাইজেনবার্গের অনিশ্চয়তার নীতি সমর্থিত হয়।

আমরা এখন এমন, একটি পরীক্ষাব্যবস্থার কথা আলোচনা করব, যেখানে পরীক্ষার প্রারম্ভেই কণার অবস্থান সঠিকভাবে জানা আছে এবং সেজন্য কেবল এর ভরবেগ সঠিকভাবে পরিমাপ করার চেষ্টা করা হবে। কিন্তু দেখা যাবে যে এক্ষেত্রেও হাইজেনবার্গের অনিশ্চয়তার নীতি প্রযোজ্য।

এক্ষেত্রে ধরা যাক, কণাটি হল একটি পরমাণু যা কোনও সময়ে x-অক্ষের O বিন্দুতে আছে (চিত্র 9.6.2)। বোহ্‌রের তত্ত্ব থেকে আমরা জানি যে পরমাণুর কোনও ইলেকট্রনকে উত্তেজিত করা হলে এটি উচ্চতর শক্তিকক্ষে স্থানান্তরিত হয় এবং এই অবস্থায় পরমাণুটিকে উত্তেজিত অবস্থার পরমাণু (atom in an excited state) বলে। কিন্তু পরমাণুটি উত্তেজিত অবস্থায় বেশীক্ষণ থাকতে পারে না, অর্থাৎ কিছু সময়, τ (টাউ) পরই ইলেকট্রনটি পূর্বেকার নিম্নতম শক্তিকক্ষে (ground energy level) ফিরে আসে এবং শক্তির এই পার্থক্য $E = h\nu$ (ফোটন)-রূপে বিকীর্ণ হয়। পরিসংখ্যান তত্ত্ব অনুযায়ী τ-এর মান 0 থেকে ∞ পর্যন্ত হতে পারে, তবে এর গড় মান $\bar{\tau} \approx 10^{-8}$ sec পাওয়া যায়।





চিত্র 9.6.2

ধরা যাক, x-অক্ষের N বিন্দুতে অবস্থিত একজন নিরীক্ষকের দিকে পরমাণুটির বেগ V এবং বিকীর্ণ ফোটনের কম্পাঙ্ক ν। কিন্তু ডপলার ক্রিয়ার জন্য (Doppler effect) এই কম্পাঙ্কে V বেগের ওপর নীচের সূত্র অনুযায়ী নির্ভরশীল হয়

$$\nu = \nu_0\left(1 + \frac{V}{c}\right) \qquad \text{...... (9.6.4)}$$

বা, $$V = c\left(\frac{\nu}{\nu_0} - 1\right) \qquad \text{...... (9.6.5)}$$

যেখানে ν_0 হল নিরীক্ষকের সাপেক্ষে যখন পরমাণুটি স্থির থাকে, তখন তার দ্বারা বিকীর্ণ ফোটনের কম্পাঙ্ক এবং c হল আলোকের বেগ।

(9.6.5) সমীকরণের সাহায্যে আমরা ফোটনের কম্পাঙ্ক ν পরিমাপ করে নিরীক্ষককের সাপেক্ষ পরমাণুর বেগ V পরিমাপ করতে পারি। সুতরাং ν পরিমাপের মধ্যে যদি কোনও অনিশ্চয়তা ঘটে, তবে V-এর মানের মধ্যেও অনুরূপ অনিশ্চয়তা ঘটবে। যেহেতু পরমাণুটি উত্তেজিত অবস্থায় τ সময় পর্যন্ত থাকতে পারে, সেজন্য এরদ্বারা বিকীর্ণ ফোটনের কম্পাঙ্কের মধ্যেও অনিশ্চয়তা ঘটে এবং এটা দেখানো যায় যে এই অনিশ্চয়তার মান প্রায় $\frac{1}{\tau}$।

অর্থাৎ $$\Delta\nu \approx \frac{1}{\tau} \qquad \text{...... (9.6.6)}$$

কিন্তু (9.6.5) সমীকরণ থেকে আমরা পাই

$$\Delta V \approx c\,\frac{\Delta\nu}{\nu_0} \approx \frac{c}{\nu_0\tau} \approx \frac{c}{\nu\tau} \qquad \text{...... (9.6.7)}$$

$$\left[\text{কারণ } \nu_0 \approx \nu \text{ এবং } \Delta\nu \approx \frac{1}{\tau}\right]$$

(9.6.7) সমীকরণ অনুযায়ী x-অক্ষ অভিমুখে পরমাণুর ভরবেগের অনিশ্চয়তা

$$\Delta P_x = m\,\Delta V \approx \frac{mc}{\nu\tau} \qquad \text{...... (9.6.8)}$$

যেহেতু পরমাণুটি x-অক্ষ অভিমুখে $E = h\nu$ শক্তির ফোটন বিকিরণ করে, কম্পটনের সূত্র অনুযায়ী এই ফোটনটির ভরবেগ হল $\frac{h\nu}{c}$। ফোটন বিকিরণের পূর্বে পরমাণুর বেগ V এবং ভরবেগ হল mV। সুতরাং ফোটন বিকিরণের পর এই ভরবেগ হবে $mV - \frac{h\nu}{c}$ এবং বেগ হবে $V - \frac{h\nu}{mc}$।

যেহেতু পরমাণুটির ফোটন নিঃসরণের সময়ের অনিশ্চয়তা আছে, সুতরাং যদি τ সময়ের মধ্যে ফোটন নিঃসরণ না হয়, তবে τ সময়ে পরমাণুটি x-অক্ষের দিকে $V\tau$ দূরত্ব অতিক্রম করবে। কিন্তু ফোটনটি যদি τ সময়ের প্রারম্ভেই নিঃসৃত হয়, তবে পরবর্তী T সময়ে পরমাণুটি যে দৈর্ঘ্য অতিক্রম করবে, তা হল $\left(V - \frac{h\nu}{mc}\right)\tau$। সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে ফোটন নিঃসরণের সময়ের অনিশ্চয়তার জন্য, পরমাণুটির অবস্থান নির্ণয়ে অনিশ্চয়তা ঘটবে এবং এই অনিশ্চয়তার মান

$$\Delta x = V\tau - \left(V - \frac{h\nu}{mc}\right)\tau = \frac{h\nu\tau}{mc} \qquad \ldots\ldots (9.6.9)$$

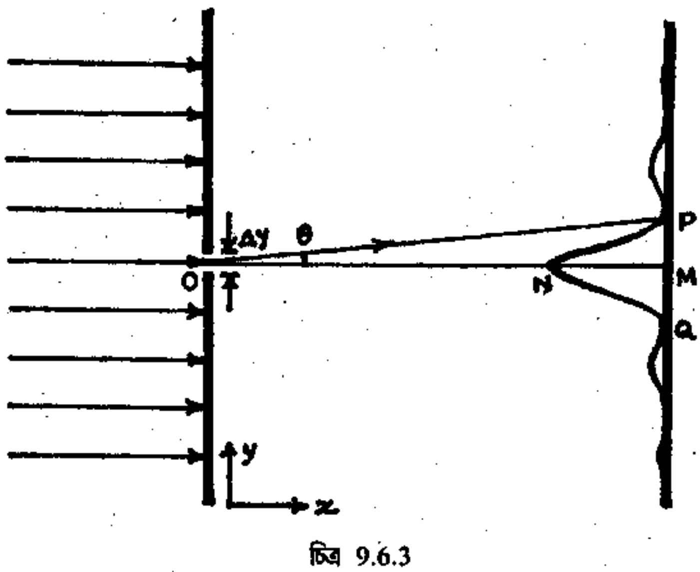
কাজেই (9.6.9) এবং (9.6.8) সমীকরণ দুটির গুণফল থেকে আমরা পাই,

$$\Delta p_x\, \Delta x = \frac{mc}{\nu\tau} \cdot \frac{h\nu T}{mc} \approx h \qquad \ldots\ldots (9.6.10)$$

সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে (9.6.10) সম্পর্কটিও হাইজেনবার্গের অনিশ্চয়তার নীতিকে সমর্থন করে।

9.6.3 একই সঙ্গে কণার ভরবেগ ও অবস্থান নির্ণয়ের পরীক্ষা (Experimental Determination of Both Momentum and Position of a Particle)

আলোকের তরঙ্গ তত্ত্ব থেকে আমরা জানি যে, একটি সমান্তরাল রশ্মিগুচ্ছ একটি সরু ছিদ্রের মধ্যদিয়ে গেলে ব্যবর্তিত হয় এবং এই ব্যবর্তিত আলোকের ব্যতিচারের ফলে ছিদ্রের উল্টোদিকে রাখা একটি পর্দার ওপর আলোক ও অন্ধকারের ঝালর (bright and dark fringes) তৈরী হয়। অনুরূপে ইলেকট্রনও যেহেতু তরঙ্গরূপে আচরণ করে (ডি ব্রগলির প্রকল্প দেখুন), সুতরাং একটি সমান্তরাল ইলেকট্রন রশ্মিগুচ্ছ (ক্যাথোর্ড রশ্মিগুচ্ছ) একটি সরু ছিদ্রের ওপর আপতিত হলে, ছিদ্রের মধ্যদিয়ে যাওয়ার সময় ব্যবর্তিত হবে এবং এই ব্যবর্তিত তরঙ্গ ব্যতিচারের ফলে পর্দার ওপর ইলেকট্রনের তীব্রতার ঝালর তৈরী করবে। ইলেকট্রনের এই ধর্মের দ্বারা আমরা একই সঙ্গে এর ভরবেগ ও অবস্থান নির্ণয়ের পরীক্ষা করব (অবশ্য ইলেকট্রনের পরিবর্তে ফোটন ধরলেও অবিকল একইভাবে এরও ভরবেগ ও অবস্থান নির্ণয় করা যাবে)।



চিত্র 9.6.3

(9.6.3) চিত্রে পরীক্ষা ব্যবস্থাটি দেখানো হল। A খাড়া পর্দার নিম্নবিন্দু থেকে y উচ্চতায় Δy বেধের একটি সরু ছিদ্র আছে। A পর্দার ওপর লম্বভাবে অর্থাৎ x-অক্ষের সমান্তরাল একটি ইলেকট্রনগুচ্ছ আপতিত হয় এবং এর কিছু ইলেকট্রন Δy ছিদ্র দিয়ে ব্যবর্তিত হয়ে B খাড়া পর্দার ওপর ইলেকট্রন তীব্রতার ঝালর গঠন করে। পর্দার M

বিন্দুটি ছিদ্রের ঠিক উল্টোদিকে আছে এবং এই স্থানেই ইলেকট্রনের তীব্রতা সর্বোচ্চ। এই তীব্রতা M বিন্দুর ওপরে ও নীচে ক্রমশ কমে গিয়ে P ও Q বিন্দু দুটিতে সর্বনিম্ন হয়। B পর্দার ওপর P থেকে Q পর্যন্ত ইলেকট্রন তীব্রতার ক্রমপরিবর্তন PNQ বক্রদ্বারা দেখানো হল। PNQ-কে ইলেকট্রন ব্যবর্তনের প্রথম বা মুখ্য ঝালর (first or primary fringe) বলা হয়। এই মুখ্য ঝালরের উভয় পার্শ্বে খুব কম তীব্রতার আরও কতগুলি ঝালর দেখা যায়, যেগুলিকে আমরা গৌণ (secondary) ঝালর বলতে পারি। আলোকের মতো ইলেকট্রনও একটি ফটোগ্রাফীর প্লেটকে কালো করতে পারে। সুতরাং B পর্দার স্থানে যদি একটি ফটোগ্রাফীর প্লেট রাখা যায়, তবে ঐ প্লেটের ওপর ইলেকট্রন তরঙ্গের তীব্রতা অনুযায়ী সাদা-কালোর ঝালর তৈরী হবে।

এখন আমরা যদি Δy ছিদ্রের মধ্যদিয়ে একটি মাত্র ইলেকট্রনের গতি বিবেচনা করি, তবে দেখতে পাই যে এটি Δy ছিদ্রের যেকোনও বিন্দু দিয়েই B পর্দার দিকে যেতে পারে। সুতরাং এটির y অভিমুখে অবস্থানের অনিশ্চয়তা দাঁড়ায় Δy। ইলেকট্রনটি O ছিদ্র থেকে বেরিয়ে B পর্দার যেকোনও একটি ঝালরের ওপর আপতিত হতে পারে। কিন্তু যেহেতু PMQ ঝালরটির তীব্রতাই সর্বাধিক, সুতরাং ইলেকট্রনটির এই ঝালরের কোনও স্থানে আপতিত হওয়ার সম্ভাবনাই সর্বাধিক। সুতরাং আমরা ধরতে পারি যে ইলেকট্রনটির কৌণিক অনিশ্চয়তা $= \angle POM = \theta$। ইলেকট্রনটি A পর্দার ছিদ্রের ওপর লম্বভাবে আপতিত হয় এবং ধরা যাক, এর বেগ V_x। কিন্তু ছিদ্রের মধ্যদিয়ে ব্যবর্তনের ফলে এর বেগ পরিবর্তিত হয়। ধরা যাক, ইলেকট্রনটি θ কোণে ব্যবর্তিত হলে OP অভিমুখে এর বেগ হয় V। চিত্র অনুযায়ী

$$V_x = V\cos\theta \qquad \dots\dots (9.6.11)$$

এবং $$V_y = V\sin\theta \qquad \dots\dots (9.6.12)$$

কিন্তু θ-র মান ক্ষুদ্র হওয়ায়, $\cos\theta = 1$ এবং $\sin\theta \approx \theta$। সুতরাং আমরা লিখতে পারি

$$V_x \approx V \qquad \dots\dots (9.6.13)$$

এবং $$V_y \approx V\theta \approx V_x\theta \qquad \dots\dots (9.6.14)$$

কিন্তু ইলেকট্রনটি OM অভিমুখে গেলে $\theta = 0$ এবং সেজন্য $V_y = 0$। সুতরাং y-অভিমুখে বেগের অনিশ্চয়তা হল

$$\Delta V_y = V_x\theta - 0 = V_x\theta \qquad \dots\dots (9.6.15)$$

ইলেকট্রনটির ভর m ধরলে, y-অভিমুখে এর ভরবেগের অনিশ্চয়তা হয়

$$\Delta p_y = m\,\Delta V_y = mV_x\,\theta = p_x\theta \qquad \dots\dots (9.6.16)$$

কিন্তু P বিন্দুতে মুখ্য ঝালরটির সর্বনিম্ন তীব্রতা হয়। তরঙ্গ-তত্ত্ব অনুযায়ী এর শর্ত হল—

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{\Delta y} \qquad \dots\dots (9.6.17)$$

বা, $$\theta \approx \frac{\lambda}{\Delta y} \qquad \dots\dots (9.6.18)$$

যেখানে λ হল ইলেকট্রনের ডি ব্রগলির তরঙ্গদৈর্ঘ্য। (9.6.16) সমীকরণে θ-র এই মান বসালে আমরা পাই ,

$$\Delta P_y \approx P_x \frac{\lambda}{\Delta y}$$

বা, $\Delta y. \Delta P_y \approx P_x\lambda$ ...... (9.6.19)

কিন্তু ডি ব্রগলির প্রকল্প অনুযায়ী $P_x = \frac{h}{\lambda}$। সুতরাং (9.6.19) সমীকরণ থেকে আমরা পাই

$$\Delta y.\Delta P_y \approx \frac{h}{\lambda}. \lambda \approx h \quad \text{...... (9.6.20)}$$

সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে এক্ষেত্রেও হাইজেনবার্গের অনিশ্চয়তা তত্ত্ব প্রযোজ্য।

9.7 বোহ্‌রের পরিপূরকতার নীতি (Bohr's Complementarity Principle)

অনিশ্চয়তার নীতির তাৎপর্য আরও বাস্তবসম্মতভাবে বোঝার জন্য 1928 খ্রীষ্টাব্দে বোহর তাঁর পরিপূরকতার নীতি উদ্ভাবন করেন। এই নীতিতে বলা হয় যে পারমাণবিক কোনও ঘটনার বর্ণনা সনাতন বলবিদ্যা যতটা সম্পূর্ণতার সঙ্গে দাবি করে, ততটা সম্পূর্ণতার সঙ্গে তা বর্ণনা করা যায় না। এর কারণ, যে রাশিগুলি (যেমন x ও P_x) কোনও ঘটনার সনাতন বর্ণনা গঠন করার জন্য পরিস্পরের পরিপূরক হিসাবে কাজ করে, সেগুলি আসলে পরস্পরের বাধাদায়ক (exclusive)। অথচ আমরা এই রাশিগুলি বাদ দিয়ে আর কোনও পরস্পরের পরিপূরক রাশি ব্যবহার করতে পারি না, কারণ কোয়ান্টাম বলবিদ্যাতেও এই রাশিগুলির সবই ব্যবহার করা হয়। কোনও পরীক্ষকের দৃষ্টিকোণ থেকে বিচার করলে পরিপূরকতার নীতি এই বোঝায় যে ঐ পরীক্ষকের কাছে যত সূক্ষ্ম বা নির্ভুল পরীক্ষা যন্ত্রই থাকুক না কেন, এই যন্ত্রগুলির এমনই ধর্ম যে অনিশ্চয়তার নীতিতে যতটা নির্ভুলভাবে কোনও পরিমাপের সীমা আছে, তারচেয়ে নির্ভুলভাবে কোনও পরিমাপই করা যায় না।

পরিমাপের এই অনিশ্চয়তা পরীক্ষক বা তাঁর যন্ত্রের কোনও ত্রুটির জন্য ঘটছে, এরূপ ভাবার কোনও কারণ নেই। পরীক্ষক বা যন্ত্রের জন্য কোনও ত্রুটি ঘটলে, তা পরীক্ষকের আরও সতর্কতার বা সূক্ষ্মতর যন্ত্রপাতির সাহায্য নিয়ে দূর করা যায়। কিন্তু অনিশ্চয়তা নীতির জন্য পরিমাপের যে ত্রুটি ঘটে, তা কখনও দূর করা যায় না। কারণ, প্রকৃতির নিয়মই এমন যে অবস্থান ও ভরবেগের এক জোড়া আনুশাসিত নির্দেশাঙ্কের কোনও একটিকে অধিকতর নির্ভুলতার সঙ্গে পরিমাপ করতে গেলেই অপরটির মান এমনভাবে পরিবর্তিত হয়ে যায় যে শেষ পর্যন্ত অনিশ্চয়তার নীতিই প্রযোজ্য থাকে। কোয়ান্টাম বলবিদ্যার এই দিকটি সনাতন বলবিদ্যা থেকে মৌলিকভাবে আলাদা। কারণ, সনাতন বলবিদ্যাতেও যখন কোনও রাশির পরিমাপ করা হয়, তখন রাশির তন্ত্রটিও সেই সঙ্গে বিঘ্নিত হয়, কিন্তু এই বিঘ্নের পরিমাপ করা যায় এবং এদ্বারা পরিমাপ্য রাশিটির মানের ত্রুটি সংশোধন করা যায়। কিন্তু পারমাণবিক তন্ত্রের ক্ষেত্রে দেখা যায় যে, এরূপ সংশোধন অসম্ভব। বোহ্‌রের পরিপূরকতার নীতি সনাতন বলবিদ্যার এই সীমাবদ্ধতাই নির্দেশ করে।

এখানে আরেকটি কথা উল্লেখযোগ্য যে, সূর্যের চারপাশে গ্রহগুলির ঘোরার ক্ষেত্রে কিংবা পৃথিবীর চারপাশে চাঁদের ঘোরার ক্ষেত্রে অনিশ্চয়তার নীতির কোনও মূল্য নেই। অর্থাৎ যেকোনও গ্রহ বা চাঁদের কক্ষপথ আমরা সনাতন বলবিদ্যার দ্বারাই যথেষ্ট নির্ভুলতার সঙ্গে পরিমাপ করতে পারি। এমনকি একটি ছোট ঢিলকে সুতোর সাহায্যে বেঁধে ঘোরালে এই গতিপথ নিরূপণে অনিশ্চয়তার নীতি প্রযোজ্য হয় না। কিন্তু একটি পরমাণুতে একটি ইলেকট্রন যখন নিউক্লিয়াসের চারপাশে ঘোরে তখন অনিশ্চয়তার নীতি পয়োজ্য হয়। এর কারণ অবশ্যই প্ল্যাঙ্কের ধ্রুবক h-এর মানের ক্ষুদ্রতা ($h = 6.6 \times 10^{-34}$ joule-sec)। সনাতন বলবিদ্যা কেবল পরমাণুর চেয়ে বহুগুণ বড় বস্তুর ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য। কারণ, এইরূপ বস্তুর অবস্থান ও ভরবেগ নির্দেশাঙ্কগুলির মান খুবই বড় এবং সেজন্য এদের পরিমাপের অনিশ্চয়তাও h-র মানের চেয়ে বহুগুণ বড় হয়। সুতরাং এক্ষেত্রে আমরা h-কে শূন্য ধরতে পারি। অর্থাৎ এরূপ অনিশ্চয়তার ক্ষেত্রে আমরা লিখতে পারি

$$\Delta x.\ \Delta P_x \approx 0$$

কাজেই, হয় $\Delta x \neq 0$, $\Delta P_x \simeq 0$ বা, $\Delta x \simeq 0$, $\Delta P_x \neq 0$, বা, $\Delta x \simeq \Delta P_x \simeq 0$। সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে বৃহৎ বস্তুর ক্ষেত্রে অনিশ্চয়তার নীতি প্রযোজ্য হয় না এবং সেজন্য এদের ক্ষেত্রে x ও P_x একই সঙ্গে নির্ভুলভাবে পরিমাপ করা সম্ভব। এজন্য সনাতন বলবিদ্যাকে আমরা কোয়ান্টাম বলবিদ্যার একটি সীমায়িত (limiting) রূপ হিসাবে ধরতে পারি যেখানে $h \rightarrow 0$। বস্তুত h-ই হল মূল রাশি যা কোয়ান্টাম বলবিদ্যাকে সনাতন বলবিদ্যা থেকে পৃথক করে।

9.8 সারাংশ (Summary)

এই এককে হাইজেনবার্গের অনিশ্চয়তা নীতি বিস্তৃতভাবে আলোচনা করা হয়েছে। বলবিদ্যা হ্যামিলটনের সূত্রদ্বারা গঠন করা যায়। প্রকাশ্যভাবে সময় নিরপেক্ষ হ্যামিল্টনের সূত্রগুলি কেবল কণার অবস্থান ও ভরবেগ এবং সময়ের সাপেক্ষে এদের অন্তরকলনের ওপর নির্ভর করে। কোনও একদিকে এই দুটি রাশির উপাংশকে আনুশাসিত যুগ্মরাশি বলে। আবার প্রকাশ্যভাবে সময় নির্ভর হ্যামিটনীয় সমীকরণগুলি কেবল সময় ও কণার শক্তির ওপর নির্ভর করে। এজন্য এই দুটি রাশিকেও আনুশাসিত যুগ্মরাশি বলা হয়। সনাতন বলবিদ্যা অনুযায়ী এইরূপ দুটি যুগ্ম রাশিকে একই সঙ্গে যতইচ্ছা নির্ভুলতার সঙ্গে পরিমাপ করা সম্ভব। কিন্তু কোনও কণা যদি পরমাণুরূপ বা তা থেকে ক্ষুদ্রতর হয়, তখন এদের গতি সনাতন বলবিদ্যার দ্বারা নির্ধারিত হয় না। সেক্ষেত্রে কোয়ান্টাম বলবিদ্যার সূত্র প্রয়োগ করতে হয়। হাইজেনবার্গ কোয়ান্টাম বলবিদ্যার দ্বারা প্রমাণ করেছেন যে দুটি আনুশাসিত যুগ্ম রাশি একই সঙ্গে যতইচ্ছা নির্ভুলতার সঙ্গে পরিমাপ করা যায় না। রাশিগুলির প্রাকৃতিক ধর্মই এমন যে একটি রাশিকে যত নির্ভুলভাবে পরিমাপের চেষ্টা করা হয়, এর যুগ্মরাশিটির পরিমাপের মধ্যে তত বেশী অনিশ্চয়তা দেখা দেয়, যারফলে এই দুই রাশির অনিশ্চয়তার গুণফল কোনওক্রমেই $h/2\pi$-এর চেয়ে কম হয় না।

একটি কণা বা ফোটনকে কোনও সময়ে একটি অত্যল্প স্থানে সীমাবদ্ধ তরঙ্গ-স্তূপ হিসাবে কল্পনা করলে হাইজেনবার্গের অনিশ্চয়তার নীতি প্রমাণ করা যায়। হাইজেনবার্গের নীতি বিভিন্ন কাল্পনিক পরীক্ষাদ্বারাও প্রমাণ করা

যায়। যেমন, অণুবীক্ষণের সাহায্যে একটি ইলেকট্রনের অবস্থান নির্ণয় করতে গেলে অনুবীক্ষণের কার্যনীতি অনুযায়ী ইলেকট্রনটির ভরবেগ পরিমাপের মধ্যে অনিশ্চয়তা দেখা দেয়, যা হাইজেনবার্গের অনিশ্চয়তা নীতির অনুসারী। তেমনি, কোনও অবস্থানে একটি পরমাণুর ভরবেগ নিরূপণ করতে গেলে এই উভয় রাশির পরিমাপের মধ্যেই অনিশ্চয়তা দেখা দেয় এবং এদের গুণফল হাইজেনবার্গের অনিশ্চয়তা নীতির অনুসারী। এমনকি একটি ইলেকট্রনের একই সঙ্গে অবস্থান ও ভরবেগ নির্ণয়ের পরীক্ষাতেও অনুরূপ পরিমাপের অনিশ্চয়তা থাকে।

বোহ্‌রের পরিপূরকতার নীতি অনিশ্চয়তার নীতিকে বুঝতে সাহায্য করে।

9.9 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

প্র. 9.1 হাইজেনবার্গের অনিশ্চয়তার নীতিটি বিবৃত করুন। আনুসাসিত যুগ্ম রাশি বলতে কি বোঝায়? সনাতন বলবিদ্যার অনিশ্চয়তার নীতি প্রযোজ্য হয় না কেন?

প্র. 9.2 একটি কণা বা ফোটনের তরঙ্গ-স্তূপ বলতে কি বোঝায়? এই তরঙ্গ স্তূপের ফুরিয়ার সমীকরণটি লিখুন। এই সমীকরণের সাহায্যে অনিশ্চয়তার নীতি প্রমাণ করুন।

প্র. 9.3 একটি মাইক্রোস্কোপের (অনুবীক্ষণ যন্ত্র) বিভক্তকরণ ক্ষমতা বলতে কি বোঝায়? এমন একটি পরীক্ষাব্যবস্থার বর্ণনা করুন যার দ্বারা দেখানো যায় যে একটি ইলেকট্রনের অবস্থান নির্ণয় করতে গেলে এর অবস্থান ও ভরবেগের পরিমাপের অনিশ্চয়তার গুণফল অন্তত h হয়।

প্র. 9.4 একটি পরমাণুর ভরবেগ নির্ণয়ের পরীক্ষায় ভরবেগ ও অবস্থানের পরিমাপের অনিশ্চয়তার গুণফল নির্ণয় করুন।

প্র. 9.5 ব্যবর্তন পরীক্ষায় একটি ইলেকট্রনের অবস্থান ও ভরবেগের পরিমাপের যে অনিশ্চয়তা হয়, তা নির্ণয় করুন এবং এদ্বারা অনিশ্চয়তার সম্পর্ক প্রতিষ্ঠা করুন।

প্র. 9.6 বোহ্‌রের পরিপূরকতার নীতিটি বিবৃত করুন এবং এদ্বারা অনিশ্চয়তার নীতির যে ব্যাখ্যা পাওয়া যায়, তা সংক্ষেপে বলুন।

9.10 সর্বশেষ প্রশ্নাবলির উত্তর

উত্তর 9.1 প্রশ্নের প্রথম ও দ্বিতীয় অংশের উত্তরের জন্য (9.4) অনুচ্ছেদ দেখুন। তৃতীয় অংশের জন্য (9.7) অনুচ্ছেদের শেষাংশ দেখুন।

উত্তর 9.2 : (9.5) অনুচ্ছেদ দেখুন।

উত্তর 9.3 : (9.6.1) অনুচ্ছেদ দেখুন।

উত্তর 9.4 : (9.6.2) অনুচ্ছেদ দেখুন।

উত্তর 9.5 : (9.6.3) অনুচ্ছেদ দেখুন।

উত্তর 9.6 : (9.7) অনুচ্ছেদ দেখুন।

একক 10 □ শ্রোডিংগার সমীকরণ

গঠন ঃ

10.1 প্রস্তাবনা

উদ্দেশ্য

10.2 শ্রোডিংগার সমীকরণ ও তরঙ্গ-অপেক্ষক

3.2.1 সময়নির্ভর শ্রোডিংগার সমীকরণ

3.2.2 সময়-নিরপেক্ষ শ্রোডিংগার সমীকরণ

3.2.3 তরঙ্গ অপেক্ষকের ভৌত তাৎপর্য

3.2.4 তরঙ্গ অপেক্ষকের প্রমাণীকরণ

3.2.5 তরঙ্গ আপেক্ষকের সমকৌণিকতা

10.3 কোয়ান্টাম বলবিদ্যার সংকারকের ব্যবহার

3.3.1 কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় ব্যবহৃত সংকারক

3.3.2 সংকারকের ধর্ম

3.3.3 কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় সংকরণের তাৎপর্য

10.4 সম্ভাব্যতার প্রবাহ ঘনত্ব

10.5 ভৌতরাশির প্রত্যাশিত মান

3.5.1 এরানফেস্টের উপপাদ্য

10.6 সারাংশ

10.1 প্রস্তাবনা

এই পর্যায়ের আগের দুই এককে আপনি দেখেছেন যে বড় আকারের কোন বস্তুখণ্ডের ক্ষেত্রে নিউটনের গতিসূত্র ও সনাতন গতিবিদ্যা যথেষ্ট হলেও অণু পরমাণুর গতিবিশ্লেষণে সনাতন গতিবিদ্যার পদ্ধতি যথেষ্ট নয়। মৌলকণা এবং সেগুলির আণবিক মাপের সমষ্টিগুলির গতিপ্রকৃতি কখনই সুনির্দিষ্ট করা যায় না, বরং সেগুলির আচরণ সম্ভাব্যতার মাধ্যমেই বর্ণনা করা যায়।

আদি কোয়ান্টাম তত্ত্বে আণবিক মাপের বস্তুকণার গতিবিধির ব্যাখ্যা করতে কয়েকটি 'কোয়ান্টাম সূত্র' ধরে নেওয়া হয়েছিল। আপনার মনে থাকতে পারে যে তাপীয় বিকিরণের বর্ণালি ব্যাখ্যা করতে গিয়ে প্লাঙ্ক (Planck)

আলোককণা বা ফোটনের শক্তিকে তার কম্পাঙ্ক 'ν' এর সমানুপাতী, অর্থাৎ $E = h\nu$ সূত্রটিকে ধরে নিয়েছিলেন। সমানুপাত ধ্রুবক h আমাদের কাছে প্লাঙ্কের ধ্রুবক নামে পরিচিত। বিজ্ঞানী নীল্‌স্ বোর (Neils Bohr) হাইড্রোজেন পরমাণুর বর্ণালির ব্যাখ্যা দিতে এই সূত্রের ব্যবহার করেন। উপরন্তু তিনি আরও যে অঙ্গীকারটি ধরে নেন তা হল ইলেকট্রনের এক একটি সুস্থিত বৃত্তাকার কক্ষপথের জন্য ইলেকট্রনের ভরবেগ এবং কক্ষপথের পরিধির গুণফল প্লাঙ্ক ধ্রুবকের এক একটি পূর্ণসংখ্যক গুণিতক। একথা অনস্বীকার্য যে আদি কোয়ান্টাম তত্ত্বের এই অঙ্গীকারগুলি আমাদের কিছু ভৌত ঘটনার সঠিক ব্যাখ্যা দিতে সাহায্য করেছিল এবং পদার্থের আচরণের এক নতুন চিত্র আমাদের চোখের সামনে উন্মীলিত করেছিল। কিন্তু এটিও আপনার মনে হয়ে থাকতে পারে যে এগুলি নেহাৎই গণনার সুবিধার জন্য উপযুক্ত যুক্তি ছাড়াই গ্রহণ করা হয়েছিল।

আমরা জানি, ইলেকট্রন, নিউট্রনের মত বস্তুকণাগুলি কখনও পদার্থ আবার কখনও তরঙ্গের মত আচরণ করে। কণাগুলির এই দ্বৈত আচরণ ডি ব্রগ্‌লি (houis de Broglie)-কে প্রতিটি কণার একটি অনুষঙ্গী তরঙ্গের কল্পনা করতে অনুপ্রাণিত করেছিল। তিনি এই তরঙ্গের তরঙ্গদৈর্ঘ্য $\lambda = h/p$ (p = কণার ভরবেগ) ধরে নিয়ে ছিলেন, যাতে কোন একটি কণার বেগ তার অনুষঙ্গী তরঙ্গের বেগের (group velocity) সমান হয়।

পদার্থতরঙ্গের এই ধারণাটি গৃহীত হলেও যেহেতু শব্দতরঙ্গ বা তড়িৎচুম্বকীয় তরঙ্গের মত যে কোন পরিচিত তরঙ্গেরই একটি তরঙ্গ-সমীকরণ থাকে, সেহেতু এই পদার্থ তরঙ্গেরও একটি সমীকরণের প্রয়োজন অনুভূত হয়েছিল। 1926 সালে শ্রোডিংগার (Erwin Schrödinger) ডি ব্রগলি তরঙ্গের ধারণার ভিত্তিতে প্রথম একটি তরঙ্গ-সমীকরণের উপস্থাপনা করেন। এই এককে আমরা শ্রোডিংগারের তরঙ্গ সমীকরণের উপস্থাপনা, বিভিন্ন অবস্থায় তার রূপ এবং তরঙ্গ অপেক্ষকের কয়েকটি ধর্ম নিয়ে আলোচনা করব।

এটি আমাদের মনে রাখতে হবে যে কোন তরঙ্গ সমীকরণই প্রমাণযোগ্য বিষয় নয়। এই সমীকরণের পালনীয় শর্তগুলি মনে রেখে আমরা তার একটি রূপ কল্পনা করতে পারি এবং বিভিন্ন ভৌত অবস্থায় সেটি প্রয়োগ করে তার কার্যকারিতা পরখ করতে পারি। ব্যবহারিক ক্ষেত্রে তরঙ্গ সমীকরণের সাফল্যই তার উপস্থাপনাকে সমর্থন করে।

উদ্দেশ্য

এই এককটির মূল উদ্দেশ্য কোয়ান্টাম বলবিদ্যার শ্রোডিংগার পদ্ধতির ভিত্তিস্বরূপ শ্রোডিংগারের তরঙ্গ-সমীকরণের সঙ্গে আপনার পরিচয় ঘটানো। এই এককটি পড়ার পর আপনি

- একমাত্রিক ও ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক পদ্ধতিতে শ্রোডিংগারের সময় নির্ভর ও সময়-নিরপেক্ষ সমীকরণগুলি প্রতিষ্ঠা করতে পারবেন।
- তরঙ্গ অপেক্ষকের বিশেষ গাণিতিক ধর্মগুলি বিবৃত করতে পারবেন।
- তরঙ্গ অপেক্ষকের ভৌত তাৎপর্য উদ্দিষ্ট বস্তুতন্ত্রের সম্ভাব্যতা ঘনত্ব এবং সম্ভাব্যতার প্রবাহ ঘনত্বের মাধ্যমে ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- তরঙ্গ অপেক্ষকের প্রমাণীকরণ ও সমকৌণিকতা ব্যাখ্যা করতে পারবেন এবং সম্ভবপর ক্ষেত্রে অপেক্ষকের প্রমাণীকরণ সম্পন্ন করতে পারবেন।

● কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় ব্যবহৃত সংকারকগুলিকে চিহ্নিত করতে পারবেন এবং সেগুলি ব্যবহার করে কোয়ান্টাম বলবিদ্যার বিভিন্ন সমীকরণ লিখতে পারবেন।

● কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় তরঙ্গ অপেক্ষক ব্যবহার করে কীভাবে কোন ভৌতরাশির প্রত্যাশিত মান পাওয়া যায় তা বিবৃত করতে পারবেন এবং সনাতন বলবিদ্যার সমীকরণ থেকে ভৌতরাশির প্রত্যাশিত মান ব্যবহার করে কীভাবে কোয়ান্টাম বলবিদ্যার সমীকরণে পৌঁছানো যায় তা বিবৃত করতে পারবেন।

10.2 শ্রোডিংগার সমীকরণ ও তরঙ্গ অপেক্ষক

আপনি ইতিপূর্বে দেখেছেন যে, কোন একটি বস্তুকণার ক্ষেত্রে বিভিন্ন তরঙ্গদৈর্ঘ্য (λ) বা তরঙ্গসংখ্যার $\left(k = \frac{2\pi}{\lambda}\right)$ অসংখ্য একমাত্রিক তরঙ্গ উপরিপাতিত হয়ে একটি তরঙ্গপুঞ্জ তৈরী করে এবং এই তরঙ্গপুঞ্জের দলীত বেগই কণাটির বেগ সূচিত করে। এই অসংখ্য তরঙ্গের মধ্যে কোন একটি তরঙ্গের কথা বিবেচনা করা যাক, যার কৌণিক কম্পাঙ্ক ω। তরঙ্গটি x দিকে সঞ্চারিত হলে আমরা তরঙ্গ অপেক্ষকটিকে লিখতে পারি :

$$\psi(x, t) = Ae^{i(kx - wt)} \quad (t = \text{সময়}) \qquad \ldots\ldots 10.1$$

ψ রাশিটি কি ধরনের, এটি আপনার মনে হতে পারে। শব্দতরঙ্গের ক্ষেত্রে তরঙ্গ অপেক্ষকটি হল মাধ্যমের একটি বস্তুকণার সরণ, যার বর্গ তরঙ্গের শক্তিঘনত্ব বা তীব্রতার সমানুপাতী। তড়িৎচুম্বকীয় তরঙ্গের ক্ষেত্রেও তরঙ্গ অপেক্ষকটি তড়িৎক্ষেত্র বা চৌম্বকক্ষেত্রের প্রাবল্যের মান এবং সেখানেও তরঙ্গের তীব্রতা প্রাবল্যের বর্গের সমানুপাতী। তরঙ্গ-অপেক্ষক ψ এর নিজস্ব কোন ভৌত অর্থ দেওয়া না গেলেও তার বর্গ বস্তুকণার নির্দিষ্ট অঞ্চল থাকার সম্ভাব্যতা-ঘনত্ব বা কণাস্রোতের তীব্রতার সমানুপাতী হবে।

তরঙ্গ-অপেক্ষক ψ-এর সমীকরণ প্রতিষ্ঠা করতে হলে সমীকরণটির চরিত্র সম্বন্ধে আগেই জানা দরকার। এই সমীকরণের প্রত্যাশিত বৈশিষ্ট্যগুলি নিম্নরূপ।

ক) তরঙ্গ-সমীকরণটি অবশ্যই রৈখিক হবে, যাতে ψ_1 ও ψ_2 যদি সেটির দুটি সমাধান হয় তবে ψ_1 ও ψ_2 এর যে কোনও রৈখিক সমবায়। অর্থাৎ $c_1\psi_1 + c_2\psi_2$ (c_1, c_2 = ধ্রুবক) এর মত কোন অপেক্ষকও সমীকরণটিকে সিদ্ধ করবে। এই শর্তটি তরঙ্গের উপরিপাতনের নীতিকে (principle of superposition) সমর্থন করে।

খ) তরঙ্গের অবকল সমীকরণটি সময় t-এর সাপেক্ষে প্রথম ক্রমের হতে হবে। কেননা $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ এর মান জানা গেলে তবেই কোন এক সময়ে ψ এর মান জানা থাকলে পরবর্তী কোন সময়ে এই অপেক্ষকের মান নির্ণয় করা সম্ভব হবে।

গ) তরঙ্গ সমীকরণটি থেকে যে সমস্ত সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যাবে সেগুলি ডিব্রগ্‌লির প্রকল্প এবং সনাতন গতিবিদ্যার সঙ্গে সুসঙ্গত হবে। অর্থাৎ ডি ব্রগ্‌লির পদার্থতরঙ্গের ধারণা থেকে যে সিদ্ধান্তে আসা যায় তার

সঙ্গে অথবা সনাতন গতিবিদ্যায় লব্ধ ফলের সঙ্গে তরঙ্গ সমীকরণের সমাধানের মিল থাকবে। এটিকে সুসঙ্গতির নীতি (correspondence principle) বলা হয়।

10.2.1 সময়নির্ভর শ্রোডিংগার সমীকরণ

ডি ব্রগ্‌লি তরঙ্গের সংজ্ঞা অনুযায়ী, বস্তুকণার ভরবেগ $p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k \left(\hbar = \frac{h}{2\pi}\right)$ 10.2

বিভবহীন ক্ষেত্রে বিবরণশীল মুক্ত কণার ক্ষেত্রে কণার শক্তি (কণার বেগ আপেক্ষিক নয় ধরে নিয়ে) $E = \frac{p^2}{2m}$ $= \hbar^2 k^2 / 2m$ যা $h\nu$ বা $\hbar\omega$ এর সমান।

10.1 সমীকরণটিকে t এবং x এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাওয়া যায়

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\omega A e^{i(kx - \omega t)} = -i\omega\psi \quad \text{... ... 10.3}$$

এবং $$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = (ik)^2 A e^{i(kx - \omega t)} = -k^2\psi \quad \text{... ... 10.4}$$

10.3 ও 10.4 সমীকরণ থেকে,

$$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = \hbar\omega.\psi = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\psi$$

সুতরাং, $$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad \text{... ... 10.5}$$

এই সমীকরণ কে m ভরের মুক্তকণার জন্য, একমাত্রিক ও সময়নির্ভর শ্রোডিংগার্ তরঙ্গ সমীকরণ বলা হয়।

কণাটি যদি মুক্ত না হয়ে এমন একটি বলক্ষেত্রে বিচরণ করে যেটিকে $V(x)$ বিভবের মাধ্যমে বর্ণনা করা যায়, তাহলে কণার মোট শক্তির রাশিমালাটি হবে

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

আগের মত $E = \hbar\omega$ এবং $p = \hbar k$ লিখে

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V(x)$$

বা, $$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi \quad \text{(10.3 ও 10.4 ব্যবহার করে)} \quad \text{...... 10.6}$$

এটি শ্রেডিংগারের একমাত্রিক ও সময় নির্ভর সাধারণ সমীকরণ। লক্ষ্য করুন যে 10.5 বা 10.6 সমীকরণ কণাটির কোন নির্দিষ্ট ভরবেগ বা গতীয় শক্তির জন্য প্রযোজ্য নয়। সুতরাং যখন বিভিন্ন ভরবেগের একমাত্রিক তরঙ্গ একটি তরঙ্গপুঞ্জ গঠন করে তখন প্রতিটি তরঙ্গই 10.5 বা 10.6 সমীকরণ পালন করে। এবং তার ফলে উপরিপাতনের ফলে উদ্ভূত তরঙ্গপুঞ্জও এই সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

10.6 সমীকরণটিকে এইভাবে লেখা যায় :

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V\right)\psi \qquad \ldots\ldots 10.7$$

এই সমীকরণের ডানদিকের বন্ধনীর ভিতরের রাশিমালাটি ψ-এর ওপর ক্রিয়া শীল একটি সংকারক (Operator)। এটিকে হ্যামিল্টনীয় সংকারক, $\hat{H}$, নামে অভিহিত করা হয়। এখন আমরা 10.7 সমীকরণটিকে লিখতে পারি :

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\hat{H}\psi \qquad \ldots\ldots 10.8$$

সময়নির্ভর সমীকরণের ত্রিমাত্রিক রূপ :

বস্তুকণার সংশ্লিষ্ট তরঙ্গটিকে এর আগে আমরা x-অভিমুখে সঞ্চরণশীল বলে ধরেছি। এখন যদি সেটিকে যে কোন দিকের অভিমুখী বলে ধরা যায় তবে তরঙ্গ অপেক্ষকটিকে লিখতে হবে

$$\psi(\underline{r},t)=Ae^{i(\underline{k}.\underline{r}-\omega t)}$$

এখানে $\underline{k}$ ভেক্টরটি ভরবেগ $\underline{p}$ এর সমান্তরাল। $\underline{k}.\underline{r}$ গুণফলটির মান :

$$\underline{k}.\underline{r}=k_x x+k_y y+k_z z$$

যেখানে x, y ও z পাদাংক দিয়ে উপাংশগুলি বোঝানো হয়েছে।

লক্ষ্য করুন, $\dfrac{\partial\psi}{\partial x}=ik_x.Ae^{i(\underline{k}.\underline{r}-\omega t)}=ik_x\psi$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)=(ik_x)^2\psi=-k_x^2\psi$$

অনুরূপভাবে $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=-k_y^2\psi$ ও $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=-k_z^2\psi$

সুতরাং $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$ বা, $\nabla^2\psi=-(k_x^2+k_y^2+k_z^2)\psi=-k^2\psi$।

এখানে $\nabla^2=\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$ একটি সংকারক এবং এটিকে লাপ্লাসীয় সংকারক (Laplacian operator) বলা হয়। এবার আপনি 10.6 সমীকরণের জায়গায় লিখতে পারেন

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi+V\psi \qquad \ldots\ldots 10.9(a)$$

এটি শ্রোডিংগারের ত্রিমাত্রিক সময়নির্ভর সমীকরণ। এটিকে পূর্বের মত লেখা যায়

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V\right)\psi=H\psi \qquad \ldots\ldots 10.9(b)$$

হ্যামিল্টনীয় সংকারক H-এর স্বরূপটি কী সে সম্বন্ধে একটু আলোচনা করা যাক। আপনি দেখেছেন যে বস্তুকণার গতিশক্তি $E=\dfrac{p^2}{2m}=\dfrac{\hbar^2k^2}{2m}$ এবং $-\dfrac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi=\dfrac{\hbar^2k^2}{2m}\psi=E\psi$

সুতরাং $-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$ সংকারকটি তরঙ্গ অপেক্ষকের ওপর ক্রিয়া করলে আমরা গতিশক্তি ও ψ এর গুণফলটি পাই। সুতরাং হ্যামিল্টনীয় সংকারকটি যখন ψ এর ওপর ক্রিয়া করে তখন আমরা ψ এবং $(E + V)$ রাশির গুণফল পাই। দ্বিতীয় রাশিটি হল বস্তুকণার গতিশক্তি ও স্থিতীয়শক্তির যোগফল, অর্থাৎ মোট শক্তি। সুতরাং হ্যামিল্টনীয় সংকারকটি বস্তুকণার মোট শক্তির মান সূচিত করে। এবার একটি অনুশীলনীর উত্তর দিন।

অনুশীলনী—1

শ্রোডিংগারের সময় নির্ভর সমীকরণ সম্বন্ধে নীচের উক্তিগুলি সঠিক কিনা বলুন।

ক) সমীকরণটি আপেক্ষিক (relativistic) বস্তুকণার ক্ষেত্রে প্রয়োগ করা যায়।

খ) সমীকরণটি তখনই প্রযোজ্য যখন বস্তুকণাটি মুক্ত অথবা সংরক্ষী বলের ক্ষেত্রে বিচরণ করে।

