মানুষের জ্ঞান ও ভাবকে বইয়ের মধ্যে সঞ্চিত করিবার যে একটা প্রচুর সুবিধা আছে, সে কথা কেহই অস্বীকার করিতে পারে না। কিন্তু সেই সুবিধার দ্বারা মনের স্বাভাবিক শক্তিকে একেবারে আচ্ছন্ন করিয়া ফেলিলে বুদ্ধিকে বাবু করিয়া তোলা হয়।

— *রবীন্দ্রনাথ ঠাকুর*

ভারতের একটা mission আছে, একটা গৌরবময় ভবিষ্যৎ আছে, সেই ভবিষ্যৎ ভারতের উত্তরাধিকারী আমরাই। নূতন ভারতের মুক্তির ইতিহাস আমরাই রচনা করছি এবং করব। এই বিশ্বাস আছে বলেই আমরা সব দুঃখ কষ্ট সহ্য করতে পারি, অন্ধকারময় বর্তমানকে অগ্রাহ্য করতে পারি, বাস্তবের নিষ্ঠুর সত্যগুলি আদর্শের কঠিন আঘাতে ধূলিসাৎ করতে পারি।

— *সুভাষচন্দ্র বসু*

Any system of education which ignores Indian conditions, requirements, history and sociology is too unscientific to commend itself to any rational support.

— *Subhas Chandra Bose*

Price : Rs. 225.00

(*NSOU* -র ছাত্রছাত্রীদের কাছে বিক্রয়ের জন্য নয়)

Published by : Netaji Subhas Open University, DD-26, Sector-1, Salt Lake City, Kolkata-700 064 and
Printed at : Royal Hlaftone Co., 4, Sarkar Bye Lane, Kolkata-700 007

NETAJI SUBHAS OPEN UNIVERSITY • EMT-12 •Block : 1&2

NETAJI SUBHAS OPEN UNIVERSITY

STUDY MATERIAL

ELECTIVE MATHEMATICS HONOURS

EMT-12

Probability Theory

Block : 1 & 2

প্রাক্‌কথন

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের স্নাতক শ্রেণির জন্য যে পাঠক্রম প্রবর্তিত হয়েছে, তার লক্ষণীয় বৈশিষ্ট্য হ'ল প্রতিটি শিক্ষার্থীকে তাঁর পছন্দমতো কোনও বিষয়ে সাম্মানিক (honours) স্তরে শিক্ষাগ্রহণের সুযোগ করে দেওয়া। এক্ষেত্রে ব্যক্তিগতভাবে তাঁদের গ্রহণক্ষমতা আগে থেকেই অনুমান করে না নিয়ে নিয়ত মূল্যায়ণের মধ্য দিয়ে সেটা স্থির করাই যুক্তিযুক্ত। সেই অনুযায়ী একাধিক বিষয়ে সাম্মানিক মানের পাঠ-উপকরণ রচিত হয়েছে ও হচ্ছে — যার মূল কাঠামো স্থিরীকৃত হয়েছে একটি সুচিন্তিত পাঠক্রমের ভিত্তিতে। কেন্দ্র ও রাজ্যের অগ্রগণ্য বিশ্ববিদ্যালয়সমূহের পাঠক্রম অনুসরণ করে তার আদর্শ উপকরণগুলির সমন্বয়ে রচিত হয়েছে এই পাঠক্রম। সেই সঙ্গে যুক্ত হয়েছে অধ্যেতব্য বিষয়ে নতুন তথ্য, মনন ও বিশ্লেষণের সমাবেশ।

দূর-সঞ্চারী শিক্ষাদানের স্বীকৃত পদ্ধতি অনুসরণ করেই এই সব পাঠ-উপকরণ লেখার কাজ চলছে। বিভিন্ন বিষয়ের অভিজ্ঞ পণ্ডিতমণ্ডলীর সাহায্য এ কাজে অপরিহার্য এবং যাঁদের নিরলস পরিশ্রমে লেখা, সম্পাদনা তথা বিন্যাসকর্ম সুসম্পন্ন হচ্ছে তাঁরা সকলেই ধন্যবাদের পাত্র। আসলে, এঁরা সকলেই অলক্ষ্যে থেকে দূরসঞ্চারী শিক্ষাদানের কার্যক্রমে অংশ নিচ্ছেন ; যখনই কোনো শিক্ষার্থী এই পাঠ্যবস্তুনিচয়ের সাহায্য নেবেন, তখনই তিনি কার্যত একাধিক শিক্ষকমণ্ডলীর পরোক্ষ অধ্যাপনার তারৎ সুবিধা পেয়ে যাচ্ছেন।