গ) তরঙ্গ অপেক্ষকটি সময় ও স্থানাঙ্ক, উভয়েরই ওপর নির্ভরশীল।

10.2.2 সময়-নিরপেক্ষ শ্রোডিংগার সমীকরণ

একমাত্রিক সমীকরণ : আগের অনুচ্ছেদে আমরা যে একমাত্রিক সময়নির্ভর সমীকরণটি (10.7) পেয়েছিলাম, তাতে তরঙ্গ-অপেক্ষক ψ সময় ও স্থানাঙ্ক x, উভয়েরই অপেক্ষক। যদি ধরে নেওয়া যায় যে বিভব V সময় নির্ভর নয়, তবে বস্তুকণার মোট শক্তি E সময়ের সঙ্গে অপরিবর্তিত থাকবে এবং 10.7 বা 10.8 সমীকরণ থেকে পাওয়া যাবে

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = E\psi \quad (E = \text{সময় নিরপেক্ষ রাশি}) \qquad \ldots\ldots 10.10$$

এই সমীকরণ সমাকলনযোগ্য।

$$i\hbar\frac{d\psi}{\psi} = Edt. \text{ বা } hn\psi = -\frac{i}{\hbar}Et,$$

অর্থাৎ $\psi \sim e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$

ধরাযাক ψ রাশিটি স্থানাঙ্ক নির্ভর রাশি $u(x)$ এবং সময় নির্ভর রাশি $e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$ এর গুণফল, অর্থাৎ $\psi(x, t) = cu(x)$ $e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$ $(c = \text{ধ্রুবক})$ ……10.11

10.7 সমীকরণে ψ এর এই রাশিমালাটি ব্যবহার করে,

$$ci\hbar\, u(x).\left(-\frac{iE}{\hbar}\right)e^{-\frac{i}{\hbar}Et} = c\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u}{dx^2} + Vu\right)e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$$

বা, $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u}{dx^2} + Vu = Eu$

বা, $\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)u = 0$ …… 10.12

10.12 সমীকরণটি শ্রোডিংগারের একমাত্রিক সময়-নিরপেক্ষ সমীকরণ। এর সমাধান থেকে $u(x)$ জানা গেলে 10.11 সমীকরণটি সম্পূর্ণ সমাধান সূচিত করবে। এই সমাধান অবশ্য বস্তুকণার নির্দিষ্ট শক্তি E এর জন্যই প্রযোজ্য। সেটি যদি ভিন্ন ভিন্ন শক্তির অবস্থায় থাকতে পারে তাহলে প্রতিটি অবস্থার জন্য তরঙ্গ অপেক্ষকটি নির্ণয় করে সেগুলির যোগফলের দ্বারা সম্পূর্ণ তরঙ্গ-অপেক্ষকটি সূচিত করতে হবে। এবং সেটিই হবে শ্রোডিংগার সমীকরণের সাধারণ সমাধান।

সাধারণ সমাধান ঃ ধরা যাক আলোচ্য বস্তুকণাটি একাধিক কোয়ান্টাম অবস্থায় থাকতে পারে। যেগুলিতে কণার শক্তি $E_1, E_2, E_3, \ldots$ ইত্যাদি।

প্রথম অবস্থাটিতে তরঙ্গ অপেক্ষকটি হল $c_1u_1(x)\,e^{-\frac{i}{\hbar}E_1t}$, দ্বিতীয়টিতে $c_2u_2(x)\,e^{-\frac{i}{\hbar}E_2t}$, ইত্যাদি। সুতরাং সাধারণ সমাধান

$$\psi(x, t) = \sum_n c_n u_n(x)\, e^{\frac{i}{\hbar}E_n t} \quad \ldots\ldots 10.13$$

10.11 বা 10.13 সমাধানগুলি লক্ষ করলে আপনি বুঝতে পারবেন যে এগুলিতে আমরা সমাধানের সময় নির্ভর ও অবস্থান নির্ভর অংশগুলিকে আলাদা করতে সক্ষম হয়েছি।

ত্রিমাত্রিক সমীকরণ ঃ

এখন আমরা শ্রোডিংগারের ত্রিমাত্রিক সমীকরণ (10.9) এর সমাধানের সময় নির্ভর ও অবস্থান নির্ভর অংশগুলিকে আলাদা করার চেষ্টা করব। ধরে নিন এক্ষেত্রে তরঙ্গ অপেক্ষক E এর নির্দিষ্ট স্থির মানের জন্য

$$\psi(\vec{r}, t) = cu(\vec{r}).e^{-iEt/\hbar} \quad \ldots\ldots 10.14$$

এখানে c একটি ধ্রুবক।

10.9 সমীকরণে $\psi(\vec{r}, t)$ এর এই মান ব্যবহার করে,

$$i\hbar.\, c.u(\vec{r}).\left(-\frac{iE}{\hbar}\right)e^{-iEt/\hbar} = c\left(-\frac{\hbar^2}{2m}.\nabla^2 u + Vu\right)e^{-iEt/\hbar}$$

অর্থাৎ $Eu = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 u + Vu$

বা, $\nabla^2 u + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)u = 0$ …… 10.15

এটি শ্রোডিংগারের ত্রিমাত্রিক সময়-নিরপেক্ষ সমীকরণ। এই সমীকরণের সমাধান জানা থাকলে 10.14 সূত্র অনুযায়ী নির্দিষ্ট মোট শক্তি E-এর জন্য সম্পূর্ণ তরঙ্গ অপেক্ষকটি জানা যেতে পারে। আবার কণার শক্তি যদি বিভিন্ন কোয়ান্টাম অবস্থায় $E_1, E_2, E_3 \ldots$ হয় তবে সাধারণ তরঙ্গ-অপেক্ষক হবে

$$\psi(\vec{r}, t) = C_n u_n(\vec{r})\, e^{-iE_n t/\hbar} \qquad \ldots\ldots 10.16$$

ইতিপূর্বে আপনি দেখেছেন যে কোন বস্তুকণা যখন $E_1, E_2, \ldots E_n$, প্রভৃতি বিভিন্ন শক্তির অবস্থায় থাকতে পারে তখন তার তরঙ্গ-অপেক্ষকটি 10.16 সূত্রানুযায়ী হয়ে থাকে। 10.13 সূত্রটি ব্যবহার করে কণাটির সম্ভাব্যতা-ঘনত্ব নির্ণয় করা যাক।

যদি $\psi(x, t) = \sum_n C_n u_n(x)\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}$ হয়, তবে

$$\psi^*(x, t) = \sum_n C^*_n u^*_n(x)\, e^{\frac{i}{\hbar}E_n t}$$

$\therefore$ সম্ভাব্যতা ঘনত্ব $P(x, t) = \psi^*(x, t)\, \psi(x, t)$

$$= \sum_n C^*_n C_n u^*_n(x)\, u_n(x)$$

$$+ \sum_m \sum_n C^*_m C_n\, u^*_m(x)\, u_n(x)\, e^{\frac{i}{\hbar}(E_m - E_n)t} \quad (m \neq n) \qquad \ldots\ldots 10.17$$

10.17 সমীকরণ থেকে বুঝতে পারছেন যে বস্তুকণাটি যদি অন্তত দুটি শক্তির অবস্থায় থাকতে পারে। তবে $P(x, t)$ সময় নির্ভর হবে। কিন্তু যদি সেটি একটি মাত্র শক্তির অবস্থায় (E_l, ধরুন) থাকতে পারে তবে C_l ছাড়া সবগুলি C_n এর মান শূন্য হবে এবং সম্ভাব্যতা ঘনত্বের মান হবে

$$P(x, t) = c_l^* c_l\, u_l^*(x)\, u_l(x)$$

যা সময়-নিরপেক্ষ। এর থেকে বোঝা যায় যে কোন বস্তুকণা যদি একটি মাত্র শক্তির অবস্থায় থাকতে পারে তবে তার সম্ভাব্যতার বন্টন সর্বদা এক থাকে। এজন্য একটিমাত্র শক্তির অবস্থাকে 'স্থির অবস্থা' (steady state) বলা হয়।

10.2.3 তরঙ্গ-অপেক্ষকের ভৌত তাৎপর্য

আমরা আগেই আলোচনা করেছি, যে তরঙ্গ অপেক্ষকের নিজস্ব কোন ভৌত তাৎপর্য না থাকলেও তার বর্গ বস্তুকণার অবস্থানের সম্ভাব্যতা ঘনত্বের সমানুপাতী হয়। ψ রাশিটি জটিল (complex) হওয়ায় এই রাশি বা তার সরাসরি বর্গের কোন ভৌত অর্থ থাকতে পারে না। কিন্তু রাশিটিকে তার জটিল অনুবন্ধী (complex conjugate) রাশি দিয়ে গুণ করলে যে নূতন রাশিটি পাওয়া যায় তা বাস্তব। এই রাশিটি ψ-এর মডিউলাসের বর্গ এবং এই বাস্তব রাশিটি বস্তুকণার অবস্থানের সম্ভাব্যতা ঘনত্ব নির্দেশ করে বলে ধরা হয়।

ধরে নিন তরঙ্গ-অপেক্ষক $\psi = A + iB$ যেখানে A ও B বাস্তব। i এর স্থানে $-i$ লিখে ψ এর জটিল অনুবন্ধী রাশি, ψ^* পাওয়া যায়। সুতরাং $\psi^* = A - iB$

এখন $\psi^* \psi = |\psi|^2 = (A - iB)(A + iB) = A^2 + B^2$ স্পষ্টতই, $|\psi|^2$ রাশিটি বাস্তব।

t সময়ে যে কোন অতিক্ষুদ্র আয়তন dV এর মধ্যে বস্তুকণাটি থাকায় সম্ভাব্যতা

$$dp = |\psi(\vec{r}, t)|^2 \, dV$$

সুতরাং কোন সুনির্দিষ্ট আয়তন V এর মধ্যে বস্তুকণাটি থাকায় সম্ভাব্যতা ঐ সময়ে

$$p = \int_V |\psi(\vec{r}, t)|^2 \, dV \qquad \text{...... 10.18}$$

অবশ্য বস্তুকণাটি যদি একমাত্রিক গতিতে x দিক অভিমুখে গতিশীল হয় তবে $x = x_1$ থেকে $x = x_2$ এর মধ্যে বস্তুকণাটিকে পাওয়ার সম্ভাব্যতা হবে

$$P(x_1 \le x \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} |\psi(x, t)|^2 \, dx \qquad \text{...... 10.19}$$

তরঙ্গ-অপেক্ষকের কয়েকটি বিশেষ ধর্ম

আগের দুটি সমীকরণ 10.17 ও 10.18 থেকে নির্দিষ্ট ত্রিমাত্রিক বা একমাত্রিক আয়তনের মধ্যে একটি বস্তুকণাকে পাওয়ার সম্ভাব্যতার সঙ্গে তার তরঙ্গ অপেক্ষকের সম্পর্কটি বুঝতে পেরেছেন। এই সম্পর্কের ফলে তরঙ্গ-অপেক্ষকের কয়েকটি বিশেষ ধর্মের উদ্ভব হয়। এই ধর্মগুলির সম্বন্ধে আলোচনা করা যাক।

1. সম্ভাব্যতার মান কোন বিন্দুতেই অসীম হতে পারে না। সুতরাং x, y, ও z এর যে কোন মানের জন্য ψ এর মান সীমিত (finite) হবে।

2. সম্ভাব্যতার ঘনত্ব এবং তার সঙ্গে সংশ্লিষ্ট অন্যান্য রাশি, যেমন কণার সংখ্যাঘনত্ব বা আধান ঘনত্ব, এগুলির প্রতিটিই ভৌত রাশি এবং যে কোন বিন্দুতে এগুলির একাধিক মান থাকতে পারে না। সুতরাং প্রত্যেক বিন্দুতেই ψ রাশির একটিমাত্র মান থাকবে, অর্থাৎ রাশিটি হবে একমানবিশিষ্ট (single-valued)।

3. সম্ভাব্যতা-ঘনত্বের মান সর্বত্রই সন্তত (continuous) হয়, যদিও যেখানে বিভবের মান অসীম সেখানে সম্ভাব্যতা ঘনত্বের মান শূন্য ও অসন্তত হতে পারে। এর থেকে এই সিদ্ধান্তে আসা যায় যে সে সব বিন্দুতে V-এর মান অসীম নয় সেখানে ψ এর মান সন্তত।

4. অসীম দূরত্বে ψ এবং ψ-এর নতি উভয়ই শূন্য হবে।

10.2.4 তরঙ্গ-অপেক্ষকের প্রমাণীকরণ (normalisation)

আপনি নিশ্চয়ই লক্ষ্য করেছেন যে তরঙ্গ অপেক্ষক ψ-এর রাশিমালায় (10.11 বা 10.14 সূত্র) একটি অনির্দিষ্ট ধ্রুবক ব্যবহার করা হয়েছে। সম্ভাব্যতার ধারণা ব্যবহার করে আপনি এই ধ্রুবকটির মান নির্ণয় করতে পারেন। এটি কীভাবে করা যায়? ধরা যাক 10.11 সূত্রের তরঙ্গ-অপেক্ষকটি একটিমাত্র বস্তুকণার জন্য, যেটি $-\infty$ থেকে $+\infty$ এর মধ্যে x-এর যে কোন স্থানাঙ্কে থাকতে পারে। সুতরাং $-\infty \le x \le \infty$ সীমার মধ্যে বস্তুকণাটি থাকায় সম্ভাব্যতা 10.18 অনুযায়ী

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,t).\psi(x,t).dx$$

$$= c^2 \int_{-\infty}^{\infty} u(x)^2.e^{-iEt/\hbar}.e^{iEt/\hbar} dx$$

$$= c^2 \int_{-\infty}^{\infty} u(x)^2 dx$$

$= c^2 I$. ধরা যাক, যেখানে সমাকলনটির মান I।

কিন্তু কণাটি $x = -\infty$ থেকে $x = \infty$। এই দুই সীমার মধ্যে থাকা সুনিশ্চিত হওয়ায় সম্ভাব্যতা P-এর মান 1। সুতরাং $c^2 I = 1$, বা $c = \frac{1}{\sqrt{I}}$। তখন 3.11 সূত্রের রাশিমালাটি লেখা যায়

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{I}} u(x)\, e^{-iEt/\hbar} \qquad \ldots\ldots 10.20$$

এই রাশিমালাটিকে আমরা কণাটির প্রমাণীকৃত (normalised) তরঙ্গ অপেক্ষক বলে থাকি।

10.14 সূত্রের প্রমাণীকরণের জন্য মনে রাখতে হবে যে বস্তুকণাটির নির্দিষ্ট আয়তনের মধ্যে থাকার সম্ভাব্যতা $P = 1$। এই আয়তন যদি V হয় তবে

$$P = \int_V |\psi(\vec{r},t)|^2 dV = \int_V \psi^*(\vec{r},t)\,\psi(\vec{r},t)\, dV$$

$$= c^2 \int_V u(\vec{r})^2 e^{-iEt/\hbar}.e^{iEt/\hbar} dV = c^2 \int_V u(\vec{r})^2 dV = c^2 I'$$

যেখানে I' = সমাকলনের মান।

$\therefore$ পূর্বের মত $c^2 I' = 1$, বা $c = \frac{1}{\sqrt{I'}}$।

এবং $\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{I'}} u(\vec{r}).e^{-iEt/\hbar}$ $\qquad \ldots\ldots 10.21$

এটি 10.14 সূত্রের তরঙ্গ অপেক্ষকের প্রমাণীকৃত রূপ।

প্রমাণীকরণের একটি উদাহরণ ঃ

ধরা যাক x দিক বরাবর চলনশীল একটি বস্তুকণা $-\infty \le x \le \infty$ সীমার মধ্যে থাকে এবং তার তরঙ্গ অপেক্ষক $\psi(x) = Ae^{-x^2/2+ikx}$।

প্রমাণীকরণের মাধ্যমে A ধ্রুবকটির মান নির্ণয় করতে হবে।

এক্ষেত্রে $\psi^*(x) = Ae^{-x^2/2}e^{-ikx}$

$\therefore$ $\psi^*(x)\,\psi(x) = A^2 e^{-x^2}$

$$\therefore \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\, \psi(x) dx = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = A^2\sqrt{\pi}$$

কিন্তু এই সমাকলটি বস্তুকণার $x = -\infty$ থেকে $x = \infty$ সীমার মধ্যে থাকায় সম্ভাব্যতা, সুতরাং এর মান 1।

$$\therefore \quad A^2\sqrt{\pi} = 1, \text{ বা } A = \pi^{-\frac{1}{4}}$$

$\therefore$ প্রমাণীকৃত তরঙ্গ অপেক্ষকটি হল $\psi(x) = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-x^2/2 + ikx}$

10.2.5 তরঙ্গ অপেক্ষকের সমকৌণিকতা (orthogonality)

ধরা যাক 10.11 সূত্রে যেমন একমাত্রিক তরঙ্গ অপেক্ষক লেখা হয়েছে, $\psi_m(x)$ ও $\psi_n(x)$ কোন একটি বস্তুকণার সেরূপ দুটি অপেক্ষক। এই দুই অবস্থায় কণাটির শক্তি যথাক্রমে Em ও En। Em ও En যদি ভিন্ন হয় তবে দেখা যায় $\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*_m(x)\, \psi_n(x)\, dx = 0$ যদি $m \neq n$ হয়

$= 1$ যদি $m = n$ হয়।

তরঙ্গ অপেক্ষকের এই ধর্মকে অপেক্ষকগুলির সমকৌণিকতা বলা হয়। শ্রোডিংগার সমীকরণের সাহায্যে আমরা এটি প্রমাণ করতে পারি।

10.12 সমীকরণটিকে $ce^{-\frac{i}{\hbar}Et}$ দিয়ে গুণ করে পাওয়া যায় :

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\psi = 0$$

Em ও En শক্তি-অবস্থার জন্য সমীকরণটি হল

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_m}{dx^2} + E_m\psi_m = V\psi_m \qquad \ldots\ldots 10.22(a)$$

$$\text{ও } \frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_n}{dx^2} + E_n\psi_n = V\psi_n \qquad \ldots\ldots 10.22(b)$$

10.22(a) সমীকরণের জটিল অনুবন্ধী সমীকরণটিকে ψ_n দিয়ে দুদিকে গুণ করলে পাওয়া যায়

$$\frac{\hbar^2}{2m}\psi_n\frac{d^2\psi^*_m}{dx^2} + E_m\psi_n\psi^*_m = V\psi_n\psi^*_m \qquad \ldots\ldots 10.23(a)$$

10.22(b) সমীকরণকে ψ^*_m দিয়ে গুণ করে পাওয়া যায়

$$\frac{\hbar^2}{2m}\psi^*_m\frac{d^2\psi_n}{dx^2} + E_n\psi^*_m\psi_n = V\psi^*_m\psi_n \qquad \ldots\ldots 10.23(b)$$

10.23(a) থেকে 10.23(b) বিয়োগ করে,

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left[\psi_n\frac{d_2\psi^*_m}{dx^2} - \psi^*_m\frac{d^2\psi_n}{dx^2}\right] + (E_m - E_n)\psi^*_m\psi_n = 0$$

কিন্তু $\psi_n \frac{d^2\psi^*_m}{dx^2} - \psi^*_m \frac{d^2\psi_n}{dx^2}$

$$= \left(\psi_n \frac{d^2\psi^*_m}{dx^2} + \frac{d\psi_n}{dx}\cdot\frac{d\psi^*_m}{dx}\right) - \left(\frac{d\psi^*_m}{dx}\cdot\frac{d\psi_n}{dx} + \psi^*_m \frac{d^2\psi_n}{dx^2}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\psi_n \frac{d\psi^*_m}{dx} - \psi^*_m \frac{d\psi_n}{dx}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\left(\psi_n \frac{d\psi^*_m}{dx} - \psi^*_m \frac{d\psi_n}{dx}\right) = -\frac{2m}{\hbar^2}(E_m - E_n)\,\psi^*_m\psi_n$$

এই সমীকরণের দুই দিককে $x = -\infty$ ও $x = \infty$ সীমার মধ্যে x -এর সাপেক্ষে সমাকলন করে,

$$\left[\psi_n \frac{d\psi^*_m}{dx} - \psi^*_m \frac{d\psi_n}{dx}\right]_{-\infty}^{\infty} = -\frac{2m}{\hbar^2}(E_m - E_n)\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*_m\, \psi_n dx \qquad \dots\dots 10.24$$

আমরা আগেই দেখেছি যে অসীম দূরত্বে, যখন $x = \pm\infty$, তখন ψ_m, ψ_m ও তাদের নতিগুলির মান শূন্য। সুতরাং 10.24 সমীকরণের বামদিকের মান শূন্য। অতএব

$$(E_m - E_n)\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*_m\psi_m dx = 0$$

যদি $m \neq n$ এবং $E_m \neq E_n$ হয় তবে

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*_m\psi_n dx = 0 \qquad \dots\dots 10.25(a)$$

এবং যদি $m = n$, $E_m = E_n$ হয় তবে ψ_m বা ψ_n এর প্রমাণীকরণের ফলে

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*_m\psi_n dx = 1 \qquad \dots\dots 10.25(b)$$

10.25(a) ও 10.25(b) সমীকরণগুলি ψ_m ও ψ_n এর সমকৌণিকতা প্রমাণ করে।

অনুশীলনী —2

ক) এই অনুশীলনীতে কয়েকটি প্রশ্ন ও প্রতিটির তিনটি করে সম্ভাব্য উত্তর দেওয়া আছে। যে উত্তরটি সঠিক সেটিকে চিহ্নিত করুন।

(i) কোন একটি তরঙ্গ-অপেক্ষকের রূপ $O \leq x \leq a$ সীমার মধ্যে $A \tan\left(\frac{\pi x}{a}\right)$ হতে পারে না, কেননা

(a) এটি x-এর একটি প্রত্যাবর্তী অপেক্ষক

(b) এটি $x = \frac{a}{2}$ বিন্দুতে সসীম ও সন্তত নয়

(c) $x = 0$ বা $x = a$ বিন্দুতে এটির মান শূন্য হয়।

(ii) তরঙ্গ অপেক্ষক $\psi(x, t) = \sum_n c_n\psi_n(x)\, e^{-iE_nt/\hbar}$ এর কেবলমাত্র c_2 ছাড়া অন্য c_n এর মান যদি শূন্য হয় তবে তার অর্থ

(a) বস্তুটি কেবলমাত্র E_2 শক্তির অবস্থায় থাকতে পারে

(b) বস্তুটি E_2 ছাড়া অন্য কোন শক্তির অবস্থায় থাকতে পারে

(c) E_2 ছাড়া অন্য শক্তি অর্থাৎ $E_1, E_3, E_4 \ldots$ প্রভৃতির মান শূন্য।

(iii) যদি কোন একটি বস্তুকণায় প্রমাণীকৃত তরঙ্গ-অপেক্ষক $\psi(x)$ হয় তবে n-সংখ্যক অনুরূপ কণার প্রমাণীকৃত তরঙ্গ অপেক্ষক হবে

(a) $n\psi(x)$ (b) $n^2\psi(x)$ (c) $\sqrt{n}\,\psi(x)$

খ) কোন পরমাণুর ভৌম অবস্থা ও প্রথম উত্তেজিত অবস্থার তরঙ্গ অপেক্ষক ψ_0 ও ψ_1। এবং এদের শক্তি যথাক্রমে E_0 ও E_1। যদি পরমাণুর ভৌম অবস্থায় থাকার সম্ভাব্যতা 40% এবং প্রথম উত্তেজিত অবস্থায় থাকার সম্ভাব্যতা 60% হয় তাহলে (a) পরমাণুর তরঙ্গ অপেক্ষক নির্ণয় করুন। (b) এর গড়শক্তি কত।

10.3 কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় সংকারকের ব্যবহার

আগের আলোচনার মধ্যে আপনি $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x)$, $\nabla^2\psi(\vec{r})$ প্রভৃতি রাশির দেখা পেয়েছেন। $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, ∇^2 প্রভৃতি চিহ্নগুলির নিজস্ব কোন অর্থ নেই। এগুলির দ্বারা আমরা ψ অপেক্ষকটির ওপর এক একটি ক্রিয়া বোঝাই, যেগুলির দ্বারা এক একটি নুতন অপেক্ষকের সৃষ্টি হয়। $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ বা ∇^2 -কে আমরা সংকারক (operator)বলে থাকি।

ধরা যাক $f(x) = ax^2 + bx + c$ একটি অপেক্ষক। এটির ওপর $\frac{d}{dx}$ সংকারকটি ক্রিয়া করলে পাওয়া যায়।

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(ax^2 + bx + c) = 2ax + b$$

এখানে $2ax + b$ একটি নুতন অপেক্ষক। যা $f(x)$ থেকে ভিন্ন।

যদি কোন সংস্কারক একটি বিশেষ অপেক্ষকের ওপর ক্রিয়া করার ফলে এমন একটি নতুন অপেক্ষকের সৃষ্টি হয় যা ঐ বিশেষ অপেক্ষকের একটি গুণিতক, অর্থাৎ ঐ বিশেষ অপেক্ষক ও একটি ধ্রুবক রাশির গুণফলের সমান, তবে ঐ বিশেষ অপেক্ষককে সংকারকটির একটি আইগেন-অপেক্ষক (eigenfunction) বলা হয়। ধ্রুবক রাশিটি ঐ আইগেন-অপেক্ষকের জন্য সংকারকটির আইগেনমান (eigenvalue)। একটি উদাহরণ থেকে আপনার কাছে বিষয়টি স্পষ্ট হবে।

ধরুন $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ একটি সংকারক, যা $A \sin kx$ অপেক্ষকটির ওপর ক্রিয়া করছে। এক্ষেত্রে

$$\frac{r^2}{rx^2}(A \sin kx) = \frac{\partial}{\partial x}(k A \cos kx) = -k^2(A \sin kx)$$

$-k^2$ রাশিটি একটি ধ্রুবক, সুতরাং $A \sin kx$ অপেক্ষকটি $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ সংকারকের একটি আইগেন অপেক্ষক এবং $-k^2$ রাশিটি সংকারকটির আইগেনমান।

এবার আমরা কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় ব্যবহৃত কয়েকটি সংকারকের বিষয়ে আলোচনা করব।

10.3.1 কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় ব্যবহৃত সংকারক

10.1 সমীকরণে আমরা তরঙ্গ-অপেক্ষকের যে রাশিমালাটি লিখেছি তাতে $k = \frac{p}{\hbar}$ এবং $\omega = \frac{E}{\hbar}$ লিখে পাওয়া যায়, x দিকে একমাত্রিক গতির ক্ষেত্রে,

$$\psi(x, t) = Ae^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)} \qquad \ldots \ldots 10.26$$

(i) **ভরবেগ ঃ** এখন, $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi(x, t) = \frac{\hbar}{i}\frac{ip}{\hbar}Ae^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)} = p\psi(x, t)$

অর্থাৎ $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(= -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)$ সংকারকটির জন্য $\psi(x, t)$ একটি আইগেন অপেক্ষক এবং এটির আইগেনমান ভরবেগ p। এজন্য $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ সংকারকটিকে **ভরবেগ-সংকারক** বলা হয় এবং $\hat{p}$ চিহ্ন দিয়ে সূচিত করা হয়। $\wedge$ (হ্যাট) চিহ্নটির অর্থ এই যে রাশিটি একটি সংকারক, সাধারণ ভৌত রাশি নয়।

(ii) **মোট শক্তি ঃ** আবার, $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x, t) = i\hbar\cdot -\frac{i}{\hbar}E\,Ae^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)} = E\psi(x, t)$

অর্থাৎ $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ বা $\hat{E}$ সংকারকটির জন্যও $\psi(x, t)$ একটি আইগেন অপেক্ষক এবং এই সংকারকটি আইগেনমান মোটশক্তি E। এজন্য $\hat{E}$ সংকারকটিকে **মোটশক্তি সংকারক** বলা হয়। $\hat{E}$ সংকারকটি সময়নির্ভর তরঙ্গ-অপেক্ষকের ওপর ক্রিয়া করে।

(iii) **ভরবেগের উপাংশ** বস্তুকণার ত্রিমাত্রিক গতির ক্ষেত্রে আমরা 3.22 সূত্রটিকে অল্প পরিবর্তিত করে লিখব।

$$\psi(\vec{r}, t) = Ae^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}.\vec{r} - Et)}$$
$$= Ae^{\frac{i}{\hbar}(p_x x + p_y y + p_z z - Et)}$$

এখন আপনি সহজেই দেখতে পাবেন যে

$\hat{p}_x\left(= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right), \hat{p}_y\left(= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$ ও $\hat{p}_z\left(= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z}\right)$ সংকারকগুলির $\psi(\vec{r}, t)$ তরঙ্গ অপেক্ষকের জন্য আইগেনমান যথাক্রমে p_x, p_y ও p_z।

(iv) **গতিশক্তি ঃ** এখন আমরা গতিশক্তির সংকারকটি নির্ণয় করতে পারি। আপনি দেখেছেন,

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi(x, t) = Px\ \psi(x, t)$$

উভয়দিককে x-এর সাপেক্ষে অবকলন করে, $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi = p_x\frac{\partial \psi}{\partial x}$

কিন্তু $\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{i}{\hbar}p_x\psi$; সুতরাং $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{i}{\hbar}p_x^2\psi$

বা, $p_x^2\psi = -\hbar^2\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$

একইভাবে, $p_y^2\psi = -\hbar^2\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$ এবং $p_z^2\psi = -\hbar^2\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$

$$\therefore \quad \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right)$$

বা, $k\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi$; এখানে $k = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) = \frac{p^2}{2m}$ = গতিশক্তি।

$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$ সংকারকটিকে আমরা গতিশক্তি সংকারক $\hat{k}$ নামে অভিহিত করতে পারি। 10.9 সমীকরণে আপনি ইতিমধ্যেই এই সংকারকটির সঙ্গে পরিচিত হয়েছেন।

(v) **হ্যামিল্টনীয়** 10.7 সমীকরণে আমরা স্থিতীয় শক্তির সংকারক $\hat{V}$ এর ব্যবহার করেছি। $\hat{V}$ সংকারকটির প্রয়োগ বলতে সরাসরি গুণ করা বোঝায়, অর্থাৎ $\hat{V}\psi = V\psi$, বা V ও ψ এর গুণফল।

(vi) $(\hat{k} + \hat{V})$ সংস্কারকটি গতিশক্তি ও স্থিতীয়শক্তির যোগফল, অর্থাৎ মোটশক্তি সূচিত করে। এই সংকারকটিকে আমরা হ্যামিল্টনীয় সংকারক $\hat{H}$ বলে থাকি। 10.8 সমীকরণে আপনি এটির ব্যবহার দেখেছেন। লক্ষ করুন যে $\hat{H}$ সংকারকটি x, y, z-স্থানাঙ্ক নির্ভর তরঙ্গ অপেক্ষকের ওপর ক্রিয়া করে।

(vii) কৌণিক ভরবেগ ঃ কৌণিক ভরবেগের সংজ্ঞা $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ থেকে আপনি এর উপাংশগুলি লিখতে পারেন ঃ

$$L_x = yp_z - zp_y$$

$$L_y = zp_x - xp_z$$

$$L_z = xp_y - yp_x$$

p_x, p_y ও p_z এর সংকারকগুলি ব্যবহার করে লেখা যায় ঃ

$$\hat{L}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y = \frac{\hbar}{i}\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad \ldots\ldots 10.27(a)$$

$$\hat{L}_y = \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z = \frac{\hbar}{i}\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) \qquad \text{...... 10.27(b)}$$

$$\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x = \frac{\hbar}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) \qquad \text{...... 10.27(c)}$$

বলা বাহুল্য, $10.27(a-c)$ সূত্রগুলি কেবলমাত্র সমকোণী কার্টেজীয় নির্দেশাঙ্কের ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য। গোলকীয় পোলার নির্দেশতন্ত্রে এগুলির রূপ হয় ঃ

$$\hat{L}_x = \frac{\hbar}{i}\left[-\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right] \qquad \text{...... 10.28(a)}$$

$$\hat{L}_y = \frac{\hbar}{i}\left[\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right] \qquad \text{...... 10.28(b)}$$

$$\hat{L}_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi} \qquad \text{...... 10.28(c)}$$

3.2.8 $(a-c)$ সূত্রগুলি থেকে মোট কৌণিক ভরবেগের বর্গের সংকারকটি পাওয়া যায় ঃ

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 = \hat{L}_x\hat{L}_x + \hat{L}_y\hat{L}_y + \hat{L}_z\hat{L}_z$$

$$= -\hbar^2\left[-\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right]\left[-\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right]$$

$$-\hbar^2\left[\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right]\left[\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right] - \hbar^2\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

বা, $$-\frac{\hat{L}^2}{\hbar^2} = \left[\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right.$$

$$+\left(\cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \left(\cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\left(\cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

$$+\left[\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(-\cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right.$$

$$\left.+\left(-\cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \left(\cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\left(\cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right] + \frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

$$= \left[\sin^2\phi\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \sin\phi\,\text{cosec}^2\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi} + \sin\phi\cot\theta\cos\phi\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\phi} + \cot\theta\cos^2\phi\frac{\partial}{\partial\theta} +\right.$$

$$\left.\cot\theta\cos\phi\sin\phi\frac{\partial^2}{\partial\phi\partial\theta} - \cot^2\theta\cos\phi\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi} + \cot^2\theta\cos^2\phi\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right].$$

$$+\left[\cos^2\phi\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\cos\phi\,\mathrm{cosec}^2\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}-\cos\phi\cot\theta\sin\phi\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\phi}+\cot\theta\sin^2\phi\frac{\partial}{\partial\theta}-\right.$$

$$\left.\cot\theta\sin\phi\cos\phi\frac{\partial^2}{\partial\phi\partial\theta}+\cot^2\theta\sin\phi\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}+\cot^2\theta\sin^2\phi\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]+\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\cot^2\theta\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

$$=\frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]+\mathrm{cosec}^2\theta\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

অর্থাৎ $$\hat{L}^2=-\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\mathrm{cosec}^2\theta\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right] \qquad \ldots\ldots 10.29$$

(উপরের গণনা থেকে আপনি সংকারকের গুণের প্রক্রিয়াটি বুঝতে পারবেন।)

10.3.2 সংকারকের ধর্ম

কোয়ান্টাম বলবিদ্যার ব্যবহৃত কয়েকটি সংকারক সম্বন্ধে আগের অনুচ্ছেদে জেনেছেন। এবার এগুলির ধর্ম সম্বন্ধে আলোচনা করা যাক। কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় সনাতন গতিবিদ্যার প্রতিটি ভৌত রাশিই এক একটি সংকারক দ্বারা প্রকাশ করা যায়। এই সংকারকগুলি রৈখিক (linear) অর্থাৎ এগুলির নিম্নোক্ত কয়েকটি ধর্ম থাকে :

1. যদি $\hat{A}$ একটি রৈখিক সংকারক, $f(x)$ একটি অপেক্ষক এবং c একটি ধ্রুবক হয় তবে

$$\hat{A}[cf(x)]=c\hat{A}f(x) \qquad \ldots\ldots 10.30$$

অর্থাৎ $\hat{A}$ এবং C পরস্পর স্থান বিনিময় করলেও ফলের তারতম্য হয় না। এই শর্ত পালিত হলে $\hat{A}$ সংকারক ও c ধ্রুবক বিনিময় নিয়ম (commutation law) পালন করে বলা হয়।

উদাহরণ : ধরা যাক $\hat{A}=\frac{d}{dx}$, $c=5$, $f(x)=x^2+5x+6$

$$\hat{A}[cf(x)]=\frac{d}{dx}[5x^2+25x+30]=10x+25$$

আবার $c\hat{A}\,f(x)=5\frac{d}{dx}[x^2+5x+6]=5(2x+5)=10x+25$ লক্ষ করুন রাশিদুটির মান সমান।

2. রৈখিক সংকারকগুলি বিচ্ছেদ নিয়ম (distributive law) পালন করে। $f_1(x)$ ও $f_2(x)$ দুটি অপেক্ষক এবং $\hat{A}$ রৈখিক সংকারক হলে $\hat{A}[f_1(x)+f_2(x)]=\hat{A}f_1(x)+\hat{A}f_2(x)$ 10.31

উদাহরণ : $\hat{A}=\frac{d}{dx}$, $f_1(x)=x^2+5x+6$, $f_2(x)=\sin x$ হলে

$$\hat{A}[f_1(x)+f_2(x)]=\frac{d}{dx}[x^2+5x+6+\sin x]=2x+5+\cos x$$

অন্যদিকে, $\hat{A}\,f_1(x)+\hat{A}f_2(x)=\frac{d}{dx}[x^2+5x+6]+\frac{d}{dx}\sin x=2x+5+\cos x$ অর্থাৎ এক্ষেত্রে 3.31 সূত্র প্রতিপালিত হয়েছে।

3. রৈখিক সংকারকগুলি সংযোগ নিয়মও (associative law) পালন করে, অর্থাৎ $\hat{A}$ ও $\hat{B}$ রৈখিক সংকারক হলে $\hat{A} \pm \hat{B}$ ও রৈখিক সংকারক হয়।

4. দুটি রৈখিক সংকারকের যোগফল বিনিময় নিয়ম পালন করে। অর্থাৎ $\hat{A}$ ও $\hat{B}$ রৈখিক সংকারক হলে $\hat{A} + \hat{B} = \hat{B} + \hat{A}$। কিন্তু দুই রৈখিক সংকারকের গুণফল বিনিময় নিয়ম পালন করতেও পারে আবার নাও করতে পারে। $(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})$ রাশিটিকে $\hat{A}$ ও $\hat{B}$ সংকারকের বিনিময়-বন্ধনী (commentator bracket) বলা হয় এবং $[\hat{A}, \hat{B}]$ রূপে লেখা হয়। দুটি উদাহরণ থেকে আপনি বুঝতে পারবেন যে এর মান শূন্য অথবা অ-শূন্য দুই-ই হতে পারে।

ধরা যাক, $\hat{A} = \frac{\partial}{\partial x}, \hat{B} = y, f(x) = x^2$

$$\hat{A}\hat{B} f(x) = \frac{\partial}{\partial x}[y.x^2] = 2xy$$

$$\hat{B}\hat{A} f(x) = y\frac{\partial}{\partial x}x^2 = 2xy$$

সুতরাং $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$, অর্থাৎ $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$

এবার ধরুন $\hat{A} = \frac{\partial}{\partial x}, \hat{B} = x, f(x) = x^2$

$$\hat{A}\hat{B} f(x) = \frac{\partial}{\partial x}[x.x^2] = 3x^2$$

$$\hat{B}\hat{A} f(x) = x\frac{\partial}{\partial x}[x^2] = 2x^2$$

সুতরাং $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$ এবং $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$।

আপনি আগেই দেখেছেন যে কোয়ান্টাম বলবিদ্যার শ্রোডিংগার শৈলীতে বিভিন্ন ভৌত রাশিকে এক একটি সংকারক দিয়ে নির্দেশিত করা হয়। কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় ব্যবহৃত সংকারকগুলির বিনিময় নিয়ম সম্বন্ধে কিছুটা আলোচনা করা যাক।

(i) $$[\hat{x}, \hat{p}_x]\psi = \left[\hat{x}, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right]\psi$$

$$= \frac{\hbar}{i}\left[x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}x\right]\psi$$

$$= \frac{\hbar}{i}\left[x\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi - x\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]$$

$$= i\hbar\psi$$

অর্থাৎ $[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$। অনুরূপভাবে $[\hat{y}, \hat{p}_y] = [\hat{z}, \hat{p}_z] = i\hbar$ …… 10.32

আপনি গণনা করে দেখতে পারেন যে

$$[\hat{x}, \hat{p}_y] = [\hat{y}, \hat{p}_z] = [\hat{z}, \hat{p}_x] = [\hat{x}, \hat{p}_z] = [\hat{y}, \hat{p}_x] = [\hat{z}, \hat{p}_y] = 0$$

অর্থাৎ $\hat{r}$ ও $\hat{p}$ ভেক্টর সংকারক দুটির একই দিকের উপাংশগুলি বিনিময় নিয়ম পালন না করলেও ভিন্ন দিকের উপাংশগুলি ঐ নিয়ম পালন করে।

(ii)
$$[\hat{t}, \hat{E}]\psi = \left[\hat{t}, i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right]\psi$$
$$= i\hbar\left[t\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}t\right]\psi$$
$$= i\hbar\left[t\frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi - t\frac{\partial \psi}{\partial t}\right]$$
$$= -i\hbar\psi$$

অর্থাৎ $[\hat{t}, \hat{E}] = -i\hbar$ 10.33

এর থেকে বোঝা যায় যে সময় $\hat{t}$ ও মোটশক্তি $\hat{E}$ সংকারক দুটি বিনিময় নিয়ম পালন করে না।

5. **হার্মিশিয়ান সংকারক :** কোনো ভৌতরাশির কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় প্রত্যাশিত মান তার অসংখ্য পরিমাপের গড় মানকে নির্দেশ করে যা একই অবস্থার ওপর অসংখ্য পরিমাপের গড় বা অসংখ্য সদৃশ আইগেন অবস্থার ওপর ঐ ভৌতরাশির পরিমাপের গড়। যে সকল ভৌতরাশির সংকারকের প্রত্যাশিত মান বাস্তব হয় তাদেরকে হার্মিশিয়ান সংকারক বলে। অর্থাৎ সংকারক কোনো ভৌতরাশিকে চিহ্নিত করলে তার প্রত্যাশিত মান সংজ্ঞানুসারে —

$$< \alpha > = \int \psi^* \hat{\alpha} \psi \, d\tau$$

এই সমীকরণের কাল্পনিক অনুবন্ধী

$$< \alpha >^* = \{\int \psi^* \hat{\alpha} \psi \, d\tau\}^* = \int \psi \hat{\alpha}^* \psi^* \, d\tau$$

প্রত্যাশিত মান বাস্তব হওয়ার শর্ত

$$\int \psi^* \hat{\alpha} \psi \, d\tau = \int \psi \hat{\alpha}^* \psi^* \, d\tau$$

উদাহরণস্বরূপ ভরবেগের x উপাংশ p_x-এর সংকারক রূপ $\hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$

সুতরাং $< p_x > = -\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \hat{p}_x \chi \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \left(-i\hbar\frac{\partial x}{\partial x}\right) dx$ [ψ ও x দুটি প্রমাণীকরণ তরঙ্গকার]

$$= -i\hbar\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \frac{\partial \chi}{\partial x} dx = -i\hbar\,[\psi^* \chi]_{-\infty}^{+\infty} + i\hbar\int \chi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} dx$$

$= \int \chi \hat{p}_x^* \psi^* \, dx$ সুতরাং $\hat{p}_x$ একটি হার্মিশিয়ান সংকারক।

6. **প্যারিটি সংকারক ঃ** প্যারিটি সঙ্কারক বিভিন্ন তরঙ্গ আপেক্ষকের ক্ষেত্রে প্যারিটি সঙ্কারকের ধারণা সম্পূর্ণরূপে কোয়ান্টাম বলবিদ্যার অধীন। কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় প্যারিটি একটি ভৌত রাশি যাহা হ্যামিল্টনীয় সঙ্কারকের মূলবিন্দুর স্থানান্তর সাপেক্ষে প্রতিফলনের প্রতিসাম্যের ওপর নির্ভরশীল অর্থাৎ যে প্রতিফলন প্রক্রিয়ায় x, y, z পরিবর্তিত হয়ে $-x, -y, -z$ হয়। প্যারিটি সঙ্কারককে $\hat{p}$ দ্বারা নির্দেশ করলে

$$\hat{p}\psi(\vec{r}) = \psi(-\vec{r})$$

ত্রিমাত্রিক হ্যামিল্টনীয় সঙ্কারক

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r})$$

এখানে ∇^2 প্রতিফলনে অপরিবর্তিত থাকে। সেক্ষেত্রে $V(\vec{r})$ যদি $\vec{r}$ হইতে $-\vec{r}$ অপরিবর্তিত থাকে সেক্ষেত্রে

$$\hat{H}(-\vec{r}) = \hat{H}(\vec{r})$$

সময় নিরপেক্ষ শ্রোডিংগার সমীকরণে প্যারিটি সঙ্কারক $\hat{p}$ ক্রিয়া করলে লেখা যায়—

$$\hat{p}\hat{H}(\vec{r})\psi(\vec{r}) = \hat{p}E\psi(\vec{r})$$

যেহেতু E ধ্রুবক, এবং $\hat{H}$ অপরিবর্তিত থাকে

$$\therefore \quad H(\vec{r})\psi(-\vec{r}) = E\hat{p}\,\psi(\vec{r}) = E\psi(-\vec{r})$$

সুতরাং $\psi(\vec{r})$ এবং $\psi(-\vec{r})$ একযোগে হ্যামিল্টনীয় সঙ্কারকের আইগেন আপেক্ষক এবং উভয় ক্ষেত্রেই শক্তির আইগেন মান E যেহেতু এই আইগেন আপেক্ষক দুটি অপজাত নয়, সুতরাং $\hat{p}\psi(\vec{r}) = \psi(-\vec{r}) = \lambda\psi(\vec{r})$ লেখা যায়। $\therefore$ আর একবার $\hat{p}$-এর ক্রিয়ার দ্বারা পাই

$$\hat{p}\psi^2(\vec{r}) = \hat{p}.\hat{p}\psi(\vec{r}) = \hat{p}\lambda\psi(-\vec{r}) = \lambda^2\psi(\vec{r})$$

কিন্তু $\hat{p}^2\psi(\vec{r}) = \hat{p}.\hat{p}\psi(\vec{r}) = \hat{p}\psi(-\vec{r}) = \psi(\vec{r})$

এই দুই সমীকরণ তুলনা করে পাই $\lambda^2\psi(\vec{r}) = \psi(\vec{r})$

$$\therefore \quad \lambda^2 = 1 \quad \text{বা,} \quad \lambda = \pm 1$$

$\lambda = +1$ হলে প্রতিফলনের ফলে তরঙ্গ আপেক্ষক অপরিবর্তিত থাকে, এক্ষেত্রে তরঙ্গটি যুগ্ম প্যারিটি যুক্ত বলা হয়। অপর ক্ষেত্রে, $\lambda = -1$ হলে,

$\psi(-\vec{r}) = -\psi(\vec{r})$ অর্থাৎ প্রতিফলনে তরঙ্গ আপেক্ষকের চিহ্ন পরিবর্তিত হয় ও এক্ষেত্রে $\psi(\vec{r})$ এর অযুগ্ম প্যারিটি আছে বলা হয়। কোনো তরঙ্গে নির্দিষ্ট প্যারিটি থাকার শর্ত প্রতিফলনের ক্রিয়ায় হ্যামিল্টনীয় সঙ্কারক অপরিবর্তিত থাকা।

10.3.3 কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় সংকরণের তাৎপর্য

সংকারক সম্বন্ধে পূর্বের আলোচনা থেকে আপনার মনে হতে পারে যে সংকরণ প্রক্রিয়াটি কেবলমাত্র একটি গানিতিক পদ্ধতি। এই অনুচ্ছেদে আমরা সংকরণ প্রক্রিয়ার ভৌত তাৎপর্যটি বোঝার চেষ্টা করব। ধরুন $\hat{A}$ সংকারকটি তরঙ্গ অপেক্ষক ψ ওপর ক্রিয়া করার ফল হয় $\alpha\psi$, অর্থাৎ $\hat{A}\psi = \alpha\psi$। এখানে $\hat{A}\psi$ বলতে যে সংকরণ বোঝায় তার ভৌত অর্থ ψ অপেক্ষকটি যে বস্তুকণা বা বস্তুতন্ত্রের তরঙ্গ অপেক্ষক তার সেই ভৌত ধর্মটি (A) নির্ণয়ের চেষ্টা করা, যেটি $\hat{A}$ সংকারক দ্বারা নির্দেশিত হয়। এবং এর ফলে A রাশির যে মান নির্ণীত হয় তা হল $\hat{A}$ সংকারকের আইগেনমান α।

অনুরূপভাবে, $\hat{B}\hat{A}\psi$ সংকরণের অর্থ প্রথমে বস্তুতন্ত্রের A রাশি এবং তারপর B রাশির মান নির্ণয়ের চেষ্টা করা। আপনি নিশ্চয়ই আন্দাজ করতে পারছেন যে $\hat{A}\hat{B}\psi$ সংকরণটি প্রথমে বস্তুতন্ত্রের B রাশির এবং তারপর A রাশির মান নির্ণয়ের চেষ্টা বোঝাবে। কিন্তু আপনি আগের এককে অনিশ্চয়তার নীতি প্রসঙ্গে জেনেছেন যে A ও B যদি অনুবন্ধী (canonically conjugate) ভৌতরাশি হয় তবে যে কোনও একটি রাশির পরিমাপ বস্তুতন্ত্রটিকে এমনভাবে প্রভাবিত করে যে অন্য রাশিটির নির্ণীত মান তার দ্বারা পরিবর্তিত হয়। এর ফলে $\hat{B}\hat{A}\psi$ ও $\hat{A}\hat{B}\psi$, এই দুই সংকরণের ফল এক হয় না। $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$, এই অসমীকরণ দ্বারা $\hat{A}\hat{B}$ ও $\hat{B}\hat{A}$ এই দুই সংকারকের আইগেনমানের পার্থক্যই বোঝানো হয়।

এবার একটি অনুশীলনী।

অনুশীলনী—3

(i) ত্রিমাত্রিক নির্দেশাঙ্কে ভরবেগ $\hat{p}$ এর সংকারকটি লিখুন।

(ii) $\hat{L}_x\hat{L}_y$ ও $\hat{L}_y\hat{L}_x$ এর মান নির্ণয় করুন এবং $[\hat{L}_x, \hat{L}_y]$ এর মান শূন্য কিনা তা দেখান।

10.4 সম্ভাব্যতার প্রবাহ ঘনত্ব

10.2.1 ও 10.2.2 অনুচ্ছেদে আপনি দেখেছেন যে তরঙ্গ অপেক্ষক $\psi(r^{-1}, t)$ হলে $\psi^*\psi$ বা $|\psi|^2$ উদ্দিষ্ট বস্তুকণার সম্ভাব্যতা ঘনত্ব নির্দেশ করে। যেহেতু বস্তুকণাটি সমগ্র সম্ভবপর আয়তন τ-এর মধ্যে অবশ্যই থাকবে, ঐ আয়তনের ওপর সম্ভাব্যতা ঘনত্বের সমাকলের মান 1 হবে, অর্থাৎ

$$\int_\tau \psi^*\psi\delta\tau = \int_\tau |\psi|^2 d\tau = 1$$

S তল দ্বারা আবদ্ধ কোন সীমিত আয়তন V এর মধ্যে বস্তুকণার থাকার সম্ভাব্যতা যদি সময়ের সঙ্গে পরিবর্তিত হয় তবে ঐ পরিবর্তনের হার

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \psi^*\psi\, d\tau = \int_V \left(\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi + \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)d\tau \qquad \ldots\ldots 10.34$$

এখন 10.9(a) সমীকরণ থেকে,

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi$$

বা, $$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m}\nabla^2\psi - \frac{i}{\hbar}V\psi$$

এর অনুবন্ধী সমীকরণটি হল $\frac{\partial\psi^*}{\partial t} = -\frac{i\hbar}{2m}\nabla^2\psi^* + \frac{i}{\hbar}V\psi^*$ (V বাস্তব রাশি, তাই $V^* = V$) আগের দুটি সমীকরণের প্রথমটির দুদিকে ψ^* এবং দ্বিতীয়টির দুদিকে ψ দিয়ে গুণ করে :

$$\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m}\psi^*\nabla^2\psi - \frac{i}{\hbar}\psi^*V\psi$$

$$\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t} = \frac{-i\hbar}{2m}\psi\nabla^2\psi^* + \frac{i}{\hbar}\psi V\psi^*$$

যোগ করে, $\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} + \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m}(\psi^*\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\psi^*)$, (কেননা $\psi^*V\psi = \psi V\psi^*$)

কিন্তু $\nabla(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) = \nabla\psi^*\nabla\psi + \psi^*\nabla^2\psi - \nabla\psi\nabla\psi^* - \psi\nabla^2\psi^*$

$$= \psi^*\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\psi^*$$

সুতরাং $\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} + \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m}\nabla(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*)$

10.34 থেকে $\frac{\partial}{\partial t}\int_V \psi^*\psi d\tau = \frac{i\hbar}{2m}\int_V \nabla(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*)d\tau$

বা, $$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, d\tau = -\int_V \nabla.\vec{j}\,d\tau \qquad \text{...... 10.35}$$

যেখানে $\rho = \psi^*\psi$ = সম্ভাব্যতা ঘনত্ব এবং $\vec{j} = \frac{i\hbar}{2m}(\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi) = \left(\psi^*\frac{\hbar}{im}\nabla\psi\right)$এর বাস্তব মান।

ডাইভারজেন্স উপপাদ্য ব্যবহার করে 10.35 সমীকরণের ডানদিকটিকে আয়তন সমাকলের পরিবর্তে তল সমাকল হিসাবে লিখলে 10.35 সমীকরণের রূপ হয় :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho d\tau = -\int_V \vec{j}.\vec{ds} \qquad \text{...... 10.36}$$

এই সমীকরণ থেকে আপনি নিশ্চয়ই বুঝতে পারছেন যে $\vec{j}$ ভেক্টরটি সম্ভাব্যতার প্রবাহ ঘনত্ব নির্দেশ করছে। কেননা সমীকরণের বাম দিকটি V আয়তনের মধ্যে মোট সম্ভাব্যতার বৃদ্ধির হার, যা S তলের মধ্যে দিয়ে সম্ভাব্যতার বর্হিমুখী প্রবাহের বিপরীত।

10.35 সমীকরণটিকে যে কোনও অতিক্ষুদ্র আয়তনের ক্ষেত্রে প্রয়োগ করা যায়। অতিক্ষুদ্র আয়তন $\delta\tau$ এর জন্য

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} . \delta \tau = - \nabla . \vec{J} \, \delta \tau$$

অথবা $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla . \vec{J} = 0$$

এই সমীকরণটিকে সম্ভাব্যতার সন্ততার সমীকরণ (equation of continuity) বলা যায়।

এই অনুচ্ছেদে আপনি লক্ষ করলেন যে তরঙ্গ অপেক্ষক ψ ও তার অনুবন্ধী অপেক্ষক ψ^* এর মাধ্যমে সম্ভাব্যতার প্রবাহকে প্রকাশ করা যায়। এ থেকে তরঙ্গ অপেক্ষকের আর একটি ভৌত তাৎপর্যের পরিচয় পাওয়া যায়।

অনুশীলনী 4 : তরঙ্গরাশি $\psi(x) = A exp\,(-\sigma^2 x^2 / 2)\, expikx$ এর সম্ভাব্যতা ঘনত্ব ও প্রবাহ ঘনত্ব নির্ণয় করুন।

10.5 ভৌতরাশির প্রত্যাশিত মান (Expectation value)

10.2.3 অনুচ্ছেদে আমরা দেখেছি যে কোন একটি বস্তুকণা নির্দিষ্ট আয়তনের মধ্যে থাকার সম্ভাব্যতা তরঙ্গ-অপেক্ষকের সাহায্যে নির্ণয় করা যায়। অনিশ্চয়তার নীতি অনুযায়ী কোন বস্তুকণার অবস্থান বা অন্য কোন ভৌত রাশির মান কখনই সুনিশ্চিতরূপে নির্ণয় করা যায় না। কোন একটি ভৌত রাশি বার বার মাপার চেষ্টা করলে এক এক বার এক একটি মান পাওয়া যায়। তবে স্বতন্ত্রভাবে বহুবার রাশিটি মাপার চেষ্টা করলে সেটির একটি গড় মান পাওয়া যায়, যেটিকে আমরা ভৌতরাশিটির প্রত্যাশিত মান বলতে পারি, কোন বস্তুতন্ত্রের তরঙ্গ-অপেক্ষকটি জানা থাকলে তার সাহায্যে ঐ প্রত্যাশিত মান নির্ণয় করা যায়। দেখা যাক কীভাবে এটি করা সম্ভব।

ধরা যাক কোন একটি একমাত্রিক বস্তুতন্ত্রের তরঙ্গ-অপেক্ষক $\psi(x)$ বিভিন্ন প্রমাণীকৃত আইগেন-অপেক্ষক $u_1(x), u_2(x), u_3(x)$ প্রভৃতির রৈখিক যোগফল, অর্থাৎ

$$\psi(x) = \sum_n C_n u_n(x) \quad (C_n = \text{ধ্রুবক}) \qquad \ldots\ldots 10.38$$

কোন একটি সংকারক $\hat{A}$ যখন $u_n(x)$ এর ওপর ক্রিয়া করে তখন a_n আইগেনমান পাওয়া যায়। অর্থাৎ $\hat{A}\, u_n(x) = a_n u_n(x)$। এর ভৌত অর্থ এই যে, বস্তুতন্ত্রটি $u_n(x)$ অবস্থায় থাকলে A রাশিটির পরিমাপের ফল পাওয়া যায় a_n। $\psi(x)$ যদি প্রমাণীকৃত হয়, তবে

$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 = \sum_n |C_n|^2 = 1$ (কেননা $u_n(x)$ অপেক্ষকগুলি পরস্পর সমকৌণিক) এবং বস্তুতন্ত্রটি $u_n(x)$ অবস্থায় থাকার সম্ভাব্যতা

$$\begin{aligned} P_n &= \int_{-\infty}^{\infty} |C_n u_n(x)|^2 dx \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx \\ &= |C_n| \int_{-\infty}^{\infty} |u_n(x)|^2 dx \\ &= |C_n|^2 \quad (\text{কেননা } u_n \text{ তরঙ্গ-অপেক্ষকটি প্রমাণীকৃত}) \end{aligned} \qquad \ldots\ldots 10.39$$

$\hat{A}$ সংকারক যখন মিশ্র তরঙ্গ অপেক্ষক $\psi(x)$ এর ওপর ক্রিয়া করে তখন A রাশির প্রত্যাশিত মান

$$< a > = \Sigma a_n p_n = \Sigma a_n \mid C_n \mid^2 = \Sigma a_n C_n{}^* C_n \quad \text{(10.39 ব্যবহার করে)}$$

কিন্তু 10.38 থেকে $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\, U^*{}_n(x)dx = C_n \int_{-\infty}^{\infty} U_n U_n{}^* dx = C_n$ …… 10.40 (a)

এবং অনুরূপভাবে $\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\, u_n(x)dx = C_n{}^* \int_{-\infty}^{\infty} u_n{}^* u_n\, dx = C_n{}^*$ …… 10.40 (b)

$$\therefore \quad < a > = \Sigma a_n C_n{}^* C_n = \Sigma a_n C_n \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\, u_n(x)dx \qquad \text{(10.40 (b) ব্যবহার করে)}$$

যোগ ও সমাকলন চিহ্নের স্থানবিনিময় করে,

$$< a > = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \sum_n C_n a_n u_n(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \sum C_n \hat{A}\, u_n(x)\, dx$$

বা, $< a > = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\, \hat{A}\, \psi(x)\, dx$ (10.38 অনুযায়ী) …… 10.41

10.41 সূত্রটি ব্যবহার করে আমরা $\psi(x)$ অপেক্ষকের মান জানা থাকলে যে কোন ভৌতরাশি 'A' এর প্রত্যাশিত মান $< a >$ নির্ণয় করতে পারি।

10.5.1 এরানফেস্টের উপপাদ্য (Ehrenfest's Theorem)

এখন আমরা এই এককের শেষ অংশে এসে পৌঁছেছি। এ পর্যন্ত আপনি যা পড়লেন তাতে আপনার মনে হতে পারে যে কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় আমরা সনাতন বলবিদ্যার উপজীব্য ভৌত রাশিগুলিকেই ফিরে পাচ্ছি। সেক্ষেত্রে কোয়ান্টাম বলবিদ্যা ও সনাতন বলবিদ্যার নিয়মগুলির মধ্যে সামঞ্জস্য থাকা উচিত। এ বিষয়ে আপনি নিশ্চিত হতে পারেন যে সত্যই এ ধরনের সামঞ্জস্য রয়েছে এবং এর অন্যথা হলে 10.2 অনুচ্ছেদে উল্লিখিত সুসঙ্গতির নীতি লঙ্ঘিত হত।

প্রমাণ করা যায় যে 'সনাতন বলবিদ্যার কোন একটি সূত্রে যদি ভৌতরাশিগুলির পরিবর্তে সেগুলির প্রত্যাশিত মান বসানো যায় তাহলে সেটি কোয়ান্টাম বলবিদ্যা থেকে প্রাপ্ত প্রত্যাশিত মানগুলির সম্পর্কের সঙ্গে মিলে যায়।' ধরুন আপনি সনাতন বলবিদ্যায় পেয়েছেন

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Px}{m}$$

এখন যদি আপনি x এর পরিবর্তে $< x >$ এবং Px এর পরিবর্তে $< Px >$ লেখেন তাহলে আপনি পাবেন

$$\frac{d < x >}{dt} = \frac{< Px >}{m}$$

ঠিক এই সূত্রটিই কোয়ান্টাম বলবিদ্যা থেকে পাওয়া যায়।

সনাতন ও কোয়ান্টাম বলবিদ্যার সূত্রগুলির পারস্পরিক সম্পর্কের এই উপপাদ্যটিকে এরানফেস্টের উপপাদ্য বলা হয়।

এবার একটি অনুশীলনী।

অনুশীলনী —5

নীচের উক্তিগুলির সঙ্গে চারটি করে সম্ভাব্য বাক্যাংশ দেওয়া আছে। এগুলির মধ্যে কোনটি সঠিক তা স্থির করুন।

(i) যদি কিছু সংখ্যক বস্তুকণার তরঙ্গ অপেক্ষক $\psi(\vec{r}, t)$ হয় এবং একটি নির্দিষ্ট আয়তন V এর ওপর সমাকল $\int_V \nabla(\psi^* \nabla\psi - \psi\nabla\psi^*)\, dt$ এর মান শূন্য হয় তবে

(a) ঐ আয়তনের মধ্যে বস্তুকণা থাকতে পারে না

(b) ঐ আয়তনের মধ্যে সর্বত্র $\psi = \psi^* = 0$

(c) বস্তুকণাগুলি ঐ আয়তন থেকে নির্গত হতে পারে না কিন্তু অন্য বস্তুকণা ঐ আয়তনে প্রবেশ করতে পারে

(d) ঐ আয়তনের মধ্যে সর্বদা সমান সংখ্যক বস্তুকণা থাকবে।

(ii) প্রত্যাশিত মানের হিসাবে নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রের রূপ কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় হবে

(a) $\frac{d< x >}{dt} = \frac{< Px >}{m}$ (b) $\frac{d< Px >}{dt} = < Fx >$

(c) $< V_x > = \frac{d <x>}{dt}$ (d) $\frac{d < V_x >}{dt} = < f_x >$

(iii) *A* ভৌত রাশির প্রত্যাশিত মান (τ = সমগ্র সম্ভবপর আয়তন)

(a) $\int_\tau \psi^* \hat{A}\psi\, d\tau$ (b) $\int_\tau \psi^*\psi\, d\tau$ (c) $\hat{A} \int_\tau \psi^*\psi\, d\tau$

(d) $\int_\tau (\psi^*\hat{A}\psi - \psi\hat{A}\psi^*)d\tau$

10.6 সারাংশ

এই এককটিতে প্রথমেই শ্রোডিংগারের তরঙ্গ-সমীকরণের প্রত্যাশিত চরিত্রটি ব্যাখ্যা করা হয়েছে এবং পদার্থ-তরঙ্গের একটি রূপ কল্পনা করে তার সাহায্যে সময় নির্ভর তরঙ্গ সমীকরণটি একমাত্রিক ও ত্রিমাত্রিক ক্ষেত্রে

প্রতিষ্ঠিত করা হয়েছে। সময় নির্ভর সমীকরণ থেকে সময় এবং অবস্থান নির্দেশক স্থানাঙ্কগুলিকে পৃথক করে সময় নিরপেক্ষ শ্রোডিংগার সমীকরণটি পাওয়া গেছে। পদার্থ তরঙ্গের অপেক্ষক ψ নির্ণয় করাই শ্রোডিংগার সমীকরণ সমাধানের মূল লক্ষ্য। এই অপেক্ষকটির ভৌত তাৎপর্য ও কিছু গাণিতিক ধর্ম এখানে আলোচনা করা হয়েছে। এর মধ্যে আছে পদার্থের সম্ভাব্যতা-ঘনত্বের সঙ্গে ψ-এর সম্পর্ক।

শ্রোডিংগার সমীকরণের কোন একটি সমাধান পাওয়া গেলে তার যে কোনও গুণিতকও সমীকরণটির সমাধান হতে পারে। এজন্য তরঙ্গ অপেক্ষকের ধ্রুবক উৎপাদকটির মান এমন হওয়া উচিত যাতে অপেক্ষকটি নির্দিষ্ট কণা বা বস্তুতন্ত্রকেই নির্দেশ করে। প্রমাণীকরণ নামে অভিহিত এই পদ্ধতিটিও এখানে ব্যাখ্যা করা হয়েছে।

শ্রোডিংগার পদ্ধতিতে আমরা ভৌত রাশির নির্দেশক কিছু গাণিতিক সংকারক ব্যবহার করে থাকি। এই সংকারকগুলি ও তাদের ব্যবহারের সঙ্গে আপনি পরিচিত হয়েছেন। সবশেষে তরঙ্গ-অপেক্ষকের সঙ্গে সম্ভাব্যতার প্রবাহ ঘনত্ব ও কোন ভৌতরাশির প্রত্যাশিত মানের সম্পর্কটি আলোচনা করা হয়েছে।

10.7 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

1. শ্রোডিংগারের একমাত্রিক সময় নির্ভর তরঙ্গ সমীকরণটি প্রতিষ্ঠা করুন এবং এটিকে হ্যামিল্টনীয় সংকারকের মাধ্যমে প্রকাশ করুন।

2. শ্রোডিংগারের ত্রিমাত্রিক সময় নির্ভর সমীকরণটি প্রতিষ্ঠা করুন। এই সমীকরণ থেকে শ্রোডিংগারের সময় নিরপেক্ষ সমীকরণটি কীভাবে পাওয়া যায়?

3. শ্রোডিংগারের একমাত্রিক সময় নিরপেক্ষ সমীকরণটি কীভাবে পাওয়া যায়? আলোচ্য বস্তুতন্ত্রটি বিভিন্ন শক্তি-অবস্থায় থাকতে পারে, এটি ধরে নিয়ে শ্রোডিংগারের সমীকরণের সাধারণ সমাধানটি লিখুন।

4. তরঙ্গ অপেক্ষকের বিশেষ গাণিতিক ধর্মগুলি লিখুন। এই অপেক্ষকের ভৌত তাৎপর্য ব্যাখ্যা করুন।

5. তরঙ্গ অপেক্ষকের প্রমাণীকরণ বলতে কী বোঝায়?

6. সংকারক, আইগেন অপেক্ষক ও আইগেনমান কাকে বলে উদাহরণসহ বুঝিয়ে দিন। কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় রৈখিক ভরবেগ, মোটশক্তি, গতিশক্তি ও কৌণিক ভরবেগ নির্দেশ করতে কোন সংকারকগুলি ব্যবহৃত হয়?

7. রৈখিক সংকারক কাকে বলে? উদাহরণসহ রৈখিক সংকারকের সংজ্ঞাপক ধর্মগুলি ব্যাখ্যা করুন।

8. সংকারকের বিনিময়-নিয়ম কাকে বলে? কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় ব্যবহৃত দুটি সংকারকের বিনিময়-নিয়ম পালন না করার উদাহরণ দিন এবং তার তাৎপর্য ব্যাখ্যা করুন।

9. প্রমাণ করুন যে $\frac{i\hbar}{2m}(\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi)$ রাশিটি বস্তুর সম্ভাব্যতার প্রবাহ ঘনত্ব নির্দেশ করে।

10. কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় কীভাবে কোন ভৌতরাশির প্রত্যাশিত মান গণনা করা যায়? সনাতন বলবিদ্যার সূত্রের সঙ্গে প্রত্যাশিত মানের হিসাবে কোয়ান্টাম বলবিদ্যা থেকে প্রাপ্ত সূত্র অভিন্ন—উদাহরণসহ বুঝিয়ে দিন।

11. তরঙ্গ অপেক্ষকের সমকৌণিকতা বলিতে কি বোঝেন? এই ধর্মটি প্রমাণ করুন।

12. স্থির অবস্থা বলিতে কি বোঝেন? স্থির অবস্থা পাওয়ার শর্ত কি?

10.8 উত্তরমালা

অনুশীলনী

1. (ক) ভুল, (খ) সঠিক, (গ) সঠিক

2. (ক) (i) b, (ii) a, (iii) c

(খ) (a) ধরুন পরমাণুটি তরঙ্গ অপেক্ষক $\psi = C_0\,\psi_0 + c_1\psi_1$। আপনারা দেখেছেন শক্তি সংকারকের আইগেন অপেক্ষকগুলি সমকৌনিক অর্থাৎ $\int \psi^* \psi\, d\tau = 1$।

বা $\int (C_0{}^*\psi_0{}^* + C_1{}^*\psi_1{}^*)\,(C_0\psi_0 + C_\phi\psi_1)\,d\tau = 1$

$|C_0|^2 + |C_1|^2 = 1$

কিন্তু $|C_0|^2 = 0{\cdot}4$ এবং $|C_1|^2 = 0{\cdot}6$

বা, $C_0 = \sqrt{0{\cdot}4}$ এবং $|C_1| = \sqrt{0{\cdot}6}$

অর্থাৎ $\psi = \sqrt{{\cdot}4}\;\psi_0 + \sqrt{{\cdot}6}\;\psi$।

(b) গড়শক্তির মান $< E > \; = \int \psi^* \hat{E} \psi\, d\tau$

$$= |C_0|^2 E_0 + |C_1|^2 E$$

$$= 0{\cdot}4\, E_0 + 0{\cdot}6E।$$

3. (i) $-i\hbar\nabla$

(ii)
$$\hat{L}_x\hat{L}_y = -\hbar^2\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$= -\hbar^2\left(y\frac{\partial}{\partial x} + yz\frac{\partial^2}{\partial z\partial x} - yx\frac{\partial^2}{\partial z^2} - z^2\frac{\partial^2}{\partial y\partial x} + zx\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\right)$$

$$\hat{L}_x\hat{L}_y = -\hbar^2\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(y\frac{\partial}{\partial z} - x\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$= -\hbar^2\left(zy\frac{\partial^2}{\partial x\partial z} - z^2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} - xy\frac{\partial^2}{\partial z^2} + x\frac{\partial}{\partial y} + xz\frac{\partial^2}{\partial z\partial y}\right)$$

$$\therefore \quad \left[\hat{L}_x, \hat{L}_y\right] = \hat{L}_x\hat{L}_y - \hat{L}_y\hat{L}_x$$

$$= -\hbar^2\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$= i\hbar.\frac{\hbar}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$$= i\hbar\hat{L}_z$$

সুতরাং $\left[\hat{L}_x, \hat{L}_y\right]$ এর মান শূন্য নয়।

4. $\psi(x) = Ae^{-\sigma^2x^2/2}\, e^{ikn.}$

$\psi(x) = Ae^{-\sigma^2x^2/2}\, e^{-ikx.}$

$\frac{\partial\psi}{\partial x} = A(ik - \sigma^2 x)e^{-\sigma^2x^2/2}\, e^{ikx}$

$\frac{\partial\psi}{\partial x} = A(-ik - \sigma^2 x)\, e^{-\sigma^2x^2/2}\, e^{-ikx}$

এখন সম্ভাব্যতা ঘনত্ব $P = |\psi(x)|^2 = |A|^2 e^{-\sigma^2x^2}$

সম্ভাব্যতার প্রবাহ ঘনত্ব $Jx \quad = \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$

$$= \frac{i\hbar}{2m}|A|^2\left(-ik - \frac{\sigma^2}{x} - ik + \frac{\sigma^2}{x}\right)e^{-\sigma^2x^2}$$

$$= \frac{\hbar k}{m}|A|^2 e^{-\sigma^2x^2}$$

এখানে $\frac{\hbar k}{m} = \frac{p}{m} = V$ বেগ   সাধারণ ভাবে $J = PV$.

5. (i) d, (ii) b, (iii) a

সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

প্রশ্নগুলির উত্তর যে অনুচ্ছেদে পাওয়া যাবে তার ক্রমিক সংখ্যাগুলির উল্লেখ করা হল।

1. 10.2, 10.2.1
2. 10.2.1, 10.2.2
3. 10.2.2
4. 10.2.3
5. 10.2.4

6. 10.3, 10.3.1

7. 10.3.2

8. 10.3.2

9. 10.4

10. 10.5, 10.5.1

11. 10.2.5

12. 10.2.1

একক 11 ☐ শ্রোডিংগার সমীকরণের প্রয়োগ-মুক্ত অবস্থা

গঠন ঃ

11.1 প্রস্তাবনা

উদ্দেশ্য

11.2 মুক্ত বস্তুকণার গতি সমীকরণ

11.3 আয়তাকার বিভব প্রাচীর

11.4 বিভব সোপান

11.5 তেজস্ক্রিয় পরমাণুর নিউক্লিয়াস থেকে আলফা কণার নির্গমন

11.6 সারাংশ

11.7 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

11.8 উত্তরমালা

11.1 প্রস্তাবনা

দশম এককে শ্রোডিংগারের তরঙ্গ সমীকরণের সঙ্গে আপনার পরিচয় ঘটেছে। এবার বিভিন্ন ভৌত সমস্যার সমাধানে ঐ সমীকরণটি ব্যবহার করার পালা।

যখন কোন বস্তুকণার ওপর বাইরে থেকে কোন বল কাজ করে না, তখন আমরা বলি সেটি মুক্ত অবস্থায় আছে। আপনি জানেন কণাটি কোন বিভবক্ষেত্রে থাকলে বিভবের নতির পূর্বে একটি বিয়োগ চিহ্ন যোগ করে কণার ওপর প্রযুক্ত বল পাওয়া যায়। এই বল শূন্য হওয়ার অর্থ বিভবের মান সর্বত্র সমান হওয়া। বিভবের শূন্যটি আমরা ইচ্ছামত ধরে নিতে পারি তাই মুক্ত বস্তুকণার ক্ষেত্রে $V = 0$ ধরে নেওয়া যায়। অবশ্য বিভবক্ষেত্রের কোন অংশে বিভবের মান স্থির হলেও শূন্য নাও হতে পারে, এমনকি মোট শক্তি E অপেক্ষা V-এর মান বেশীও হতে পারে। তবে সব অবস্থাতেই আমরা শ্রোডিংগারের সময়-নিরপেক্ষ সমীকরণটি লিখতে পারব এবং তার উপযুক্ত সমাধান নির্ণয় করতে পারব। আপনি লক্ষ্য করবেন, যে কোন কোন ক্ষেত্রে আমরা এমন ফল পাব যা সনাতন বলবিদ্যার ধারণার বিরোধী।

শ্রোডিংগার সমীকরণের প্রয়োগের ওপর ভিত্তি করে গঠিত এই এককটি আপনাকে জটিলতর ক্ষেত্রে, অর্থাৎ কণার গতি যখন মুক্ত নয়, বরং বাইরে থেকে প্রযুক্ত বলের অধীন, সে অবস্থায় সমীকরণটি প্রয়োগ করতে উৎসাহ যোগাবে। আপনি ক্রমশ উপলব্ধি করবেন যে কোয়ান্টাম বলবিদ্যা নিছক গানিতিক ক্রিয়া নয়, বরং ভৌত অবস্থার বিশ্লেষণে এটি একটি শক্তিশালী গাণিতিক পদ্ধতি।

উদ্দেশ্য

- শ্রোডিংগার সমীকরণের প্রয়োগ সম্বন্ধীয় এই এককটি পড়ার পর আপনি যে কাজগুলি করতে পারবেন সেগুলি হল ঃ
- একটি মুক্ত বস্তুকণার তরঙ্গ-অপেক্ষকটি নির্ণয় করতে পারবেন এবং তার সঙ্গে বস্তুকণার ভরবেগকে সম্পর্কিত করতে পারবেন।
- একমাত্রিক আয়তাকার বিভব প্রাচীরে আপতিত বস্তুকণার সঞ্চারণ ও প্রতিফলনের গুণাঙ্ক নির্ণয় করতে পারবেন।
- একমাত্রিক বিভব সোপানে কোন বস্তুকণা আপতিত হলে বস্তুকণার শক্তির বিভিন্ন মানের জন্য তার সঞ্চারণ ও প্রতিফলনের গুণাঙ্ক নির্ধারণ করতে পারবেন।
- নিউক্লিয়াস থেকে আলফা কণার নির্গমনের প্রক্রিয়াটি ব্যাখ্যা করতে পারবেন এবং কুলম্ব বিভব প্রাচীর ভেদ করে আলফা কণার নির্গমনের সম্ভাব্যতার একটি মোটামুটি মান বার করতে পারবেন।

11.2 মুক্ত বস্তুকণার গতি সমীকরণ

ধরা যাক m ভরের কোন বস্তুকণা x-অক্ষ বরাবর মুক্ত গতিতে চলনশীল, অর্থাৎ এটির ওপর কোন বল ক্রিয়া করছে না এবং বিভব V-এর মান শূন্য বলে ধরা যায়। এই কণাটির জন্য শ্রোডিংগারের সময় নিরপেক্ষ সমীকরণটি হল ঃ

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi = 0 \qquad \ldots\ldots 11.1$$

যেখানে $\psi(x)$ কণাটির একমাত্রিক তরঙ্গ অপেক্ষক।

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \text{ লিখলে, } \frac{d^2\psi}{dx^2} = -k^2\psi$$

যার সমাধান $\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ 11.2

আপনি আগের এককে দেখেছেন যে সময় নির্ভর সম্পূর্ণ তরঙ্গ অপেক্ষকটি হল

$$\psi(x, t) = \psi(x). e^{-iEt/\hbar}$$

$$= \psi(x). e^{-i\omega t} \quad (\text{যেখানে } \omega = E/\hbar)$$

$\therefore$ 11.2 থেকে, $\psi(x, t) = (Ae^{ikx} + Be^{-ikx})\, e^{-i\omega t}$

$$= Ae^{i(kx-\omega t)} + Be^{-i(kx+\omega t)}$$

আপনি জানেন যে $e^{i(kx-\omega t)}$ ও $e^{-i(kx+\omega t)}$ রাশি দুটি যথাক্রমে x অক্ষের দিক বরাবর ও x-অক্ষের বিপরীত দিক বরাবর তরঙ্গগতি বোঝায়। আমরা যদি কণাটির গতি x অক্ষের দিক বরাবর বলে ধরে নিই, তবে $B = 0$ ধরতে হবে এবং $\psi(x, t)$ এর রাশিমালাটি হবে $\psi(x, t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$ …… 11.3

প্রমাণীকরণ ঃ ওপরের তরঙ্গ অপেক্ষকটির প্রমাণীকরণের চেষ্টা করা যাক। কণাটির x থেকে $x + dx$ স্থানাঙ্কের মধ্যে অবস্থান করার সম্ভাব্যতা, t সময়ে

$$\begin{aligned} P(x)\,dx &= \psi^*(x, t)\psi(x, t)\,dx \\ &= Ae^{-i(kx-\omega t)}.\,Ae^{i(kx-\omega t)}\,dx \\ &= A^2 dx \end{aligned}$$

যেহেতু কণাটি $x = -\infty$ থেকে $x = +\infty$ সীমার মধ্যে যে কোন অবস্থানে থাকতে পারে,

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = 1$$

বা, $$A^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx = 1$$

ওপরের সমীকরণে সমাকলটির মান অসীম, সুতরাং এর থেকে A ধ্রুবকের কোন নির্দিষ্ট মান পাওয়া সম্ভব নয়। ফলে 11.3 এর তরঙ্গ অপেক্ষকটির প্রমাণীকরণও সম্ভব নয়।

ভরবেগের আইগেনমান ঃ আমরা জানি ভরবেগের সংকারক $\hat{p}_x = -i\hbar \dfrac{\partial}{\partial x}$। এটি $\psi(x, t)$ এর ওপর ক্রিয়া করলে কোন আইগেনমান পাওয়া যায় কি না তা দেখা যাক।

$$\begin{aligned} \hat{p}_x \psi(x, t) &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} Ae^{i(kx-\omega t)} \\ &= -i\hbar.\, ik.\, Ae^{i(kx-\omega t)} \\ &= \hbar k \psi \qquad \text{…… 11.4} \end{aligned}$$

অর্থাৎ $\psi(x, t)$ হল $\hat{p}_x$ সংকারকের একটি আইগেন-অপেক্ষক এবং এটির জন্য $\hat{p}_x$ সংকারকের আইগেনমান $\hbar k$, যা $\hbar \sqrt{\dfrac{2mE}{\hbar^2}} = \sqrt{2mE}$ এর সমান। এটি অবশ্য প্রত্যাশিত কেননা স্থিতিশক্তির মান শূন্য হওয়ায় E রাশিটি গতিশক্তি $\dfrac{p^2}{2m}$ এর সমান।

11.3 আয়তাকার বিভব-প্রাচীর (Rectangular Potential Barrier)

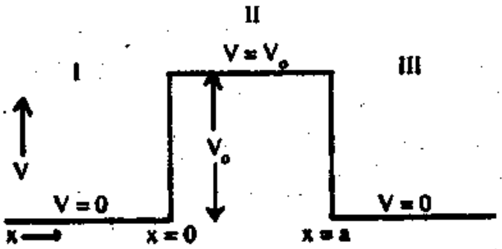
আগের অনুচ্ছেদটিতে আমরা বিভবের মান সর্বত্র শূন্য ধরেছিলাম। কিন্তু এবার ধরা যাক x-অক্ষের দিক বরাবর একমাত্রিক গতিসম্পন্ন বস্তুকণাটি $x = 0$ থেকে $x = a$ সীমার মধ্যে অবস্থিত একটি অঞ্চলের ওপর আপতিত হল, যেখানে বিভবের মান $V_0(\neq 0)$। এই অঞ্চলটিকে আমরা বিভব-প্রাচীর বলি।

চিত্র 11.1, থেকে আপনি বিভব প্রাচীরের চরিত্রটি বুঝতে পারবেন। এখানে

I. $V = 0$ যখন $-\infty \le x < 0$

II. $V = V_0$ যখন $0 \le x \le a$

III. $V = 0$ যখন $a < x \le \infty$



চিত্র 11.1

এই তিনটি অঞ্চলকে আমরা I, II ও III সংখ্যা দিয়ে চিহ্নিত করব।

I অঞ্চলে শ্রোডিংগারের সময়-নিরপেক্ষ সমীকরণটি হবে 11.1 সমীকরণের মত :

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi_1 = 0$$

বা, $$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + k^2\psi_1 = 0, \quad \left(k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}\right)$$

এর সাধারণ সমাধান $\psi_1(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ 11.5

(A ও B = অনিশ্চিত ধ্রুবক)

লক্ষ করুন যে সময় নির্ভর সমাধানটি হল

$$\psi_1(x, t) = (Ae^{ikx} + Be^{-ikx})\, e^{-i\omega t} \quad (\omega = E/\hbar)$$

$$= Ae^{i(kx - \omega t)} + Be^{-i(kx + \omega t)}$$

যার মধ্যে $Ae^{i(kx-\omega t)}$ রাশিটি x অক্ষের দিক বরাবর ও অন্য রাশিটি x-অক্ষের বিপরীত দিক বরাবর সঞ্চারিত তরঙ্গ বোঝায়। এ থেকে বোঝা যায় যে প্রথম রাশিটি বিভব প্রাচীরে আপতিত তরঙ্গ ও দ্বিতীয় রাশিটি প্রতিফলিত তরঙ্গ বোঝায়।

II অঞ্চলে তরঙ্গ সমীকরণটির রূপ ঃ

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)\,\psi_2 = 0.$$

ধরা যাক $\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E) = \alpha^2$। যদি $E \le V_0$ হয় তবে α বাস্তব রাশি কিন্তু যদি $E > V_0$ হয় তবে α-কে কাল্পনিক রাশি হিসাবে ধরতে হবে। এখন তরঙ্গ সমীকরণটিকে লেখা যায় ঃ

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} - \alpha^2\psi_2 = 0$$

যার সাধারণ সমাধান $\psi_2(x) = Ce^{\alpha x} + De^{-\alpha x}$ …… 11.6

$(C, D =$ অনিশ্চিত ধ্রুবক$)$

III অঞ্চলে তরঙ্গ সমীকরণটির চেহারা আবার 11.1 সমীকরণের মত হবে, অর্থাৎ

$$\frac{d^2\psi_3}{dx^2} + k^2\psi_3 = 0$$

যার সাধারণ সমাধান $\psi_3(x) = He^{ikx} + ke^{-ikx}$ …… 11.7

সুতরাং III অঞ্চলে সময় নির্ভর সমাধানটি হবে

$$\psi_3(x, t) = \psi_3(x)\,e^{-i\omega t} \quad (\omega = E/\hbar)$$

$$= He^{i(kx - \omega t)} + ke^{-i(kx + \omega t)}$$

এর মধ্যে $He^{i(kx - \omega t)}$ রাশিটি x-অক্ষের দিক বরাবর ও $ke^{-i(kx + \omega t)}$রাশিটি x-অক্ষের বিপরীত দিক বরাবর সঞ্চরমান তরঙ্গ বোঝায়। কিন্তু এই অঞ্চলে x-অক্ষের বিপরীত দিক বরাবর, অর্থাৎ 11.1 চিত্রে ডান দিক থেকে আসা তরঙ্গ থাকতে পারে না। I অঞ্চল থেকে বিভব প্রাচীরের ওপর আপতিত তরঙ্গের কিছু অংশ যদি বিভব প্রাচীর ভেদ করে III অঞ্চলে প্রবেশ করে তবে তা কেবলমাত্র অক্ষের দিক বরাবরই সঞ্চারিত হবে। সুতরাং আমরা $k = 0$ ধরতে পারি, যার ফলে লেখা যায়

$\psi_3(x) = He^{ikx}$ $(H =$ অনিশ্চিত ধ্রুবক$)$ …… 11.8

আপনার মনে হতে পারে যে আমরা এ পর্যন্ত A, B, C, D ও H, এই পাঁচটি অনিশ্চিত ধ্রুবক পেয়েছি, যেগুলি সম্পূর্ণ স্বতন্ত্র। কিন্তু এবার আমরা লক্ষ্য করব যে এই ধ্রুবকগুলি স্বতন্ত্র নয়, কেননা তরঙ্গ অপেক্ষকগুলি $x = 0$ ও $x = a$ বিন্দুতে কিছু সীমাশর্ত পালন করে। সীমাশর্তগুলি হল ঃ

$x = 0$ বিন্দুতে $\psi_1(0) = \psi_2(0)$, $\left(\frac{d\psi_1}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{d\psi_2}{dx}\right)_{x=0}$ এবং $x = a$ বিন্দুতে $\psi_2(a) = \psi_3(a)$, $\left(\frac{d\psi_2}{dx}\right)_{x=a} = \left(\frac{d\psi_3}{dx}\right)_{x=a}$।

এখন এই সীমাশর্তগুলি প্রয়োগ করা যাক।

(i) $\psi_1(0) = \psi_2(o)$ $\quad\therefore\quad A + B = C + D$ …… 11.9(a)

(ii) $\left(\dfrac{d\psi_1}{dx}\right)_{x=0} = \left(\dfrac{d\psi_2}{dx}\right)_{x=0}$ $\quad\therefore\quad ik(A - B) = \alpha(C - D)$ …… 11.9(b)

(iii) $\psi_2(a) = \psi_3(a)$ $\quad\therefore\quad Ce^{\alpha a} + De^{-\alpha a} = He^{ika}$ …… 11.9(c)

(iv) $\left(\dfrac{d\psi_2}{dx}\right)_{x=a} = \left(\dfrac{d\psi_3}{dx}\right)_{x=a}$ $\quad\therefore\quad \alpha(Ce^{\alpha a} - De^{-\alpha a}) = ikHe^{ika}$ …… 11.9(d)

11.9(a) ও (b) সমীকরণ থেকে

$$A - B = \frac{\alpha}{ik}(C - D) = -\frac{i\alpha}{k}(C - D)$$

$$A = \frac{1}{2}\left[C\left(1 - \frac{i\alpha}{k}\right) + D\left(1 + \frac{i\alpha}{k}\right)\right]$$

$$B = \frac{1}{2}\left[C\left(1 + \frac{i\alpha}{k}\right) + D\left(1 - \frac{i\alpha}{k}\right)\right]$$

আবার, 11.9(c) ও (d) সমীকরণ থেকে

$$Ce^{\alpha a} - De^{-\alpha a} = \frac{ik}{\alpha}He^{ika}$$

$$Ce^{\alpha a} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{ik}{\alpha}\right)He^{ika} \quad \text{বা,} \quad C = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{ik}{\alpha}\right)He^{ika}e^{-\alpha a}$$

এবং $De^{-\alpha a} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{ik}{\alpha}\right)He^{ika}$ বা, $D = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{ik}{\alpha}\right)He^{ika}e^{\alpha a}$

A ও B এর রাশিমালায় C ও D এর মান ব্যবহার করে,

$$A = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{ik}{\alpha}\right)He^{ika}e^{-\alpha a}\left(1 - \frac{i\alpha}{h}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{ik}{\alpha}\right)He^{ika}e^{\alpha a}\left(1 + \frac{i\alpha}{k}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}He^{ika}\left[\frac{1}{2}\left(2 + \frac{ik}{\alpha} - \frac{i\alpha}{k}\right)e^{-\alpha a} + \frac{1}{2}\left(2 - \frac{ik}{\alpha} + \frac{i\alpha}{k}\right)e^{\alpha a}\right]$$

$$= He^{ika}\left[\frac{e^{\alpha a} + e^{-\alpha a}}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{i\alpha}{k} - \frac{ik}{\alpha}\right)\frac{e^{\alpha a} - e^{-\alpha a}}{2}\right]$$

$$= He^{kka}\left[\cos h\alpha a + \frac{i}{2}\left(\frac{\alpha}{k} - \frac{k}{\propto}\right)\sin h\alpha a\right] \quad \text{…… 11.10(a)}$$

$$B = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{ik}{a}\right)He^{ika}e^{-\alpha a}\left(1 + \frac{i\alpha}{k}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{ik}{\propto}\right)He^{ika}e^{\alpha a}\left(1 - \frac{i\alpha}{k}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2} He^{ika}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{ik}{\alpha}+\frac{i\alpha}{k}\right)e^{-\alpha a}-\frac{1}{2}\left(\frac{ik}{\propto}+\frac{i\alpha}{k}\right)e^{\alpha a}\right]$$

$$= - He^{ika}.\frac{i}{2}\left(\frac{k}{\lambda}+\frac{\alpha}{k}\right)\frac{e^{\alpha a}-e^{-\alpha a}}{2}$$

$$= -\frac{i}{2} He^{ika}\left(\frac{k}{\alpha}+\frac{\alpha}{k}\right)\sinh \alpha a \qquad \ldots\ldots 11.10(b)$$

বিভব প্রাচীরের মধ্য দিয়ে কণাস্রোতের সঞ্চারণ (transmission) যখন $E < V_0$

ধরা যাক α বাস্তব রাশি, অর্থাৎ $E < V_0$। এই অবস্থায় সনাতন বলবিদ্যার নিয়মানুসারে বিভবপ্রাচীরের বাম দিক থেকে আপতিত কণাগুলির প্রাচীরের ডানদিকে, অর্থাৎ III অঞ্চলে পৌঁছানো সম্ভব নয়। কেননা কণার গতিশক্তি সেক্ষেত্রে অবশ্যই নেগেটিভ হতে হবে। কিন্তু কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় কণাগুলির কিছু অংশ প্রাচীর ভেদ করে III অঞ্চলে পৌঁছায় বলে দেখা যায়। এক্ষেত্রে আপনি নিশ্চয়ই কণাস্রোতের কত অংশে বিভব প্রাচীরটি ভেদ করতে সক্ষম হয় তা জানতে চাইবেন। এজন্য আমাদের I ও III অঞ্চলে কণাস্রোতের মান জানতে হবে। এই স্রোতের পরিমাণ হল $S = P(x).V$, যেখানে $P(x)$ = সম্ভাব্যতা ঘনত্ব এবং V = কণার বেগ। [অনুশীলনী 4, এই পর্যায়ের দশম একক]

I অঞ্চলে কণাস্রোতের মান $S_I = (Ae^{ikx})(Ae^{ikx})^*.V$

$$= AA^*V$$

এই রাশিমালাটি সরাসরি নিম্নরূপ উপায়ন্ত নির্ণয় করিতে পারেন।

প্রতিফলিত তরঙ্গ $\psi_{1r} = Ae^{ikx}$ এবং $S_I = \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x}-\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$

$$= \frac{i\hbar}{2m}\left[Ae^{ikx}.A^*(-ik)e^{-ikx}-A^*e^{-ikx}.ike^{ikx}\right]$$

$$= \frac{i\hbar}{2m}\left[-2ik|A|^2\right] = \frac{\hbar k}{m}|A|^2.$$

এখানে $\frac{\hbar k}{m}$ কণার বেগ V নির্দেশ করে।

এবং (III) অঞ্চলে কণাস্রোতের মান $S_{III} = (He^{ikx})(He^{ikx})^*.V = HH^*.V$ লক্ষ করুন, দুই ক্ষেত্রেই কণার বেগ একই রাখা হয়েছে, কেননা উভয় ক্ষেত্রে স্থিতিশক্তি শূন্য এবং গতিশক্তি মোট শক্তির সমান। কণার বিভবপ্রাচীরের মধ্য দিয়ে সঞ্চারণের গুণাঙ্ক

$$T = \frac{S\,\text{III}}{S\,\text{I}} = \frac{HH^*V}{AA^*V} = \left(\frac{H}{A}\right)\left(\frac{H}{A}\right)^* \qquad \ldots\ldots 11.11$$