এইসব পাঠ-উপকরণের চর্চা ও অনুশীলনে যতটা মনোনিবেশ করবেন কোনও শিক্ষার্থী, বিষয়ের গভীরে যাওয়া তাঁর পক্ষে ততই সহজ হবে। বিষয়বস্তু যাতে নিজের চেষ্টায় অধিগত হয়, পাঠ-উপকরণের ভাষা ও উপস্থাপনা তার উপযোগী করার দিকে সর্বস্তরে নজর রাখা হয়েছে। এরপর যেখানে যতটুকু অস্পষ্টতা দেখা দেবে, বিশ্ববিদ্যালয়ের বিভিন্ন পাঠকেন্দ্রে নিযুক্ত শিক্ষা-সহায়কগণের পরামর্শে তার নিরসন অবশ্যই হ'তে পারবে। তার ওপর প্রতি পর্যায়ের শেষে প্রদত্ত অনুশীলনী ও অতিরিক্ত জ্ঞান অর্জনের জন্য গ্রন্থ-নির্দেশ শিক্ষার্থীর গ্রহণ-ক্ষমতা ও চিন্তাশীলতা বৃদ্ধির সহায়ক হবে।

এই অভিনব আয়োজনের বেশ কিছু প্রয়াসই এখনও পরীক্ষামূলক—অনেক ক্ষেত্রে একেবারে প্রথম পদক্ষেপ। স্বভাবতই ত্রুটি-বিচ্যুতি কিছু কিছু থাকতে পারে, যা অবশ্যই সংশোধন ও পরিমার্জনার অপেক্ষা রাখে। সাধারণভাবে আশা করা যায়, ব্যাপকতর ব্যবহারের মধ্য দিয়ে পাঠ-উপকরণগুলি সর্বত্র সমাদৃত হবে।

অধ্যাপক (ড.) শুভ শঙ্কর সরকার

উপাচার্য

তৃতীয় পুনর্মুদ্রণ : এপ্রিল, 2016

বিশ্ববিদ্যালয় মঞ্জুরি কমিশনের দূরশিক্ষা ব্যুরোর বিধি অনুযায়ী ও অর্থানুকূল্যে মুদ্রিত।
Printed in accordance with the regulations and financial assistance of
the Distance Education Bureau of the University Grants Commission.

পরিচিতি

বিষয় : গণিত বিদ্যা **সাম্মানিক স্তর**

পাঠক্রম : পর্যায় ঃ EMT 12 : 1 & 2

	রচনা	সম্পাদনা
একক 1-8	অধ্যাপক অমৃতাভ গুপ্ত	ড. রণজিৎ ধর
একক 9-16	অধ্যাপক অমৃতাভ গুপ্ত	ড. রণজিৎ ধর

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

EMT 12

সম্ভাবনাতত্ত্ব

(সাম্মানিক স্তর)

পর্যায়

1

সম্ভাবনাতত্ত্ব

পর্যায়

2

সম্ভাবনাতত্ত্ব

একক 1 ❒ ঘটনাদেশ (Event Spaces)

গঠন

1.1 প্রস্তাবনা ও উদ্দেশ্য

প্রথমেই আমাদের মনস্থির করতে হবে কী ধরনের ঘটনার সম্ভাবনার কথা আমাদের গাণিতিক তত্ত্বে আলোচনা করব। এর উত্তর হিসেবে যা পাওয়া যায় তা হল যদৃচ্ছ পরীক্ষা বা অবেক্ষণের ধারণা। এ ধরনের পরীক্ষার ফলাফলকেই আমরা সঠিক অর্থে ঘটনা বলব যার সম্ভাবনার কথা আমাদের তত্ত্বে বর্ণিত হবে। তারপর সেটতত্ত্ব প্রয়োগে বিভিন্ন আলোচ্য ঘটনার গাণিতিক রূপায়ণ করা হবে।

1.2 উদ্দেশ্য

এই এককে পড়লে আপনারা জানতে পারবেন

- যদৃচ্ছ পরীক্ষা বা অবেক্ষণের ধারণা
- মৌলিক ও যৌগিক ঘটনার কথা
- ঘটনাদেশের সংজ্ঞা, ঘটনাদেশের উপসেট হিসেবে ঘটনার সংজ্ঞা
- বিভিন্ন আলোচ্য ঘটনার সেটতাত্ত্বিক রূপায়ণ

1.3 যদৃচ্ছ পরীক্ষা বা অবেক্ষণ

আমাদের দৈনন্দিন কথাবার্তায় 'সম্ভাবনা' (probability) শব্দটি নানা প্রসঙ্গে নানাভাবে ব্যবহৃত হয়ে থাকে। যেমন ধরুন, আমরা বলি 'কাল বৃষ্টি হওয়ার সম্ভাবনা আছে,' 'আসছে বছর আমের ভালো ফলন হওয়ার সম্ভাবনা খুব বেশি,' 'একটা ছক্কা ছুড়লে ছয় পড়ার সম্ভাবনা কত ?' ইত্যাদি। এটা সহজেই অনুমেয় যে পৃথিবীর সব রকম ঘটনার সম্ভাবনা একটি গাণিতিক তত্ত্বে ঠাঁই পেতে পারে না। তাই প্রথমেই ঠিক করে নিতে হবে কোন্ ধরনের ঘটনা আমাদের গাণিতিক তত্ত্বে বিবেচ্য হবে। এর জন্যে প্রয়োজন হবে যদৃচ্ছ পরীক্ষা বা অবেক্ষণের ধারণা।

একটা ছক্কা ছোড়ার কথা ভাবুন। এর ছ'টি ফল হতে পারে—$1, 2, 3, 4, 5, 6$ কিন্তু ছক্কা ছোড়ার আগে এটা ভবিষ্যদ্বাণী করা অসম্ভব যে, এই ছ'টির মধ্যে ঠিক কোন্‌টি ঘটবে। তেমনি একটি মুদ্রা ওপরের দিকে ছুড়লে ফলাফল হতে পারে মাত্র দুটি—মাথা এবং ল্যাজ, কিন্তু কোনো একটিবার মুদ্রা ছোড়ার বেলায় ফল প্রাক্‌নির্ণয় করা সম্ভব নয়। আবার মনে করুন, পরীক্ষাগারে একটি বস্তুর মান নির্ণয় করা হচ্ছে। আমরা জানি একই পরীক্ষা বারবার করলে বস্তুর মান ঠিক এক বেরোয় না, অল্পবিস্তর তফাত হয়। যুক্তির বিচারে মেনে নিতে পারি বস্তুর পরীক্ষালব্ধ মান যে-কোনো বাস্তব সংখ্যা হতে পারে কিন্তু একটি পরীক্ষার আগে বলা সম্ভব নয় ঠিক কোন্ সংখ্যাটি ফল হিসেবে পাওয়া যাবে। একটি পরীক্ষা বা অবেক্ষণকে আমরা যদৃচ্ছ পরীক্ষা বা অবেক্ষণ (random experiment বা obsevation) বলব যদি এর সম্ভাব্য সব ফলগুলি জানা থাকে কিন্তু যে-কোনো একবার পরীক্ষার আগে ফলের ভবিষ্যদ্বাণী করা অসম্ভব। যদৃচ্ছ পরীক্ষার কিছু উদাহরণ একটু আগে আমরা দিয়েছি। এই ফলের ভবিষ্যদ্বাণীর অসম্ভবতাই যদৃচ্ছতার লক্ষণ। যদৃচ্ছতার অনেক কারণ থাকতে পারে যার বেশিরভাগই হয়তো আমাদের অজানা। বস্তুত যদৃচ্ছতার কারণ অনুসন্ধান আমাদের তত্ত্বের বিষয় নয়। যে পরীক্ষাগুলি যদৃচ্ছ সেগুলিই শুধু আমাদের সম্ভাবনাতত্ত্বে বিচার্য।

1.4 ঘটনা—মৌলিক ও যৌগিক

একটি যদৃচ্ছ পরীক্ষার ফলাফলকে ঘটনা (event) বলা হবে। ঘটনা দু'রকমের হয়—মৌলিক ও যৌগিক। এটা বোঝার জন্যে ছক্কা ছোড়ার পরীক্ষাটি বিবেচনা করুন। $1, 2, \ldots, 6$ এরা প্রত্যেকে এক একটি ঘটনা, আবার 'জোড় সংখ্যা' একটি ঘটনা এবং এটা ঘটে যখন ফল হয় $2, 4$ ও 6। তেমনি 'তিনের গুণিতক' একটি ঘটনা যেটা ঘটে যদি ফল হয় 3, ও 6। আমরা বলি যে 'জোড় সংখ্যা' ঘটনাটি $2, 4, 6$ এই ঘটনাগুলিতে বিশ্লেষণ করা যায়, 'তিনের গুণিতক' ঘটনাটি 3 ও 6 এই দুটি ঘটনাতে বিশ্লেষণ করা যায়। 1 ঘটনাকে কিন্তু আর বিশ্লেষণ করা যায় না। যে ঘটনা একাধিক অন্য ঘটনার বিশ্লেষণ করা যায় না, তাকে

মৌলিক ঘটনা (simple event) বলব। আর যে ঘটনা মৌলিক নয়, অর্থাৎ যে ঘটনা একাধিক মৌলিক ঘটনায় বিশ্লেষণ করা সম্ভব তাকে **যৌগিক ঘটনা** (compound event) বলব।

যে ঘটনা যদৃচ্ছ পরীক্ষার প্রতিবারই ঘটে, তাকে **নিশ্চিত ঘটনা** (sure বা certain event) বলা হবে। যেমন '1 থেকে 6 যে-কোনো সংখ্যা' ছক্কা ছোড়ার পরীক্ষার নিশ্চিত ঘটনা। যে ঘটনা যদৃচ্ছ পরীক্ষার কখনো ফল হতে পারে না, তাকে **অসম্ভব ঘটনা** (impossible event) বলা হবে। যেমন ছক্কা ছোড়ার পরীক্ষার 'শূন্য' একটি অসম্ভব ঘটনা। স্পষ্টতই আমরা বলতে পারি যে, একটি নিশ্চিত ঘটনা সম্ভাব্য সবগুলি মৌলিক ঘটনায় বিশ্লেষণ করা যায় এবং একটি অসম্ভব ঘটনা কোনো মৌলিক ঘটনায়ই বিশ্লেষণ করা যায় না।