কিন্তু 11.10(a) থেকে

$$\frac{A}{H} = e^{ika}\left[\cos h\alpha a + \frac{i}{2}\left(\frac{\alpha}{k} - \frac{k}{\infty}\right)\sin h\alpha a\right]$$

$$\therefore \quad \left(\frac{A}{H}\right)^* = e^{-ika}\left[\cos h\alpha a - \frac{i}{2}\left(\frac{\alpha}{k} - \frac{k}{\alpha}\right)\sin h\alpha a\right]$$

সুতরাং $\left(\frac{H}{A}\right)\left(\frac{H}{A}\right)^* = \cosh^2\alpha a + \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{k} - \frac{k}{\alpha}\right)^2 \sinh^2\alpha a$

$$= 1 + \sinh^2\alpha a + \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\alpha}{k} + \frac{k}{\alpha}\right)^2 - 4\right]\sinh^2\alpha a$$

$$= 1 + \frac{1}{4}\sinh^2\alpha a$$

সুতরাং 11.11 থেকে $\frac{1}{T} = 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{k} + \frac{k}{\alpha}\right)^2 \sinh^2\alpha a$ 11.12

কিন্তু, $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}, \alpha = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$

$$\therefore \quad \frac{k}{\alpha} = \sqrt{\frac{E}{V_0 - E}}, \frac{\alpha}{k} = \sqrt{\frac{V_0 - E}{E}}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{T} = 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{V_0 - E}{E} + \frac{E}{V_0 - E} + 2\right)\sinh^2\alpha a$$

বা, $\frac{1}{T} = 1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)}\sinh^2\alpha a$ 11.13

11.13 সূত্রটি থেকে আপনি সঞ্চারণ গুণাঙ্কের মান পেতে পারেন। লক্ষ করুন, কণার শক্তি E এর তুলনায় বিভব প্রাচীরের উচ্চতা V_0 যত বেশী হয়, α এর মান ততই বাড়ে এবং T এর মান ততই কম হয়।

একটি উদাহরণ :

ধরুন একটি ইলেকট্রনের স্রোতের প্রতিটি ইলেকট্রনের শক্তি $0.6eV$. এবং বিভব প্রাচীরের উচ্চতা $1eV$ বেধ $1\,A.u$।

এক্ষেত্রে $\frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} = \frac{1^2}{4 \times 0.6 \times (1 - 0.6)} = 1.042$

$$\alpha a = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}.a$$

$$= \frac{\sqrt{2 \times (9.11 \times 10^{-31}\,kg) \times (1 - 0.6) \times 1.6 \times 10^{-19} J}}{1.0546 \times 10^{-34}\,J.s} \times 10^{-10}\,\text{m}$$

$$= 0.324$$

$$\therefore \quad \frac{1}{T} = 1 + 1.042 \sinh^2 (.324) = 1 + 1{\cdot}042 \times ({\cdot}33)^2$$

$$= 1{\cdot}113$$

$$\therefore \quad T \approx 0{\cdot}898$$

এর অর্থ ইলেকট্রনগুলির প্রায় 90 শতাংশ বিভব প্রাচীর অতিক্রম করতে পারবে।

কণাস্রোতের প্রতিফলন ঃ

আগের পদ্ধতিতে আপনি কণাগুলির জন্য প্রতিফলন গুণাঙ্কও নির্ণয় করতে পারবেন। I অঞ্চলে প্রতিফলিত কণাস্রোতের মান

$$S'_I = (Be^{-ikx})(Be^{-ikx})^* V$$

$$= BB^* V$$

$\therefore$ বিভবপ্রাচীরের প্রতিফলন গুণাঙ্ক

$$R = \frac{S'_I}{S_I} = \frac{BB^*V}{AA^*V} = \frac{BB^*}{AA^*}$$

11.10(a) ও (b) থেকে

$$BB^* = \left[-\frac{i}{2} He^{ika}\left(\frac{k}{\alpha}+\frac{\alpha}{k}\right)\sin h\alpha a\right]\left[+\frac{i}{2} H^* e^{-ika}\left(\frac{k}{\alpha}+\frac{\alpha}{k}\right)\sin h\alpha a\right]$$

$$= \frac{1}{4} HH^* \left(\frac{k}{\alpha}+\frac{\alpha}{k}\right)^2 \sinh^2\alpha a$$

$$AA^* = He^{ika}\left[\cos h\alpha a + \frac{i}{2}\left(\frac{\alpha}{k}-\frac{k}{\alpha}\right)\sin h\alpha a\right]\times$$

$$H^* e^{-ika}\left[\cos h\alpha a - \frac{i}{2}\left(\frac{\alpha}{k}-\frac{k}{\alpha}\right)\sin h\alpha a\right]$$

$$= HH^*\left[\cos h^2\alpha a + \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{k}-\frac{k}{\alpha}\right)^2 \sin h^2\alpha a\right]$$

$$= \frac{1}{4} HH^*\left[4 + 4\sin h^2\alpha a + \left(\frac{\alpha}{k}-\frac{k}{\alpha}\right)^2 \sin h^2\alpha a\right]$$

$$= \frac{1}{4} HH^*\left[4 + \left(\frac{\alpha}{k}+\frac{k}{\alpha}\right)^2 \sin h^2\alpha a\right]$$

$$\therefore \quad \frac{1}{R} = \frac{\frac{1}{4} HH^*\left[4 + \left(\frac{\alpha}{k}+\frac{k}{\alpha}\right)^2 \sin h^2\alpha a\right]}{\frac{1}{4} HH^*\left(\frac{\alpha}{k}+\frac{k}{\alpha}\right)^2 \sin h^2\alpha a}$$

$$= 1 + \frac{4}{\left(\frac{\alpha}{k} + \frac{k}{\alpha}\right)^2 \sinh^2 \alpha a}$$

বা, $$\frac{1}{R} = 1 + \frac{4E(V_0 - E)}{V_0^2 \sinh^2 \alpha a} \qquad \ldots\ldots 11.14$$

যেহেতু আপতিত কণাগুলির প্রতিটি হয় বিভেদ প্রাচীর অতিক্রম করে সঞ্চারিত হবে, নয়ত প্রতিফলিত হবে, আমরা আশা করব $R + T = 1$। আপনি 11.13 ও 11.14 সূত্র ব্যবহার করে এই সিদ্ধান্তের সত্যতা প্রতিপন্ন করতে পারেন।

একটি বিশেষ ক্ষেত্রে : যদি $\alpha a >> 1$ হয় তবে

$\sinh^2 \alpha a \approx \frac{1}{4} e^{2\alpha a}$ এবং $\frac{1}{T} = 1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \cdot \frac{1}{4} e^{2\alpha a} \approx \frac{V_0^2 e^{2\alpha a}}{16E\,(V_0 - E)}$ (1 সংখ্যাটি উপেক্ষা করে)

∴ সঞ্চারণ গুণাঙ্ক $T = \frac{16E}{V_0}\left(1 - \frac{E}{V_0}\right) e^{-2\alpha a}$ …… 11.15

যখন $E > V_0$

কণার মোট শক্তি যদি বিভব প্রাচীরের উচ্চতার চেয়ে বেশী হয় তবে সনাতন বলবিদ্যার বিচারে কণাগুলি II অঞ্চলেও পজিটিভ গতিশক্তি ও বাস্তব বেগসম্পন্ন হবে। এবং প্রতিটি কণাই বিভবপ্রাচীর অতিক্রম করে III অঞ্চলে পৌঁছাবে। দেখা যাক কোয়ান্টাম বলবিদ্যা থেকে কোন সিদ্ধান্তে আসা যায়।

এক্ষেত্রে $\alpha = i\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)} = i\beta$, ধরা যাক।

$$\sinh \alpha a = \frac{1}{2}(e^{\alpha a} - e^{-\alpha a}) = \frac{1}{2}(e^{i\beta a} - e^{-i\beta a}) = i \sin \beta a$$

11.13 সূত্রে থেকে,

$$\frac{1}{T} = 1 + \frac{V_0^2}{4E\,(E - V_0)} \sin^2 \beta a$$

বিশেষ ক্ষেত্র : যদি V_0 এর তুলনায় E সামান্যই বড় হয় তবে

$\beta a << 1$, $\sin \beta a \approx \beta a$

$$\therefore \quad \frac{1}{T} = 1 + \frac{V_0^2 \beta^2 a^2}{4E\,(E - V_0)}$$

$$= 1 + \frac{V_0^2 a^2}{4E(E - V_0)} \cdot \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)$$

বা, $$\frac{1}{T} = 1 + \frac{m V_0^2 a^2}{2E\hbar^2} \qquad \ldots\ldots 11.16(b)$$

অনুরূপভাবে $E > V_0$ হলে, 11.4 সমীকরণ থেকে,

$$\frac{1}{R} = 1 + \frac{4E(E - V_0)}{V_0^2 \sin^2 \beta a} \qquad \ldots \ldots 11.17(a)$$

বিশেষ ক্ষেত্র : যদি $\beta a << 1$ হয়, তবে

$$\frac{1}{R} = 1 + \frac{4E(E - V_0)}{V_0^2 \beta^2 a^2}$$

$$= 1 + \frac{4E(E - V_0)}{V_0^2 a^2} \cdot \frac{\hbar^2}{2m(E - V_0)}$$

বা, $$\frac{1}{R} = 1 + \frac{2E\hbar^2}{mV_0^2 a^2} \qquad \ldots \ldots 11.17(b)$$

11.17(b) এর সমীকরণটিতে আপনি একটি বিকল্প পদ্ধতিতেও পৌঁছাতে পারেন। যেহেতু $T + R = 1$, 11.16 সমীকরণ থেকে T-এর মান নির্ণয় করে R এর মান বার করা যেতে পারে।

এবার 11.16(a) ও 11.17(a) সমীকরণ দুটির এক বিশেষ তাৎপর্য লক্ষ করুন। এই সমীকরণ দুটির মধ্যেই $\sin^2\beta a$ রাশিটি থাকায় βa রাশির পরিবর্তনের সঙ্গে R এবং T এর মান আন্দোলিত হতে থাকবে। বিশেষত, যখন $\sin \beta a = 0$, তখন $T = 1$ এবং $R = 0$, অর্থাৎ আপতিত কণাগুলি প্রতিফলিত হবে, সম্পূর্ণরূপে বিভবপ্রাচীর অতিক্রম করে সঞ্চারিত হবে। এটি তখনই ঘটবে যখন $\beta a = \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots, n\pi$ ইত্যাদি, (n = পূর্ণসংখ্যা।) এর অর্থ

$$a\sqrt{2m(E - V_0)} = n\pi\hbar = \frac{n}{2}h \qquad \ldots \ldots 11.18$$

কিন্তু $E - V_0$ = II অঞ্চলে কণার গতিশক্তি, $\frac{p^2}{2m}$ (p = ভরবেগ) 11.18 থেকে পাওয়া যায় $ap = \frac{1}{2}nh$

বা, $a = \frac{1}{2}n > \lambda$ $\left(\lambda = \frac{h}{p}\right.$ কণার ডি.ব্রগলি তরঙ্গদৈর্ঘ্য $\left.\right)$ অর্থাৎ কণার প্রতিফলন তখনই সম্পূর্ণ শূন্য হবে যখন বিভব প্রাচীরের বেধ প্রাচীরের মধ্যে ভিব্রগলির তরঙ্গদৈর্ঘ্যের অর্ধেকের গুণিতক হবে।

এবার একটি অনুশীলনীর উত্তর দিন।

অনুশীলনী —1

1.1eV শক্তির একটি ইলেকট্রন 1.0eV উচ্চতা ও 0·5 $A.U.$ বেধের একটি বিভব প্রাচীরে আপতিত হল। ইলেকট্রনটির প্রতিফলিত হওয়ার সম্ভাব্যতা কত?

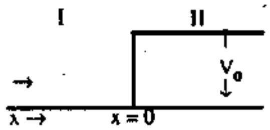
11.4 বিভব সোপান

এবার এমন একটি অবস্থা কল্পনা করুন যেখানে x-অক্ষের $x = 0$ বিন্দুর বামদিকে বিভবের মান শূন্য হলেও ঐ বিন্দুর ডানদিকে বিভবের মান V_0, অর্থাৎ $V = 0$। যখন $x < 0$ (অঞ্চল I) $V = V_0$, যখন $x \geq$ (অঞ্চল II) (চিত্র 11.2)। লক্ষ্য করুন 11.3 অনুচ্ছেদে আমরা যে বিভব প্রাচীর কল্পনা করেছি, এক্ষেত্রে সেটি $x = \infty$ পর্যন্ত প্রসারিত বলে ধরা হয়েছে। ধরা যাক ভরের বস্তুকণা E শক্তিতে x-অক্ষ বরাবর এই বিভবসোপানের ওপর আপতিত হয়।

I ও II অঞ্চলে শ্রোডিংগারের সময়-নিরপেক্ষ তরঙ্গ সমীকরণটি হবে :

অঞ্চল I : $\dfrac{d^2\psi_1}{dx^2} + \dfrac{2m}{\hbar^2}\varepsilon\psi_1 = 0$ ...... 11.19(a)

অঞ্চল II : $\dfrac{d^2\psi_2}{dx^2} + \dfrac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)\psi_2 = 0$ ...... 11.19(b)



চিত্র 11.2

এখানে $\psi_1(x)$ ও $\psi_2(x)$ যথাক্রমে I ও II অঞ্চলে কণার তরঙ্গ-অপেক্ষক বোঝাচ্ছে।

ধরে নিন $E > V_0$। এখন 11.19(a) ও (b) সমীকরণ দুটিকে লেখা যায় :

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \alpha^2\psi_1 = 0 \qquad \alpha = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad \text{...... 11.20(a)}$$

এবং $$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + \beta^2\psi_2 = 0 \qquad \beta = \sqrt{\frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}} \quad \text{...... 11.20(b)}$$

এখানে α ও β বাস্তব রাশি। 11.20(a) ও (b) সমীকরণদ্বয়ের সমাধান নিম্নরূপ :

$$\psi_1(x) = Ae^{i\alpha x} + Be^{-i\alpha x} \quad \text{...... 11.21(a)}$$

$$\psi_2(x) = Ce^{i\beta x} + De^{-i\beta x} \quad \text{...... 11.21(b)}$$

পূর্বে 11.3 অনুচ্ছেদে ব্যবহৃত যুক্তি ব্যবহার করে দেখা যায় যে 11.21(a) সমীকরণটির মধ্যে $Ae^{i\alpha x}$ রাশিটি x-অক্ষ বরাবর বিভবসোপানে আপতিত তরঙ্গ এবং $Be^{-i\alpha x}$ রাশিটি -অক্ষের বিপরীতমুখী। অর্থাৎ বিভবসোপান দ্বারা প্রতিফলিত তরঙ্গ বোঝায়। 11.21(b) সমীকরণে $De^{-i\beta x}$ রাশিটি থাকতে পারে না কেননা II অঞ্চলে x-অক্ষের বিপরীতমুখী কোন তরঙ্গ থাকা সম্ভব নয়। সুতরাং 11.21(b) এর পরিবর্তে লিখব

$$\psi_2(x) = Ce^{i\beta x} \quad \text{...... 11.21(c)}$$

I ও II অঞ্চল দুটির সীমান্তে, অর্থাৎ $x = 0$ বিন্দুতে $\psi_1(x)$ ও $\psi_2(x)$ এই সীমাশর্তগুলি পালন করে :

$$\psi_1(x = 0) = \psi_2(x = 0) \quad \text{...... 11.22(a)}$$

$$\left(\frac{d\psi_1}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{d\psi_2}{dx}\right)_{x=0} \quad \text{...... 11.22(b)}$$

যার প্রথমটি থেকে পাওয়া যায় [11.21(a) ও (c) ব্যবহার করে]

$$A + B = C$$

ও দ্বিতীয়টি থেকে, $i\alpha A - i\alpha B = i\beta C$, অর্থাৎ $A - B = \frac{\beta}{\alpha} C$

সমাধান করে, $A = \frac{c}{2}\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)$

$$B = \frac{c}{2}\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{B}{A} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}, \frac{C}{A} = \frac{2\alpha}{\alpha + \beta}$$

I ও II অঞ্চলে কণার বেগ যদি যথাক্রমে V_1 ও V_2 হয়, তবে

I অঞ্চলে আপতিত কণাস্রোতের প্রবাহের মান

$$S_I = (Ae^{i\alpha x})(Ae^{i\alpha x})^* V_1$$

$$= Ae^{i\alpha x}. A^* e^{-i\alpha x}. V_1$$

$$= AA^* V_1$$

I অঞ্চলে প্রতিফলিত কণাস্রোতের প্রবাহের মান

$$S'_I = (Be^{-i\alpha x})(Be^{-i\alpha x})^* V_1$$

$$= BB^* V_1$$

এবং II অঞ্চলে সঞ্চারিত কণাস্রোতের প্রবাহের মান

$$S_{II} = (CC^{i\beta x})(Ce^{i\beta x})^* V_2$$

$$= CC^* V_2$$

কিন্তু $\frac{1}{2} m V_1^2 = E$, কেননা I অঞ্চলে $V = 0$

এবং $\frac{1}{2} m V_2^2 = E - V_0$

$$\therefore \quad V_1 = \sqrt{2E/m} \text{ এবং } V_2 = \sqrt{2(E - V_0)/m}$$

কণাস্রোতের সঞ্চারণ-গুণাঙ্ক, $T = S_{II}/S_I = CC^* V_2 / AA^* V_1$

$$= \left(\frac{C}{A}\right)^2 \cdot \frac{V_2}{V_1}$$

$$= \left(\frac{2\alpha}{\alpha + \beta}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{E - V_0}{E}}$$

$$= \frac{4\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2} \cdot \frac{\beta}{\alpha}$$

বা, $$T = \frac{4\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2} \qquad \ldots\ldots 11.23$$

অন্যদিকে কণাস্রোতের প্রতিফলন গুণাঙ্ক, $R = S'_l / S_l = BB^*V_1 / AA^*V_1$

$$= \left(\frac{B}{A}\right)^2$$

বা, $$R = \left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^2 \qquad \ldots\ldots 11.24$$

এবার ধরে নিন $E < V_0$। তাহলে $\beta = i\sqrt{\frac{2m\,(V_0 - E)}{\hbar^2}} = i\gamma$

11.21(b) সমীকরণের পরিবর্তে আমরা লিখতে পারি

$$\psi_2(x) = Ce^{-\gamma x} + De^{\gamma x}$$

এর মধ্যে $De^{\gamma x}$ রাশিটির মান $x \to \infty$ সীমায় অসীম। যেহেতু $\psi_2(x)$ এর মান অসীম হতে পারে না, $D = 0$, এবং

$$\psi_2(x) = Ce^{-\gamma x} \qquad \ldots\ldots 11.25$$

11.21(a) ও 11.25 সমীকরণ দুটিতে $\psi_1(x)$ ও $\psi_2(x)$ এর যে রাশিমালা পাওয়া গেল সেগুলির ওপর আমরা 11.22(a) ও (b) সীমাশর্তগুলি আরোপ করতে পারি। অতএব,

$$A + B = C$$

$$i\alpha\,(A - B) = -\gamma C, \quad \text{বা,} \quad A - B = i\frac{\gamma}{\alpha}C$$

সমাধান করে, $A = \frac{C}{2}\left(1 + i\frac{\gamma}{\alpha}\right)$, $B = \frac{C}{2}\left(1 - i\frac{\gamma}{\alpha}\right)$

সুতরাং $\frac{B}{A} = \frac{\alpha - i\gamma}{\alpha + i\gamma}$ এবং $\frac{C}{A} = \frac{2\alpha}{\alpha + i\gamma}$

এখন আমরা আগের মত কণাস্রোতের সঞ্চারণ গুণাঙ্ক T ও প্রতিফলন গুণাঙ্ক T বার করতে পারি।

কণাস্রোতের প্রতিফলন গুণাঙ্ক $= \frac{BB^*V_1}{AA^*V_1}$

বা, $$R = \left(\frac{B}{A}\right)\left(\frac{B}{A}\right)^* = \frac{\alpha^2 + \gamma^2}{\alpha^2 + \gamma^2} = 1$$

যেহেতু $R + T = 1$, $T = 0$

আপনি যদি $\frac{C}{A}$ রাশির সাহায্যে $T = \frac{CC^*V_2}{AA^*V_1}$

রাশির মান বার করেন তবে আপনি একটি কাল্পনিক মান পাবেন। এর অর্থ, আপতিত তরঙ্গের কিছু অংশ বিভব সোপানের মধ্যে প্রবেশ করলেও সেটি নিয়তই শোষিত এবং প্রথম মাধ্যমের দিকে প্রতিফলিত হয়। এর ফলেই প্রতিফলন গুণাঙ্কের মান 1 হয় অর্থাৎ আপতিত তরঙ্গটি সম্পূর্ণরূপে প্রতিফলিত হয়।

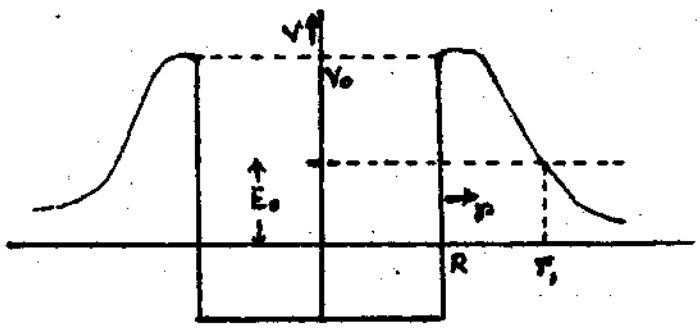
অনুশীলনী —2

$E < V_0$ ধরে নিয়ে বিভব সোপানে আপতিত তরঙ্গের সঞ্চারণ গুণাঙ্কের রাশিমালাটি নির্ণয় করুন।

11.5 তেজস্ক্রিয় পরমাণুর নিউক্লিয়াস থেকে আলফা কণার নির্গমন

আপনি ইতিপূর্বে লক্ষ্য করেছেন যে সনাতন বলবিদ্যার হিসাবে কোন বস্তুকণা তার মোট যান্ত্রিক শক্তির চেয়ে অধিক উচ্চতার বিভব প্রাচীর পার হতে না পারলেও কোয়ান্টাম বলবিদ্যার সিদ্ধান্ত অনুসারে তা অসম্ভব নয়। কণাটি যেন বিভবপ্রাচীরের মধ্যেকার সুড়ঙ্গ দিয়ে নির্গত হয়, এই কল্পনা থেকে কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় এই প্রক্রিয়াকে সুড়ঙ্গ-প্রক্রিয়া **(tunnel effect)** বলা হয়।

কোন ভারী তেজস্ক্রিয় পরমাণুর নিউক্লিয়াস থেকে আলফা কণার নির্গমন সুড়ঙ্গ-প্রক্রিয়ায় হয়ে থাকে। আলফাকণা নির্গমনের তত্ত্বে ধরা হয় যে নিউক্লিয়াসের মধ্যে দুটি প্রোটন ও দুটি নিউট্রন দিয়ে গঠিত আলফা কণার নিজস্ব একটি সত্ত্বা থাকে। নিউক্লিয়াসের বাকি অংশের কুলম্ব বিকর্ষণ থাকা সত্ত্বেও অত্যন্ত শক্তিশালী স্বল্পপাল্লার নিউক্লিয় বলের প্রভাবে আলফা কণাটি নিউক্লিয়াসের মধ্যে আবদ্ধ থাকে। এই আকর্ষণী নিউক্লিয় বলের প্রভাবে আলফা কণাটি একটি খাড়া দেওয়ালের বিভব গহ্বরের মধ্যে থাকে (চিত্র 11.3)। এই গহ্বরের ব্যাসার্ধকেই নিউক্লিয়াসের কার্যকরী ব্যাসার্ধ বলা যায়। গহ্বরের বাইরে নিউক্লিয়াসের পজিটিভ আধানের ফলে উৎপন্ন কুলম্ব বিভব ক্রিয়া করে যার মান নিউক্লিয়াসের কেন্দ্র থেকে দূরত্বের ব্যস্তানুপাতী।



চিত্র 11.3 আলোকের ব্যবর্তন ও ব্যতিচার

নিউক্লিয়াসের পারমাণবিক সংখ্যা যদি z হয় তবে α-কণা ব্যতীত নিউক্লিয়াসের বাকি অংশের আধান $(z - 2)e$, কেননা α-কণার আধান $2e$। সুতরাং নিউক্লিয়াসের কেন্দ্র থেকে r দূরত্বে বিভব গহ্বরের বাইরে α-কণার স্থিতিশক্তি

$$V(r) = \frac{(z-2)e}{4\pi\varepsilon_0 r}.\, 2e = \frac{2(z-2)e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

r এর মান যত কমতে থাকে, $V(r)$ এর মান বর্ধিত হয়, যতক্ষণ না r এর মান নিউক্লিয়াসের ব্যাসার্ধের সমান হয়। নিউক্লিয়াসের ভরসংখ্যা A হলে সেটির ব্যাসার্ধ

$$R = R_0 A^{1/3}$$

যেখানে $R_0 = 1{\cdot}4 \times 10^{-15}\, m$। এবার একটি পরিচিত নিউক্লিয়াসের কথা বিবেচনা করা যাক। Ra^{226}_{88} নিউক্লিয়াসটির ব্যাসার্ধ $R = 1{\cdot}4 \times 10^{-15} \times 226^{1/3} = 8{\cdot}5 \times 10^{-15} m$ নিউক্লিয়াসটির কেন্দ্র থেকে R দূরত্বে কুলম্ব বিভবের মান

$$V_0 = \frac{2(88-2)}{8{\cdot}5 \times 10^{-15}}.\, 9 \times 10^9.\, (1{\cdot}6 \times 10^{-19})^2 \left(\because\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9\, N.m^2.coul^{-2}\right)$$

$$= 4{\cdot}66 \times 10^{-12}\, J$$

$$\cong 29 \text{ Mev} \quad (1 \text{ Mev} = 1{\cdot}6 \times 10^{-13} J)$$

কিন্তু এই রেডিয়াম পরমাণু থেকে যে আলফা কণা নির্গত হয় তার সর্বোচ্চ শক্তি $E = 4.78$ Mev। সহজেই বোঝা যায় যে $4{\cdot}78$ Mev শক্তির আলফা কণার 29 Mev উচ্চতার বিভব প্রাচীর উল্লম্ফনকে সনাতন বলবিদ্যার সাহায্যে ব্যাখ্যা করা যায় না।

কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় এই ঘটনাকে সুড়ঙ্গ-প্রক্রিয়া হিসাবে ব্যাখ্যা করা যায়। ধরা যাক নিউক্লিয়াসের কেন্দ্র থেকে r_1 দূরত্বে কুলম্ব-বিভবের মান নির্গত আলফা কণার শক্তি E_0 এর সমান। অর্থাৎ

$$E_0 = \frac{2(z-2)e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1}$$

$$\therefore \quad r_1 = \frac{2(z-2)e^2}{4\pi\varepsilon_0 E_0} = \frac{2z'e^2}{4\pi\varepsilon_0 E_0} \quad (z' = z-2).$$

$r = R$ থেকে $r = r_1$ পর্যন্ত যে বিভব প্রাচীর আলফা কণাটিকে নির্গত হতে বাধা দেয়, তার গড় উচ্চতা

$$\langle V \rangle = \frac{1}{r_1 - R}\int_R^{r_1} \frac{2z'e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\, dr$$

$$= \frac{2z'e^2}{4\pi\varepsilon_0 (r_1 - R)}\, ln\, \frac{r_1}{R}$$

বিভব প্রাচীরের বেধ $a = r_1 - R = (52 - 8{\cdot}5) \times 10^{-15} = 43{\cdot}5 \times 10^{-15} m$

$E_0 = 4{\cdot}78$ Mev হলে r_1 এর মান

$$r_1 = \frac{2.(88-2).9 \times 10^9 \times (1^{\cdot}6 \times 10^{-19})^2}{4^{\cdot}78 \times 1^{\cdot}6 \times 10^{-13}}$$

$$= 52 \times 10^{-15} m.$$

$$\therefore \quad <V> = \frac{2 \times 86.(1^{\cdot}6 \times 10^{-19})^2 \times 9 \times 10^9}{(52 - 8^{\cdot}5) \times 10^{-15}} \, ln \frac{52}{8^{\cdot}5}$$

$$= 1^{\cdot}65 \times 10^{-12} J$$

$$= 10.3 \text{ Mev}$$

আলফা কণাটির বিভব প্রাচীর অতিক্রম করে সঞ্চারিত হওয়ার সম্ভাব্যতা সম্বন্ধে মোটামুটি একটি ধারণা পাওয়ার জন্য ধরা যাক বিভব-প্রাচীরটি আয়তাকার, যার বেধ a এবং উচ্চতা $< V >$।

11.6 সমীকরণে ব্যবহৃত α^2 রাশির মান

$$\alpha^2 = \frac{2M}{\hbar^2}(V_0 - E)$$

(এখানে M = আলফা কণার ভর $= 6^{\cdot}66 \times 10^{-27}$ kg)

$$= \frac{2 \times 6^{\cdot}66 \times 10^{-27}}{(1^{\cdot}055 \times 10^{-34})^2}(10^{\cdot}3 - 4^{\cdot}78) \times 1^{\cdot}6 \times 10^{-13}$$

$$= 1^{\cdot}06 \times 10^{30}$$

$$\therefore \quad \alpha = 1^{\cdot}03 \times 10^{15} m^{-1}$$

$$\alpha a = 1^{\cdot}03 \times 10^{15} \times 4^{\cdot}3^{\cdot}5 \times 10^{-15}$$

$$\cong 45$$

এখন সঞ্চারণের সম্ভাব্যতা T হলে, যেহেতু $\alpha a >> 1$,

$$T = \frac{16E}{V_0}\left(1 - \frac{E}{V_0}\right)e^{-2\alpha a}$$

$$= \frac{16 \times 4.78}{10.3}\left(1 - \frac{4.78}{10.3}\right)e^{-2 \times 45}$$

$$\approx 3.3 \times 10^{-39}$$

সঞ্চারণ-সম্ভাব্যতা T এর অতিক্ষুদ্র মান থেকে বুঝতে পারছেন যে আলফা কণা রেডিয়াম-226 এর নিউক্লিয়াস থেকে সুড়ঙ্গ প্রক্রিয়ায় নির্গত হতে পারলেও তার জন্য বহুসংখ্যক প্রচেষ্টার প্রয়োজন হবে, অর্থাৎ নিউক্লিয়াসের আলফাক্ষয়ের অর্ধায়ু অত্যন্ত দীর্ঘ হবে। পরীক্ষা দ্বারা রেডিয়াম-226 এর অর্ধায়ু 1602 বৎসর হতে দেখা যায়।

এবার ওপরের অনুচ্ছেদে যা পড়লেন তার ওপর একটি অনুশীলনীর জবাব দিন।

অনুশীলনী —3

নীচের উক্তিগুলির প্রত্যেকটির সঙ্গে যে বাক্যাংশগুলি দেওয়া আছে তার মধ্যে কোনটি সঠিক তা নির্ণয় করুন।

(i) বিভবগহ্বরের মধ্যে আলফা কণার গতিশক্তি (ক) বাস্তব (খ) অবাস্তব (গ) শূন্য।

(ii) আলফা কণাকে যে বিভব প্রাচীর অতিক্রম করতে হয় তার উৎপত্তির কারণ (ক) কেবলমাত্র নিউক্লিয় বল (খ) কেবলমাত্র কুলম্ব বিকর্ষণ (গ) নিউক্লিয় বল ও কুলম্ব বিকর্ষণ।

(iii) পরমাণুর আলফা-ক্ষয় প্রমাণ করে যে নিউক্লিয়াসের মধ্যে আলফা কণার গতি ব্যাখ্যা করতে (ক) সনাতন বলবিদ্যা সম্পূর্ণ সক্ষম (খ) কোয়ান্টাম বলবিদ্যা সম্পূর্ণ সক্ষম (গ) সনাতন বা কোয়ান্টাম বলবিদ্যা, কোনটিই যথেষ্ট নয়।

11.6 সারাংশ

একমাত্রিক গতিসম্পন্ন মুক্ত বস্তুকণার ক্ষেত্রে শ্রোডিংগারের তরঙ্গ সমীকরণের প্রয়োগই এই এককের মুখ্য উদ্দেশ্য। সম্পূর্ণ সমবিভব ক্ষেত্র ছাড়াও এখানে যে অবস্থাগুলির সম্বন্ধে আলোচনা করা হয়েছে সেগুলি হল আয়তাকার বিভব-প্রাচীর, বিভব সোপান এবং নিউক্লিয়াসের অভ্যন্তরের নিউক্লিয় বল ও বাইরের কুলম্ব বিকর্ষণের সমাহারে সৃষ্ট বিভব-প্রাচীর। আয়তাকার বিভব প্রাচীর ও বিভব সোপানের ক্ষেত্রে আপতিত বস্তুকণার সঞ্চারণ ও প্রতিফলনের সম্ভাব্যতা নির্ণয় করা হয়েছে। নিউক্লিয়াসের বেষ্টনকারী বিভব প্রাচীরের মধ্য দিয়ে আলফাকণার সঞ্চারণের মাধ্যমে সুড়ঙ্গ-প্রক্রিয়ার ব্যাখ্যা করা হয়েছে, যা কেবলমাত্র কোয়ান্টাম বলবিদ্যার সাহায্যেই করা সম্ভব।

এই এককের সাহায্যে আপনি তরঙ্গ-অপেক্ষকের ক্ষেত্রে সীমাশর্তের প্রয়োগ, কণাস্রোতের প্রবাহমাত্রা নির্ণয় এবং সঞ্চারণ বা প্রতিফলনের সম্ভাব্যতা নির্ণয়ের পদ্ধতির প্রত্যক্ষ পরিচয় পেয়েছেন।

11.7 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

(i) x-অক্ষ বরাবর গতিশীল একটি বস্তুকণার জন্য শ্রোডিংগারের সময়-নিরপেক্ষ সমীকরণটি লিখুন ও তার এমন একটি সমাধান নির্ণয় করুন যেটি x-অক্ষ অভিমুখী তরঙ্গ নির্দেশ করে। এই তরঙ্গ অপেক্ষকটির প্রমাণীকরণ সম্ভব কি না তা আলোচনা করুন।

(ii) E শক্তি ও m ভরের একটি বস্তুকণা V_0 উচ্চতা ও a বেধের একটি আয়তাকার বিভব-প্রাচীরের ওপর আপতিত হল। বস্তুকণাটির বিভব প্রাচীর থেকে প্রতিফলিত হওয়ার ও প্রাচীর অতিক্রম করে সঞ্চারিত হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় করুন, যখন (ক) $E > V_0$ এবং (খ) $E < V_0$।

(iii) x-অক্ষ বরাবর E শক্তি নিয়ে চলনশীল একটি কণা V_0 বিভবের একটি অঞ্চলের ওপর আপতিত হল, যেটি $x = 0$ থেকে $x = \infty$ পর্যন্ত বিস্তৃত। $E > V_0$ ধরে নিয়ে কণাটির প্রতিফলিত হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় করুন। দেখান যে $E < V_0$ হলে কণাটি সম্পূর্ণরূপেই বিভবসোপান দ্বারা প্রতিফলিত হবে।

(iv) ভারী নিউক্লিয়াসের মধ্যে যে বিভব গহ্বরের মধ্যে আলফা কণা আবদ্ধ থাকে সেটি কীভাবে সৃষ্ট হয়? সুড়ঙ্গ-প্রক্রিয়া কী এবং এই প্রক্রিয়ায় কীভাবে আলফা কণার নির্গমন ঘটে তা ব্যাখ্যা করুন।

(v) ধরা যাক 5 Mev শক্তির একটি প্রোটন 6 Mev উচ্চতা ও $10^{-14}\,m$ বেধের একটি আয়তাকার বিভব প্রাচীরে আপতিত হল। প্রোটনের ভর 1.67×10^{-27} kg, $\hbar = 1{\cdot}055 \times 10^{-34}\,J.s$ ধরে নিয়ে $\alpha\left(=\frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(V_0-E)}\right)$, αa এবং সঞ্চারণ গুণাঙ্ক T এর মান নির্ণয় করুন।

(vi) আগের প্রশ্নে প্রোটনের শক্তি 6 Mev এবং বিভব প্রাচীরের উচ্চতা 5 Mev হলে সঞ্চারণ গুণাঙ্কের মান কত হত?

(vii) একটি E শক্তির ইলেকট্রন V_0 উচ্চতার বিভবসোপানে আপতিত হওয়ায় ইলেকট্রনের সঞ্চারণ ও প্রতিফলনের সম্ভাব্যতা সমান হল। E ও V_0 এর সম্পর্ক নির্ণয় করুন।

11.8 উত্তরমালা

অনুশীলনী

1. এক্ষেত্রে ইলেকট্রনের শক্তি বিভব প্রাচীরের উচ্চতার তুলনায় অল্প অধিক। 11.16(a) সূত্রে ব্যবহৃত

$$\beta a = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m\,(E-V_0)} \times a$$

$$= \frac{0{\cdot}5 \times 10^{-10}}{1{\cdot}0546 \times 10^{-34}}\sqrt{2 \times 9.1 \times 10^{-31} \times (1{\cdot}1 - 1{\cdot}0) \times 1{\cdot}6 \times 10^{-19}}$$

$$= 0.081$$

∴ $\beta a << 1$ এবং আমরা 11.17(b) সূত্র ব্যবহার করতে পারি। ঐ সূত্র অনুযায়ী, $\frac{1}{R} = 1 + \frac{zE\hbar}{mV_0^2a^2}$

$$= 1 + \frac{2 \times 1.1 \times 1{\cdot}6 \times 10^{-19} \times (1{\cdot}0546 \times 10^{-34})^2}{9{\cdot}1 \times 10^{-31} \times (1.0 \times 1{\cdot}6 \times 10^{-19})^2 \times (0{\cdot}5 \times 10^{-10})^2} = 68.2$$

∴ $R = .0147$

2. $$T = \frac{CC^*V_2}{AA^*V_1} = \left(\frac{C}{A}\right)\left(\frac{C}{A}\right)^*\sqrt{\frac{E-V_0}{E}}$$

$$\frac{C}{A} = \frac{2}{1+i\frac{\gamma}{\alpha}},\ \left(\frac{C}{A}\right)^* = \frac{2}{1-i\frac{\gamma}{\alpha}}\ \frac{\gamma}{\alpha} = \sqrt{\frac{V_0-E}{E}}$$

$$\therefore \quad T = \frac{4}{1+\frac{\gamma^2}{\alpha^2}}\sqrt{\frac{E-V_0}{E}} = \frac{4i}{1+\frac{V_0-E}{E}}\sqrt{\frac{V_0-E}{E}} = i\frac{4}{V_0}\sqrt{E(V_0-E)}$$

স্পষ্টতই, T একটি কাল্পনিক রাশি।

3. (i) (ক), (ii) (গ), (iii) (খ)

সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

(i) 11.2 অনুচ্ছেদে প্রশ্নটির উত্তর দেওয়া আছে।

(ii) 11.3 অনুচ্ছেদে উত্তরটি পাওয়া যাবে।

(iii) 11.4 অনুচ্ছেদে প্রশ্নটির উত্তর পাবেন।

(iv) 11.5 অনুচ্ছেদে প্রশ্নটির উত্তর পাবেন।

(v) এখানে $m = 1{\cdot}67 \times 10^{-27}\, kg$, $V_0 = 6$ Mev, $E = 5$ Mev

$$\therefore \quad \alpha = \frac{[2 \times 1{\cdot}67 \times 10^{-27}(6-5) \times 1{\cdot}6 \times 10^{-13}]^{1/2}}{1{\cdot}055 \times 10^{-34}}$$

$$= 2{\cdot}19 \times 10^{14}$$

$$\alpha a = 2{\cdot}19 \times 10^{14} \times 10^{-14} = 2{\cdot}19$$

$$\therefore \quad \frac{1}{T} = 1 + \frac{6^2}{4 \times 5(6-5)} \sin h^2(2{\cdot}19)$$

$$\cong 36.$$

$$\therefore \quad T = {\cdot}028$$

(vi) এক্ষেত্রে $V_0 = 5$ Mev, $E = 6$ Mev। পূর্বের মত,

$$\beta a = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar} \cdot a$$

$$= \frac{[2 \times 1{\cdot}67 \times 10^{-27} \times (6-5) \times 1.6 \times 10^{-13}]^{1/2}}{1{\cdot}055 \times 10^{-34}} \times 10^{-14} = 2{\cdot}19$$

$$\therefore \quad \frac{1}{T} = 1 + \frac{V_0^2}{4E(E-V_0)}\sin^2\beta a = 1 + \frac{5^2}{4 \times 6 \times (6-5)}\sin^2(2{\cdot}19) = 1{\cdot}69$$

$$\therefore \quad T = 0{\cdot}59$$

(vii) সঞ্চারণ ও প্রতিফলনের সম্ভাব্যতা সমান হওয়ার অর্থ কণার শক্তি, E, বিভব-সোপানের উচ্চতা V_0 অপেক্ষা বেশী, কেননা $E < V_0$ হলে প্রতিফলন গুণাঙ্ক 1 এবং সঞ্চারণ গুণাঙ্ক শূন্য হয়।

যখন $E > V_0$, $T = R$, অর্থাৎ $\dfrac{4\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2} = \left(\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^2$

$\therefore \quad (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$

$\therefore \quad \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^2 - 6\dfrac{\alpha}{\beta} + 1 = 0$

বা, $\dfrac{\alpha}{\beta} = 3 + 2\sqrt{2}$, অর্থাৎ $\dfrac{\alpha^2}{\beta^2} = \dfrac{E}{E - V_0} = \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^2 \approx 34.$

$\therefore \quad E = \dfrac{34}{33} V_0 \approx 1{\cdot}03 V_0$

বোঝা যাচ্ছে এক্ষেত্রে কণার শক্তি বিভব সোপানের উচ্চতার তুলনায় সামান্যই বেশী।

একক 12 □ শ্রোডিংগার সমীকরণের প্রয়োগ—আবদ্ধ অবস্থা

গঠন :

12.1 প্রস্তাবনা

উদ্দেশ্য

12.2 অভেদ্য দেওয়াল যুক্ত একমাত্রিক অসীম বিভবের কূপে (বিভব বাক্সে) অবস্থিত কণা

12.3 ত্রিমাত্রিক আয়তাকার বিভব বাক্সে অবস্থিত কণা

12.4 একমাত্রিক আয়তাকার সসীম বিভবকূপে অবস্থিত কণা

12.5 রৈখিক সরল দোলক

12.6 সারাংশ

12.7 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

12.8 উত্তরমালা

12.1 প্রস্তাবনা

আমরা দেখেছি যে সনাতন বলবিজ্ঞানের সূত্রগুলির সাহায্যে অণু অথবা পরমাণুর কোয়ান্টায়িত গতির কোন ব্যাখ্যা দেওয়া সম্ভব নয়। পুরনো কোয়ান্টাম তত্ত্বও এই ব্যাখ্যা দানে অপারগ। বৈজ্ঞানিক হাইসেন বার্গের তত্ত্ব অনুসারে এই ব্যর্থতার কারণ— পুরনো কোয়ান্টাম বলবিজ্ঞান সনাতন বলবিজ্ঞানের ধারণার ওপর গড়ে উঠেছে যেগুলি কোয়ান্টায়িত গতির ক্ষেত্রে অর্থহীন।

অতএব এমন একটি বলবিজ্ঞানের প্রয়োজন যেটি পর্যবেক্ষণযোগ্য রাশিগুলির ওপর ভিত্তি করে তৈরী হবে। উদাহরণ স্বরূপ বলা যেতে পারে—পরীক্ষার দ্বারা কোন অণুর গঠন জানতে আমরা ইলেকট্রনের অবস্থান অথবা গতি নির্ণয়ের চেষ্টা না করে বর্ণালী রেখার তরঙ্গ দৈর্ঘ্য মেপে অণুর বিভিন্ন অবস্থার শক্তি তা বর্ণালী রেখার তীব্রতা ইত্যাদি নির্ণয় করে থাকি।

এই তথ্যের ওপর ভিত্তি করে হাইসেনবার্গ (1925) ম্যাট্রিক্স (Matrix) বলবিজ্ঞানের প্রতিষ্ঠা করেন।

1926 সালে শ্রোডিংগার স্বাধীনভাবে ডি ব্রগলির (de Broglie) তরঙ্গ-কণা দ্বিচারিতা প্রকল্পের (wave-particle duality hypothesis) সাহায্য নিয়ে তরঙ্গ বলবিজ্ঞান প্রতিষ্ঠা করেন। ডি ব্রগলি যে ধারণার দ্বারা কণার গতি সম্বন্ধীয় চল রাশির (যেমন—ভরবেগ) সঙ্গে তরঙ্গের বৈশিষ্ট্য সূচক ধর্মের (যেমন—তরঙ্গ দৈর্ঘ্য) সম্বন্ধ স্থাপন করেছিলেন সেই ধারণাকেই আর একটু বিস্তৃত করে শ্রোডিংগার সাধারণভাবে কোন কোয়ান্টাম তন্ত্রের গতির

বর্ণনা দেওয়ার জন্য একটি তরঙ্গ সমীকরণের উদ্ভব করেন। শ্রোডিংগারের সমীকরণ সম্বন্ধে আপনারা এতদিনে পড়ে ফেলেছেন এবং সেই সমীকরণের কিছু প্রয়োগ সম্বন্ধেও জেনেছেন।

এই এককে আমরা কণার একটি বিশেষ গতীয় অবস্থায় শ্রোডিংগারের সমীকরণের প্রয়োগের কথা পড়ব। এই অবস্থাটিকে বলা হয় আবদ্ধ অবস্থা। যে কয়েকটি প্রয়োগের কথা জানব সেগুলি হল—

(i) অভেদ্য দেওয়াল যুক্ত একমাত্রিক ও ত্রিমাত্রিক অসীম বিভব যুক্ত কূপে (বিভব বাক্সে) অবস্থিত কণা।

(ii) একমাত্রিক আয়তাকার সসীম বিভবের কূপে অবস্থিত কণা এবং (iii) রৈখিক সরল দোলক।

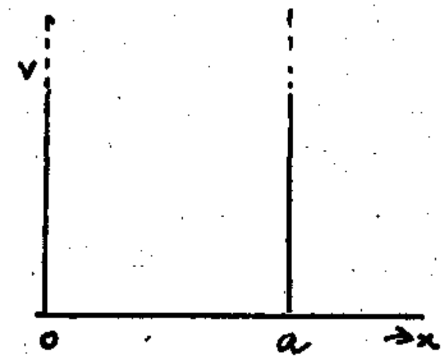
উদ্দেশ্য ঃ

- এই অংশটি পড়লে আপনারা বিভব দ্বারা আবদ্ধ অবস্থায় একটি কণার বিভিন্ন শক্তিস্তরের অবস্থান এবং সংলগ্ন তরঙ্গ অপেক্ষকগুলি নির্ণয় করতে পারবেন।

- এই বিভবের মাত্রা বিভিন্ন হতে পারে, এখানে আপনারা অসীম বিভব কূপ এবং সসীম বিভব কূপে আবদ্ধ কণার বিষয়ে জানবেন।

- সবশেষে সরল দোলকের বিভিন্ন শক্তিস্তরের কথা পড়ে শূন্যাঙ্ক শক্তি কাকে বলে জানবেন।

12.2 অভেদ্য দেওয়াল যুক্ত একমাত্রিক অসীম বিভবের কূপে অবস্থিত কণা



চিত্র 12.1

মনে করি x-অক্ষ বরাবর O থেকে a দূরত্বের মধ্যে একটি কণা রয়েছে। কণাটির শক্তির মান E। $x = O$ এবং $x = a$ বিন্দুতে দুটি অভেদ্য এবং অসীম উচ্চতার দৃঢ় বিভব দেওয়াল আছে। এই দুটি বিন্দুর মধ্যেকার অঞ্চলে কণার স্থিতিশক্তির মান শূন্য। গাণিতিক ভাবে $x = O$ এবং $x = a$ বিন্দুতে $V = \alpha$ এবং $O < x < a$ অঞ্চলে $V = O$। কণাটির দেওয়ালে ধাক্কা খাওয়ার সময় দৃঢ় দেওয়াল হওয়ায় কণার কোন শক্তিক্ষয় হয় না। অর্থাৎ কণার মোট

শক্তি E-এর মান স্থির থাকে। কণাটিকে এই স্থান ত্যাগ করতে যে কার্যের প্রয়োজন তার মান অসীম। বাস্তবে সেটি সম্ভব নয়। সুতরাং $x = O$ এবং $x = a$-তে কণাটির অবস্থানের সম্ভাবনা শূন্য। তরঙ্গ বিস্তারের মাপাঙ্কের (modulus squared of the wave amplitude) বর্গের সাহায্যে সম্ভাব্যতা (probability) মাপা হয়।

কাজেই আমরা বলতে পারি যে তরঙ্গ অপেক্ষক $\psi(x)$ এর মান এই দুই বিন্দুতে শূন্য অর্থাৎ

$$\psi(O) = \psi(a) = 0$$

এই শর্তগুলি সীমান্ত শর্ত (boundary condition)।

তরঙ্গ আপেক্ষক সর্বত্র একক মান বিশিষ্ট হওয়ার জন্য বাক্সের বহিঃস্থ সববিন্দুতে অর্থাৎ $x \le O$ এবং $x \ge a$ অঞ্চলে $\psi = O$ হবে।

কণার তরঙ্গ সমীকরণ ও তার সমাধান : কণাটির স্থিতিশক্তি সময়ের ওপর নির্ভরশীল নয়। অতএব বাক্সের মধ্যে $O < x < a$ অঞ্চলে (যেখানে স্থিতিশক্তি $V(x) = O$) শ্রোডিংগারের সময় নিরপেক্ষ সমীকরণের রূপ হবে

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x)$$

অথবা $$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) = 0 \qquad \text{...... (12.1)}$$

অথবা $$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + k^2\psi(x) = 0 \qquad \text{...... (12.2)}$$

যেখানে $$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \qquad \text{...... (12.3)}$$

(12.2) নং সমীকরণের সাধারণ সমাধানের রূপ

$$\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx \qquad \text{...... (12.4)}$$

এখানে A এবং B দুটি সমাকলন অচর (integration constant)। এদের নির্ণয় করার জন্য আমাদের সীমান্ত শর্তগুলি ব্যবহার করতে হবে। শর্তদুটি হল—

(i) $x = 0$ বিন্দুতে $\psi(x) = 0$

এবং (ii) $x = a$ বিন্দুতে $\psi(x) = 0$

প্রথম শর্ত থেকে আমরা পাই $B = 0$

এই মান (12.4) সমীকরণে বসিয়ে পাওয়া যায়

$$\psi(x) = A \sin kx \qquad \text{...... (12.5)}$$

এখন দ্বিতীয় শর্ত ব্যবহার করলে

$$\psi(a) = A \sin ka = 0$$

$A = 0$ নেওয়া যায় না। কেননা তাহলে সমাধানের মান শূন্য হয়ে যায়।

অতএব $\sin ka = 0$ হবে

অর্থাৎ $\sin ka = \sin n\pi$

অথবা $k = \frac{n\pi}{a}$ [যেখানে $n = 1, 2, 3 \ldots$] ...... (12.6)

$n = 0$ মানটি গ্রহণযোগ্য নয় কেননা $n = 0$ হলে $k = 0$ হবে এবং সেক্ষেত্রে বাক্সের মধ্যে সর্বত্র $\psi = 0$ হবে যেটি সম্ভব নয়। অতএব $0 < x < a$ অঞ্চলের জন্য তরঙ্গ অপেক্ষকগুলির রূপ হবে

$$\psi_n(x) = A_n \sin \frac{n\pi x}{a} \quad \ldots\ldots (12.7)$$

$$ka = n\pi$$

বা, $\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\, a = n\pi$ হতে $E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$ ...... (12.7(a)

দুইপ্রান্তে আবদ্ধ আন্দোলিত তারের সমস্যার সমাধানের ন্যায় ওপরের আইগেন মানগুলি একটি স্বতন্ত্র সেট (discrete set) তৈরী করে।

এই সমীকরণটি শক্তির আইগেনমান নির্দেশ করে। এই মানগুলিকে কণাটির শক্তির বিভিন্ন স্তর (Energy levels) বলে অভিহিত করা হয়।

(i) (12.7a) সমীকরণে $n = 1$ বসিয়ে কণার সর্বাপেক্ষা কম শক্তির মান পাওয়া যায় এবং সেটি হল

$$E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} \quad \ldots\ldots (12.8)$$

এটিকে বলা হয় ভৌম অবস্থায় শক্তিস্তরের মান (ground state energy level)

E_1 এর সাপেক্ষে E_n এর মান লেখা যায়

$$E_n = nE_1{}^2 \quad \ldots\ldots (12.9)$$

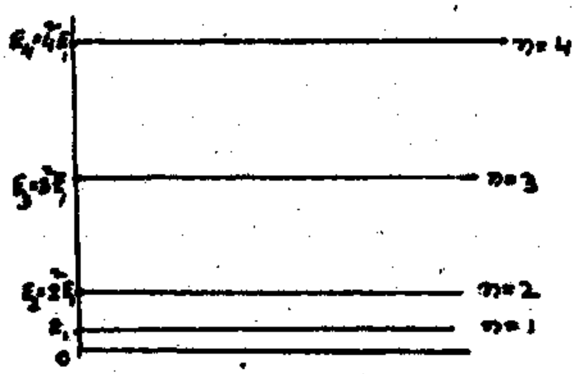
(ii) বিভব বাক্সে অবস্থিত কণাটির সম্ভাব্য শক্তিগুলির মান (12.7a) সমীকরণে $n = 1, 2, 3$ বসিয়ে পাওয়া যাবে। লক্ষণীয় যে এই মানগুলি পরস্পর থেকে বিচ্ছিন্ন (discrete)

(iii) (12.7a) সমীকরণ অনুসারে n তম এবং $(n + 1)$ তম শক্তিস্তরের মধ্যের দূরত্ব নীচের সম্পর্ক অনুযায়ী বৃদ্ধি পায়

$$(n + 1)^2E_1 - n^2E_1 = (2n + 1)E_1 = (2n + 1)\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} \quad \ldots\ldots (12.10)$$

n সংখ্যাটিকে শক্তিস্তর E_n এর কোয়ান্টাম সংখ্যা বলা হয়। (12.10) সমীকরণ থেকে দেখা যাচ্ছে যে a-র মান বৃদ্ধি পেলে শক্তিস্তরগুলির মধ্যের পার্থক্য হ্রাস পাবে এবং $a \rightarrow \alpha$ সীমায় $\Delta E \rightarrow 0$। সেক্ষেত্রে স্তরগুলি পরস্পর মিশে একটি অবিচ্ছিন্নতা সৃষ্টি করে এবং কণাটিকে মুক্ত বলা যায়।

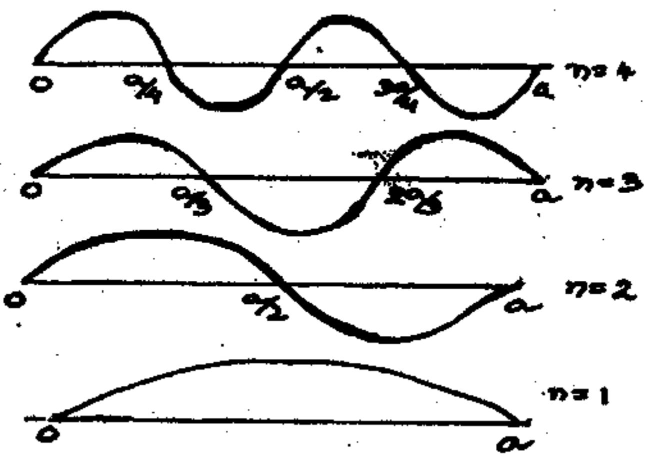
কণার বিভিন্ন স্তরগুলিকে (12.2) চিত্রে দেখানো হল।



চিত্র 12.2

n এর বিভিন্ন মানের জন্য আইগেন অপেক্ষক ψ_n এর মানগুলির একটি তালিকা নীচে দেওয়া হল এবং সেই মান অনুসারে ψ_n এর রূপ (12.3) চিত্রে দেখানো হয়েছে।

n	$\psi_n(x)$	$\psi_n(x) = 0$ হওয়ার জন্য x এর মান	$x = 0$ এবং $x = a$ বিন্দুর মধ্যে নিস্পন্দ বিন্দুর সংখ্যা
1	$A_1 \sin \frac{\pi x}{a}$	$0, a$	0
2	$A_2 \sin \frac{2\pi x}{a}$	$0, a/2, a$	1
3	$A_3 \sin \frac{3\pi x}{a}$	$0, a/3, 2a/3, a$	2
...	...	...	...
n	$A_n \sin \frac{n\pi x}{a}$	$0, a/n, 2a/n, \ldots a$	n – 1



চিত্র 12.3

আইগেন অপেক্ষক $\psi_n(x)$ গুলিকে প্রমাণিকৃত (normalisation) সহজেই করা যায়।

আমরা জানি যে $0 < x < a$ অঞ্চলে কণার গতির তরঙ্গ অপেক্ষকগুলির রূপ

$$\psi_n(x) = A_n \sin\frac{n\pi x}{a}$$

এবং $x < 0$, ও $x > a$ অঞ্চলে এই রূপ

$$\psi_n(x) = 0$$

সুতরাং বাক্সের মধ্যের যে কোন স্থানে কণার অবস্থানের মোট সম্ভাব্যতার মান একক। অর্থাৎ

$$\int_0^a |\psi_n(x)|^2\, dx = 1 \qquad \ldots\ldots (12.11)$$

অথবা $\int_0^a |A_n|^2 \sin^2\frac{n\pi x}{a}\, dx = 1$

∴ $|A_n|^2 \int_0^a \frac{1}{2}\left[1 - \cos\frac{2\pi nx}{a}\right] dx = 1$

অথবা $|A_n|^2 \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2\pi nx / a}{2\pi n / a}\right]_0^a = 1$

অথবা $|A_n|^2 \frac{a}{2} = 1$ [∵ অবকলিত দ্বিতীয় পদটির দুটি সীমাস্থ মানই শূন্য]

∴ $A_n = \sqrt{\frac{2}{a}}$

এবং $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}$ ...... (12.12)

ধরা যাক, (o, a) অঞ্চলে কণাটির দুটি বিভিন্ন শক্তিস্তরের মান E_n এবং E_m এবং সেই স্তরগুলির তরঙ্গ অপেক্ষকগুলি $\psi_n(x)$ এবং $\psi_m(x)$। এই অপেক্ষকগুলির রূপ

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}$$

$$\psi_m(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{m\pi x}{a}$$

এখানে m ও n পূর্ণ সংখ্যা।

এই ক্ষেত্রে অপেক্ষকগুলি বাস্তব (real)

সুতরাং

$$\psi_n^*(x) = \psi_n(x)$$

এবং $\psi_m^*(x) = \psi_m(x)$

যখন $m \neq n$ আমরা পাই

$$\int_0^a \psi_m^*(x)\, \psi_n(x)\, dx = \frac{2}{a} \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi x}{a}\, dx$$

$$= \frac{1}{a} \int_0^a \left[\cos \frac{(m-n)\pi x}{a} - \cos \frac{(m+n)\pi x}{a} \right] dx$$

$$= \frac{1}{a} \left[\frac{a}{\pi(m-n)} \sin \frac{(m-n)\pi x}{a} - \frac{a}{\pi(m+n)} \sin \frac{(m+n)\pi x}{a} \right]_0^a \quad \text{...... (12.13)}$$

$$= 0$$

অর্থাৎ (0, a) অঞ্চলে অপেক্ষকগুলি পরস্পর সমকোণীয় (orthogonal) তদুপরি এই অপেক্ষকগুলি পরিমিত। কোন একটি অঞ্চলে (interval) প্রমাণিকৃত এবং পরস্পর সমকোণীয় (normalised and mutually orthogonal) তরঙ্গ অপেক্ষকগুলি সেই অঞ্চলে একটি সমকোণীয় সেট তৈরী করে। এই অঞ্চলের বাইরে তরঙ্গ অপেক্ষকগুলির মান শূন্য। কাজেই x এর সব মানের জন্য (অর্থাৎ $x = -\alpha$ থেকে $x = +\alpha$ পর্যন্ত) এই অপেক্ষকগুলি সমকোণীয় (orthonormal)।

x অক্ষ বরাবর ভরবেগ p_n এর আইগেন মান

$$p_n^2 = 2mE_n$$

$$= 2m \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

$$= \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{a^2}$$

অথবা $p_n = \frac{n\pi\hbar}{a}$

অথবা $p_n = \frac{nh}{2a}$ ... ... (12.14)

সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে ভরবেগের আইগেন মানগুলি বিচ্ছিন্ন (discrete) এবং দুটি পরপর শক্তিস্তরের মধ্যের ভরবেগের পার্থক্যের মান $\frac{h}{2a}$ (12.14 সমীকরণ দ্রষ্টব্য) x এবং $x + dx$ এর মধ্যে একটি ক্ষুদ্র দৈর্ঘ্য কণার অবস্থানের সম্ভাব্যতা (Probability) ঃ

কোয়ান্টাম বলবিজ্ঞান অনুসারে x অবস্থানে ক্ষুদ্র দৈর্ঘ্য dx এর মধ্যে একটি কণার থাকার সম্ভাব্যতা $P(x)dx$ এর গাণিতিক রূপ

$$P(x)dx = |\psi_n(x)|^2\, dx$$

$$= \frac{2}{a}\sin^2\frac{n\pi x}{a}\,dx \quad \text{... ... (12.15)}$$

সুতরাং একমাত্রিক গতির জন্য সম্ভাব্যতা ঘনত্ব (Probability density)

$$P(x) = \frac{2}{a}\sin^2\frac{n\pi x}{a} \quad \text{... ... (12.16)}$$

সম্ভাব্যতা ঘনত্বের মান সবচেয়ে বেশী যখন

$$\frac{n\pi x}{a} = \pi/2,\ 3\pi/2,\ 5\pi/2$$

অর্থাৎ যখন

$$x = \frac{a}{2n}, \frac{3a}{2n}, \frac{5a}{2n} \quad \text{... ... (12.17)}$$

$n = 1$ অবস্থায় কণাটির অবস্থানের সবচেয়ে বেশী সম্ভাব্য মান (most probable position) $x = \frac{a}{2}$

$n = 2$ অবস্থায় এই মানগুলি $x = \frac{a}{4}$ এবং $x = \frac{3a}{4}$

$n = 3$ অবস্থায় এই মানগুলি $x = \frac{a}{6}$, $x = \frac{3a}{6}$ এবং $x = \frac{5a}{6}$

12.3 চিত্র লক্ষ করলে ওপরের তথ্যগুলি বোঝা যাবে।

দেখতে পাওয়া যাচ্ছে যে কোয়ান্টাম বলবিজ্ঞান অনুসারে লব্ধ ফলের মান ক্ল্যাসিকাল বলবিজ্ঞান অনুযায়ী লব্ধ মানের থেকে অনেক পৃথক।

ক্ল্যাসিকাল বলবিজ্ঞান অনুযায়ী বিভব বাক্সে অবস্থিত কণাটি সমান বেগে এক দেওয়াল থেকে অন্য দেওয়ালে আঘাত পেয়ে পূর্ণ প্রতিফলিত হয়, সুতরাং বাক্সের অন্তর্গত ক্ষুদ্র দৈর্ঘ্য dx এর মধ্যে কণাটিকে পাওয়ার সম্ভাব্যতা সর্বত্র সমান এবং এটির মান $\frac{dx}{a}$ এবং সম্ভাব্যতা ঘনত্বের মান $\frac{1}{a}$ ।

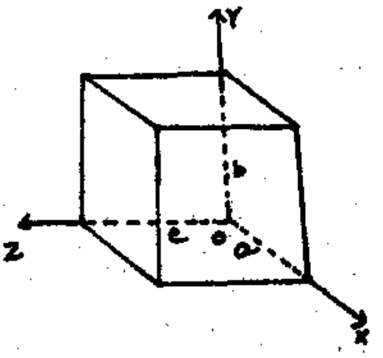
অনুশীলনী—1

ওপরের সমস্যায় অভেদ্য বিভবের দেওয়াল দুটির অবস্থানের স্থানাঙ্ক যদি $(0, a)$-র পরিবর্তে $(-a/2, a/2)$ হয় তবে তরঙ্গ অপেক্ষকগুলির রূপ কি হবে?

অনুশীলনী—2

12.2 বিভব কূপের x ও p_x এর প্রত্যাশিত মান নির্ণয় করুন।

12.3 ত্রিমাত্রিক আয়তাকার বিভব বাক্সে অবস্থিত কণা



চিত্র 12.4

একটি আয়তাকার বিভব বাক্স কল্পনা করা হল। এই বাক্সটির তিন বাহু a, b এবং c x, y এবং z অক্ষের সমান্তরাল ভাবে অবস্থিত।

ধরা যাক, m ভরযুক্ত একটি কণা এই বাক্সের মধ্যে গতিশীল।

মনে করি $0 < x < a$

$0 < y < b$

$0 < z < c$

অঞ্চলে স্থিতিশক্তি $V(x, y, z) = 0$

এবং বাক্সের বাইরের অঞ্চলে $V(x, y, z) = \alpha$

বাক্সের ভিতর কণার জন্য শ্রোডিংগারের সময় নিরপেক্ষ ত্রিমাত্রিক সমীকরণের রূপ

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = E\psi \qquad \text{...... (12.18)}$$

অথবা $$\frac{\partial^2\psi}{\delta x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\delta y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\delta z^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0 \qquad \text{...... (12.19)}$$

মনে করি তরঙ্গ অপেক্ষক $\psi(x, y, z)$ তিনটি স্বতন্ত্র অপেক্ষক $X(x)$, $Y(y)$ এবং $Z(z)$ এর গুণফল। অতএব আমরা লিখতে পারি

$$\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \qquad \text{...... (12.20)}$$

(12.19) সমীকরণে ওপরের মান বসিয়ে

$$YZ\frac{d^2x}{dx^2} + ZX\frac{d^2y}{dy^2} + XY\frac{d^2z}{dz^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}XYZ = 0 \qquad \text{...... (12,21)}$$

X, Y এবং Z অপেক্ষকের প্রত্যেকে আলাদাভাবে একটিমাত্র চরের অপেক্ষক সেই কারণে আমরা আংশিক অবকলজের পরিবর্তে সাধারণ অবকলজ ব্যবহার করা হয়েছে।

(12.21) সমীকরণকে XYZ দ্বারা ভাগ করে

$$\frac{1}{X}\frac{d^2x}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2z}{dz^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} = 0 \qquad \text{...... (12.22)}$$

গতিশক্তির একটি স্থির মানের জন্য ওপরের সমীকরণের $\frac{2mE}{\hbar^2}$ পদটির মান স্থির থাকে। শক্তি E-কে তিনটি অক্ষ বরাবর তিনটি উপাংশে E_x, E_y এবং E_z এ বিভক্ত করা যায়

অর্থাৎ $E = E_x + E_y + E_z$ ...... (12.23)

অতএব (12.22) এবং (12.23) থেকে আমরা পাই

$$\left(\frac{1}{X}\frac{d^2x}{dx^2} + \frac{2mE_x}{\hbar^2}\right) + \left(\frac{1}{Y}\frac{d^2y}{\delta y^2} + \frac{2mE_y}{\hbar^2}\right) + \left(\frac{1}{Z}\frac{d^2z}{dz^2} + \frac{2mE_z}{\hbar^2}\right) = 0$$

ওপরের সমীকরণটিকে তিনটি স্বতন্ত্র সমীকরণে ভাগ করা যায়

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{2mE_x}{\hbar^2}X = 0 \qquad \text{...... (12.24)}$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{2mE_y}{\hbar^2}Y = 0 \qquad \text{...... (12.25)}$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2} + \frac{2mE_z}{\hbar^2}Z = 0 \qquad \text{...... (12.26)}$$

(12.24) সমীকরণটি আগে আলোচিত একমাত্রিক বাক্সের ক্ষেত্রের (12.1) সমীকরণের অনুরূপ।

এক্ষেত্রে সীমান্থ শর্তগুলি $X(0) = X(a) = 0$

সুতরাং E_x এর আইগেন মানগুলি হবে

$$E_x = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} n_x^2 \quad \dots\dots (12.27)$$

যেখানে $n_x = 1, 2, 3 \dots \dots$

এবং প্রমাণিকৃত আইগেন অপেক্ষকগুলির মান

$$X(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\frac{n_x \pi_x}{a} \quad \dots\dots (12.28)$$

Y এবং Z এর সাপেক্ষে অনুরূপভাবে আমরা পাই

$$E_y = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mb^2} n_y^2$$

$$Y(y) = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin\frac{n_y \pi_y}{b} \quad \dots\dots (12.29)$$

এবং $E_z = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mc^2} n_z^2$

$$Z(z) = \sqrt{\frac{2}{c}} \sin\frac{n_z \pi_z}{c} \quad \dots\dots (12.30)$$

E_x, E_y এবং E_z এর মান (12.23)-তে বসিয়ে

$$E_{n_x n_y n_z} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left[\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} + \frac{n_z^2}{c^2}\right] \quad \dots\dots (12.31)$$

এখানে $n_x = 1, 2, 3 \dots \dots$

$n_y = 1, 2, 3 \dots \dots$

$n_z = 1, 2, 3 \dots \dots$

ওপরের সমীকরণ থেকে শক্তির আইগেন মানগুলি পাওয়া যায়। এগুলিকে কণার বিভিন্ন শক্তিস্তরের মান বলা হয়। (energy levels of the particle) অতএব স্থিরাবস্থায় (stationary state) বাক্সের মধ্যে প্রমাণিকৃত সম্পূর্ণ তরঙ্গ অপেক্ষকের মান

$$\psi_{n_x n_y n_z}(x, y, z) = X(x)\, Y(y)\, Z(z)$$

$$= \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin\frac{n_x \pi x}{a} \sin\frac{n_y \pi y}{b} \sin\frac{n_z \pi z}{c} \quad \dots\dots (12.32)$$

যেখানে n_x, n_y, n_z এর মান পূর্ণ সংখ্যা নির্দেশ করে। বাক্সের বাইরের অঞ্চলে তরঙ্গ অপেক্ষকের মানশূন্য। (12.31) এবং (12.32) সমীকরণ থেকে নীচের সিদ্ধান্তগুলিতে উপনীত হওয়া যায়।

(i) প্রত্যেকটি স্থিতাবস্থাকে বিবৃত করতে তিনটি কোয়ান্টাম সংখ্যা n_x, n_y এবং n_z এর প্রয়োজন। এগুলির প্রত্যেকটির মানই ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা দ্বারা নির্দেশিত হয়। এগুলির কোনটির মানই শূন্য হতে পারে না, কেননা কোন একটির মান শূন্য হওয়ার অর্থ $\psi(x, y, z) = 0$ অর্থাৎ বাক্সের মধ্যে কণাটি নেই।

(ii) নিম্নতম সম্ভাব্য শক্তি অর্থাৎ ভৌম অবস্থায় (ground state) শক্তির মান $n_x = n_y = n_z = 1$ বসিয়ে পাওয়া যায় এবং এই মানটি a, b এবং c এর মানের ওপর নির্ভর করে।

(iii) কণাটি যদি একটি বর্গক্ষেত্রাকার বাক্সে অবস্থিত হয়, অর্থাৎ যদি $a = b = c = L$ হয় তাহলে শক্তি স্তরগুলির মান

$$E_{n_x n_y n_z} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\ (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \qquad \dots\dots (12.33)$$

এবং ভৌম অবস্থায় কণাটির শক্তির মান

$$E_{111} = \frac{3\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \qquad \dots\dots (12.34)$$

অন্য কোন অবস্থায় শক্তির এই মান পাওয়া যাবে না। সেই জন্য ভৌম অবস্থা এবং শক্তিস্তরকে অনপভ্রষ্ট (non-degenerate) বলা হয়।

(iv) বর্গক্ষেত্রাকার বাক্সের ভিতর কণাটির শক্তি কোয়ান্টাম সংখ্যাগুলির বর্গের যোগফলের ওপর নির্ভর করে। ফলস্বরূপ উত্তেজিত অবস্থায় একই শক্তি সম্পন্ন কণার বিভিন্ন স্থিরাবস্থা বা বিভিন্ন তরঙ্গ অপেক্ষক হওয়া সম্ভব। এই অবস্থাগুলি এবং শক্তিস্তরগুলিকে বলা হয় অপজাত (degenerate).

উদাহরণ স্বরূপ প্রথম উত্তেজিত অবস্থায় (first excited state) কোয়ান্টাম সংখ্যাগুলির মান নিম্নরূপ হবে

n_x	n_y	n_z
2	1	1
1	2	1
1	1	2

সুতরাং আমরা তিনটি আইগেন অপেক্ষক পাব এবং স্থিরাবস্থার সংখ্যাও তিনটি হবে।

প্রত্যেকটি অবস্থায় শক্তির মান কিন্তু একই $= \frac{6\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$.

সেই হেতু প্রথম উত্তেজিত অবস্থাকে ত্রিমাত্রিক অপজাত (three fold degenerate) বলা হয়।

কোন শক্তিস্তরের স্থিরাবস্থার বর্ণনার জন্য প্রয়োজনীয় স্বতন্ত্র তরঙ্গ অপেক্ষকের সংখ্যাকে সেই শক্তিস্তরের অপজাত্য বলা হয়।

পূর্বে বর্ণিত উপায়ে বর্গক্ষেত্রাকার বাক্সে অবস্থিত কণার ক্ষেত্রে বিভিন্ন উত্তেজিত অবস্থায় আপজাত্যের মাত্রা নির্ণয় করা যায়।

অনুশীলনী —3

(a) $1\AA$ বাহুযুক্ত একটি বর্গক্ষেত্রাকার বিভব বাক্সে আবদ্ধ একটি ইলেকট্রনের সর্বনিম্নশক্তির মান নির্ণয় করুন।

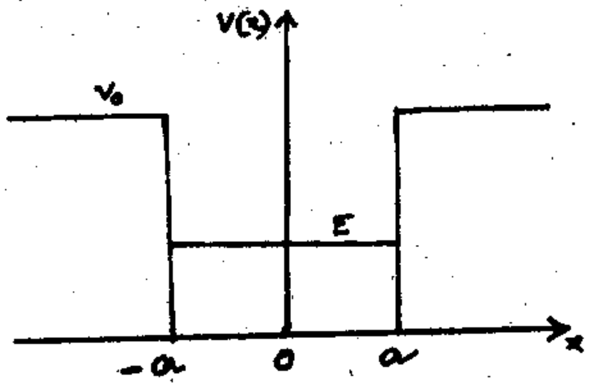
$$\begin{pmatrix} m = 9.11\times10^{-31}\,kg \\ \hbar = 1.054\times10^{-34}\,J.sec \end{pmatrix}$$

(b) ইলেকট্রনের সর্বনিম্নশক্তির মান যে উষ্ণতায় আদর্শ গ্যাসের অণুর গড়শক্তির মানের সমান হয় সেই তাপমাত্রাটি নির্ণয় করুন। (দেওয়া আছে $k = 1.38\times10^{-23}\,J/°K$)

অনুশীলনী —4

বর্গক্ষেত্রাকার একটি বিভববাক্সে অবস্থিত একটি কণার শক্তিস্তর $\frac{14\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$ এর আপজাত্যের মাত্রা (degree of degeneracy) নির্ণয় করুন।

12.3 একমাত্রিক আয়তাকার সসীম বিভবকূপে অবস্থিত কণা



চিত্র 12.5, এখানে $E < V_0$

(12.5) চিত্রে একটি আয়তাকার বিভব কূপ আঁকা হয়েছে। চিত্রে নির্দেশিত তিনটি অঞ্চলে বিভবের মান

I : $(x \leq -a)$-তে $V = V_0$

II : $(-a < x < a)$-তে $V = 0$

এবং III : $(x \geq a)$-তে $V = V_0$

মনে করি m ভর এবং $E(E > 0)$ শক্তিযুক্ত একটি কণা বিভব কূপের মধ্যে অর্থাৎ দ্বিতীয় অঞ্চলে আছে। তিনটি ক্ষেত্রের সময় নিরপেক্ষ শ্রোডিংগার সমীকরণের রূপ

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + V_0\psi_1 = E\psi_1 \qquad \text{...... (12.35)}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_2}{dx^2} = E\psi_2 \qquad \text{...... (12.36)}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_3}{dx^2} + V_0\psi_3 = E\psi_3 \qquad \text{...... (12.37)}$$

ψ_1, ψ_2 এবং ψ_3 তিনটি অঞ্চলের তরঙ্গ অপেক্ষকের রূপ। কণাটির শক্তি E, V_0 অপেক্ষা বৃহত্তর অথবা ক্ষুদ্রতর উভয়ই হতে পারে।

প্রথম ক্ষেত্র যখন $E < V_0$

মনে করি $\alpha^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ এবং $\beta^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}$ ...... (12.38)

এখানে α এবং β উভয়েই বাস্তব (real)।

(12.35), (12.36) এবং (12.37) সমীকরণে এই মান বসিয়ে আমরা পাই

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} - \beta^2\psi_1 = 0 \qquad \text{...... (12.39)}$$

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + \alpha^2\psi_2 = 0 \qquad \text{...... (12.40)}$$

$$\frac{d^2\psi_3}{dx^2} - \beta^2\psi_3 = 0 \qquad \text{...... (12.41)}$$

ওপরের তিনটি সমীকরণের সমাধানগুলি যথাক্রমে

$$\psi_1 = A \exp(\beta x) + B \exp(-\beta x) \qquad \text{...... (12.42)}$$

$$\psi_2 = C \exp(i\alpha x) + D \exp(-i\alpha x) \qquad \text{...... (12.43)}$$

$$\psi_3 = F \exp(-\beta x) + G \exp(\beta x) \qquad \text{...... (12.44)}$$

অঞ্চল I $x = -a$ থেকে $x = -\alpha$ পর্যন্ত বিস্তৃত। সম্পূর্ণ অঞ্চলে $\psi_1(x)$-কে সদাচারী (well behaved) হতে হবে (সদাচারী : অপেক্ষক এবং তার প্রথম অবকলজকে একমানী, সসীম এবং সন্তত হতে হবে)। সেজন্য $\psi_1(-\alpha) = 0$ হওয়া প্রয়োজন। (12.42) সমীকরণে $B = 0$ বসালে এটি সম্ভব হবে।

অনুরূপভাবে অঞ্চল III $x = +a$ থেকে $x = \alpha$ পর্যন্ত বিস্তৃত। এখানে $\psi_3(x)$-কে সদাচারী হতে হলে $\psi_3(\alpha) = 0$ হতে হবে, অর্থাৎ (12.44) সমীকরণে $G = 0$ বসাতে হবে।

অতএব এই তিন অঞ্চলের সদাচারী সমাধানগুলি নিম্নের ন্যায়

$$\psi_1 = A \exp(\beta x) \qquad \text{... ... (12.45)}$$

$$\psi_2 = C \exp(i\alpha x) + D \exp(-i\alpha x) \qquad \text{... ... (12.46)}$$

$$\psi_3 = F \exp(-\beta x) \qquad \text{... ... (12.47)}$$

$x = -a$ এবং $x = +a$-তে সীমান্ত শর্তগুলি হল

$$\psi_1(-a) = \psi_2(-a) \quad \frac{d\psi_1}{dx}(-a) = \frac{d\psi_2}{dx}(-a) \qquad \text{... ... (12.48)}$$

$$\psi_2(a) = \psi_3(a) \quad \frac{d\psi_2}{dx}(a) = \frac{d\psi_3}{dx}(a) \qquad \text{... ... (12.49)}$$

[বিঃ দ্রঃ — অসীম বিভরযুক্ত কূপের ক্ষেত্রে (বিভব বাক্সের ক্ষেত্রে) এই শর্তগুলি প্রযোজ্য হয় না]

সীমান্ত শর্ত (12.48) থেকে $x = -a$-তে আমরা লিখতে পারি

$$c \exp(-i\alpha a) + D \exp(i\alpha a) = -A\beta \exp(-\beta a) \qquad \text{... ... (12.50)}$$

এবং $\quad -ci\alpha \exp(-i\alpha a) + Di\alpha \exp(i\alpha a) = -A\beta \exp(-\beta a)$

অথবা $\quad c \exp(-i\alpha a) - D \exp(i\alpha a) = -\dfrac{i\beta}{\alpha} A \exp(-\beta a) \qquad \text{... ... (12.51)}$

(12.50) এবং (12.51) সমীকরণকে যোগ, এবং (12.50) সমীকরণ থেকে (12.51) সমীকরণ বিয়োগ করলে পাওয়া যায়

$$2C \exp(-i\alpha a) = \left(1 - \frac{i\beta}{\alpha}\right) A \exp(-\beta a)$$

এবং $\quad 2D \exp(i\alpha a) = \left(1 + \dfrac{i\beta}{\alpha}\right) A \exp(-\beta a)$

ওপরের দুটি সমীকরণের অনুপাত নিলে

$$\frac{C}{D} \exp(-2i\alpha a) = \frac{\alpha - i\beta}{\alpha + i\beta}$$

অথবা $\quad \dfrac{C}{D} = \dfrac{\alpha - i\beta}{\alpha + i\beta} \exp(2i\alpha a) \qquad \text{... ... (12.52)}$

আবার সীমান্ত শর্ত (12.49) থেকে $x = +a$-তে আমরা লিখতে পারি

$$C \exp(i\alpha a) + D \exp(-i\alpha a) = F \exp(-\beta a) \qquad \text{... ... (12.53)}$$

এবং $\quad i\alpha C \exp(i\alpha a) - i\alpha D \exp(-i\alpha a) = -\beta F \exp(-\beta a)$

অথবা $\quad C \exp(i\alpha a) - D \exp(-i\alpha a) = \dfrac{i\beta}{\alpha} F \exp(-\beta a) \qquad \text{... ... (12.54)}$

(12.53) এবং (12.54) সমীকরণ যোগ এবং (12.53) থেকে (12.54) সমীকরণ বিয়োগ করলে পাওয়া যায়

$$2C\exp\,(i\alpha a) = \left(1+\frac{i\beta}{\alpha}\right) F\exp\,(-\beta a)$$

$$2D\exp\,(-i\alpha a) = \left(1-\frac{i\beta}{\alpha}\right) F\exp\,(-\beta a)$$

দুটির অনুপাত নিলে পাওয়া যায়

$$\frac{C}{D}\exp\,(2i\alpha a) = \frac{(\alpha+i\beta)}{(\alpha-i\beta)}$$

অথবা $\frac{C}{D} = \left(\frac{\alpha+i\beta}{\alpha-i\beta}\right)\exp^{(-2i\alpha a)}$ …… (12.55)

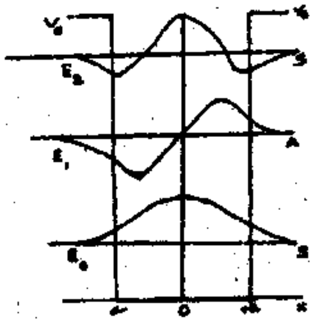
শক্তি E-এর বিশেষ কয়েকটি মান ছাড়া (12.52) এবং (12.55) সমীকরণ দুটির একত্রে সমাধান সম্ভব নয়। সেই মানগুলিকে নির্ণয়ের জন্য সমীকরণ দুটিকে গুণ করে আমরা পাই

$$\frac{C^2}{D^2} = 1 \text{ অথবা } \frac{C}{D} = \pm 1$$

কাজেই দুই ধরনের সমাধান পাওয়া যাবে, একটি ধনাত্মক চিহ্নের জন্য এবং অন্যটি ঋণাত্মক চিহ্নের জন্য। $C = D$ হলে সমীকরণ (12.50) এবং (12.53) থেকে পাওয়া যায় $A = F$ …… (12.56)

এবং (12.46) সমীকরণের রূপ হবে

$$\psi_2 = 2C\cos\alpha x \left[\because \begin{array}{l} e^{i\alpha x} = \cos\alpha x + i\sin\alpha x \\ e^{-i\alpha x} = \cos\alpha x - i\sin\alpha x \end{array}\right] \quad \text{…… (12.57)}$$



চিত্র 12.6

চিত্র (12.6)-তে E_0 এবং E_2 শক্তির জন্য দেখা যায় যে আইগেন অপেক্ষকগুলি মধ্যবিন্দু $x = 0$ এর উভয়দিকে সমভাবে বন্টিত (Symmetric)।

এক্ষেত্রে $\psi(x) = \psi(-x)$ এবং এই আইগেন অপেক্ষকগুলি যুগ্ম প্যারিটি (even parity) সম্বলিত বলা হয়।

$C = -D$ হলে সমীকরণ (12.50) এবং (12.53) থেকে আমরা পাই $A = -F$ …… (12.58)

এবং (12.46) সমীকরণের রূপ হবে

$$\psi_2 = 2iC \sin \alpha x \qquad \text{…… (12.59)}$$

চিত্র (12.6)-তে দেখা যাচ্ছে যে মধ্যবিন্দু $x = 0$ এর উভয়দিকে আইগেন অপেক্ষকগুলি বিপ্রতিসম (anti symmetric) ভাবে অবস্থিত।

এক্ষেত্রে $\psi(-x) = -\psi(x)$ এবং এই আইগেন অপেক্ষকগুলি অযুগ্ম প্যারিটি (odd parity) সম্বলিত।

ক্ল্যাসিকাল তত্ত্ব অনুসারে $E < V_0$ হলে কণাটি কূপের মধ্যে সম্পূর্ণ ভাবে আবদ্ধ থাকবে। কিন্তু কোয়ান্টাম বলবিদ্যা অনুযায়ী কণা অনুবর্তী তরঙ্গ অপেক্ষকগুলি কূপের দেওয়াল ভেদ করে উভয় দিকে কিছুদূর পর্যন্ত বিস্তৃত হয় এবং সীমা ($x = \pm a$) থেকে দূরত্ব বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে এক্সপোনেন্টি (exponentially) রূপে মান হ্রাস পায়। ভেদ্যতার পরিমাণ β-র মানবৃদ্ধি (অর্থাৎ E এর মান বৃদ্ধি)-র সঙ্গে বৃদ্ধি পায়।

আইগেনমান ঃ — (12.52) এবং (12.55) সমীকরণ উভয়ই একই সঙ্গে সিদ্ধ হলে আমরা লিখতে পারি

$$\frac{\alpha - i\beta}{\alpha + i\beta} \exp(2i\alpha a) = \frac{\alpha + i\beta}{\alpha - i\beta} \exp(-2i\alpha a)$$

অথবা $(\alpha + i\beta)^2 \exp(-2i\alpha a) = (\alpha - i\beta)^2 \exp(2i\alpha a)$

$$\therefore \quad (\alpha + i\beta)\exp(-i\alpha a) = \pm(\alpha - i\beta)\exp(i\alpha a) \qquad \text{…… (12.60)}$$

সমীকরণের ডানদিকে ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক চিহ্ন দ্বারা প্রতিসম (Symmetrical) এবং বিপ্রতিসম (anti symmetric) সমাধান নির্দেশ করা হয়।

প্রতিসম সমাধানের ক্ষেত্রে

$$(\alpha + i\beta)\exp(-i\alpha a) - (\alpha - i\beta)\exp(i\alpha a)$$

অথবা $\alpha \exp(-i\alpha a) + i\beta \exp(-i\alpha a) = \alpha \exp(i\alpha a) - i\beta \exp(i\alpha a)$

$$\alpha[\exp(i\alpha a) - \exp(-i\alpha a)] = i\beta\,[\exp(i\alpha a) + \exp(-i\alpha a)]$$

অথবা $zi\alpha \sin(\alpha a) = zi\beta \cos(\alpha a)$

অথবা $\alpha \sin(\alpha a).a = \beta \cos(\alpha a).a$ …… (12.61)

$$\therefore \quad \alpha a \tan(\alpha a) = \beta a \qquad \text{…… (12.62)}$$

বিপ্রতিসম সমাধানের ক্ষেত্রে

$$(\alpha + i\beta)\exp(-i\alpha a) = -(\alpha - i\beta)\exp(i\alpha a)$$

অথবা $\alpha \exp(-i\alpha a) + i\beta \exp(-i\alpha a) = i\beta \exp(i\alpha a) - \alpha \exp(i\alpha a)$

অথবা $\alpha[\exp(i\alpha a) + \exp(-i\alpha a)] = i\beta [\exp(i\alpha a) - \exp(-i\alpha a)]$

অথবা $2\alpha \cos(\alpha a).a = -2\beta \sin(\alpha a).a$ ...... (12.63)

অথবা $\alpha a \cot(\alpha a) = -\beta a$ ...... (12.64)

অথবা (12.38) সমীকরণ ব্যবহার করে আমরা লিখতে পারি

$$(\alpha^2 + \beta^2)a^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2} a^2 \qquad \text{...... (12.65)}$$

$\alpha a = \xi$ এবং $\beta a = \eta$ লিখলে আমরা নীচের দুই জোড়া সমীকরণ পাই

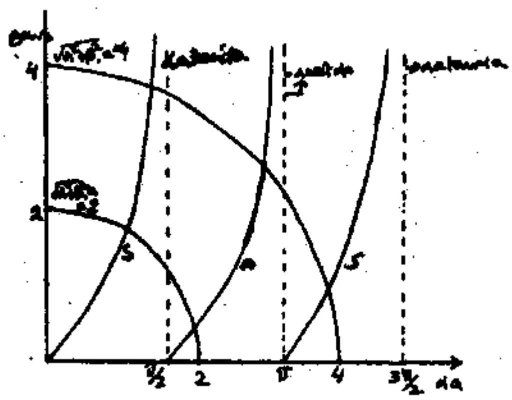
(i) প্রতিসম সমাধানের ক্ষেত্রে (12.62) এবং (12.65) সমীকরণ থেকে পাই

$$\eta = \xi \tan \xi \text{ এবং } \xi^2 + \eta^2 = \frac{2mV_0a^2}{\hbar^2} \qquad \text{...... (12.66(a))}$$

(ii) বিপ্রতিসম সমাধানের ক্ষেত্রে (12.64) এবং (12.65) সমীকরণ থেকে পাই

$$\eta = -\xi \cot \xi \text{ এবং } \xi^2 + \eta^2 = \frac{2mV_0a^2}{\hbar^2} \qquad \text{...... (12.66(b))}$$

ওপরের দুই জোড়া সমীকরণ থেকে প্রতিসম এবং বিপ্রতিসম ক্ষেত্রের সম্ভাব্য শক্তির আইগেনমানগুলি পাওয়া যায়



চিত্র 12.7

ওপরের দুই জোড়া ξ এবং η চরের সহসমীকরণের (simultaneous equations) গাণিতিকভাবে সমাধান সম্ভব নয়, একমাত্র লেখ চিত্রের সাহায্যে সম্ভব। V_0 এবং a-র নির্দিষ্ট মানের জন্য যে কোন এক জোড়া সমীকরণ (i অথবা ii) লেখের ছেদবিন্দুগুলি সম্ভাব্য শক্তির মান নির্দেশ করে।

(12.7) লেখচিত্রটি লক্ষ করুন। এখানে দুটি বিশেষ ক্ষেত্রের সমাধানগুলি আঁকা হয়েছে।

মনে করি

$$(\xi^2 + \eta^2)^{1/2} = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}.a = 2$$

এবং $$(\xi^2 + \eta^2)^{1/2} = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}.a = 4$$

প্রথম ক্ষেত্রে যখন $\alpha = 0$ তখন $\beta a = 2$ এবং যখন $\beta = 0$ তখন $\alpha a = 2$

অনুরূপে দ্বিতীয় ক্ষেত্রে যখন $\alpha = 0$ তখন $\beta a = 4$ এবং যখন $\beta = 0$ তখন $\alpha a = 4$

(α এবং β-র মান সব সময় ধনাত্মক হবে)

সুতরাং আমরা দুটি এককেন্দ্রীক বৃত্তের এক চুতর্থাংশ পাব (12.7 চিত্র দ্রষ্টব্য)। এই বৃত্তাংশগুলির সঙ্গে নিম্নের লেখগুলি

$$\eta = \xi \tan \xi \text{ অথবা } \beta a = \alpha a \tan \alpha a \text{ (প্রতিসম)}$$

এবং $$\eta = -\xi \tan \xi \text{ অথবা } \beta a = -\alpha a \cot \alpha a \text{ (বিপ্রতিসম)}$$

এর ছেদবিন্দুগুলি থেকে আমরা সম্ভাব্যশক্তির মানপাব। চিত্রে দেখা যাচ্ছে যে $(\xi^2 + \eta^2)^{1/2} = 2$ মানের জন্য একটি প্রতিসম এবং একটি বিপ্রতিসম সমাধান পাওয়া যায়। $(\xi^2 + \eta^2)^{1/2} = 4$ এর জন্য দুটি প্রতিসম এবং বিপ্রতিসম সমাধান পাওয়া যায়।

V_0 এবং a-র মান বৃদ্ধির সঙ্গে সম্ভাব্য শক্তিস্তরের সংখ্যা বৃদ্ধি পায়।

$\xi^2 + \eta^2 = \dfrac{2mV_0a^2}{\hbar^2}$ বৃত্তটি ξ অক্ষকে $\xi_m = \left(\dfrac{2mv_0a^2}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ বিন্দুতে ছেদ করে। $(\xi^2 + \eta^2)^{1/2} = 2$ এর জন্য $\xi_m = 2$

অতএব আমরা লিখতে পারি $\frac{\pi}{2} < \xi_m < \pi$ (12.7 নং চিত্র থেকে) এবং ছেদ বিন্দুর সংখ্যা 2 অর্থাৎ এক্ষেত্রে বদ্ধ অবস্থার (bound state) সংখ্যা 2.