একটি ঘটনা ঘটলেই যদি অন্য একটি ঘটনা ঘটে, তাহলে আমরা বলি যে প্রথম ঘটনাটি দ্বিতীয় ঘটনাটিকে **দ্যোতনা** করে। যেমন '2 বা 4' ঘটনাটি 'জোড় সংখ্যা' ঘটনাকে দ্যোতনা করে। দুটি ঘটনাকে **সমান** বা **অভিন্ন** বলা হবে যদি একটি অন্যটিকে দ্যোতনা করে। যেমন '2 বা 4 বা 6' ঘটনা 'জোড় সংখ্যা' ঘটনায় সমান।

দুটি ঘটনাকে **পরস্পর বিচ্ছিন্ন** (mutually exclusive) বলা হবে যদি তারা কখনোই একসঙ্গো না ঘটে। যেমন 'জোড় সংখ্যা' এবং 'বিজোড় সংখ্যা' ঘটনা দুটি পরস্পর বিচ্ছিন্ন। একটি ঘটনা যদি অন্য একটি ঘটনা না ঘটার সমান হয়, তাহলে প্রথম ঘটনাটি দ্বিতীয় **ঘটনার পূরক** (complementary) বলা হবে। যেমন 'বিজোড় সংখ্যা' 'জোড় সংখ্যা' ঘটনায় পূরক। স্পষ্টতই নিশ্চিত ঘটনা এবং অসম্ভব ঘটনা একে অন্যের পূরক।

উপরোক্ত ধারণাগুলিকে গাণিতিক ভাষায় প্রকাশ করতে হলে আমাদের প্রয়োজন হবে সেটতত্ত্বের কিছু কথা, যা এবার বলা হবে।

1.5 প্রয়োজনীয় সেটতত্ত্ব

প্রদত্ত ধর্মবিশিষ্ট সব বস্তুর সংগ্রহ বা সমষ্টিকে সেট বলা হয়। বস্তুগুলিকে সেটটির উপাদান বা সদস্য বলা হয়। যদি x সেট S-এর উপাদান হয়, আমরা বলি x S-এর অবস্থিত এবং লিখি $x \in S$।

যদি সেট A-র প্রত্যেকটি উপাদান সেট S-এ থাকে, তবে আমরা বলি A S-এর **অন্তর্ভুক্ত** এবং লিখিত $A \subseteq S$ অথবা S সেট A সেটকে ধারণ করে এবং লিখি $S \supseteq A$। যদি $A \subseteq S$ হয়, তাহলে আমরা এও বলি যে, S-এর **উপসেট**।

দুটি সেট A ও B **সমান** হয়, সংকেতে $A = B$ যখন $A \subseteq B$ এবং $B \subseteq A$ অর্থাৎ A সেটের প্রত্যেকটি উপাদান B সেটে থাকে এবং B সেটের প্রত্যেকটি উপাদান A সেটে থাকে।

যদি $A \subseteq B$ কিন্তু $A \neq B$, A-কে **প্রকৃত উপসেট** বলা হয় এবং লেখা হয় $A \subset B$।

শূন্য বা রিক্ত সেট এমন একটি সেট যার কোনো উপাদান নেই যা Φ দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

সেটের বীজগণিত

মনে করুন, S একটি প্রদত্ত সেট এবং S-এর বিভিন্ন উপসেট আমাদের আলোচনার বিষয়। এই প্রসঙ্গে S-কে একটি **সার্বভৌমিক সেট** বা **দেশ** বলা হয় এবং S-এর উপাদানকে **বিন্দু** বলা যেতে পারে। S-এর যেকোনো উপসেটকে S দেশভুক্ত একটি সেটও বলা হয়। নীচের আলোচনার আমরা ধরব S একটি দেশ এবং $A, B, C, \ldots, A_1, A_2, \ldots$ S দেশে বিভিন্ন সেট।

দুটি সেট A ও B-র **যোগফল** বা **সম্মিলন** সেইসব উপাদানের সেট যা A অথবা B-তে (বা দুটিতেই) অবস্থিত এবং এর চিহ্ন হবে $A+B$ বা $A \cup B$।

A ও B সেট দুটির **গুণফল** বা **ছেদ,** যা AB বা $A \cap B$ দ্বারা চিহ্নিত হবে, সেইসব উপাদানের সেট যা A এবং B দুটি সেটেই অবস্থিত।

$AB = \Phi$ হলে আমরা বলি যে A ও B সেটদুটিই **বিচ্ছিন্ন।**

সেটের যোগ এবং গুণ প্রক্রিয়ার জন্য নিম্নলিখিত নিয়মগুলি খাটে

(i) (a) $(A+B)+C = A+(B+C)$ (সংযোগ নিয়ম)

(b) $(AB)\,C = A(BC)$

(ii) (a) $A+B = B+A$ (বিনিময় নিয়ম)

(b) $AB = BA$

(iii) $A(B+C) = AB+AC$ (বিচ্ছেদ নিয়ম)