আবার $(\xi^2 + \eta^2)^{1/2} = 4$ এর জন্য $\xi_m = 4$

চিত্র থেকে লিখতে পারি $\pi < \xi_m < \frac{3\pi}{2}$ এবং পূর্বের ন্যায় এক্ষেত্রে ছেদ বিন্দুর সংখ্যা 3 অর্থাৎ বদ্ধ অবস্থার সংখ্যা = 3 সাধারণভাবে লেখা যায়

$\frac{n\pi}{2} < \xi_m < (n+1)\frac{\pi}{2}$ অবস্থায় বদ্ধ অবস্থার সংখ্যা $(n + 1)$

উচ্চতর শক্তিস্তরগুলির জন্য আইগেন অপেক্ষকগুলির নিস্পন্দবিন্দুগুলির সংখ্যা বৃদ্ধি পায়। যথা n-তম আইগেন অপেক্ষকের $(n - 1)$ সংখ্যক নিস্পন্দবিন্দু বর্তমান। ওপরের আলোচনা থেকে এটি স্পষ্ট হল যে কোন

কণার সংশ্লিষ্ট শ্রোডিংগার সমীকরণের সমাধানগুলি বিভিন্ন অঞ্চলে সীমাস্থ শর্তপূরণ করে সদাচারী হওয়া প্রয়োজন। এই কারণেই বিভব কূপে অবস্থিত কণার সম্ভাব্য শক্তির আইগেন মানগুলি বিচ্ছিন্ন (discrete) হয়।

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে

যখন $E > V_0$

মনে করি আয়তক্ষেত্রকার কূপটি $x = 0$ থেকে $x = a$ পর্যন্ত বিস্তৃত। সুতরাং তিনটি অঞ্চলে শ্রোডিংগারের সমীকরণের রূপ হবে

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + k_1^2\psi_1 = 0$$

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + k_2^2\psi_2 = 0$$

$$\frac{d^2\psi_3}{dx^3} + k_1^2\psi_3 = 0$$

যেখানে $k_1^2 = \dfrac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}$ …… (12.67a)

এবং $k_2^2 = \dfrac{2mE}{\hbar^2}$ …… (12.67b)

তৃতীয় অঞ্চলে বামদিক থেকে কোন তরঙ্গ আসছে না সেই হেতু সমাধানগুলির রূপ হবে

$$\psi_1 = A\ \exp(ik_1x) + B\ \exp(-ik_1x) \quad \text{…… (12.68a)}$$

$$\psi_2 = C\ \exp(ik_2x) + D\ \exp(-ik_2x) \quad \text{…… (12.68b)}$$

$$\psi_3 = F\ \exp(ik_1x) \quad \text{…… (12.68c)}$$

সীমাস্থ শর্তগুলি হ'ল

$$\psi_1(o) = \psi_2(o) \quad \frac{d\psi_1(o)}{dx} = \frac{d\psi_2(o)}{dx} \quad \text{…… (12.69a)}$$

$$\psi_2(a) = \psi_3(a) \quad \frac{d\psi_2(a)}{dx} = \frac{d\psi_3(a)}{dx} \quad \text{…… (12.69b)}$$

সীমাস্থ শর্ত (12.69a) প্রয়োগ করলে

$A + B = C + D$ যখন $\psi_1(o) = \psi_2(o)$

এবং $ik_1(A - B) = ik_2(C - D)$ যখন $\dfrac{d\psi_1(o)}{dx} = \dfrac{d\psi_2(o)}{dx}$

ওপরের দুটি শর্ত থেকে লিখতে পারি

যোগ করে $A\left(1 + \dfrac{k_1}{k_2}\right) + B\left(1 - \dfrac{k_1}{k_2}\right) = 2C$ …… (12.70a)

এবং বিয়োগ করে $A\left(1-\frac{k_1}{k_2}\right)-B\left(1+\frac{k_1}{k_2}\right)=2D$ ...... (12.70b)

আবার (12.69b) শর্ত প্রয়োগ করে পাই

$$C\exp(ik_2a)+D\exp(-ik_2a)=F\exp(ik_1a)$$

এবং $ik_2C\exp(ik_2a)-ik_2D\exp(-ik_2a)=ik_1F\exp(ik_1a)$

ওপরের দুটি সম্পর্ক থেকে লিখতে পারি

যোগ করে $2C\exp(ik_2a)=\left(1+\frac{k_1}{k_2}\right)F\exp(ik_1a)$

অথবা $2C=\left(1+\frac{k_1}{k_2}\right)F\exp\{i(k_1-k_2)a\}$ ...... (12.71a)

এবং বিয়োগ করে $2D\exp(-ik_2a)=\left(1-\frac{k_1}{k_2}\right)F\exp(ik_1a)$

অথবা $2D=\left(1-\frac{k_1}{k_2}\right)F\exp\{i(k_1+k_2)a\}$ ...... (12.71b)

(12.71a) সমীকরণের মান (12.70a)-তে এবং (12.71b) এর মান (12.70b)-তে বসিয়ে পাই

$$A\left(1+\frac{k_1}{k_2}\right)+B\left(1-\frac{k_1}{k_2}\right)=F\left(1+\frac{k_1}{k_2}\right)\exp\{i(k_1-k_2)a\} \quad \text{...... (12.72)}$$

$$A\left(1-\frac{k_1}{k_2}\right)+B\left(1+\frac{k_1}{k_2}\right)=F\left(1-\frac{k_1}{k_2}\right)\exp\{i(k_1+k_2)a\} \quad \text{...... (12.73)}$$

অঞ্চল I এবং অঞ্চল II এ আপতিত এবং প্রতিফলিত তরঙ্গ অপেক্ষকের রূপ

(আপতিত তরঙ্গ অপেক্ষক = ψ_{in}

প্রতিফলিত তরঙ্গ অপেক্ষক = ψ_r

উত্তীর্ণ তরঙ্গ অপেক্ষক = ψ_t)

$$\psi_{1in}=A\exp(ik_1x);\ \psi_1r=B\exp(-ik_1x) \quad \text{...... (12.74)}$$

$$\psi_{2in}=C\exp(ik_2x);\ \psi_2r=D\exp(-ik_2x) \quad \text{...... (12.75)}$$

অঞ্চল III এ উত্তীর্ণ (transmitted) তরঙ্গ অপেক্ষক

$$\psi_3t=F\exp(ik_1x) \quad \text{...... (12.76)}$$

আপতিত এবং উত্তীর্ণ সম্ভাব্যতা প্রবাহ ঘনত্বের (incident and transmitted probability current density) রূপ

$$j_1\ \text{in} = \frac{i\hbar}{2m}(\psi_1\text{in}\ \psi_1{}^*\text{in} - \psi_1{}^*\text{in}\ \psi_1\ \text{in}) = \frac{\hbar}{m}k_1\,|A|^2 \qquad \ldots\ldots (12.77)$$

$$j_3\,t = \frac{i\hbar}{2m}(\psi_{3t}\,\psi_{3t}{}^* - \psi_{3t}{}^*\,\psi_{3t}) = \frac{\hbar}{m}k_1\,|F|^2 \qquad \ldots\ldots (12.78)$$

উত্তরণ গুণাঙ্ক $T = \frac{j_{3t}}{j_1\ \text{in}} = \left|\frac{F}{A}\right|^2$ ...... (12.79)

সরলীকরণের পরে T এর মান

$$T = \frac{4k_1{}^2k_2{}^2}{4k_1{}^2k_2{}^2 + (k_1{}^2 - k_2{}^2)^2\sin^2 k_2a}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{V_0{}^2}{4E\,(E - V_0)}\sin^2 k_2a} \qquad \ldots\ldots (12.80)$$

বিশেষ ক্ষেত্র ঃ মনে করি কূপের বিস্তার a = ডি ব্রগলি তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের অর্ধেক।

সেক্ষেত্রে $a = \frac{\lambda_2}{2} = \frac{\pi}{k_2}$

$\therefore\quad k_2a = \pi$ অর্থাৎ $\sin k_2a = 0$

অতএব (12.80) সমীকরণ অনুসারে আমরা পাই $T = 1$

অর্থাৎ এখানে আপতিত তরঙ্গের শতকরা ১০০ ভাগই বিভব কূপের মধ্য দিয়ে উত্তীর্ণ হবে।

$x = 0$ এবং $x = a$-তে সীমান্ত শর্তগুলি থেকে পাওয়া যায় ($\because\ \exp(ik_2a) = -1$)

$$A + B = C + D \qquad A - B = \frac{k_2}{k_1}(C - D)$$

$$C + D = -F\exp(ik_1a) \qquad (C - D) = -\frac{k_1}{k_2}F\exp(ik_1a)$$

এই সম্পর্কগুলি থেকে পাই $B = 0$

অতএব $A = -F\exp(ik_1a)$

অর্থাৎ $|A|^2 = |F|^2 \rightarrow$ এই সম্পর্ক থেকে শতকরা ১০০ ভাগ উত্তরণের প্রমাণ পাওয়া যায়। তবে আপতিত এবং উত্তীর্ণ তরঙ্গে দশা এক নয়।

দেখা গেছে যে একটি বিশেষ ক্রান্তীয় গতিশক্তি যুক্ত ইলেকট্রনের কাছে ক্রিপটন (Krypton), আরগন (Argon), জেনন (Xenon) গ্যাসগুলি সম্পূর্ণ স্বচ্ছ মাধ্যমের ন্যায় আচরণ করে। ওপরের তত্ত্বের সাহায্যে এই ঘটনার ব্যাখ্যা দেওয়া যায়।

12.4 রৈখিক সরল দোলক

রৈখিক সরল দোলকের সমস্যাটি ক্ল্যাসিকাল (সনাতন) এবং কোয়ান্টাম উভয় বলবিদ্যাতেই যথেষ্ট গুরুত্বপূর্ণ স্থান অধিকার করে আছে। বহু জটিল সমস্যাকে ফুরিয়ে (Fourier) বিশ্লেষণের সাহায্যে বিভিন্ন কম্পাঙ্কের কতকগুলি সরল দোলকের সমষ্টি হিসাবে প্রকাশ করা যায়। উদাহরণস্বরূপ বলা যায় কঠিন বস্তুর আপেক্ষিক তাপ নির্ণয়ের জন্য ডিবাই (Debye) কেলাসিত বস্তুটির অনুগুলির গতিকে কতকগুলি সুসমঞ্জ সরল দোলকের (বিভিন্ন কম্পাঙ্ক বিশিষ্ট) সমষ্টি হিসাবে প্রকাশ করেছিলেন।

ক্ল্যাসিকাল তত্ত্ব অনুসারে m ভর বিশিষ্ট একটি কণা যার ওপর x-অক্ষ বরাবর প্রত্যানয়ক বল $F = -m\omega^2 x$ ক্রিয়া করছে তাকেই সরল দোলক বলা যায়।

এক্ষেত্রে গতীয় সমীকরণটির রূপ হবে

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

এবং এই সমীকরণের সমাধান হিসাবে লেখা যায় $x = a \cos \omega t$. এই সমাধান একটি 'a' বিস্তার এবং 'ω' কৌণিক কম্পাঙ্কযুক্ত দোলন গতির রূপ।

বিভব এবং বলের মধ্যের সম্পর্ক

$$F = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

অতএব আমরা লিখতে পারি $V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$

এবং দোলনী গতির মোট শক্তি = যে কোন প্রান্তবিন্দুতে কণাটির মোট স্থিতিশক্তি অর্থাৎ $E = \frac{1}{2} ma^2\omega^2$

এবার আমরা কোয়ান্টাম বলবিদ্যার সাহায্যে এই সমস্যার সমাধানের চেষ্টা করব।

শ্রোডিংগারের সময় নিরপেক্ষ আইগেনমান সমীকরণ নিম্নরূপ

$$Hu = Eu$$

এখানে স্থিতাবস্থায় মোট শক্তি E, তরঙ্গ অপেক্ষক = u এবং H = হ্যামিলটোনিয়ান = $\frac{p^2}{2m} + V$

সরল দোলকের ক্ষেত্রে

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} kx^2 \qquad \ldots \ldots (12.81)$$

এখানে k = কেন্দ্রবিন্দু থেকে কণার প্রতি একক সরণের জন্য বল ক্ল্যাসিকাল তত্ত্ব অনুসারে কণাটি $\frac{w}{2\pi}$ কম্পাঙ্কে দোলে যেখানে $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$। সুতরাং আমরা লিখতে পারি $k = m\omega^2$ অতএব শক্তির আইগেনমান সমীকরণের রূপ

$$\left(\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)u = Eu \quad (\because\ p = i\hbar \text{ grad}) \qquad \ldots\ldots (12.82)$$

ওপরের সমীকরণটিকে আমরা একটি মাত্রাহীন সমীকরণ রূপে প্রকাশ করতে পারি। সমীকরণটির দুই দিককে $\frac{2}{\hbar w}$ দিয়ে গুণ করলে পাওয়া যায়

$$\frac{2}{\hbar\omega}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2\right]u = \frac{2E}{\hbar\omega}u.$$

বা, $$\left[-\frac{\hbar}{m\omega}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right]u = \frac{2E}{\hbar\omega}u.$$

বা, $$\left[\frac{-d^2}{dp^2}+p^2\right]u = \lambda u$$ যেখানে $p = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$ এবং $\lambda = \frac{2E}{\hbar\omega}$

বা, $$\frac{d^2u}{dp^2}+(\lambda - p^2)u = 0 \qquad \ldots\ldots (12.83)$$

লক্ষ করুন p এবং λ রাশি দুটি মাত্রাহীন। শক্তি E এবং λ এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য আমরা (12.83) সমীকরণের ভিন্ন ভিন্ন সমাধান পেতে পারি। কিন্তু সমাধানগুলি x অথবা p চলরাশিটির অসীম মানের জন্য অপসারী হলে চলবে না, বরং অসীম দূরত্বে u এর মান ক্রমশঃ শূন্য হতে হবে।

a এর বৃহত্তর মানে অর্থাৎ $p \to \pm\alpha$ সীমায় p^2 এর মান λ এর তুলনায় বেশী হওয়ায় 12.83 সমীকরণের রূপ হয়।

$$\frac{d^2u}{dp^2} - p^2u = 0 \qquad \ldots\ldots (12.84)$$

$u = e^{\pm p^2/2}$ এর সমাধান হতে পারে। কিন্তু $P = \pm\alpha$. u বস্তুর সসীম মানের হওয়া প্রয়োজন বলে গ্রহণযোগ্য সমাধান $u \sim e^{-p^2/2}$.

সেক্ষেত্রে যে কোন P এর জন্য 12.83 এর সাধারণ সমাধানকে নিম্নরূপ রাশিমালা দ্বারা প্রকাশ করা যায়

$$u = H(p)e^{-p^2/2} \qquad \ldots\ldots (12.85)$$

এখানে $H(p) - p$ এর সসীমক্রমের বহুপদশ্রেণী 12.83 সমীকরণে এই সমাধান বসিয়ে পাই

$$\{H''P - 2PH' + (\lambda - 1)H\}e^{-P/2} = 0$$

বা, $$H''P - 2PH' + (\lambda - 1)H = 0 \qquad \ldots\ldots (12.86)$$

এখানে $H'' = \frac{d^2H}{dp^2}$ এবং $H' = \frac{dH}{dp}$.

অনুশীলনী—5

দেখান যে $\frac{d^2u}{dp^2} + (\lambda - p^2)u = 0$ সমীকরণে u এর মান $u = e^{-p^2/2} H(p)$ বসালে আমরা

$$H'' - 2pH' + (\lambda - 1)H = 0 \text{ সমীকরণ পাই}$$

একটি ঘাত শ্রেণীর সাহায্যে ওপরের সমাকল সমীকরণটির সমাধান করা যায়। মনে করা যাক শ্রেণীটির রূপ

$$H(p) = p^s \sum_i a_i p^i \qquad \dots \dots (12.87)$$

এখানে $i = 0, 1, 2, \dots$; s একটি বাস্তব সংখ্যা, এটির মান নীচের উপায়ে নির্ণয় করা যায়।

(12.87) সমীকরণকে অবকলন করলে

$$H'(p) = p^s \sum_i (s+i) a_i p^{(i-1)}$$

$$H''(p) = p^s \sum_i (s+i)(s+i-1) a_i p^{(i-2)}$$

(12.86) সমীকরণে ওপরের মানগুলি বসিয়ে

$$\sum_i \left[(s+i)(s+i-1) a_i p^{(i+s-2)} - 2(s+i) a_i p^{(i+s)} + (\lambda - 1) a_i p^{(i+s)} \right] = 0$$

ওপরের সম্পর্কটি pএর সব মানের জন্যই সত্য অতএব pএর প্রত্যেক ঘাতের সহগগুলি পৃথকভাবে শূন্য হবে। $i = 0$ এবং $i = 1$ এর জন্য দুটি সূচক সম্বন্ধীয় (indicial) সমীকরণ পাওয়া যায় যেখান থেকে এর মান নির্ণয় করা যায়।

$i = 0$-র জন্য p^{s-2} এর সহগ $= s(s-1)a_0 = 0$ ...... (12.88)

এবং $i = 1$-র জন্য p^{s-1} এর সহগ $= s(s+1)a_1 = 0$ ...... (12.89)

i এর যেকোন সাধারণ মানের জন্য p^{s+i} এর সহগের মান নীচের সম্পর্কের থেকে নির্ণয় করা যায়

$$(s + i + 2)(s + i + 1)a_{i+2} - 2(s + i)a_i + (\lambda - 1)a_i = 0 \qquad \dots \dots (12.90)$$

ওপরের সম্পর্ক থেকে a_i সহগগুলির একটি আবৃত্ত সম্পর্ক (recursing relation) পাওয়া যায়

$$\frac{a_{i+2}}{a_i} = \frac{2s + 2i + 1 - \lambda}{(s + i + 2)(s + i + 1)} \qquad \dots \dots (12.91)$$

এই আবৃত্ত সম্পর্কটির সাহায্যে a_i জানা থাকলে a_{i+2}, a_{i+4} ইত্যাদি একান্তর (alternate) সহগগুলির মান নির্ণয় করা যায়।

এখন যদি (12.87) শ্রেণীটি অসীম সংখ্যক পদ থাকে তাহলে i এর বৃহৎ মানের জন্য (12.91) থেকে আমরা পাই

$$\frac{a_{i+2}}{a_i} \to \frac{2i}{i^2} \to \frac{2}{i} \qquad \dots \dots (12.92)$$

$\frac{a_{i+2}}{a_i}$ এর মান e^{p^2} এর শ্রেণী প্রসারণের (series expansion) যে কোন দুটি পদ p^{2i+2} এবং p^{2i} এর সহগের অনুপাতের সমান। সুতরাং অসীম শ্রেণীতে p এর উচ্চতর মানের জন্য H এর শ্রেণী e^{p^2} এর ন্যায় আচরণ করবে এবং (12.85) সমাধানে $e^{-\frac{p^2}{2}}H$রাশিটি $e^{\frac{p^2}{2}}$ ন্যায় আচরণ করবে। এটি একটি সদাচারী (well behaved) অপেক্ষক নয়, সেইজন্য এটিকে তরঙ্গ অপেক্ষক হিসাবে গণ্য করা যায় না। কাজেই আমাদের শক্তির আইগেন মানগুলি এমন ভাবে বেছে নিতে হবে যাতে H এর শ্রেণীটি নির্দিষ্ট কিছু সংখ্যক পদের পরে সমাপ্ত হয়।

p এর ঘাত s এর যে সম্ভাব্য মানগুলির সাহায্যে (12.87) শ্রেণীটি সসীম হয় সেই মানগুলি (12.88) এবং (12.89) সম্পর্ক থেকে পাওয়া যায়।

(12.88) থেকে পাই সম্ভাব্য মান দুটি $s = 0$ অথবা $s = 1$ [কিন্তু $a_0 \neq 0$] $s = 0$ নিলে যুগ্ম ঘাত যুক্ত পদের (যেগুলির সহগ $a_0, a_2, a_4 \ldots$) শ্রেণীটি বর্তমান থাকবে। এটিকে সসীম হতে গেলে মনে করি শ্রেণীটি a_i তে সমাপ্ত হয় যেখানে $i = 2\tau$ ($\tau = 0, 1, 2 \ldots$) অর্থাৎ শ্রেণীটিতে $(\tau + 1)$ সংখ্যক p এর যুগ্মঘাত যুক্ত পদ থাকবে। তাহলে আবৃত্ত সম্পর্ক (12.91) থেকে বলা যায়

$a_{i+2} = 0$ অথবা $2s + 2i + 1 - \lambda = 0$

যেহেতু এখানে $s = 0 \quad \therefore \quad \lambda - 1 = 2i = 2\tau$

অথবা $\lambda = 4\tau + 1$ $\qquad$ …… (12.93a)

λ র সম্ভাব্য মানগুলি $\lambda = 1, 5, 9, 13$

এবং শক্তির আইগেনমানগুলি

$$E = \frac{\hbar\omega}{2}, 5\frac{\hbar\omega}{2}, 9\frac{\hbar\omega}{2} \qquad \ldots\ldots (12.93b)$$

লক্ষণীয় $s = 0$-র জন্য a_1 শূন্য হতে পারে নাও হতে পারে। $a \neq 0$ হলে $u(p)$ এর শ্রেণীটিতে p এর যুগ্ম ঘাতযুক্ত পদ ছাড়া অন্য বিযুগ্ম ঘাত যুক্ত পদও থাকতে পারে। যার ফলে বর্গ সমাকল করা কঠিন হবে।

এই অসুবিধা দূর করার জন্য $a_1 = 0$ নেওয়া হয়। সেক্ষেত্রে বিযুগ্ম সহগ $a_3, a_5 \ldots$ গুলি শূন্য হবে।

সুতরাং $s = 0$ এবং $a_0 \neq 0$ র জন্য আমরা পাই

$$H(p) = H_0(p) = a_0 + a_2p^2 + a_4p^4 + \ldots + a_{2\tau}p^{2\tau} \qquad \ldots\ldots (12.94)$$

আবৃত্ত সম্পর্ক (12.91) ব্যবহার করে সহগ a_2, a_4 ইত্যাদি নির্ণয় করা যায় (a_0 জানা থাকলে)

এবার আমরা $s = 1$ এবং $a_1 = 0$ ক্ষেত্রটি আলোচনা করব। $a_1 = 0$ হলে শ্রেণীর রূপ হবে

$$H(p) = H_1(p) = a_0p + a_2p^3 + a_4p^5 + \ldots + a_{2\tau}p^{2\tau+1} \qquad \ldots\ldots (12.95)$$

সদাচারী (well behaved) সমাধান হতে হলে ওপরের শ্রেণীটিকে কোন মান $i = 2\tau$ ($\tau = 0, 1, 2 \ldots$) তে সমাপ্ত হতে হবে। সেক্ষেত্রে ওপরের শ্রেণীটি p এর বিজোড় ঘাত যুক্ত $(\tau + 1)$ সংখ্যক পদের হবে।

(12.91) সম্পর্ক থেকে শ্রেণীটি সমাপ্ত হওয়ার শর্ত পাওয়া যায় $\because$ $s = 1$ সুতরাং

$$2s + 2\tau + 1 - \lambda = 0$$

অথবা $2 + 4\tau + 1 = \lambda$

$$\therefore \quad \lambda = 4\tau + 3$$

λ এর সম্ভাব্য মানগুলি $\lambda = 3, 7, 11, 15$ …… (12.96a)

সুতরাং শক্তির সম্ভাব্য আইগেন মানগুলি হবে

$$E = 3\frac{\hbar\omega}{2}, 7\frac{\hbar\omega}{2}, 11\frac{\hbar\omega}{2} \ldots \qquad \ldots\ldots (12.96b)$$

(12.93) এবং (12.96) কে মিলিতভাবে একটি সাধারণরূপে লেখা যায়

$$\lambda_n = 4\tau + 2s + 1 \qquad (s = 0 \text{ অথবা } 1)$$

$$= 2n + 1 \qquad \ldots\ldots (12.97a)$$

এখানে $n = s + 2\tau = 0, 1, 2, 3$ (কারণ τ এর সম্ভাব্য মান $0, 1, 2, 3 \ldots$ এবং s এর মান 0 অথবা 1)

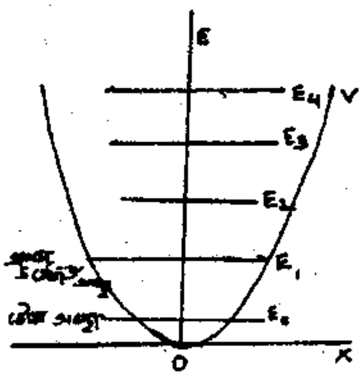
অতএব শক্তিস্তরের আইগেন মানগুলি

$$E_n = \lambda_n \frac{\hbar\omega}{2} = (n + 1/2)\hbar\omega \qquad \ldots\ldots (12.97b)$$

(12.97b) থেকে দেখা যাচ্ছে যে শক্তিস্তরগুলি বিচ্ছিন্ন এবং সমদূরত্বে অবস্থিত।

পূরনো কোয়ান্টাম তত্ত্বের প্ল্যাঙ্কের প্রকল্পের (যে শক্তিস্তরের মানগুলি বিচ্ছিন্ন এবং সমদূরত্বে অবস্থিত) সঙ্গে এর মিল আছে। পূরানো কোয়ান্টাম তত্ত্বের ফলের সঙ্গে ওপরের ফলের তুলনা করলে দেখা যায় যে, প্ল্যাঙ্কের কোয়ান্টাম তত্ত্ব অনুসারে শক্তিস্তরগুলির রূপ $E_n = n\hbar\omega$ এবং (12.97a) অনুসারে।

$$E_n = (n + 1/2)\hbar\omega_1$$



চিত্র 12.8

প্ল্যাঙ্কের কোয়ান্টাম অনুসারে $n = 0$ র জন্য $E_0 = 0$ অর্থাৎ ভৌম অবস্থায় শক্তির মান শূন্য। কিন্তু (12.97a) অনুযায়ী $n = 0$ র জন্য $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$। অর্থাৎ সাম্যাবস্থায় স্থির থাকলেও সরল দোলকের কিছু শক্তি থাকে। এই শক্তিকে বলা হয় শূন্যাংক শক্তি (zero point energy)। (চিত্র 12.8 দেখুন)। এই শূন্যাংক শক্তির অস্তিত্ব হাইসেনবার্গের অনিশ্চয়তা প্রকল্পের প্রয়োগের একটি উদাহরণ। পুরানো কোয়ান্টাম তত্ত্ব অনুসারে যদি ভৌম অবস্থায় (ground state) $E_0 = 0$ হয় তার অর্থ এই অবস্থায় দোলকের স্থিতিশক্তি এবং গতিশক্তি উভয়েই শূন্য হবে এবং সেই অবস্থায় $x = 0$ হতে হবে অর্থাৎ অবস্থাটি বিভব কূপের নিম্নতম বিন্দু হবে।

অতএব দোলকের অবস্থান নিশ্চিতভাবে জানা যাবে অর্থাৎ $\Delta x = 0$ এছাড়া দোলকের গতিশক্তি শূন্য হওয়ায় ভরবেগের মানও নিশ্চিত রূপে জানা যাবে অর্থাৎ $\Delta p = 0$।

সুতরাং আমরা দেখলাম এক্ষেত্রে Δx এবং Δp উভয়েই শূন্য হবে যেটি অনিশ্চয়তার প্রকল্পের পরিপন্থী।

এবার আমরা দেখবো কি করে অনিশ্চয়তার প্রকল্পের সাহায্যে শূন্যাংক শক্তির ব্যাখ্যা দেওয়া যায়।

যদি দোলকের ভরবেগের বিস্তার Δp এবং স্থিতির বিস্তারকে Δx বলি তাহলে শক্তির মান লিখতে পারি

$$E = \frac{1}{2}\left[\frac{(\Delta p)^2}{m} + k(\Delta x)^2\right]$$

অনিশ্চয়তার প্রকল্প থেকে $\Delta x = \frac{\hbar}{\Delta p}$

সুতরাং
$$E = \frac{1}{2}\left[\frac{(\Delta p)^2}{m} + \frac{k\hbar^2}{(\Delta p)^2}\right] \quad \ldots\ldots (12.98)$$

ক্ষুদ্রতম মানের জন্য $\frac{dE}{dp} = 0 = \frac{\Delta p}{m} - \frac{k\hbar^2}{(\Delta p)^3}$

অথবা $\frac{\Delta p}{m} = \frac{k\hbar^2}{(\Delta p)^3}$

অথবা $(\Delta p)^4 = k\hbar^2 m$

সুতরাং (12.98) সমীকরণে $(\Delta p)^4$ এর পরিবর্তে $k\hbar^2 m$ লিখে শক্তির ক্ষুদ্রতম মান পাওয়া যাবে।

$$\therefore\ E_{min} = \frac{1}{2}\left[\frac{(\Delta p)^4 + k\hbar^2 m}{m(\Delta p)^2}\right] = \frac{1}{2}\frac{k\hbar^2 m + k\hbar^2 m}{2m(k\hbar^2 m)^{1/2}}$$

$$= \frac{(k\hbar^2 m)^{1/2}}{2m} = \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

কিন্তু আমরা জানি $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\therefore\ E_{min} = \frac{\hbar\omega}{2}$$

শূন্যাংক শক্তির কারণ এই যে ঃ বিভবের প্রভাবে কণাটি একটি নির্দিষ্ট স্থানের মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকে কাজেই অনিশ্চয়তার প্রকল্প অনুসারে কণাটির ভরবেগের মান নির্দিষ্ট করা যায় না। বিশেষ করে ভরবেগ শূন্য হতে পারে না, সুতরাং কোন অবস্থাতেই দোলকটির শক্তি অবলুপ্ত হবে না। দেখা যায় যে সরল দোলকের ভৌম অবস্থাটি অনিশ্চয়তার একটি ক্ষুদ্রতম অবস্থা (minimum uncertainty state), যেখানে $\Delta x\, \Delta p_x$ এর ক্ষুদ্রতম মান $\frac{\hbar}{2}$ হয়।

প্যারিটি (Parity)—

আবৃত্ত সম্পর্ক (12.91) থেকে আমরা দেখেছি যে (12.87) সমীকরণে H এর ঘাত শ্রেণীটিকে সসীম রূপ দিতে গেলে শ্রেণীটিকে a_i সহগযুক্ত পদে সমাপ্ত হতে হবে এবং সেই পদে p এর সর্বোচ্চ ঘাত হবে $(s + i) = n$. এখন যদি আমরা পলিনোমিয়াল (Polynomial) বা বহুপদ শ্রেণীটিকে $H_n(p)$দ্বারা প্রকাশ করি তাহলে n এর মান যুগ্ম অথবা অযুগ্ম সংখ্যা হলে এই শ্রেণীটিও যুগ্ম অথবা অযুগ্ম সংখ্যক পদের হবে। কারণ $H_n(p) = (-1)^n H_n(-P)$ এবং $n(p) = e^{-p^2/2} H(p)$ সমাধানে (12.85 সমীকরণ দ্রষ্টব্য) যেহেতু $e^{-p^2/2}$পদে বর্গ উপস্থিত থাকায় স্থান উৎক্রমণে (space reversal) এর কোন পরিবর্তন হবে না সুতরাং $u(p)$ এর আইগেন অপেক্ষকগুলির প্যারিটি এবং $H(p)$ এর প্যারিটি একই হবে।

(12.86) সমীকরণ $H'' - 2pH' + (\lambda - 1)H = 0$ তে $\lambda = 2n + 1$ বসিয়ে পাই

$$H''_n - 2pH'_n + 2n\, H_n = 0 \qquad \ldots\ldots (12.99)$$

ওপরের সমীকরণের সমাধান একটি n ক্রমের (order) বহুপদ শ্রেণী (polynomial)। এটিকে n ক্রমের হারমাইট পলিনোমিয়াল $H_n(p)$ বলা হয়।

$H_n(p)$ এর ধর্ম বিস্তৃতভাবে আলোচনা করার জন্য এটিকে একটি জনক অপেক্ষকের (Generating function) সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। অপেক্ষকটিকে $G(p, s)$ লিখলে

$$G(p, s) = \sum_n \frac{1}{n!} H_n(p) s^n = e^{p^2 - (s-p)^2} = e^{(-s^2 + 2sp)} \qquad \ldots\ldots (12.100)$$

s এর মান যে কোন বাস্তব সংখ্যা হতে পারে। (12.100) সম্পর্কতে প্রকাশিত Hn এর মান (12.99) সমীকরণকে সন্তুষ্ট করে দেখানোর জন্য (12.100) সমীকরণকে প্রথমে P এবং পরে s এর সাপেক্ষে অবকলন করা হল

$$\frac{\partial G}{\partial p} = 2se^{-s^2 + 2ps} = \sum_n 2s \frac{s^n}{n!} H_n(p) = \sum 2 \frac{s^{n+1}}{n!} H_n(p)$$

$$= \sum_n \frac{s^n}{n!} H'_n(p)$$

$$\frac{\partial G}{\partial s} = (-2s + 2P)e^{-s^2 + 2sP} = \sum_n (-2s + 2P) \frac{s^n}{n!} H_n(P)$$

$$= \sum_n \frac{ns^{n-1}}{n!} H_n(P) = \sum \frac{S^{n-1}}{(n-1)!} H_n(P)$$

সুতরাং আমরা পাই

$$\frac{\partial G}{\partial P} = \sum_n \frac{2s^{n+1}}{n!} H_n(P) = \sum_n \frac{s^n}{n!} H'_n(P)$$

এবং $\quad \frac{\partial G}{\partial s} = \sum_n \frac{(-2s+2p)s^n}{n!} H_n(P) = \sum_n \frac{s^{n-1}}{(n-1)!} H_n(P)$

ওপরের দুটি সমীকরণে যদি s এর সমান ঘাতযুক্ত পদগুলিকে উভয়দিকে সমান লিখি তাহলে

প্রথম সমীকরণে s^n যুক্ত পদগুলিকে সমান লিখে

$$\frac{2s^n}{(n-1)!} H_{n-1}(P) = \frac{s^n}{n!} H_n'(P)$$

অথবা $H_n' = \frac{n!}{(n-1)!} 2H_{n-1}$

অথবা $\boldsymbol{H_n' = 2n\, H_{n-1}}$

দ্বিতীয় সমীকরণে s^n যুক্ত পদগুলিকে সমান লিখে

$$\frac{-2s^n}{(n-1)!} H_{n-1}(P) + \frac{2ps^n}{n!} H_n(p) = \frac{s^n}{n!} H_{n+1}(P)$$

$n!$ দ্বারা গুণ করে পাই

$$-2n\, H_{n-1}(P) + 2p\, H_n(p) = H_{n+1}(P)$$

অথবা $\boldsymbol{-2n\, H_{n-1} + 2pH_n = H_{n+1}}$

অতএব আমরা যে দুটি সম্পর্ক পেলাম সে দুটি হল

$$H_n' = 2nH_{n-1} \qquad \dots \dots (12.101a)$$

এবং $\quad H_{n+1} = 2PH_n - 2nH_{n-1} \qquad \dots \dots (12.101b)$

(12.101a) থেকে পাই

$$H'_n = 2nH_{n-1}$$

অথবা $H''_n = 2nH'_{n-1} = 2n \times 2(n-1)H_{n-2}$

(12.101b) কে লেখা যায়

$$H_{n+1} - 2PH_n + 2nH_{n-1} = 0$$

ওপরের সম্পর্ককে নীচের রূপেও লেখা যায়

$$H_n - 2PH_{n-1} + 2(n-1)H_{n-2} = 0$$

$2H_{n-1}$ এবং $2(n-1)\,H_{n-2}$ এর মান বসিয়ে

$$H_n - p\,\frac{H_n'}{n} + \frac{H_n''}{2n} = 0$$

অথবা $H''_n - 2pH'_n + 2nH_n = 0$ ... এটিই 12.99 সমীকরণের রূপ, এই সমীকরণটি এবং সরল রৈখিক দোলক সমস্যার সমাধানের জন্য যে সমীকরণের সাহায্য নিয়েছি তা অভিন্ন। অতএব এই সমীকরণে যে বহুপদ শ্রেণীটি ব্যবহার করা হয়েছে সেটি হারমাইট পলিনোমিয়াল $H_n(P)$।

$H_n(P)$ এর নির্দিষ্ট রূপটি নির্ণয় করতে হলে আমাদের $G(p, s)$ এর সাহায্য নিতে হবে।

আমরা জানি যে

$$G(P, s) = \sum_n \frac{H_n(p)s^n}{n!} = e^{p^2 - (s-p)^2}$$

দেখা যাবে যে ওপরের সম্পর্ককে s এর সাপেক্ষে $-n$ সংখ্যকবার অবকলন করে $s = 0$ বসালে যে মানটি পাওয়া যাবে সেটি $H_n(P)$

$$\therefore\quad \frac{\partial^n G}{\partial s^n} = \frac{\partial^n}{\partial s^n}\sum_s \frac{H_n(P)s^n}{n!} = (\text{নীন্নঘাতের পদগুলি শূন্য হবে})$$

$$+\frac{n!}{n!}H_n(P) + \text{সহগ} \times sH_{n+1}(P) + \text{সহগ} \times s^2H_{n+2}(P) + \ldots$$

ওপরের সম্পর্কে $s = 0$ বসালে

$$\frac{\partial^n G}{\partial s^n} = H_n(P)$$

এখন অপেক্ষক $f(s-p)$ এর ক্ষেত্রে আমরা লিখতে পারি $\frac{\partial f}{\partial s} = -\frac{\partial f}{\partial p}$.

$$\therefore\quad \frac{\partial^n G}{\partial s^n} = eP^2\,\frac{\partial}{\partial s^n}e^{-(s-p)^2} = e^{p^2}(-1)^n\,\frac{\partial}{\partial p^n}e^{-(s-p)^2}$$

এখন $s = 0$ বসিয়ে আমরা n ক্রমের হারমাইট পলিনোমিয়ালের রূপ পাই

$$\frac{\partial^n G}{\partial s^n} = H_n(p) = e^{p^2}\,(-1)^n\,\frac{\partial}{\partial p^n}e^{-p^2} \qquad \ldots\ldots (12.102)$$

খুব সহজেই দেখানো যায় যে n এর বিভিন্ন যুগ্ম এবং অযুগ্ম মানের জন্য (12.94) এবং (12.95) সমীকরণে ব্যবহৃত শ্রেণী দুটি (একটি ধ্রুবক গুণিতক (multiplication const) ছাড়া) এবং ওপরের পলিনোমিয়ালটি অভিন্ন।

n এর বিভিন্ন মানের জন্য হারমাইট পলিনোমিয়ালের রূপ

$$H_0(P) = 1 \quad H_1(P) = 2P \quad H_2(P) = 4P^2 - 2 \quad H_3(P) = 8P^3 - 12$$

সরল রৈখিক দোলকের তরঙ্গ অপেক্ষকের প্রমাণিকৃত (normalized) রূপ

$$\psi_n(P) = N_n e^{-p^2/2} H_n(P) \qquad \dots \dots (12.103)$$

এখানে N_n = প্রমাণিকরণ ধ্রুবক (normalisation const)

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{\pi} n! 2^n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

n এর যুগ্ম এবং অযুগ্ম বিভিন্ন মানের জন্য কয়েকটি $\psi_n(P)$ এর মান নীচে দেওয়া হল

$$\psi_0(P) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{p^2}{2}}$$

$$\psi_1(P) = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} p e^{-\frac{p^2}{2}}$$

$$\psi_2(P) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} (2p^2 - 1) e^{-\frac{p^2}{2}}$$

$$\psi_3(P) = \left(\frac{1}{3\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} (2p^3 - 3p) e^{-\frac{p^2}{2}} \qquad \dots \dots (12.104)$$

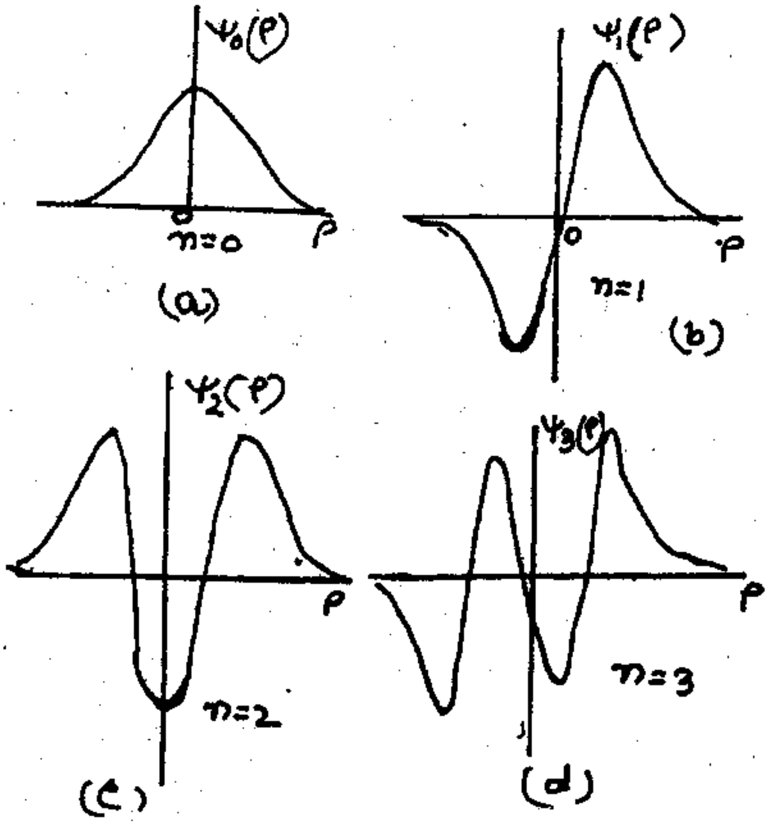
লক্ষণীয় যে p এর সীমিত (finite) মানের জন্য ψ_0-তে কোন নিস্পন্দ বিন্দু নেই। n-এর উচ্চমানের জন্য নিস্পন্দ বিন্দুর সংখ্যা n এর সঙ্গে বৃদ্ধি পায়। উদাহরণস্বরূপ ψ_1 এ $p = 0$ তে একটি নিস্পন্দ বিন্দু আছে ψ_2 এর $P = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ এ দুটি নিস্পন্দ বিন্দু আছে।

(12.104) এর তালিকাভূক্ত তরঙ্গ অপেক্ষকগুলিকে দুটি ভাগে ভাগ করা যায়। এগুলি হয় p এর যুগ্ম অপেক্ষক অথবা অযুগ্ম অপেক্ষক।

P কে $-p$ তে পরিবর্তিত করলে $\psi(p)$, $\psi(-p)$ তে পরিবর্তিত হয়। (12.104) সম্পর্কগুলিতে দেখা যায় যে

$n = 0$ অথবা যুগ্ম সংখ্যা হলে $\psi(-p) = \psi(p)$ হবে অর্থাৎ পরিবর্তনে তরঙ্গ অপেক্ষকের রূপ অপরিবর্তিত থাকবে এবং n = অযুগ্ম সংখ্যা হলে $\psi(-p) = -\psi(p)$ হবে অর্থাৎ পরিবর্তনে তরঙ্গ অপেক্ষকের রূপের চিহ্নের পরিবর্তন হবে, তরঙ্গ অপেক্ষকের এই ধর্মকে প্যারিটির সাপেক্ষে বলা হয় যে $n = 0$ অথবা যুগ্ম মানের জন্য $\psi(p)$ এর যুগ্ম প্যারিটি (even parity) এবং n = অযুগ্ম মানের জন্য $\psi(p)$ এর অযুগ্ম প্যারিটি (odd parity) হয়।

চিত্রে (12.9) এ সরল রৈখিক দোলকের কয়েকটি প্রমাণিকৃত তরঙ্গ অপেক্ষকের চিত্ররূপ দেখানো হল।



চিত্র 12.9

12.6 সারাংশ

এই অংশটি পড়ে আমরা শ্রোডিংগার সমীকরণের আবদ্ধ অবস্থায় কিছু প্রয়োগের কথা জানলাম।

প্রথম প্রয়োগটি হচ্ছে একমাত্রিক অসীম বিভবকূপে অবস্থিত কোন কণার সম্ভাব্য বিভিন্ন তরঙ্গ অপেক্ষক এবং শক্তিস্তর নির্ণয় করা। অসীম বিভবের দেওয়াল দুটির অবস্থান যদি O এবং a তে ধরা হয় তবে কণা সংলগ্ন তরঙ্গ অপেক্ষকগুলির প্রমাণিকৃত রূপ

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} \; n = 1, 2 \ldots \ldots \text{ এবং শক্তির মান } E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

বিভব বাক্সটি ত্রিমাত্রিক হলে প্রমাণিকৃত তরঙ্গ অপেক্ষকের মান হয়

$$\psi_{n_x n_y n_z}(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{abc}}\ \sin\frac{n_x \pi_x}{a} \sin\frac{n_y \pi_y}{b} \sin\frac{n_z \pi_z}{c}$$ এবং

শক্তির মান $E_{n_x n_y n_z} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m}\left[\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} + \frac{n_z^2}{c^2}\right]$

যেখানে $n_x = 1, 2, 3 \ldots$

$n_y = 1, 2, 3 \ldots$

$n_z = 1, 2, 3 \ldots$

কণাটি যদি একটি বর্গক্ষেত্রাকার বাক্সে অবস্থিত হয় অর্থাৎ $a = b = c = L$ তাহলে শক্তিস্তরগুলির মান হবে

$$E_{n_x n_y n_z} = \frac{\pi \hbar^2}{2mL^2}\ (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

দেখা যাচ্ছে যে কণাটির শক্তি কোয়ান্টাম সংখ্যাগুলির বর্গের যোগফলের ওপর নির্ভর করে। কাজেই উত্তেজিত অবস্থায় একই শক্তি সম্পন্ন কণার বিভিন্ন স্থিরাবস্থা বা বিভিন্ন তরঙ্গ অপেক্ষক হওয়া সম্ভব। এই অবস্থাগুলি এবং শক্তিস্তরগুলিকে বলা হয় অপজাত (degenerate)। এই ক্ষেত্রে কেবল মাত্র ভৌম অবস্থার (ground state) শক্তিযুক্ত কণার একটি তরঙ্গ অপেক্ষক বা একটি স্থিরাবস্থা সম্ভব। সেইজন্য ভৌম অবস্থাটি অপজাত নয়।

একমাত্রিক আয়তাকার বিভব কূপটি যদি সসীম হয় তাহলে দুটি ক্ষেত্রের আলোচনা প্রয়োজন— (a) যখন $E < V_0$ তখন দুটি ধরনের তরঙ্গ অপেক্ষক পাওয়া যায়। যুগ্ম মানের শক্তিস্তরের তরঙ্গ অপেক্ষকগুলি কূপের মধ্যবিন্দুর উভয়দিকে প্রতিসমভাবে-অবস্থিত থাকে (symmetric); এবং অযুগ্মমানের শক্তিস্তরের তরঙ্গ অপেক্ষকগুলি বিপ্রতিসম ভাবে অবস্থিত থাকে (antisymmetric)। (b) যখন $E > V_0$ — তখন আপতিত তরঙ্গের কিছু অংশের বিভবকূপের ভিতর দিয়ে উত্তীর্ণ হওয়া সম্ভব। এই উত্তরণ গুণাঙ্কের রূপ