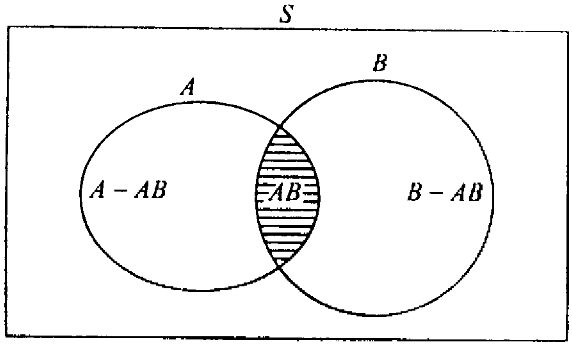
A ও B-র **ভেদ** $A-B$ সেই সব উপাদানের সেট যা A-তে অবস্থিতি কিন্তু R-তে নয়। $S-A$ সেটটিকে A সেটের পূরক বলা হয় এবং $\overline{A}$ দ্বারা চিহ্নিত হয়। সহজেই প্রমাণ করা যায় যে

$$A+\overline{A} = S, \overline{AA} = \Phi, \overline{\overline{A}} = A \tag{1.5.1}$$

যে-কোনো দুটি সেট A, B-র জন্যে

$$A+B = (A-AB)+AB+(B-AB) \tag{1.5.2}$$

যেখানে $A-AB, AB, B-AB$ সেটগুলি পরস্পর বিচ্ছিন্ন। এই সূত্রটি নীচের চিত্র থেকে স্পষ্ট হয়ে ওঠে।



এই ধরনের চিত্রকে **ভেন্-চিত্র** (Venn diagram) বলা হয়।

পূরকের এই নিয়মগুলি গুরুত্বপূর্ণ

$$(\overline{A+B}) = \overline{A}\,\overline{B} \tag{1.5.3}$$

$$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$$

এবার মনে করুন $A_1, A_2, \ldots$ সেটের একটি সসীম বা অসীম ক্রম। ΣA_n বা $\cup A_n$-এর সংজ্ঞা হল সেইসব উপাদানের সেট যা n-এর অন্তত একটি মানের জন্যে A_n-এ আছে, এবং ΠA_n বা $\cap A_n$ হল সেইসব উপাদানের সেট যা n-র প্রত্যেক মানের জন্যে A_n-এ আছে। (1.5.3)-এর প্রসারিত রূপ হল।

$$\overline{\sum A_n} = \Pi \overline{A}_n \tag{1.5.4}$$

$$\overline{\Pi A_n} = \sum \overline{A}_n$$

সেটের একটি অসীম ক্রম $\{A_n\}$-কে **একান্বয়ে বর্ধমান** বা **প্রসারণশীল** বলা হয় যদি প্রত্যেক n-এর জন্যে $A_n \subseteq A_{n+1}$ হয় এবং একে **একান্বয়ে হ্রাসমান** বা **সংকোচশীল** বলা হয় যদি প্রত্যেক n-এর জন্যে $A_n \supseteq A_{n+1}$ হয়।

যদি $\{A_n\}$ একটি একান্বয়ে বর্ধমান সেটের ক্রম হয়, তাহলে $\lim A_n$-এর সংজ্ঞা দিই

$$\lim A_n = \Sigma A_n$$

এবং যদি $\{A_n\}$ একান্বয়ে হ্রাসমান হয় তাহলে সংজ্ঞা হবে

$$\lim A_n = \Pi A_n$$

সহজেই দেখা যায় যে, যদি $\{A_n\}$ প্রসারণশীল (বা সংকোচনশীল) ক্রম হয়, তাহলে $\{\overline{A}_n\}$ সংকোচনশীল (বা প্রসারণশীল) ক্রম হবে এবং (1.5.4) থেকে সিদ্ধান্ত হয় যে, যদি $\{A_n\}$ প্রসারণশীল বা সংকোচনশীল হয়, তাহলে

$$\overline{\lim A_n} = \lim \overline{A}_n \tag{1.5.5}$$

1.6 ঘটনাদেশ

ধরা যাক, E একটি প্রদত্ত যদৃচ্ছ পরীক্ষা। E-এর সঙ্গে যুক্ত ঘটনাগুলিকে **ঘটনাবিন্দু** (event point) বলা হবে এবং সব ঘটনাবিন্দুর সেটকে **ঘটনাদেশ** (event space) S বলা হবে।

S-এর যে-কোনো উপসেট A-কে E-এর সঙ্গে যুক্ত একটি **ঘটনা** (event) বলা হয়।

S, যা নিজের একটি উপসেট, নিশ্চিত ঘটনাকে চিহ্নিত করবে। রিক্ত সেট Φ, যা S-এর একটি উপসেট, অসম্ভব ঘটনাকে চিহ্নিত করবে।

ঘটনা A ঘটনা B-কে দ্যোতনা করে যদি $A \subseteq B$। ঘটনা A ও ঘটনা B সমান বা সমার্থক হয় যদি $A = B$। 'ঘটনা A বা ঘটনা B (বা উভয়ই)' $A + B$ সেট দ্বারা সংজ্ঞায়িত হবে। তেমনি 'ঘটনা A ও ঘটনা B' এই ঘটনার সংজ্ঞা হবে AB। ঘটনা A ও ঘটনা B পরস্পর বিচ্ছিন্ন বলা হয় যদি $AB = \Phi$ ।