$T = \frac{j_{3t}}{j_1\ \text{in}}$ যেখানে j_1 in = আপতিত সম্ভাব্যতা প্রবাহের ঘনত্ব

এবং j_{3t} = উত্তীর্ণ সম্ভাব্যতা প্রবাহের ঘনত্ব

বিশেষ একটি ক্ষেত্রে কূপের বিস্তার ডি-ব্রগলি তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের অর্ধেক হলে আপতিত তরঙ্গের শতকরা ১০০ ভাগেরই বিভবকূপের ভিতর দিয়ে উত্তীর্ণ হওয়া সম্ভব।

সবশেষে সরল রৈখিক দোলকের কথা আলোচনা করে আপনারা শূন্যাঙ্ক শক্তির বিষয়ে জেনেছেন যে সাম্যাবস্থায় স্থির থাকলেও সরল দোলকের কিছু শক্তি থাকে। এই শক্তিকে বলা হয় শূন্যাঙ্ক শক্তি এবং এটির মান $\frac{\hbar\omega}{2}$। এই শূন্যাঙ্ক শক্তির অস্তিত্ব হাইসেনবার্গের অনিশ্চয়তা প্রকল্পকে প্রমাণ করে।

12.7 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

(1) m ভর বিশিষ্ট একটি সরল দোলকের স্থিতিশক্তির মান $V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$ যেখানে ω = দোলকটির কৌণিক কম্পাঙ্ক

(a) সরল দোলকটির জন্য শ্রোডিংগারের সময় নিরপেক্ষ সমীকরণটি লিখুন

(b) দেওয়া আছে ভৌম অবস্থায় দোলকের হ্যামিলটোনিয়ানের আইগেন অপেক্ষকের রূপ

$\psi_0 = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\alpha x^2/2}$ যেখানে $\alpha = \frac{m\omega}{\hbar}$ দোলকটির ভৌম অবস্থায় শক্তির আইগেন মান নির্ণয় করুন।

(2) দেখান যে নীচের ঘাত শ্রেণীটি

$$H(y) = A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3 + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\alpha} A_n y^n$$

যদি n এর কোন একটি মানে গিয়ে শূন্য না হয় তাহলে তরঙ্গ অপেক্ষক $\psi = e^{-y^2/2}.H(y)$ এর মান y এর অতি উচ্চমানের জন্য অসীম হবে; অর্থাৎ $y \to \alpha$ হলে $\psi \to \alpha$ হবে

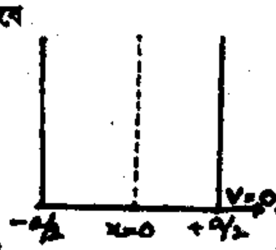
(দেওয়া আছে যে ঘাত শ্রেণীর একান্তর সহগগুলি $A_{n+2} = \frac{(2n+1-\lambda)}{(n+1)(n+2)} A_n$ সম্পর্ক দ্বারা পরস্পরের সঙ্গে যুক্ত)

12.8 উত্তরমালা

অনুশীলনী 1

এক্ষেত্রে অভেদ্য দেওয়াল দুটির স্থানাঙ্ক $-\frac{a}{2}$ এবং $\frac{a}{2}$ সুতরাং সীমান্ত শর্তগুলি হবে

$-\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}$ অঞ্চলে $V = 0$ এবং $x = \pm\frac{a}{2}$ তে $V = \alpha$



তরঙ্গ অপেক্ষকের সাপেক্ষে লিখতে পারি $\psi\left(-\frac{a}{2}\right) = \psi\left(\frac{a}{2}\right) = 0.$

আমরা জানি বাক্সের ভিতর শ্রোডিংগারের সমীকরণের সাধারণ সমাধানের রূপ

$$\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx. \qquad \dots (A)$$

A এবং B কে নির্ণয় করতে সীমাস্থ শর্ত দুটি ব্যবহার করলে

$x = \frac{a}{2}$ বিন্দুতে $\psi(x) = 0$

$x = -\frac{a}{2}$ বিন্দুতে $\psi(x) = 0$

অর্থাৎ $A \sin \frac{ka}{2} + B \cos \frac{ka}{2} = 0$

এবং $-A \sin \frac{ka}{2} + B \cos \frac{ka}{2} = 0$

ওপরের দুটি সমীকরণকে যোগ করে $2B \cos \frac{ka}{2} = 0$ অর্থাৎ হয় $B = 0$ অথবা $\cos \frac{ka}{2} = 0$

এবং সমীকরণ দুটির বিয়োগ ফল নিয়ে $2A \sin \frac{ka}{2} = 0$ অর্থাৎ হয় $A = 0$ অথবা $\sin \frac{ka}{2} = 0$

A ও B একই সঙ্গে শূন্য হতে পারে না আবার E ও a-র একটি মানের জন্য $\sin \frac{ka}{2}$ এবং $\cos \frac{ka}{2}$ একই সঙ্গে শূন্য হতে পারে না। কাজেই দুটি শ্রেণীর সম্ভাব্য সমাধান পাওয়া যেতে পারে যেগুলি হল

(i) $A = 0$ এবং $\cos \frac{ka}{2} = 0$

অথবা (ii) $B = 0$ এবং $\sin \frac{ka}{2} = 0$

প্রথম শ্রেণীর সমাধান থেকে আমরা পাই

$$\frac{ka}{2} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \ldots \left(\because \cos\frac{ka}{2} = 0\right) \qquad \ldots (B)$$

$= \frac{n\pi}{2}$ যেখানে $n =$ অযুগ্ম সংখ্যা

এবং দ্বিতীয় শ্রেণীর সমাধান থেকে পাই

$$\frac{ka}{2} = \pi, 2\pi, \frac{6\pi}{2} \ldots \left(\because \sin\frac{ka}{2} = 0\right)$$

$$= \frac{2\pi}{2}, \frac{4\pi}{2}, \frac{6\pi}{2} \ldots$$

$= \frac{n\pi}{2}$ যেখানে $n =$ যুগ্ম সংখ্যা $\qquad \ldots (C)$

ওপরের মান দুটি অর্থাৎ (B) ও (C) কে (A) তে বসালে তরঙ্গ সমীকরণের সাধারণ সমাধানের রূপগুলি হবে

$\psi_n = B \cos \frac{n\pi x}{a}$ (যখন $n = 1, 3, 5 \ldots$) $\qquad \ldots (D)$

এবং $\psi_n = A \sin \frac{n\pi x}{a}$ (যখন $n = 2, 4, 6 \ldots$) $\qquad \ldots (E)$

(D) সমীকরণে ψ_n কে প্রমাণিকরণ (normalise) করা হলে

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} B^2\cos^2\frac{n\pi x}{a}\,dx = 1$$

বা, $\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{B^2}{2}\left[1+\cos\frac{2\pi nx}{a}\right]dx = 1$

বা, $\frac{B^2}{2}\left[\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\right] = 1.$

অথবা $B^2 = \frac{2}{a}$ $\therefore$ $B = \sqrt{\frac{2}{a}}.$

অনুরূপে (E) সমীকরণে ψ_n কে প্রমাণিকরণ করলে পাওয়া যায়

$$A = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

$\therefore$ প্রমাণিকৃত তরঙ্গ অপেক্ষকগুলি $\psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}}\cos\frac{n\pi x}{a}$ $(n = 1, 3, 5 \ldots)$

এবং $\psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}$ $(n = 2, 4, 6 \ldots)$

অনুশীলনী 2

আমরা জানি $< x > = \int_{-a}^{+a} \psi^* x\psi\, dx$

এখানে $\psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}$ যখন $0 < x < a$

এবং $\psi_n = 0$ যখন $x \le 0$ এবং $x \ge a.$

$$\therefore \quad < x > = \frac{2}{a}\int_{-0}^{+a} x\sin^2\frac{n\pi x}{a}\,dx$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^a x\left(1-\cos^2\frac{n\pi x}{a}\right)dx$$

$$= \frac{1}{a}\left[\int_0^a x\,dx - \int_0^a x\cos^2\frac{n\pi x}{a}dx\right]$$

$$= \frac{a}{2}.$$

অনুরূপে $< p_x > = \frac{2}{a}\int_0^a \sin\frac{n\pi x}{a}\left\{-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\left(\sin\frac{n\pi x}{a}\right)\right\}dx$

$$= \frac{2}{a}(-i\hbar).\frac{n\pi}{a}.\int_0^a \sin\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{n\pi x}{a}\,dx$$

$$= 0$$

অনুশীলনী 3

(a) বর্গক্ষেত্রাকার বাক্সের বাহুর দৈর্ঘ্য a হলে দেওয়া আছে $a = 10^{-10}m$ বাক্সের মধ্যে অবস্থিত একটি কণার সম্ভাব্য শক্তিস্তরগুলির মান

$$E_{n_x n_y n_z} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\,(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

সর্বনিম্ন শক্তিস্তরের জন্য $n_x = n_y = n_z = 1$.

$$\therefore \quad E_1 = \frac{3\pi^2\hbar^2}{2ma^2} = \frac{3\pi^2 \times (1{\cdot}054 \times 10^{-34})^2}{2 \times 9{\cdot}11 \times 10^{-31} \times (10^{-10})^2}\,J$$

$$= \frac{32{\cdot}85 \times 10^{-17}}{18{\cdot}22}.\,J = 18{\cdot}03 \times 10^{-18}\,J$$

(b) মনে করি $T°K$ = নির্ণেয় উষ্ণতা

$$\therefore \quad \frac{3}{2}KT = \frac{3\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

এবং আমরা পেয়েছি $\frac{3\pi^2\hbar^2}{2ma^2} = 18{\cdot}03 \times 10^{-18}\,J$.

সুতরাং $\frac{3}{2}KT = 18{\cdot}03 \times 10^{-18}J$.

বা, $T = \frac{2 \times 18{\cdot}03 \times 10^{-18}}{3 \times 1{\cdot}38 \times 10^{-23}}$

$$= 8{\cdot}71 \times 10^5\,k.$$

অনুশীলনী 4

বর্গক্ষেত্রাকার বাক্সে কণার শক্তিস্তরের প্রতিরূপ

$$E_{n_x n_y n_z} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\,(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

এক্ষেত্রে দেওয়া আছে

$$E_{n_x n_y n_z} = \frac{14\pi^2\hbar^2}{2mL^2}.$$

অর্থাৎ $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 14$ অতএব n_x, n_y, n_z এর সম্ভাব্য মানগুলি হবে

n_x	n_y	n_z	$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$
1	2	3	14
1	3	2	14
2	1	3	14
2	3	1	14
3	1	2	14
3	2	1	14

সুতরাং আপজাত্যের মাত্রা 6.

অনুশীলনী 5

(12.83) সমীকরণের রূপ

$$\frac{d^2u}{dp^2} + (\lambda - p^2)u = 0$$

দেওয়া আছে $u(p) = e^{-p^2/2}\,H(p)$

$$\therefore \quad \frac{du}{dp} = H'e^{-p^2/2} - Hpe^{-p^2/2}$$

$$\frac{d^2u}{dp^2} = H''e^{-p^2/2} - H'pe^{-p^2/2} - He^{-p^2/2} + Hp^2e^{-p^2/2}$$

সুতরাং $\frac{d^2u}{dp^2} + (\lambda - p^2)u = 0$ কে নিম্নরূপে লেখা যায়

$$(H'' - 2H'p + Hp^2 + \lambda H - p^2H - H)e^{-p^2/2} = 0$$

যেহেতু $e^{-p^2/2} \neq 0$

$\therefore \quad H'' - 2H'p + (\lambda - 1)H = 0 \rightarrow$ নির্ণেয় সমীকরণ

সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

(1) দোলকটির হ্যামিলটোনীয় কারকের রূপ

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

(a) অতএব সরল দোলকের শ্রোডিংগারের সময় নিরপেক্ষ সমীকরণের রূপ

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right]\psi(x) = E\,\psi(x) \qquad \ldots (1)$$

(b) ভৌম অবস্থায় শ্রোডিংগারের সমীকরণ

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}mw^2x^2\right]\psi_0 = E_0\psi_0$$

দেওয়া আছে $\psi_0 = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\alpha x^2/2}$

$$\therefore \quad \frac{d\psi_0}{dx} = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\alpha x^2/2}(-\alpha x)$$

$$= -\alpha x\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\alpha x^2/2}$$

$$= -\alpha x\psi_0$$

এবং $\frac{d^2\psi_0}{dx^2} = -\alpha x\frac{d\psi_0}{dx} - \alpha\psi_0 = -\alpha x(-\alpha x\psi_0) - \alpha\psi_0$

$$= \alpha^2x^2\psi_0 - \alpha\psi_0$$

ওপরের সমীকরণকে $-\frac{\hbar^2}{2m}$ দিয়ে গুণ করে

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_0}{dx^2} = -\frac{\hbar^2}{2m}\alpha^2x^2\psi_0 + \frac{\hbar}{2m}\alpha\psi_0$$

$\alpha = \frac{m\omega}{\hbar}$ বসিয়ে পাই

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_0}{dx^2} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}x^2\psi_0 + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{m\omega}{\hbar}\psi_0$$

বা, $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_0}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi_0 = \frac{\hbar\omega}{2}\psi_0$

বা, $\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2\right]\psi_0=\frac{\hbar\omega}{2}\psi_0$ ... (2)

(1) এবং (2) এর তুলনা করে $E_0=\frac{1}{2}\hbar\omega\rightarrow$ ভৌম অবস্থায় শক্তি

(2) u এর মান খুব বড় হলে আবৃত্ত সম্পর্ক

$A_{n+2}=\frac{(2n+1-\lambda)}{(n+1)(n+2)}A_n$ এ n এর তুলনায় অন্য পদগুলিকে নগন্য হিসাবে নেওয়া যায়

$\therefore \quad A_{n+2}=\frac{2n}{n^2}A_n=\frac{2}{n}A_n$ ... (A)

আমরা জানি $e^{y^2}=1+y^2+\frac{y^4}{2!}+\ldots\ldots+\frac{y^n}{\left(\frac{n}{2}\right)!}+\frac{y^{n+2}}{\left(\frac{n+2}{2}\right)!}$

$=\sum_{n=0}^{\alpha}B_ny^n$ যেখানে $n=$ যুগ্ম সংখ্যা। ... (B)

y_n এবং y_{n+2} পদের সহগ B_n এবং B_{n+2} এর মান

$B_n=\frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)!}$ এবং $B_{n+2}=\frac{1}{\left(\frac{n+2}{2}\right)!}$

অতএব (B) শ্রেণীর সহগগুলির মধ্যে সম্পর্ক

$$\frac{B_{n+2}}{B_n}=\frac{\left(\frac{n}{2}\right)!}{\left(\frac{n+2}{2}\right)!}=\frac{\left(\frac{n}{2}\right)!}{\left(\frac{n}{2}+1\right)!}=\frac{\frac{n}{2}!}{\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

$$=\frac{1}{\frac{n}{2}+1}$$

n এর খুব বড় মানের জন্য

$\frac{B_{n+2}}{B_n}\doteq\frac{2}{n}\quad\therefore\quad B_{n+2}=\frac{2}{n}B_n$ ... (C)

(A) সমীকরণকে (C) দ্বারা ভাগ করলে

$\frac{A_{n+2}}{B_{n+2}}=\frac{A_n}{B_n}=C$ যেখানে $C=$ একটি ধ্রুবক

$\therefore \quad A_n=C\,B_n.$

$\therefore$ n এর বৃহৎ মানের জন্য

$$\sum A_n Y_n = \sum CB_n Y^n = C\sum B_n Y^n = Ce^{Y^2}$$

$\therefore$ $H(y) = f(y) + Ce^{Y^2} \rightarrow$ যেখানে $f(y)$ = শ্রেণীটির y এর নিম্নঘাতযুক্ত পদগুলির সমষ্টি

$\therefore$ সম্পূর্ণ তরঙ্গ অপেক্ষকের রূপ

$$\psi(y) = e^{-y^2/2} H(y)$$

$$= e^{-y^2/2}[f(y) + Ce^{Y^2}]$$

$$= e^{-y^2/2} f(y) + Ce^{Y^2/2} \qquad \ldots (D)$$

(D) সমীকরণ থেকে দেখা যাচ্ছে যে y এর মান অসীম হলে $Ce^{y^2/2}$ এর মানও অসীম হবে। অতএব y এর যে কোন মানের জন্য $\psi(y)$ এর মান সসীম হতে হলে $H(y)$ এর ঘাত শ্রেণীটিকে নির্দিষ্ট সসীম সংখ্যক পদের পরে শূন্য হতে হবে যাতে কেবল মাত্র প্রথম পদটি $e^{-y^2/2} f(y)$ (D) সমীকরণে থাকে।

একক 13 □ হাইড্রোজেন পরমাণু

গঠন :

13.1 প্রস্তাবনা

উদ্দেশ্য

13.2 হাইড্রোজেন পরমাণু— দুই কণা তরঙ্গ সমীকরণ

13.3 হাইড্রোজেন পরমাণুর ইলেকট্রনের ক্ষেত্রে শ্রেডিংগারের ত্রিমাত্রিক তরঙ্গ সমীকরণ

দিগংশীয় বা ϕ সমীকরণ

ধ্রুবীয় বা θ সমীকরণ

অরীয় বা r সমীকরণ

হাইড্রোজেন পরমাণুর আপজাত্য প্যারিটি

13.4 সারাংশ

13.5 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

13.6 উত্তরমালা

13.1 প্রস্তাবনা

কোয়ান্টাম বলবিদ্যার সাহায্যে পরমাণুর অধ্যয়ন করতে গেলে প্রথমেই একটি কেন্দ্রীয় ক্ষেত্রে (central field) ইলেকট্রনের গতির অধ্যয়ন প্রয়োজন। কিন্তু বিজ্ঞানীদের কাছে দীর্ঘদিন এটি একটি সমস্যা হয়েছিল। কারণ অনেক পরমাণুর মধ্যেই একাধিক ইলেকট্রনের উপস্থিতির জন্য একটি ইলেকট্রন অন্যান্য ইলেকট্রনদ্বারা প্রভাবিত হয়। ফলে যে বলের উদ্ভব হয় তা কুলম্বের সূত্র মেনে চলে না। কিন্তু হাইড্রোজেন পরমাণুর ক্ষেত্রে একটি প্রোটন এবং বাইরের কক্ষে একটি মাত্র ইলেকট্রন স্থির বৈদ্যুৎ বলদ্বারা পরস্পরের সঙ্গে আবদ্ধ থাকে। (এখানে প্রোটনকে স্থির ধরা হয়) সুতরাং হাইড্রোজেন বা হাইড্রোজেন সদৃশ পরমাণুর পক্ষে ইলেকট্রনদ্বারা অনুভূত বলটি কুলম্ব বল এবং ক্ষেত্রটি কেন্দ্রীয় ক্ষেত্র) এই ইলেকট্রনের স্থিতিশক্তির রূপ

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$ যেখানে Ze = নিউক্লীয় আধান

ε_0 = মুক্ত স্থানের বিদ্যুৎশীলতা

যেহেতু প্রোটন থেকে r দূরত্বে যে কোন বিন্দুতে স্থিতিশক্তির মান সমান সুতরাং প্রোটনের চারদিকে এটি গোলীয় প্রতিসাম্যে আছে। এক্ষেত্রে ইলেকট্রনের ধর্ম অধ্যয়ন করার জন্য শ্রোডিংগারের ত্রিমাত্রিক সময় নিরপেক্ষ সমীকরণ ব্যবহার করা হয়।

উদ্দেশ্য

- কিরূপে দুই কণার তরঙ্গ সমীকরণকে এক কণার তরঙ্গ সমীকরণে পরিণত করা যায়।

হাইড্রোজেন পরমাণুর ক্ষেত্রে শ্রোডিংগারের সমীকরণের সমাধান একবারে করা কঠিন। এই অংশে আপনারা সমীকরণটিকে θ সমীকরণ, ϕ সমীকরণ এবং অরীয় (r) সমীকরণ এই তিনটি অংশে ভাগ করে পৃথক পৃথকভাবে অপেক্ষকের রূপ নির্ণয় করতে পারবেন। এই অপেক্ষকগুলিকে মিলিয়ে হাইড্রোজেন পরমাণুর পূর্ণ তরঙ্গ অপেক্ষকের রূপ পাওয়া যায়।

- এছাড়া হাইড্রোজেন পরমাণুর শক্তিস্তরের রূপ নির্ণয় করতে পারবেন এবং আপজাত্য **(degeneracy)** কাকে বলে জানতে পারবেন। এক্ষেত্রে ইলেকট্রনের শক্তিস্তরগুলি পরীক্ষা প্রাপ্ত মানের সহিত সুন্দর ভাবে মিলে যায়।

- হাইড্রোজেনের অরীয় সমীকরণের সমাধান থেকে ইলেকট্রনের অরীয় বিন্যাসের সম্ভাব্যতা নির্ণয় করতে পারবেন।

13.2 হাইড্রোজেন পরমাণু ঃ দুই কণা তরঙ্গ সমীকরণ

এখনও পর্য্যন্ত আপনারা যে সকল শ্রোয়ডিংগার তরঙ্গ সমীকরণ সমাধান করেছেন সেগুলির সকলক্ষেত্রে একটি কণা কোন বলক্ষেত্রে অবস্থিত ছিল। কিন্তু হাইড্রোজেন পরমাণুর ক্ষেত্রে ধনাত্মক তড়িৎধর্মী কেন্দ্রক ও ঋণাত্মক আধানযুক্ত ইলেকট্রন পরস্পর কুলম্বের আকর্ষণ বলদ্বারা আবদ্ধ। এক্ষেত্রে দুটি কণার তরঙ্গ সমীকরণকে আপনার দুটি কণার অবস্থান স্থানাঙ্ক (x_1, y_1, z_1) ও (x_2, y_2, z_2)দ্বারা প্রকাশ করতে পারেন যেখানে প্রথমটি m_1 ভরের ইলেকট্রন ও দ্বিতীয়টি m_2 ভরের কেন্দ্রককে নির্দেশ করে। এই তরঙ্গ সমীকরণের রূপ,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x_1, y_1 z_1, x_2, y_2, z_2, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{\hbar^2}{2m_2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial z_2^2}\right)+V(x_1 y_1 z_1, x_2 y_2 z_2, t)\right]\psi \qquad \ldots\ldots 13.1$$

এখানে V = বিভবশক্তি কণাদ্বয়ের আপেক্ষিক স্থান ভেক্টরের ওপর নির্ভরশীল, অর্থাৎ,

$$V = V(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$$

এখন ধরুন, $x = x_1 - x_2$, $y = y_1 - y_2$ এবং $z = z_1 - z_2$ আপেক্ষিক স্থানাঙ্ক ও $X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$, $Y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}$ এবং $Z = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2}$ কণাদ্বয়ের ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্দেশ করে। $m_1 + m_2 = M$ সংস্থার মোট ভর। ψ কে (x, y, z) ও (x, y, z) এবং t এরদ্বারা প্রকাশ করলে পাওয়া যায়

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left[-\frac{\hbar^2}{2M}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+V(x,y,z)\right]\psi \quad \dots (13.3)$$

যেখানে $\mu=\frac{m_1 n_2}{m_1+m_2}$; একে সমানীত ভর বলা হয়।

এখন $\psi(x, y, z, X, Y, Z, t) = u(x, y, z)\, U(X, Y, Z) f(t)$ ধরলে উপরোক্ত সমীকরণ হতে পাই

$$i\hbar\frac{df(t)}{f}=-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{1}{U}\left[\frac{\partial^2}{\partial X^2}+\frac{\partial^2}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2}{\partial Z}\right]U$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{u}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z}+V(x,y,z)\right]U \quad \dots\dots (13.4)$$

প্রতিটি পদ পরস্পর নিরপেক্ষ হওয়ায় আমরা লিখতে পারি

$$-\frac{\hbar^2}{2M}[\nabla^2 U]=F'U$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 u+Vu=Eu \quad \dots\dots (13.5)$$

এবং $i\hbar\frac{df}{f}=E+E'$

বা, $f=e^{-i(E+E')t/\hbar}$

13.5 এর প্রথম ও দ্বিতীয় সমীকরণের ∇^2 যথাক্রমে ভরকেন্দ্র স্থানাঙ্ক ও আপেক্ষিক স্থানাঙ্কের ল্যাপলাসিয়ান। প্রথম সমীকরণ ভরকেন্দ্রে অবস্থিত সংস্থার সমগ্র ভরবিশিষ্ট কণার মুক্ত গতিকে বোঝায় এবং এর শক্তির আইগেন মান নিরবচ্ছিন্ন হওয়ায় একে আলোচনায় নেওয়ার প্রয়োজন নেই। অপর পক্ষে দ্বিতীয় সমীকরণটি কুলম্ব বিভবের প্রভাবে μ = সমানীত ভর বিশিষ্ট কণার গতি এবং এর সমীকরণই এই আলোচনার মূলকেন্দ্র বিন্দু। তখন কেন্দ্রকের ভর $m_2 >> m_1$ (ইলেকট্রন ভর) বলে $\mu \simeq m_1$ অর্থাৎ বাস্তবে দ্বিতীয় সমীকরণটি কুলম্ব বিভবের প্রভাবে m_1 ভরের ইলেকট্রনে শ্রোডিংগার সমীকরণ।

13.3 হাইড্রোজেন পরমাণুর ইলেকট্রনের শ্রোডিংগারের ত্রিমাত্রিক তরঙ্গ সমীকরণ

আমরা জানি কার্টেজিয় তন্ত্রে শ্রোডিংগারের ত্রিমাত্রিক সমীকরণের রূপ

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V\right)u=Eu \quad \dots\dots (13.6)$$

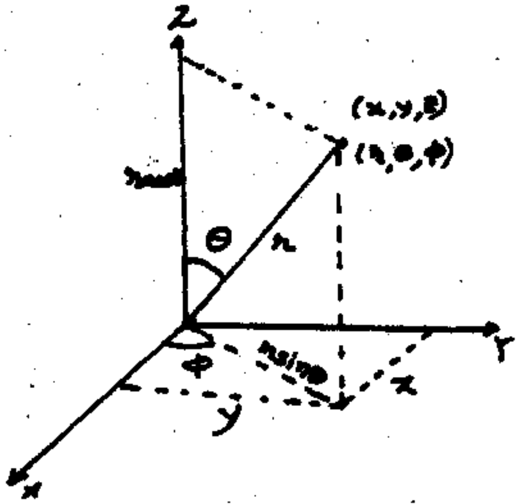
যেখানে u, x, y এবং z এর অপেক্ষক এবং $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$

কিন্তু এক্ষেত্রে ইলেকট্রন কেন্দ্রীয় বলের প্রভাবে প্রভাবিত বলে কার্টেজিয় নির্দেশাঙ্কের পরিবর্তে গোলীয় পোলার নির্দেশাঙ্ক (r, θ, ϕ) (spherical polar co-ordinates) ব্যবহার করা প্রয়োজন, দুটি নির্দেশাঙ্কের মধ্যে সম্পর্ক (চিত্র 13.1 দেখুন)

$$x = r \sin\theta \cos\phi$$

$$y = r \sin\theta \sin\phi$$

এবং $$z = r\cos\theta$$



চিত্র 13.1

ইলেকট্রনের স্থিতিশক্তি প্রোটন থেকে r দূরত্বে সর্বত্র সমান (অর্থাৎ গোলীয় প্রতিসাম্যে আছে), সুতরাং V, r এর ওপর নির্ভরশীল এবং আমরা V-কে $V(r)$ লিখতে পারি।

গোলীয় পোলার তন্ত্রে ল্যাপ্লাসিয়ানের রূপ

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\phi}\left(\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)$$

সুতরাং পরিবর্তিত নির্দেশতন্ত্রে শ্রোডিংগার সমীকরণের রূপ

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\phi}\left(\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)\right]u + V(r)u = Eu \quad \ldots (13.7)$$

ওপরের সমীকরণের সমাধানের জন্য আমরা চররাশিগুলির পৃথকীকরণ পদ্ধতির (separation of voriables) সাহায্য নেব। প্রথমে সমীকরণটিকে অরীয় (radial) এবং (angular) কৌণিক অংশে ভাগ করার জন্য $u(r, \theta, \phi)$ কে লেখা হল $u(r, \theta, \phi) = R(r)\, y(\theta, \phi)$

এই মান (13,7) সমীকরণে বসিয়ে পাই

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{Y}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{R}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{R}{r^2\sin^2\phi}\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\right)\right]+V(r)u=Eu$$

ওপরের সমীকরণকে $u = RY$ দিয়ে ভাগ করলে

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu r^2}\left[\frac{1}{R^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{Y\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{Y\sin^2\phi}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\right]=E-V(\mathrm{r})$$

অথবা $$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{2\mu r^2}{\hbar^2}[E-V(r)]=\frac{1}{Y}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\right] \quad \ldots\ldots (13.8)$$

লক্ষ করুন (13.8) সমীকরণের বাম দিকের রাশিগুলি কেবলমাত্র এর ওপর নির্ভরশীল এবং ডানদিকের রাশিগুলি কেবলমাত্র θ ও ϕ এর ওপর নির্ভরশীল। এটি তখনই সম্ভব হয় যখন উভয় দিকের রাশিগুলি স্বতন্ত্রভাবে একটি স্থির রাশির (ধরা যাক λ) সমান হবে।

সুতরাং (13.8) সমীকরণের বামদিককে λ এর সমান লিখে আমরা কেবলমাত্র r এর ওপর নির্ভরশীল রাশিগুলির একটি সমীকরণ পাব। এই সমীকরণকে বলা হয় অরীয় সমীকরণ (radial equation)—

অর্থাৎ $$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{2\mu r^2}{\hbar^2}[E-V(r)]=\lambda$$

$\frac{R}{r^2}$ দিয়ে গুণ করে পাই

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\left[\frac{2u}{\hbar^2}E-V(r)-\frac{\lambda}{r^2}\right]R=0 \quad \ldots\ldots (13.9)$$

(13.9) সমীকরণটি অরীয় সমীকরণ

আবার (13.8) এর ডানদিকের রাশিগুলিকে λ এর সমান লিখলে যে সমীকরণটি পাওয়া যায় সেটি হল

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}+\lambda Y=0 \quad \ldots\ldots (13.10)$$

লক্ষ করুন ওপরের সমীকরণের পদগুলি Y অর্থাৎ θ এবং ϕ উভয় চরের ওপর নির্ভরশীল। এই দুটি চররাশিকে আবার পৃথকীকরণের জন্য লেখা হল

$$Y(\theta,\phi)=\Theta(\theta)\,\Phi(\phi)$$

[এখানে বুঝতে পারছেন নিশ্চয়ই যে Θ, θ চরের অপেক্ষক এবং Φ কেবলমাত্র ϕ চরের অপেক্ষক]

ওপরের মান (13.10) সমীকরণে বসিয়ে

$$\frac{\Phi}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\frac{\Theta}{\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}+\lambda\Theta\Phi=0$$

ওপরের সমীকরণকে $\Theta\Phi$ দিয়ে ভাগ এবং $\sin^2$ দিয়ে গুণ করলে পাওয়া যায়

$$\frac{\sin\theta}{\Phi}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}+\lambda\sin^2\Phi=0$$

অথবা $$\frac{\sin\theta}{\Phi}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\lambda\sin^2\theta=-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} \qquad \ldots\ldots(13.11)$$

আগের ন্যায় ওপরের সমীকরণের বামদিকের রাশিগুলি কেবলমাত্র θ-র ওপর এবং ডানদিকের রাশি কেবলমাত্র ϕ-এর ওপর নির্ভরশীল। অতএব প্রত্যেকদিকের রাশিগুলি স্বতন্ত্রভাবে একটি স্থির রাশি ν-এর সমান। ডানদিকের রাশিকে ν এর সমান লিখে একটি সমীকরণ পাওয়া যায় সেটিকে ϕ অথবা দিগংশীয় সমীকরণ বলা হয়।

ϕ সমীকরণ :

দিগংশীয় সমীকরণের রূপ

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=\nu$$

বা, $$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}+\nu\Phi=0 \qquad \ldots\ldots(13.12)$$

এই সমীকরণের সমাধান এর জন্য

$$\Phi(\phi)=Ae^{i\nu^{1/2}\phi}+Be^{i\nu^{1/2}\phi} \quad (\nu\neq 0 \text{ এর জন্য})$$

এবং $$\Phi(\phi)=A+B\phi \ldots (\nu=0 \text{ এর জন্য})$$

কিন্তু ϕ-এর 0 থেকে 2π মানের মধ্যে সমাধানটি সদাচারী (well behaved) হওয়ার জন্য $\Phi(\phi)$ এবং $\frac{d\Phi}{d\phi}$ এর মান সন্তত এবং একমানী হওয়া প্রয়োজন। কাজেই ν এর মান কোন বর্গসংখ্যার (m^2) না নিলে প্রত্যেকটি ν এর জন্য আমরা $\Phi(\phi)$ এর দুটি মান পাব কেননা ν এর মান একটি ধনাত্মক এবং একটি ঋণাত্মক হবে যেটি m^2 এর বেলা হবে না। $\nu=0$ এর সমাধানে এই কারণে $B=0$

$\therefore$ (13.12) সমীকরণকে এখন আমরা লিখতে পারি

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}+m^2\Phi=0 \qquad \ldots\ldots(13.13)$$

এই সমীকরণের সমাধানের রূপ

$$\Phi(\phi)=Ae^{im\phi} \qquad \ldots\ldots(13.14)$$

$A=$ ধ্রুবক রাশি এবং m কে বলা হয় চৌম্বক কোয়ান্টাম সংখ্যা (magnetic quantum number)। ϕ এর মানের 0 থেকে 2π রেডিয়ান পরিবর্তনের মধ্যে $\Phi(\phi)$ এর মান সসীম থাকে। এবং $\Phi(\phi)$ এর একমানী হওয়ার শর্ত নির্ণয়ের পক্ষে বলা যায় যে প্রত্যেক 2π রেডিয়ান কোণের পরে ϕ এর মান একই হয় অর্থাৎ দিগংশীয় কোন ϕ এবং $(\phi+2\pi)$ একই মধ্যতলকে (meridian plane) বুঝায়।

সুতরাং আমরা লিখতে পারি

$$\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi) \qquad \ldots\ldots (13.15)$$

বা, $Ae^{im\phi} = Ae^{im(\phi + 2\pi)}$

বা, $Ae^{im\phi}(1 - e^{2\pi im}) = 0$

যেহেতু $Ae^{im\phi}$ শূন্য হতে পারে না

অতএব $1 - e^{2\pi im} = 0$

বা, $e^{2\pi im} = 1 \qquad \ldots\ldots (13.16)$

থেকে পাই $m = 0, \pm 1, \pm 2, + \ldots$

কাজেই দিগংশীয় তরঙ্গ অপেক্ষককে একমানী হতে হলে চুম্বকীয় কোয়ান্টাম সংখ্যার মান শূন্য অথবা ঋণাত্মক বা ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হবে।

এই দিগংশীয় তরঙ্গ অপেক্ষকের প্রমাণিকরণ নীচের উপায়ে করা যায়। তরঙ্গ অপেক্ষকের রূপ

$$\Phi(\phi) = Ae^{im\phi}$$

প্রমাণিকরণের শর্ত

$$\int_0^{2\pi} \Phi\Phi^* \, d\phi = 1$$

অথবা $\int_0^{2\pi} (Ae^{im\phi})(Ae^{im\phi})^* \, d\phi = 1$

বা, $\int_0^{2\pi} e^{im\phi} e^{-im\phi} \, d\phi = 1$

বা, $A^2 \int_0^{2\pi} d\phi = 1$ বা, $A^2.2\pi = 1$

$\therefore \quad A = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}$

$\therefore$ প্রমাণিকৃত দিগংশীয় তরঙ্গ অপেক্ষকের রূপ

$$\Phi(\phi) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi} \qquad \ldots\ldots (13.17)$$

Θ সমীকরণ :

(13.11) সমীকরণের বামদিকের রাশিগুলিকে m^2 এর সমান লিখে আমরা Θ সমীকরণ পাই। Θ সমীকরণের রূপ

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\lambda\sin^2\theta=m^2$$

বা, $$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\left(\lambda-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0 \;\ldots\; \left[\frac{\Theta}{\sin^2\theta} \text{ দিয়ে গুণ করে}\right] \quad \ldots (13.18)$$

ওপরের সমীকরণের সমাধানের জন্য একটি স্বাধীন চর $\omega=\cos\theta$ নেওয়া হল $(-1<\omega<+1)$, একই সঙ্গে $\Theta(\theta)$ কে অপেক্ষক $P(\omega)$ দিয়ে পরিবর্তিত করা হল।

$$\Theta(\theta)=P(\omega)$$

যেহেতু $\sin^2\theta=(1-\omega^2)$

এবং $$\frac{d\Theta}{d\theta}=\frac{dP}{d\omega}\cdot\frac{d\omega}{d\theta}=-\frac{dP}{d\omega}\sin\theta$$

আমরা (13.18) সমীকরণকে পরিবর্তিত রূপে লিখতে পারি'

$$-\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\times\frac{dP}{d\omega}\sin\theta\right)+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-\omega^2}\right)P=0$$

বা, $$\frac{\sin\theta}{\sin\theta}\frac{d}{d\omega}\left(\sin^2\theta\frac{dP}{d\omega}\right)+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-\omega^2}\right)P=0$$

(যেহেতু $\omega=\cos\theta,\ d\omega=-\sin\theta\, d\theta.\ \therefore\ \frac{1}{d\theta}=-\frac{\sin\theta}{d\omega}$)

বা, $$\frac{d}{d\omega}\left[(1-\omega^2)\frac{dP}{d\omega}\right]+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-\omega^2}\right)P=0 \quad \ldots\ldots (13.19)$$

ওপরের তরঙ্গ সমীকরণের সমাধান নির্ণয়ের পদ্ধতি এবং সরল দোলকের তরঙ্গ সমীকরণের সমাধান নির্ণয়ের পদ্ধতি একই প্রকার।

(13.19) সমীকরণ সমাধানের জন্য মনে করি

$$P(\omega)=x^{\frac{|m|}{2}}y^{\frac{|m|}{2}}G(\omega) \text{ এখানে } x=(1-\omega) \text{ এবং } y=(1+\omega)$$

এবং $G(\omega)$, ω এর একটি বহুপদ (Polynomial)

$$\therefore\quad P(\omega)=(1-\omega^2)^{\frac{|m|}{2}}G(\omega)$$

এখানে m এর কেবলমাত্র ধনাত্মক মানগুলি নেওয়া হয়।

(13.19) সমীকরণে $P(\omega)$-র মান বসিয়ে আমরা $G(\omega)$-র সাপেক্ষে একটি অবকল সমীকরণ পাই। সমীকরণটির রূপ

$$\frac{d}{d\omega}\left[(1-\omega^2)\left\{-\frac{m}{2}(1-\omega^2)^{\frac{m}{2}-1}2\omega G+(1-\omega^2)^{\frac{m}{2}}G'\right\}\right]+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-\omega^2}\right)(1-\omega^2)^{\frac{m}{2}}G=0$$

বা, $$\frac{d}{d\omega}\left[-m\omega(1-\omega^2)^{\frac{m}{2}}G+(1-\omega^2)^{\frac{m}{2}+1}G'\right]+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-\omega^2}\right)(1-\omega^2)^{\frac{m}{2}}G=0$$

বা, $$-m(1-\omega^2)^{\frac{m}{2}}G+2\omega^2\frac{m^2}{2}(1-\omega^2)^{\frac{m}{2}-1}G-\omega m(1-\omega^2)^{\frac{m}{2}}G'-2\omega\left(\frac{m}{2}+1\right)(1-\omega^2)^{\frac{m}{2}}G'$$

$$+(1-\omega^2)^{\frac{m}{2}+1}G''+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-\omega^2}\right)(1-\omega^2)^{\frac{m}{2}}G=0$$

ওপরের সমীকরণকে $(1-\omega^2)^{\frac{m}{2}}$ দিয়ে ভাগ করে

$$(1-\omega^2)G''-\left[2\omega\left(\frac{m}{2}+1\right)+\omega m\right]G'+\left[\lambda-\frac{m^2}{1-\omega^2}-m+\frac{\omega^2m^2}{1-\omega^2}\right]G=0$$

বা, $$(1-\omega^2)G''-[2\omega(m+1)]G'+[\lambda-m(m+1)G]=0 \qquad \dots\dots (13.20)$$

সরলদোলকের ক্ষেত্রে বহুপদের (polynomial) সাহায্যে এই ধরনের সমীকরণের সমাধান আমরা করেছি। এক্ষেত্রেও G কে একটি ঘাত শ্রেণীতে (Power series) প্রকাশ করা যায়

$$G=a_0+a_1\omega+a_2\omega^2+\dots$$

এই মান অনুসারে (13.20) সমীকরণের রূপ

[যেহেতু $G'=a_1+2a_2\omega+3a_3\omega^2+\dots$

$G''=2a_2+3.2a_3\omega+4.3a_4\omega^2\dots$]

$$1.2a_2+2.3a_3\omega+3.4a_4\omega^2+4.5a_5\omega^3+\dots$$

$$-1.2a_2\omega^2-2.3a_3\omega^3-3.4a_4\omega^4+\dots$$

$$-2.1(m+1)a_1\omega-2.2(m+1)a_2\omega^2-2.3(m+1)a_3\omega^3+\dots$$

$$+\{\lambda-m(m+1)\}a_0+\{\lambda-m(m+1)\}a_1\omega+\{\lambda-m(m+1)\}a_2\omega^2+\dots=0$$

ওপরের সমীকরণটি ω-এর সাপেক্ষে একটি অভেদ (identity)। কাজেই ω এর বিভিন্ন ঘাতের সহগগুলির মান আলাদাভাবে শূন্য হবে।

ω^0 এর সহগ $1.2a_2+\{\lambda-m(m+1)\}a_0=0$

ω^1 এর সহগ $2.3a_3+[\{\lambda-m(m+1)\}-2.1(m+1)]a_1=0$

ω^2 এর সহগ $3.4a_4+[\{\lambda-m(m+1)\}-2.2(m+1)-1.2]a_2=0$

ω^3 এর সহগ $4.5a_5+[\{\lambda-m(m+1)\}-2.3(m+1)-2.3]a_3=0$

অনুরূপে আমরা লিখতে পারি যে কোন সাধারণ রাশি ω^{ν} এর সহগ

$$(\nu + 1)(\nu + 2)a_{\nu+2} - [\{\lambda - m(m + 1)\} - 2.\nu(m + 1) - (\nu - 1)(\nu)]a_{\nu} = 0$$

বা, $$(\nu + 1)(\nu + 2)a_{\nu+2} = [m^2 + m + \nu m + \nu^2 + \nu - \lambda]a_{\nu}$$

বা, $$(\nu + 1)(\nu + 2)a_{\nu+2} = [m(m + \nu + 1) + \nu(m + \nu + 1) - \lambda]a_{\nu} \quad \ldots\ldots (13.21)$$

(13.21) সমীকরণ থেকে নীচের দুটি রাশির মধ্যের আবৃত্ত সম্পর্কে (recursion formula) উপনীত হওয়া যায়

$$\frac{a_{\nu+2}}{a_{\nu}} = \frac{(m + \nu)(m + \nu + 1) - \lambda}{(\nu + 1)(\nu + 2)} \quad \ldots\ldots (13.22)$$

সীমান্থ মান $\nu \to \alpha$ হলে ওপরের সম্পর্ককে লেখা যায়

$$\frac{a_{\nu+2}}{a_{\nu}} \to \frac{\nu.\nu}{\nu.\nu} \to 1$$ (যেহেতু ν^2 এর তুলনায় অন্যান্য রাশির মান নগন্য)

ওপরের সম্পর্কের অর্থ এই যে $|\omega| \to 1$ সীমান্থ মানে শ্রেণীটি অপসারী। কিন্তু $|\omega| = 1$ মানেও শ্রেণীটির সসীম হওয়া প্রয়োজন এটি তখনই সম্ভব যখন কোনও একটি পদে শ্রেণীটি সমাপ্ত হবে। মনে করা যাক $\nu = k$ মানে শ্রেণীটি শেষ হয়, অর্থাৎ $a_{\nu}(= a_k)$ যুক্ত রাশিটি শ্রেণীর শেষ পদ এবং (13.22) সম্পর্কটি থেকে দেখা যায় যে, $a_{k+2}, \ldots a_{k+4} \ldots\ldots$ পদগুলির মান শূন্য হবে। অর্থাৎ $\nu = k$ এর জন্য (13.22) সম্পর্কের লবের রাশির মান শূন্য হবে,

$$(k + m)(k + m + 1) - \lambda = 0$$

বা, $$\lambda = (k + m)(k + m + 1) \quad \ldots\ldots (13.23)$$

এখানে k এবং m উভয়ের মান 0, 1, 2, 3 … হতে পারে।

সুতরাং আমরা লিখতে পারি $l = k + m$ …… (13.24)

যেখানে $l = 0, 1, 2 \ldots$। l কে বলা হয় কক্ষীয় কোয়ান্টাম সংখ্যা (orbital quantum number)

অর্থাৎ $l = 0, |m|, |m| + 1 \ldots |m| + k$.