যদি $A_1, A_2, \ldots$ যে-কোনো সসীম বা অসীম ঘটনার ক্রম হয়, ΣA_n হল '$A_1, A_2, \ldots$ ঘটনাগুলির মধ্যে অন্তত একটি সংঘটন' এবং ΠA_n হল '$A_1, A_2, \ldots$ ঘটনার সবগুলির একসঙ্গে সংঘটন'।

S-এ A-র পূরক সেট $\overline{A}$-কে স্বভাবতই A-র পূরক ঘটনা বলা হবে। যেহেতু $\overline{\overline{A}} = A$ আমরা বলতে পারি যে, একটি ঘটনার পূরকের পূরক ঘটনা হল ঘটনাটি নিজেই। আবার যেহেতু $A\overline{A} = \Phi$ এবং $A + \overline{A} = S$ দুটি পরস্পর পূরক ঘটনা A ও $\overline{A}$ পরস্পর বিচ্ছিন্ন এবং A বা $\overline{A}$ একটি নিশ্চিত ঘটনা। $\overline{S} = \Phi, \overline{\Phi} = S$ এই সূত্রগুলি বলে যে অসম্ভব ঘটনা ও নিশ্চিত ঘটনা পরস্পরের পূরক।

স্বাভাবিক অর্থেই আমরা প্রসারণশীল এবং সংকোচনশীল ঘটনার ক্রমের কথা বলব।

উদাহরণ 1 : একটি মুদ্রা পরপর তিনবার ছোড়ার পরীক্ষার কথা ভাবুন। এর যেকোনো একটি ঘটনাবিন্দুর আকৃতি হবে 'মাথা, ল্যাজ' এই ধরনের। যদি মাথা ও ল্যাজকে H ও T চিহ্ন দ্বারা সূচিত করি, তাহলে ঘটনাদেশ S-এ $2^3 = 8$টি ঘটনাবিন্দু $U_1, U_2, \ldots, U_8$ আছে যেখানে

$U_1 = (H, H, H), U_2 = (H, H, H), U_3 = (H, T, H), U_4 = (T, H, H),$

$U_5 = (T, T, H), U_6 = (T, H, T), U_7 = (H, T, T), U_8 = (T, T, T)$

এবং $S=\{U_1\}+\{U_2\}+..+\{U_8\}$ অথবা আমরা লিখি $S=U_1+U_2+\ldots+U_8$ যেখানে সারল্যের জন্যে একটিমাত্র উপাদানবিশিষ্ট সেট $\{U_1\},\{U_2\},\ldots$ ইত্যাদির জায়গায় $U_1,\ U_2,\ldots$ চিহ্নই ব্যবহার করা হল।

মনে করুন, A 'দুটি মাথা' ঘটনাটি সূচিত করে। তাহলে A ঘটনা $U_2, U_3, U_4,$ এই 3টি ঘটনাবিন্দুর সমষ্টি, অর্থাৎ $A=U_2+U_3+U_4$।

যদি ঘটনা B 'প্রথম প্রচেষ্টায় মাথা' হয়, তাহলে

$$B=U_1+U_2+U_3+U_7$$
$$A+B=U_1+U_2+U_3+U_4+U_7$$
$$AB=U_2+U_3$$
$$A-AB=U_4$$
$$B-AB=U_1+U_7$$

এখানে স্পষ্টই দেখা যাচ্ছে যে, $A-AB, AB$ ও $B-AB$ ঘটনাগুলি পরস্পর বিচ্ছিন্ন এবং (1.5.2) সূত্রটি খাটছে।

'কোনো মাথা নয়' অর্থাৎ 'সবগুলি ল্যাজ' ঘটনা হচ্ছে U_8 এবং তাই এর পূরক ঘটনা 'অন্তত একবার মাথা' হবে

$$\overline{U}_8=S-U_8=U_1+U_2+\ldots+U_7$$

উদাহরণ 2 : মনে করুন 3টি প্রদত্ত কক্ষে 2টি বল যদৃচ্ছভাবে রাখার পরীক্ষা হল E। E-র সঙ্গে যুক্ত ঘটনাবিন্দুগুলির চেহারা কেমন এবং ক'টি ঘটনাবিন্দুর আছে ? বলদুটি আলাদাভাবে চেনা যায় ধরে নিলে এদের B_1, B_2 দিয়ে চিহ্নিত করা যেতে পারে। লক্ষ্য করুন, B_1 বলটি 3টি কক্ষের যে-কোনো একটিতে রাখা যায় আবার B_1-এর একটি স্থির অবস্থানের জন্য B_2 3টি কক্ষের যে-কোনো একটিতে রাখা যায়। যার ফলে $3^2=9$টি ঘটনাবিন্দু উৎপন্ন হয় যাদের বিশদ রূপ এইরকম

$$U_1=(B_1B_2|-|-),\ U_2=(B_1|B_2|-),\ U_3=(B_1|-|B_2)$$

$$U_4=(B_1|B_1|-),\ U_5=(-|B_1B_2|-),\ U_6=(-|B_1|B_2)$$

$$U_7=(B_2|-|B_2),\ U_8=(-|B_2|B_1),\ U_9=(-|-|B_1B_2)$$

যদি A 'দ্বিতীয় কক্ষে একটি বল' ঘটনাকে নির্দেশ করে, তাহলে

$$A=U_2+U_4+U_6+U_8$$

উদাহরণ 3 : যদি E একটি টেলিফোনে প্রদত্ত সময়ের অন্তরে আসা কলের সংখ্যা গোনার পরীক্ষা হয়, তাহলে তার সম্ভাব্য ফলাফল হবে $0, 1, 2, \ldots$ এবং এর কোনো উর্ধ্বসীমা নেই। তাই E-এর ঘটনাদেশ S হবে সব অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যার সমষ্টি।

উদাহরণ 4 : মনে করুন, E একটি দণ্ডের দৈর্ঘ্য কোনো যন্ত্রের সাহায্যে সূক্ষ্মভাবে মাপার পরীক্ষা। এই পরীক্ষার ফল তাত্ত্বিক বিচারে যে-কোনো বাস্তব সংখ্যা হতে পারে। তাই এখানে ঘটনাদেশ S হবে সব বাস্তব সংখ্যার সেট।

উদাহরণ 5 : E যদি নবজাতক শিশুর লিঙ্গ বিচার হয়, ঘটনাদেশ S-এ মাত্র দুটি ঘটনাবিন্দু থাকবে—'ছেলে' এবং 'মেয়ে'।

1.7 সারংশ

প্রথমেই আসে যদৃচ্ছ পরীক্ষার কথা। যদৃচ্ছ পরীক্ষা এমন একটি পরীক্ষা যার সম্ভাব্য সব ফলগুলি জানা আছে কিন্তু যে-কোনো একবার পরীক্ষার আগে ভবিষ্যদ্বাণী করা অসম্ভব ঠিক কোনো ফলটি হবে।

যদৃচ্ছ পরীক্ষার ফলকে ঘটনা বলা হবে। এই ঘটনা দুরকমের—মৌলিক ও যৌগিক। একটি ঘটনাকে যৌগিক বলা হয় যদি একে অন্য একাধিক ঘটনায় বিশ্লেষণ করা যায় এবং একে মৌলিক বলা হয় যদি তা না করা যায়।

আমাদের তত্ত্বে বিভিন্ন ধরনের ঘটনা বিবেচিত হবে। নিশ্চিত ঘটনা এমন যা যদৃচ্ছ পরীক্ষার প্রতিবারই ঘটে এবং অসম্ভব ঘটনা যা কোনোবারই ঘটে না। একটি ঘটনা A আরেকটি ঘটনা B-কে দ্যোতনা করে যদি A ঘটলে B অবশ্যই ঘটে। দুটি ঘটনা A ও B সমান বলা হবে যদি একে অন্যকে দ্যোতনা করে। দুটি ঘটনা A ও B পরস্পর বিচ্ছিন্ন বলা হয় যদি তারা কখনোই একসঙ্গে না ঘটে। যদি একটি ঘটনা A অন্য একটি ঘটনা B-র না ঘটার সমান হয়, তাহলে B-কে A-র পূরক ঘটনা বলা হবে।

বিভিন্ন ঘটনায় গাণিতিক রূপায়ণের জন্যে সেটতত্ত্বের প্রয়োগ প্রয়োজন। সেট-বীজগণিতের মূলকথা আপনাদের ইতিমধ্যেই জানা হয়েছে, যেমন দুটি সেটের সম্মিলন, ছেদ, বিচ্ছিন্নতা, ভেদ, একটি সেটের পূরক ইত্যাদি। পূরকের নিয়মগুলি (1.5.3) আপনাদের অজানা নয়। সেটের একটি অসীম ক্রম $\{An\}$-কে একান্বয়ে বর্ধমান (প্রসারণশীল) বা একান্বয়ে হ্রাসমান (সংকোচনশীল) বলা হয় যদি প্রত্যেক n-এর জন্যে $A_n \subseteq A_{n+1}$ অথবা $A_n \supseteq A_{n+1}$। যদি $\{A_n\}$ একটি একান্বয়ী ক্রম হয়, তা হলে $\lim A_n$-এর সংজ্ঞা হবে

ΣA_n যখন $\{A_n\}$ বর্ধমান

ΠA_n যখন $\{A_n\}$ হ্রাসমান

একটি প্রদত্ত যদৃচ্ছ পরীক্ষার মৌলিক ঘটনাগুলিকে ঘটনাবিন্দু বলা হয় এবং সব ঘটনাবিন্দুর সমষ্টিকে ঘটনাদেশ বলা হয়। এই ঘটনাদেশের যে-কোনো উপসেটকে ঘটনা বলা হয়। যেহেতু ঘটনা একটি সেট হিসেবে সংজ্ঞায়িত হল, বিভিন্ন বিচার্য ঘটনা এবং তাদের বিষয়ে উক্তি সেট-বীজগণিতের বিভিন্ন প্রক্রিয়ার দ্বারা সহজেই রূপায়ণ করা যায়।