অতএব $\lambda = l(l + 1)$ …… (13.25)

আমরা দেখলাম যে θ সমীকরণের স্বীকৃত (allowed) সমাধানগুলি হল

$$\Theta(\theta) = (1 - \omega^2)^{\frac{|m|}{2}} G(\omega)$$

এখানে $G(\omega)$ শ্রেণীটি আবৃত্ত সম্পর্ক (13.22)দ্বারা পরিচালিত এবং আবৃত্ত সম্পর্কের λ রাশিটির মান $l(l + 1)$, Θ সমীকরণের সমাধান হিসাবে θ-র যে অপেক্ষকগুলি পাওয়া যায় গণিতের সাহায্য নিয়ে সেগুলিকে অত্যন্ত সুপরিচিত একটি বহুপদ বা পলিনোমিয়ালের সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। এই পলিনোমিয়ালের নাম সংশ্লিষ্ট লেজেন্ড্রে(Associated Legendre) অপেক্ষক P_l^m।

লেজেন্ড্রে পলিনোমিয়াল $P_l(\cos\theta) = P_l(\omega)$ এর রূপ

$$p_l(\omega) = \frac{1}{2^l l!}\left(\frac{d}{d\omega}\right)^l (\omega^2 - 1)^l \qquad \ldots\ldots (13.26)$$

যেখানে $l = 0, 1, 2 \ldots$ এবং l মাত্রার এবং m ক্রমের সহায়ক লেজেন্ড্রে অপেক্ষক $p_l^m(\omega)$ এর রূপ

$$p_l^m(\omega) = \frac{1}{2^l l!}(1-\omega^2)^{\frac{m}{2}}\left(\frac{d}{d\omega}\right)^{l+m}(\omega^2-1)^l$$

$$= (1-\omega^2)^{\frac{m}{2}}\left(\frac{d}{d\omega}\right)^m P_l(\omega) \qquad \ldots\ldots (13.27)$$

যেখানে $m = 0, 1, 2 \ldots l$। মনে রাখা প্রয়োজন যে ওপরের সংজ্ঞা m এর ধনাত্মক মান এবং $m \le l$ এর জন্য প্রযোজ্য $m = 0$ এর জন্য $p_l^0(\omega) = p_l(\omega)$

$p_l(\omega)$ এবং $p_l^m(\omega)$ এর শ্রেণীকে জনক অপেক্ষক (Generating function) দ্বারা প্রকাশ করা যায়। সেগুলি হল

$$\sum_{l=0}^{\alpha} P_l(\omega) z^l = (1, 2Z\omega + Z^2)^{-\frac{1}{2}} \qquad \ldots\ldots (13.28)$$

এবং
$$\sum_{l=m}^{\alpha} P_l^m(\omega) z^l = \frac{(2m)!(1-\omega^2)^{\frac{m}{2}} z^m}{2^m \cdot m!\left(1-2z\omega+Z^2\right)^{\frac{m+1}{2}}} \qquad \ldots\ldots (13.29)$$

$P_l(\omega)$ এবং $P_l^m(\omega)$ যে দুটি অবকল সমীকরণকে সন্তুষ্ট করে সেগুলি হল

$$(1-\omega^2)\frac{d^2P_l(\omega)}{d\omega^2} - 2\omega\frac{dP_l(\omega)}{d\omega} + l(l+1)\,P_l(\omega) = 0 \qquad \ldots\ldots (13.30)$$

এবং
$$(1-\omega^2)\frac{d^2P_l^m(\omega)}{d\omega^2} - 2\omega\frac{dP_l^m(\omega)}{d\omega} + \left\{l(l+1) - \frac{m^2}{1-\omega^2}\right\}P_l^m(\omega) = 0 \quad \ldots (13.31)$$

লক্ষ করুন $\Theta(\theta)$ অপেক্ষকের অবকল সমীকরণ (13.19) এবং $P_l^m(\omega)$ এর অবকল সমীকরণ (13.31) এর রূপ একই। কেবলমাত্র (13.31) সমীকরণে λ-র স্থানে $l(l+1)$ লেখা হয়েছে। (13.30) সমীকরণকে লেজেন্ড্রে সমীকরণ এবং (13.31) সমীকরণকে সংশ্লিষ্ট লেজেন্ড্রে সমীকরণ বলা হয়। θ সুতরাং সমীকরণের সমাধানকে সংশ্লিষ্ট লেজেন্ড্রে অপেক্ষক P_l^m এর সাহায্যে প্রকাশ করা যায়।

সমাধানগুলির মধ্যে যেগুলি নিম্নলিখিত সীমাস্থ শর্ত মেনে চলবে সেগুলিই গ্রহণীয় হবে। শর্তগুলি হল

(1) তরঙ্গ অপেক্ষক $\Theta(\theta)$ এর মান সর্বত্র সসীম হবে।

(2) l এর যে মানগুলি চৌম্বক কোয়ান্টাম সংখ্যার (m) পরম মান এর সমান বা তার থেকে বড় হবে, সেই মানগুলির জন্য তরঙ্গ অপেক্ষক বর্তমান থাকবে।

অর্থাৎ $l = |m|, |m|+1, |m|+2 \ldots$

বা, $l = 0$ অথবা ধনাত্মক সংখ্যা হবে।

l এর যে কোন মানের জন্য m এর মান হবে $m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots \pm l$

অতএব একটি বিশেষ কক্ষীয় কোয়ান্টাম সংখ্যা l এবং চৌম্বক কোয়ান্টাম সংখ্যা m বিশিষ্ট θ সমীকরণের প্রমাণিকৃত (normalised) সমাধানকে নিম্নলিখিত উপায়ে লেখা যায়

$$\Theta_l^m(\theta) = \sqrt{\frac{2l+1}{2} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\; P_l^m(\cos\theta) \qquad \ldots\ldots (13.32)$$

আমরা পেয়েছি $Y_l^m(\theta, \phi) = \phi(\phi)\, \Theta_l^m(\theta)$

$\phi(\phi)$ এবং $\Theta_l^m(\theta)$ এর মান (13.17) এবং (13.32) সমীকরণ থেকে বসিয়ে আমরা পাই

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi} \sqrt{\frac{2l+1}{2} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\; P_l^m(\cos\theta)$$

$$= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\; e^{im\phi} P_l^m(\cos\theta) \qquad \ldots\ldots (13.33)$$

$Y_l^m(\theta, \phi)$ অপেক্ষকগুলিকে গোলীয় হারমণিকে (spherical harmonics) বলা হয়।

l এবং m এর কয়েকটি বিভিন্ন মানের জন্য $Y_l^m(\theta, \phi)$ এর মানগুলি নীচে দেওয়া হল

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \qquad Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$$

$$Y_1^{\pm 1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta \exp(\pm i\phi)$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3\cos^2\theta - 1) \qquad Y_2^{\pm 1} = \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta\cos\theta\exp(\pm i\phi)$$

$$Y_2^{\pm} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2\theta \exp(\pm zi\phi)$$

পরীক্ষা করে দেখা যায় (13.33) সমীকরণের $Y_l^m(\theta, \phi)$ কক্ষীয়কৌণিক ভরবেগ সংকারকের বর্গ L^2 এবং এর z উপাংশ সংকারক L_z এর আইগেন অপেক্ষক যাদের আইগেনমান যথাক্রমে $l(l+i)\hbar^2$ এবং $m\hbar$. অরীয় তরঙ্গ সমীকরণ

(13.9) সমীকরণ থেকে L এর প্রদত্ত কোন মানের জন্য অরীয় সমীকরণের রূপ পাই

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR_l}{dr}\right) + \frac{2m}{\hbar^2}[E - V(r)]\, R_l - \frac{\lambda}{r^2} R_l = 0$$

ওপরের সমীকরণে $\lambda = l(l+1)$ এবং $V(r) = \frac{-Ze^2}{r}$ লিখে আমরা পাই

$$\frac{d^2R_l}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR_l}{dr} + \frac{2m}{\hbar^2}\left[E + \frac{Ze^2}{r}\right]R_l - \frac{l(l+1)}{r^2}\ R_l = 0 \qquad \ldots\ldots (13.34)$$

মনে করি $R_l(r) = \frac{u_l(r)}{r}$

অবকলন করে পাই

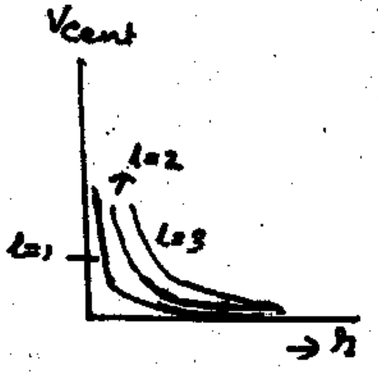
$$\frac{dR_l}{dr} = \frac{1}{r}\frac{du_l}{dr} - \frac{u_l}{r^2} \text{ এবং } \frac{d^2R_l}{dr} = \frac{1}{r}\frac{d^2u_l}{dr^2} - \frac{2}{r^2}\frac{du_l}{dr} + \frac{2u_l}{r^3}$$

সুতরাং $\frac{d^2R_l}{dr} + \frac{2}{r}\frac{dR_l}{dr} = \frac{1}{r}\frac{d^2u_l}{dr^2} - \frac{2}{r^2}\frac{du_l}{dr} + \frac{2u_l}{r^3} + \frac{2}{r^2}\frac{du_l}{dr} - \frac{2u_e}{r^3} = \frac{1}{r}\frac{d^2u_l}{dr^2}$

অতএব (13.34) সমীকরণে মান বসিয়ে লেখা যায়

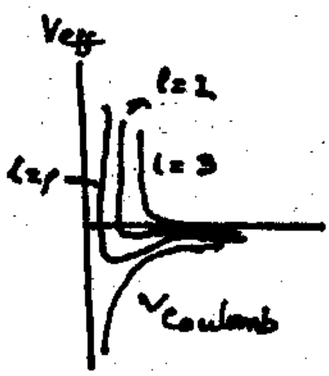
$$\frac{d^2u_l}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left[E + \frac{Ze^2}{r} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}\right]u_l = 0 \qquad \ldots\ldots (13.35)$$

ওপরের সমীকরণে $\left(-\frac{Ze^2}{r}\right)$ রাশিটি কুলম্ব বিভব Vcoul এবং $\frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}$ রাশিটিকে বলা হয় অপকেন্দ্র বিভব (centrifugal polential) V_{cent}। দূরত্ব r এর সঙ্গে এই দুটি বিভবের পরিবর্তন (13.2) চিত্রে দেখানো হয়েছে।



চিত্র 13.2 (a)

l-এর বিভিন্ন মানের জন্য V_{cent}-এর r-এর সঙ্গে পরিবর্তন



চিত্র 13.2 (b)

দুটি বিভবের কার্যকরী পরিবর্তন (l-এর বিভিন্ন মানের জন্য)

অণুর মধ্যে ইলেকট্রনের বদ্ধ অবস্থাগুলির তরঙ্গ অপেক্ষক সম্বন্ধে জানতে আমরা আগ্রহী। সে সব ক্ষেত্রে $E < 0$ হবে।

মনে করি $E = -E'$ যেখানে $E' > 0$

এবং $K = \frac{2m}{\hbar^2}$

এখানে $\sqrt{KE'}$ এর মাত্রা দৈর্ঘ্যের অন্যোন্যক (reciprocal)। এই মান বসিয়ে (13.35) সমীকরণকে একটি মাত্রাহীন রূপে প্রকাশ করা যায়।

$$\frac{d^2u_l}{dr^2} + k\left[-E' + \frac{Ze^2}{r} - \frac{l(l+1)}{Kr^2}\right]u_l = 0 \qquad \text{...... (13.36a)}$$

মনে করি $P = 2r\sqrt{KE'}$ ...... (13.36b)

অথবা $\frac{1}{r} = \frac{2}{P}\sqrt{KE'}$

এখানে P একটি মাত্রাহীন সংখ্যা

এখন $\frac{d}{dr} = \frac{dp}{dr} \cdot \frac{d}{dp} = 2\sqrt{KE'} \cdot \frac{d}{dp}$

$\therefore \quad \frac{d^2}{dr^2} = 4kE' \cdot \frac{d^2}{dP^2}$

সমীকরণ (13.36a) এ ওপরের মান বসিয়ে

$$4kE'\frac{d^2u_l}{dp^2} + k\left\{-E' + \frac{2Ze^2}{P}\sqrt{kE'} - \frac{l(l+1)}{k}\frac{4kE'}{P^2}\right\}u_l = 0$$

বা, $$\frac{d^2u_l}{dp^2} + \left\{-\frac{1}{4} + \frac{Ze^2}{2P}\sqrt{\frac{k}{E'}} - \frac{l(l+1)}{p^2}\right\}u_l = 0 \qquad \text{...... (13.37a)}$$

$\frac{Ze^2}{2}\sqrt{\frac{k}{E'}} = n$ (মাত্রাহীন রাশি) বসিয়ে পাই

$$u_l'' + \left\{-\frac{1}{4} + \frac{n}{P} - \frac{l(l+1)}{P^2}\right\}u_l = 0 \left(\text{ এখানে } u_l'' = \frac{d^2u_l}{dP^2}\right) \qquad \text{...... (13.38)}$$

(13.38) সমীকরণ, (13.35) সমীকরণের মাত্রাহীন রূপ

$P \to \alpha$ হলে (13.38) সমীকরণের রূপ হয়

$u_l'' - u_{l/4} = 0$

ওপরের সমীকরণের সমাধান $u_l \sim \exp\left(-\frac{P}{2}\right)$

$P \to 0$ হলে (13.38) সমীকরণের রূপ হবে

$$u_l'' - \frac{l(l+1)}{p^2}u_l = 0$$

এটির সমাধানের রূপ $u_l \sim P^{l+1}$

[P এর বৃহৎ মানের জন্য অন্য একটি সম্ভাব্য সমাধান $u_l \sim \exp\left(\frac{P}{2}\right)$ কিন্তু $P \rightarrow \infty$ সীমায় এটির মান অসীম হয়। কাজেই এই সমাধান গ্রহণযোগ্য নয়। অনুরূপভাবে P এর ক্ষুদ্রমানের জন্য আর একটি সমাধান $u_l \sim P^{-l}$, কিন্তু $P \rightarrow 0$ সীমায় এটির মানও অসীম হওয়ায় এই মানটি গ্রহণযোগ্য নয়।]

সুতরাং সাধারণভাবে P এর যে কোন মানের জন্য নীচের সমাধানটি চেষ্টা করা যায়।

$$u_l(P) = \exp\left(-\frac{P}{2}\right)P^{l+1}V(P) \qquad \dots\dots (13.39)$$

সমীকরণ (13.39) কে অবকল করে পাই

$$u_l' = \exp\left(-\frac{P}{2}\right)\left\{P^{l+1}V^1 + (l+1)P^l V - \frac{1}{2}P^{l+1}V\right\}$$

$$u_l'' = \exp\left(-\frac{P}{2}\right)\left\{P^{l+1}V'' + 2(P+1)P^l V' + l(l+1)P^{l-1}V - \frac{1}{2}P^{l+1}V' - \frac{l+1}{2}P^l V \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}P^{l+1}V' - \frac{l+1}{2}P^l V' + \frac{1}{4}P^{l+1}V\right\}$$

$$= ex\left(-\frac{P}{2}\right)P^{l+1}\left\{V'' + \frac{2(l+1)}{P}V' - V' - \frac{l+1}{P}V + \frac{l(l+1)}{P^2}V + \frac{V}{4}\right\}$$

ওপরের u_l' এবং u_l'' এর মান (13.38) সমীকরণে বসিয়ে পাই

$$\exp\left(-\frac{P}{2}\right)P^{l+1}\left\{V'' + \frac{2(l+1)}{P}V' - V' - \frac{l+1}{P}V + \frac{l(l+1)}{P^2}V + \frac{V}{4} - \frac{V}{4}\right.$$
$$\left. + \frac{n}{p}V - \frac{l(l+1)}{P^2}V\right\} = 0$$

$$\therefore \quad PV'' + (2l + 2 - P)V' + \{n - (l+1)\}V = 0$$

বা, $$PV'' + \{(2l+1) + (1-P)\}V + \{(n+l) - (2l+1)\}V = 0 \qquad \dots\dots (13.40)$$

(13.40) সমীকরণ এবং সংযুক্ত লাগেরে বহুপদের (associated Laguerre polynomial) সমীকরণের চেহারা একই প্রকার অতএব আমাদের লাগেরে বহুপদের আলোচনা করা একটু প্রয়োজন

লাগেরে বহুপদ $Ln(P)$ (n = একটি সংখ্যা)

এর রূপ $$Ln(P) = \exp(P)\left[\frac{d}{dP}\right]^n \{\exp(-P)P^n\} \qquad \dots\dots (13.40a)$$

$$= (-1)^n\left\{P^n - \frac{n^2}{1!}P^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!}P^{n-2} + \dots + (-1)^n n!\right\}$$

এবং $(n-k)$ মাত্রার সংশ্লিষ্ট লাগেরে বহুপদের রূপ

$$L_n^k(P) = \left[\frac{d}{dP}\right]^k L_n(P) = \left[\frac{d}{dP}\right]^k \left\{\exp(P)\left(\frac{d}{dP}\right)^n (\exp(-P)P^n)\right\} \quad \ldots\ldots (13.40b)$$

$Ln(P)$ এবং $L_n^k(P)$ কে জনক অপেক্ষক দ্বারা প্রকাশ করা যায় সেগুলি হল

$$\sum_{n=0}^{\alpha} \frac{L_n(P)}{n!} Z^n = \frac{\exp\left\{-\dfrac{pz}{(1-z)}\right\}}{(1-z)}, |Z| < 1 \quad \ldots\ldots (13.41a)$$

$$\sum_{n=k}^{\alpha} \frac{L_n^k(P)}{n!} Z^n = \frac{(-z)^k \exp\left\{-\dfrac{pz}{1-z}\right\}}{(1-z)^{k+1}} \quad \ldots\ldots (13.41b)$$

$L_n(P)$ এবং $L_n^k(P)$ যে দুটি অবকল সমীকরণকে সন্তুষ্ট করে সেগুলি হল

$$P\frac{d^2L_n(P)}{dp^2} + (1-p)\frac{dL_n(P)}{dp} + nL_n(P) = 0 \quad \ldots\ldots (13.42a)$$

$$P\frac{d^2L_n^k(P)}{dp^2} + (K+1-P)\frac{dL_n^k(P)}{dp} + (n-k)L_n^k(P) = 0 \quad \ldots\ldots (13.42b)$$

(13.40) সমীকরণ এবং ওপরের সমীকরণের তুলনা করলে দেখা যায় যে দুটি সমীকরণ একই প্রকার, শুধু (13.40) এ K এর স্থানে $(2l+1)$ এবং n এর জায়গায় $(n+l)$ বসানো হয়েছে। সুতরাং $V(P)$ অপেক্ষকটিকে আমরা সংশ্লিষ্ট লাগেরে বহুপদের সাপেক্ষে প্রকাশ করতে পারি

$$V(P) = L_{n+1}^{2l+1}(P) = \left(\frac{d}{dP}\right)^{2l+1} L_{n+1}(P) \quad \ldots\ldots (13.43)$$

$V(P)$ কে একটি ঘাত শ্রেণীতে প্রকাশ করলে

$$(P) = P^{\tau} \sum_i a_i P^i \quad \ldots\ldots (13.44)$$

যেখানে $i = 0, 1, 2 \ldots$ এবং τ এর মান নির্ণয় করতে হবে। আমরা লিখতে পারি $V'(P) = P^{\tau}\Sigma(i+\tau)a_iP^{i-1}$

এবং $V''(P) = P^{\tau}\Sigma(i+\tau)(i+\tau-1)a_iP^{i-2}$

ওপরের মান দুটি 13.40 নং সমীকরণে বসিয়ে পাই

$$\Sigma(i+\tau)(i+\tau-1)a_iP^{i+\tau-1} + \Sigma(2l+1+1-P)(i+\tau)a_iP^{i+\tau-1}$$
$$+ \Sigma\{(n+l)-(2l+1)\}\, a_iP^{i+\tau} = 0$$

বা, $$\Sigma\{(i+\tau)(i+\tau-1) + 2(l+1)(i+\tau)\}\, a_iP^{i+\tau-1}$$
$$+ \Sigma\{(n-l-1)-(i+\tau)\}a_i\, P^{i+\tau} = 0 \quad \ldots\ldots (13.45)$$

(13.45) নং সমীকরণ P এর সব মানের জন্য সিদ্ধ হবে। সুতরাং P এর প্রত্যেক ঘাতের সহগগুলিকে পৃথকভাবে শূন্য হতে হবে। $i = 0$ এর জন্য P এর সর্বনিম্ন ঘাত $(\tau - 1)$

$P^{\tau-1}$ এর সহগ $= \{\tau(\tau-1) + 2\tau(l+1)\}a_0$, এটির মান শূন্য হবে।

অর্থাৎ $\tau(\tau + 2l + 1)a_0 = 0$ ...... (13.46)

সুতরাং (13.44)-র শ্রেণীর P^{τ} রাশির τ এর প্রারম্ভিক মান হয় শূন্য না হয় $\tau = -(2l+1)$। কিন্তু τ এর দ্বিতীয় মানটি গ্রাহ্য নয় কেননা P এর এই মান হলে $P \to 0$ সীমায় $V(P) \to \alpha$ অর্থাৎ অসীম হয়ে যাবে। সুতরাং আমাদের $\tau = 0$ মানটি গ্রহণ করতে হবে।

$P^{i+\tau}$ এর সহগ

$$\{(i+\tau)(i+\tau+1) + 2(i+\tau+1)(l+1)\}a_{i+1} + \{(n-l-1)-(i+\tau)\}a_i = 0$$

... ... (13.47)

(13.47) নং সমীকরণ থেকে পাই

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{(i+\tau+l+1)-n}{(i+\tau+1)(i+\tau+2l+2)} \qquad \text{... ... (13.48)}$$

i এর মান যখন খুব বড় হয় তখন (13.48) সমীকরণকে লেখা যায়

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} \sim \frac{i}{i^2} = \frac{1}{i}$$

আমরা জানি যে e^P শ্রেণীটির বিস্তারের রূপ

$$e^P = 1 + P + \frac{P^2}{\underline{|2}} + \dots \frac{P^i}{\underline{|i}} + \frac{P^{i+1}}{\underline{|i+1}} + \dots$$

$$\text{এক্ষেত্রে } \frac{P^{i+1}\text{পদের সহগ}}{P^i\text{ পদের সহগ}} = \frac{P^i}{\underline{|i+1}} = \frac{i}{i+1} \approx \frac{1}{i}$$

সুতরাং (13.39) সমীকরণ দেখলে বোঝা যাচ্ছে অরীয় সমাধানটি P এর বৃহৎ মানের জন্য $\exp\left(\frac{P}{2}\right)$ এর ন্যায় আচরণ করবে। কিন্তু e^P শ্রেণীটি অপসারী সুতরাং (13.39) শ্রেণীটিও অপসারী হবে। অতএব দেখা যাচ্ছে যে P এর সাধারণ সমাধান (13.34)টিকে সদাচারী হতে গেলে $V(P)$ এর শ্রেণীটিকে কোনও পদে গিয়ে সমাপ্ত হতে হবে। মনে করি $V(P)$ এর শ্রেণীটি $\tau = 0$ অবস্থায় S-তম রাশিতে সমাপ্ত হয়। সেক্ষেত্রে a_{s+1} এবং উচ্চতর পদগুলির সহগগুলির মান শূন্য হবে। এবং এর জন্য প্রয়োজনীয় শর্ত হল

$$(n - l - 1) - (S + \tau) = 0$$

বা, $$(S + \tau + l + 1) - n = 0$$

এখানে যেহেতু $\tau = 0$ অতএব ওপরের সম্পর্ককে আমরা লিখতে পারি

$$(S + l + 1) - n = 0$$

বা, $$n = s + l + 1$$

S এবং l উভয়েরই মান 0, 1, 2 ... ইত্যাদি হতে পারে সুতরাং বোঝা যাচ্ছে nও একটি পূর্ণ সংখ্যা হবে। n কে বলা হয় মুখ্য কোয়ান্টাম সংখ্যা (Principal quantum number) এটির সম্ভাব্য মানগুলি হল

$$n = 1, 2, 3, 4 \ldots \qquad \ldots\ldots (13.50)$$

l এর যে কোন একটি মানের জন্য, n এর সম্ভাব্য মান $(l + 1), (l + 2), (l + 3) \ldots$। অপর পক্ষে n এর যে কোন একটি মানের জন্য l এর সম্ভাব্য মানগুলি হল $= 0, 1, 2 \ldots (n - 1)$।

13.38 সমীকরণের মাত্রাহীন রূপের জন্য যে n রাশি বসানো হয়েছে অর্থাৎ $n = \frac{Ze^2}{2}\sqrt{\frac{K}{E}}$। এ থেকে শক্তির বিভিন্ন আইগেন মান পাওয়া যায় কারণ $n = 1, 2, 3, \ldots$ ইত্যাদি।

$$n^2 = \frac{Z^2e^4}{4} \cdot \frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{(-E)}$$

বা, $$E_n = -\frac{mz^2e^4}{2n^2\hbar^2} \qquad \ldots\ldots (13.51)$$

ক্ষার অণুগুলির (alkali atoms) গঠনে দৃঢ়ভাবে বদ্ধ কতকগুলির ইলেকট্রনের বাইরের কক্ষে একটিমাত্র ইলেকট্রন থাকে। এই ইলেকট্রনটিকে সহজেই সরানো যায়। উদাহরণ স্বরূপ লিথিয়ামের ক্ষেত্রে ভিতরের ক্রোড় কক্ষে দুটি ইলেকট্রন এবং বহিঃস্থ কক্ষে একটি যোজ্যতা ইলেকট্রন (valence electron) আছে। এই যোজ্যতা ইলেকট্রনের কক্ষপথ যদি ক্রোড় অঞ্চলের (core region) বাইরে থাকে তাহলে ক্রোড় অঞ্চলের ইলেকট্রন দুটি কার্যকরীভাবে কেন্দ্রের ধনাত্মক নিউক্লীয় চার্জ $+ 3e$ কে আড়াল করে রাখে। ফলে বাইরের যোজ্যতা ইলেকট্রন কর্তৃক অনুভূত বিভবের মান $Z = 1$ নিউক্লিয়াস দ্বারা সৃষ্ট বিভবের সমান হবে অর্থাৎ কার্যতঃ এই পরমাণুটি হাইড্রোজেন পরমাণুর ন্যায় আচরণ করবে ফলে হাইড্রোজেন পরমাণুর জন্য শক্তিস্তরের যে মানগুলি আমরা নির্ণয় করেছি এই ক্ষেত্রের শক্তিস্তরের মানও একইপ্রকার হবে। অপরদিকে যোজ্যতা ইলেকট্রনের উপবৃত্তাকার কক্ষপথ যদি ক্রোড় অঞ্চল ভেদ করে, তাহলে ক্রোড় ইলেকট্রনগুলি নিউক্লীয় ধনাত্মক আধানকে সম্পূর্ণ আবরিত করতে পারে না।

সেক্ষেত্রে শক্তিস্তর গুলির রূপ এবং হাইড্রোজেন পরমাণুর শক্তিস্তরের রূপের মধ্যে অনেক পার্থক্য হয়। বহিঃস্থ কক্ষের যোজ্যতা ইলেকট্রনের (valence electron) ক্রোড় অঞ্চলের ভেদ্যতার পরিমাণ l কোয়ান্টাম সংখ্যাটির ওপর নির্ভর করে

হাইড্রোজেন ও অনুরূপ পরমাণুর তরঙ্গ অপেক্ষক

প্রমাণিকৃত (normalised) অরীয় অপেক্ষকের রূপ

$$R_{nl}(r) = 2\left(\frac{z}{na_0}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{(n-l-1)!}{n[(n+l)!]^3}} \left(\frac{2zr}{na_0}\right)^l e^{\frac{-zr}{na_0}} L_{n+l}^{2l+1}\left(\frac{2zr}{na_0}\right) \qquad \ldots\ldots (13.52)$$

যেখানে $a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} = 0.529A^\circ$ (হাইড্রোজেন পরমাণুর বোর কক্ষপথের মান)

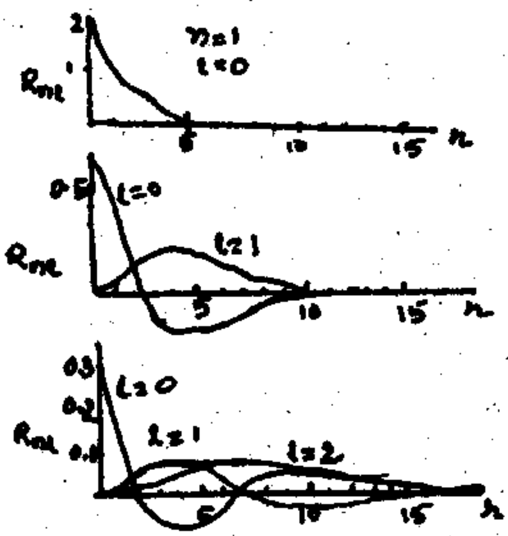
n = মুখ্য কোয়ান্টাম সংখ্যা

L = কক্ষীয় কোয়ান্টাম সংখ্যা

আমরা জানি যে লাগেরে বহুপদ $L_{n+1}(P)$ (13.36a সমীকরণ দ্রষ্টব্য) এর সংশ্লিষ্ট লাগেরে বহুপদ হল $L_{n+1}^{2l+1}(P)$ (13.36b সমীকরণ দ্রষ্টব্য)।

(13.36b) সমীকরণ থেকে আমরা পাই

$$P = 2r\sqrt{kE'} = 2r\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}\cdot\frac{mz^2}{2n^2}\frac{e^4}{\hbar^2}} = \frac{2mZe^2r}{n\hbar^2} = \frac{2Z}{na_0}r$$



চিত্র 13.3

R_{nl} এর সঙ্গে r (a_0/z এককে অঙ্কিত) এর পরিবর্তন (বিভিন্ন n এবং l এর জন্য) R_{nl}, $\left(\frac{a_0}{z}\right)^{3/2}$ এককে অঙ্কিত।

হাইড্রোজেন সদৃশ পরমাণুর কয়েকটি প্রমাণিকৃত তরঙ্গ অপেক্ষকের রূপ (চিত্র 13.3 দ্রষ্টব্য)

$$R_{10} = \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} 2\exp\left(-\frac{Zr}{a_0}\right)$$

$$R_{20} = \left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}}\left(2-\frac{Zr}{a_0}\right)\exp\left(-\frac{Zr}{2a_0}\right)$$

$$R_{21} = \left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{Zr}{\sqrt{3}a_0}\right)\exp\left(-\frac{Zr}{2a_0}\right)$$

$$R_{30} = \left(\frac{Z}{3a_0}\right)^{\frac{3}{2}} 2\left[1-\frac{2}{3}\frac{Zr}{a_0}+\frac{2}{27}\left(\frac{Zr}{a_0}\right)^2\right]\exp\left(-\frac{Zr}{3a_0}\right)$$

$$R_{31} = \left(\frac{Z}{3a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{4\sqrt{2}Zr}{9a_0}\left(1-\frac{1}{6}\frac{Zr}{a_0}\right)\exp\left(-\frac{Zr}{3a_0}\right)$$

$$R_{32} = \left(\frac{Z}{3a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{2\sqrt{2}}{27\sqrt{5}}\left(\frac{Zr}{a_0}\right)^2 \exp\left(-\frac{Zr}{3a_0}\right) \qquad \ldots\ldots (13.53)$$

অতএব প্রমাণিকৃত তরঙ্গ অপেক্ষকের সময় নিরপেক্ষ সম্পূর্ণরূপ

$$\Psi nlm(r, \theta, \phi) = R_{n_l}(r)\, Y_l^m(\theta, \phi) \qquad \ldots\ldots (13.54)$$

নীচে হাইড্রোজেন সদৃশ কয়েকটি সম্পূর্ণ তরঙ্গ অপেক্ষকের (total wave function) রূপ

$$\psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \exp(-\sigma)$$

$$\psi_{200} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} (2-\sigma)\exp\left(-\frac{\sigma}{2}\right)$$

$$\psi_{210} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \sigma\exp\left(-\frac{\sigma}{2}\right)\cos\theta$$

$$\psi_{300} = \frac{1}{81\sqrt{3\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} (27-18\sigma+2\sigma^2)\exp-\frac{\sigma}{3}$$

এখানে $\sigma = \frac{Zr}{a_0}$

হাইড্রোজেন পরমাণুর স্বাভাবিক অবস্থায় (অর্থাৎ $Z = 1, n = 1, l = 0, m = 0$) তরঙ্গ অপেক্ষকের রূপ

$$\psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-\frac{r}{a_0}}$$

সেক্ষেত্রে নিউক্লিয়াসের সাপেক্ষে ইলেকট্রনের সম্ভাব্যতা বিস্তার (Probability distribution) অপেক্ষকের রূপ

$$\psi^*_{100}\psi_{100} = \frac{1}{\pi a_0^3} e^{-\frac{2r}{a_0}}$$

এবং নিউক্লিয়াস থেকে r এবং $r + dr$ দূরত্বের মধ্যে ইলেকট্রনের থাকার সম্ভাব্যতা।

$$P(r)dr = \int \psi_{100}^{*}\psi_{100}\,\vec{dr} = \frac{1}{\pi a_0^3}e^{-\frac{2r}{a_0}}r^2dr\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}d\phi$$

$$= \frac{4}{a_0^3}e^{-\frac{2r}{a_0}}r^2dr \qquad \ldots\ldots(13.55)$$

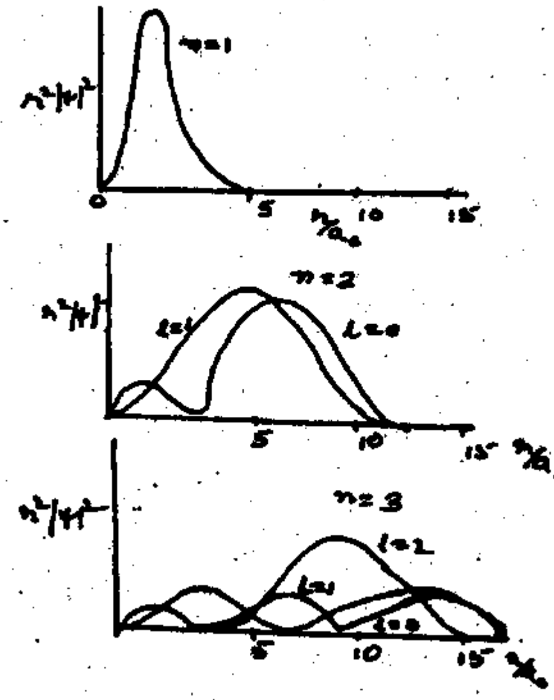
নিউক্লিয়াস থেকে ইলেকট্রনের সর্বাপেক্ষা সম্ভাব্য দূরত্ব নিম্নের উপায়ের সাহায্যে নির্ণয় করা যায়

আমরা জানি যে r এর সর্বাপেক্ষা সম্ভাব্য অবস্থানে $P(r)$ এর মান সর্বাধিক হওয়া উচিত।

অর্থাৎ $\frac{d}{dr}P(r) = 0$

অথবা $\frac{d}{dr}\left(\frac{4}{a_0^3}e^{-\frac{2r}{a_0}}.r^2\right) = 0$

যেখান থেকে পাওয়া যায় $r = a_0 =$ বোর ব্যাসার্ধের মান সুতরাং হাইড্রোজেন অণুর স্বাভাবিক অবস্থায় নিউক্লিয়াস থেকে ইলেকট্রনের সর্বাপেক্ষা সম্ভাব্য দূরত্ব বোর ব্যাসার্ধের সমান। (13.4) নং চিত্রে n এবং l এর কয়েকটি মানের জন্য r ব্যাসার্ধের এবং dr বেধের একটি খোলকের মধ্যে একটি হাইড্রোজেন পরমাণুর ইলেকট্রনের অবস্থানের সম্ভাব্যতা অঙ্কিত হয়েছে।



চিত্র 13.4

হাইড্রোজেন পরমাণুর আপজাত্য (Degeneracy in Hydrogen atom)

13.51 সমীকরণে আমরা দেখেছি যে

$E_n = -\frac{mZ^2e^4}{2n^2\hbar^2}$ এবং জানি যে বোর ব্যাসার্ধের মান $a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}$

∴ E_n কে লেখা যায়

$$E_n = -\frac{1}{2}\frac{Ze^2}{\left(\frac{a_0}{Z}\right)}\frac{1}{n^2} \qquad \dots\dots (13.56)$$

(13.56) সমীকরণে $\frac{a_0}{Z}$ Ze আধান যুক্ত পরমাণুর প্রথম বোর ব্যাসার্ধের সমান। নিউক্লিয়াস থেকে এই দূরত্বে ভৌম অবস্থার শক্তি E_1 এই দূরত্বে অবস্থিত একটি ইলেকট্রনের স্থিতিশক্তির মানের অর্ধেক। n এর মান বৃদ্ধির সঙ্গে $|E_n|$ এর মান $\frac{1}{n^2}$ এর সাপেক্ষে হ্রাস পায় এবং $E_n = -|E_n|$ এর মান অপসারী হয়ে $n \to \alpha$ সীমায় $E_n = 0$-তে পৌঁছায়। এক্ষেত্রে অসীম সংখ্যকস্তর দেখা যায় (কেননা কুলম্ব বিভবের মান বৃহৎ এর ক্ষেত্রে খুব ধীরে হ্রাস পায়)।

হাইড্রোজেন পরমাণুতে অবস্থিত ইলেকট্রনের তরঙ্গ অপেক্ষকের রূপ n, l, m তিনটি কোয়ান্টাম সংখ্যার ওপর নির্ভরশীল, কিন্তু শক্তির আইগেনমান নির্ভর করে কেবলমাত্র n এর ওপর। একই n বিশিষ্ট বিভিন্ন অপেক্ষক ψ_{nlm} গুলির শক্তির মানও এক। n এর প্রত্যেকটি মানের জন্য $(n \geq l + 1)$ l এর মান 0 থেকে $(n - 1)$ পর্যন্ত হতে পারে, আবার প্রত্যেকটি l এর জন্য m এর মানের বিস্তার $-l$ থেকে $+l$ পর্যন্ত (শূন্য অন্তর্ভুক্ত)। অর্থাৎ প্রত্যেকটি l এর জন্য চৌম্বক কোয়ান্টাম সংখ্যা (magnetic quantum number) m এর বিভিন্ন মানের সংখ্যা $(2l + 1)$। একটি n এর জন্য প্রত্যেক জোড়া m এবং l এর মান একটি পৃথক আইগেন অপেক্ষক নির্দেশ করে। এটিকে বলা হয় আপজাত্য (degeneracy)। এই অপেক্ষকগুলির সংখ্যা

$$\sum_{l=0}^{n-1}(2l + 1) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

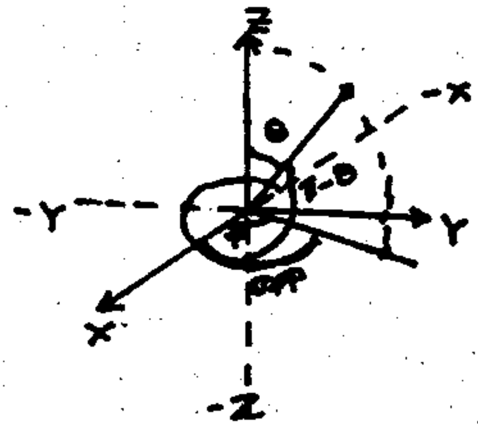
[ওপরের রাশিটি মুখ্য কোয়ান্টাম সংখ্যা n সম্বলিত একটি খোলকে (shell) সর্বাধিক কতকগুলি ইলেকট্রন থাকতে পারে সেটিও নির্দেশ করে]

সুতরাং n এর প্রদত্ত কোন মানের জন্য হাইড্রোজেন সদৃশ পরমাণুর শক্তিস্তরটির আপজাত্যের মাত্রা n^2 (n^2 fold degenerate) কিন্তু ভৌম অবস্থায় $n = 1$ হওয়ায় এই অবস্থাটি আপজাত্য শূন্য। এখানে ইলেকট্রনের স্পিনকে ধরা হয়নি।

m এর মানের $(2l + 1)$ সংখ্যক আপজাত্য গোলীয় প্রতিসাম্যযুক্ত বিভব $V = V(r)$ এর একটি বিশেষত্ব। অপরদিকে l এর মানের n সংখ্যক আপজাত্য গোলীয় প্রতিসাম্যযুক্ত বিভবের বিশেষ কয়েকটি ক্ষেত্রে দেখা যায় (যথা কুলম্ব বিভব)। এটিকে কখনও কখনও আকস্মিক আপজাত্য (accidental degeneracy) বলা হয়।

প্যারিটি (Parity)—কোন দক্ষিণাবর্তী বা বামাবর্তী নির্দেশাঙ্কিত তন্ত্রের (Right handed or left handed coordinate system) প্রতিফলন ঘটালে তন্ত্রের নির্দেশাঙ্কের যে পরিবর্তন হয় তাকে প্যারিটি প্রতিসাম্য বলে। প্রতিফলনের ফলে যদি কোন অপেক্ষক অপরিবর্তিত থাকে, তাহলে তার প্যারিটিকে যুগ্ম (even) বলা হয়। প্রতিফলনের ফলে অপেক্ষকের চিহ্ন ঋণাত্মক হলে তার প্যারিটিকে অযুগ্ম বলা হয়।

হাইড্রোজেন পরমাণুর তরঙ্গ অপেক্ষকগুলি গোলীয় পোলার নির্দেশাঙ্কে প্রকাশ করা হয় বলে দেখা যায় যে কেন্দ্রের সাপেক্ষে তন্ত্রের প্রতিফলনের ফলে θ পরিবর্তিত হয় $(\pi - \theta)$-তে, ϕ পরিবর্তিত হয় $(\pi + \phi)$-তে এবং r এর কোন পরিবর্তন হয় না।



চিত্র 13.5

এই পরিবর্তনের কথা মনে রেখে গোলীয় হারমণিকের পরিবর্তনের রূপ আলোচনা করা যায়।

আমরা পেয়েছি

$$Y_l^m(\theta, \phi) = N_{lm} P_l^m(\omega) e^{im\phi}.$$

এখানে $\omega = \cos\theta$

N_{lm} = প্রমাণীকরণ ধ্রুবক

এবং $P_l^m(\omega)$ = সংশ্লিষ্ট লেজেন্ড্রে বহুপদ

যদি $\hat{P}$ = প্যারিটি সংকারক হয় তবে দেখা যায়

$$\hat{P} Y_l^m(\theta, \phi) = (-1)^l Y_l^m(\theta, \phi)$$

সুতরাং l এর মান 0 অথবা যুগ্ম হলে প্যারিটি সংকারকের (parity operation) দ্বারা তরঙ্গ অপেক্ষকের রূপের কোনও পরিবর্তন হবে না অর্থাৎ এই অপেক্ষকটি যুগ্ম প্যারিটির; l এর মান অযুগ্ম সংখ্যা হলে অপেক্ষকও অযুগ্ম প্যারিটির হবে। অর্থাৎ l এর মানের ওপর তরঙ্গ অপেক্ষকের প্যারিটি নির্ভর করবে।

13.4 সারাংশ

হাইড্রোজেন পরমাণুর গঠনের ধারণা পাওয়ার জন্য ইলেকট্রনের শক্তিস্তর এবং তরঙ্গ অপেক্ষকগুলি জানা প্রয়োজন। ইলেকট্রনের তরঙ্গ অপেক্ষক রূপ নির্ণয় করার জন্য এটিকে r, θ এবং ϕ, তিনটি পৃথক অপেক্ষকের গুণফল হিসাবে প্রকাশ করা প্রয়োজন।

13.5 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

(1) হাইড্রোজেন পরমাণুর $1s$ কক্ষের (orbital) তরঙ্গ অপেক্ষকের রূপ

$$\psi(1, 0, 0) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{\frac{-r}{a_0}}$$

হলে নিউক্লিয়াস থেকে $1s$ ইলেকট্রনের গড় দূরত্ব নির্ণয় করুন। (a_0 = বোর ব্যাসার্ধ)

(2) নিউক্লিয়াসের কুলম্ব ক্ষেত্রে অবস্থিত একটি ইলেকট্রনের বদ্ধ অবস্থায় তরঙ্গ অপেক্ষকের অরীয় অংশ $R(r) = \frac{x(r)}{r}$ এর এ্যাসিমটোটিয় (Aymptotic) রূপ (i) নিউক্লিয়াস থেকে বহু দূরে এবং নিউক্লিয়াসের নিকটে নির্ণয় করুন।

(3) হাইড্রোজেন পরমাণুর $1s$ ইলেকট্রনের স্থিতিশক্তির গড় সম্ভাব্য মান (expectation value) নির্ণয় করুন।

একটি কণা $V(r)$ কেন্দ্রীয় বিভবক্ষেত্রে গতিশীল। এর সময় নিরপেক্ষ শ্রোডিংগার তরঙ্গ সমীকরণের অরীয় রূপ নির্ধারণ করুন। প্রমাণ করুন এই রূপ কোন একমাত্রিক শ্রোডিংগার তরঙ্গ সমীকরণের সহিত সদৃশ যেখানে r এর সীমা $0 \le r \le \alpha$ এবং কার্যকরী বিভব $V_{eff}(r) = V(r) + \frac{\hbar^2 \lambda}{2mr^2}$ যেখানে λ একটি ধ্রুবক।

13.6 উত্তরমালা

(i) গড় সম্ভাব্য দূরত্বের রূপ

$$< r > = \int \psi r \psi dr$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\pi a_0^3}\right)^{\frac{1}{2}} . e^{\frac{-r}{a_0}} r \left(\frac{1}{\pi a_0^3}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{r}{a_0}} \times r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr$$

$$= \frac{1}{\pi a_0^3}\int_0^{\alpha} r^3 e^{-\frac{2r}{a_0}} dr \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{3}{2} a_0$$

(ii) অরীয় তরঙ্গ অপেক্ষকের রূপ

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{2}{\pi}\frac{dR(r)}{dr} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)R(r) - \frac{l(i+1)}{r^2}R(r) = 0$$

দেওয়া আছে $R(r) = \frac{x(r)}{r}$

∴ আমরা পাই (মান বসিয়ে)

$$\frac{d^2x(r)}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\,x(r) - \frac{l(l+1)}{r^2}x(r) = 0 \qquad \text{... (A)}$$

(i) নিউক্লিয়াস থেকে বহু দূরের অবস্থানে ওপরের সমীকরণের শেষ পদটিকে অগ্রাহ্য করা যায় এবং $V(r)$ এর মানও শূন্য হয়। সুতরাং আমরা লিখতে পারি

$$\frac{d^2x(r)}{dr^2} + k^2x(r) = 0 \quad \text{যেখানে} \quad K^2 = \frac{2m|E|}{\hbar^2}$$

ওপরের সমীকরণের সমাধানের রূপ

$$x(r) = Ae^{kr} + Be^{-kr}$$

$R(r)$ এর মান অসীম থাকার জন্য A এর মান শূন্য হবে এবং $R(r)\ \alpha e^{-kr/r}$

(ii) নিউক্লিয়াসের কাছে $|E| \approx V(r)$ এবং (A) সমীকরণের রূপ হয়

$$\frac{d^2x(r)}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}x(r) = 0$$

ওপরের সমীকরণের সমাধানের রূপ

$$x(r) = Ar^{\alpha}$$

এই সমাধান ওপরের সমীকরণে বসিয়ে পাই

$$\alpha = (l+1) \text{ এবং } -l$$

$R(r)$ এর মান সসীম হয় যখন $\alpha = l + 1$

সুতরাং $R(r) \propto r^l$

(3) হাইড্রোজেন পরমাণুর ইলেকট্রনের স্থিতিশক্তির রূপ $V = -\frac{e^2}{r}$ সুতরাং $1s$ অবস্থায় গড় সম্ভাব্য মান

$$\langle V \rangle = \int_0^{\infty} V |R_{10}(r)|^2 r^2 dr$$

$$= -\int_0^{\infty} \frac{e^2}{r} \left| \frac{2}{a_0^{3/2}} \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right) \right|^2 r^2 dr$$

$$= -\frac{4e^2}{a_0^3} \int_0^{\infty} r \exp\left(\frac{-2r}{a_0}\right) dr = -\frac{4e^2}{a_0^3} \frac{1}{(2/a_0)^2}$$

$$= -\frac{e^2}{a_0}$$

$$\therefore \langle V \rangle = -\frac{e^2}{\hbar^2 / me^2} = -\frac{me^4}{\hbar^2}$$

ওপরের মানটি এবং বোরের তত্ত্বের সাহায্যে নির্নীত স্থিতিশক্তির মান সমান।

(4) (13.35) সমীকরণের ব্যাখ্যাটি ধরে উত্তর তৈরী করুন।

NOTE