1.8 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

1. উদাহরণসহ সংজ্ঞা দিন ঃ

(i) যদৃচ্ছ পরীক্ষা

(ii) মৌলিক ও যৌগিক ঘটনা

(iii) ঘটনাদেশ ও ঘটনাবিন্দু

(iv) পরস্পর বিচ্ছিন্ন ঘটনাসমূহ

2. ধরা যাক, A_n নির্দেশ করে $-\infty < x \leq n$ অন্তরটিকে ($n = 1, 2 \ldots$)। প্রমাণ করুন যে $\{A_n\}$ একটি প্রসারণশীল সেটের ক্রম এবং $\lim A_n = (-\infty, \infty)$।

3. যদি A_n নির্দেশ করে $-\infty < x \leq -n$ এই অন্তরকে ($n = 1, 2, \ldots$) প্রমাণ করুন যে $\{A_n\}$ একটি সংকোচনশীল সেটের ক্রম এবং $\lim A_n = \Phi$।

4. যদি a একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা হয় এবং $a - 1/n < x \leq a$ এই অর্ধমুক্ত অন্তরকে A_n বলি ($n = 1, 2, \ldots$), তাহলে দেখান যে $\{A_n\}$ সংকোচনশীল সেটের ক্রম এবং $\lim A_n = \{a\}$।

5. যদি a একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা হয় এবং $a < x \leq a + 1/n$ এই অর্ধমুক্ত অন্তরের নাম দিই $A_n (n = 1, 2 \ldots)$, তালে প্রমাণ করুন যে ক্রম $\{A_n\}$ সংকোচনশীল এবং $\lim A_n = \Phi$।

6. দুটি নিখুঁত মুদ্রা একত্রে একবার ছোড়ার পরীক্ষার ঘটনাদেশটি লিখুন। এই পরীক্ষার সঙ্গো যুক্ত (i) অন্তত একটি মাথা এবং (ii) কেবলমাত্র একটি মাথা পাওয়ার ঘটনাদুটি সেটের সাহায্যে প্রকাশ করুন।

1.9 উত্তরমালা

2. $A_n = \{x \mid -\infty < x \leq n\}$ অথবা লিখতে পারি

$$A_n = (-\infty, n) \; (n = 1, 2, \ldots)$$

$A_{n+1} = (-\infty, n+1) \supseteq (-\infty, n)$ বা $A_{n+1} \supseteq A_n$ প্রত্যেক n-র জন্যে। অতএব $\{A_n\}$ প্রসারণশীল এবং সংজ্ঞা অনুযায়ী

$$\lim A_n = \Sigma A_n = (-\infty, \infty)$$

কেননা যদি $x \in (-\infty, \infty)$ অর্থাৎ, x একটি বাস্তব সংখ্যা হয়, তাহলে এমন একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা m পাওয়া যায় যে, $x \leq m$ অথবা $x \in (-\infty, m) = A_m$ এবং তাই $x \in \Sigma A_n$।

3. প্রমাণ **2**-এর অনুরূপ।

4. $A_n = \{x \mid a - 1/n < x \leq a\} = (a - 1/n, a]\ (n = 1, 2 ...)$

$A_{n+1} = (a - 1/(n+1)a\,] \subseteq (a - 1/n, a]$ বা $A_{n+1} \subseteq A_n$ প্রত্যেক n-এর জন্যে। তাই $\{A_n\}$ সংকোচনশীল এবং

$$\lim A_n = \Pi A_n = \{a\}$$

এই উক্তির প্রমাণ হিসেবে দেখুন যে $a \in A_n$ প্রত্যেক n-এর জন্যে, তাই $a \in \Pi A_n$ এবং যদি $x \in \Pi A_n$ তাহলে $x = a$, কেননা $x \neq a$ হলে প্রত্যেক n-এর জন্যে $a - 1/n < x < a$ কিন্তু এমন একটি বিশেষ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা m আছে যে $m > 1/(a - x)$ বা $x < a\ 1/m$, যার ফলে $x \notin A_n$ এবং তাই $x \notin \Pi A_n$।

5. প্রমাণ 4-এর অনুরূপ।

6. $S = \{U_1, U_2, U_3, U_4\}$ যেখানে

$$U_1 = \{H, H\}, U_2 = \{H, T\}, U_3 = \{T, H\}, U_4 = \{T, T\}$$

A–অন্তত একটি মাথা, B–কেবলমাত্র একটি মাথা

$$A = U_1 + U_2 + U_3, B = U_2 + U_3$$

যোগ করবেন যদি মুদ্রাটি সৎ বা প্রতিসম হয়। একটি ছক্কা ছোড়ার কথা ভাবুন। যদি 'তিনের গুণিতক' ঘটনাটি ঘটে আমি জিতব, অন্যথায় আমি হারব। এই খেলায় বাজি ধরার সৎ অনুপাত কী? উত্তর স্বাভাবিকভাবেই হবে এই অনুপাত আমার স্বপক্ষে $1:2$ যদি অবশ্য ছক্কাটি সৎ বা প্রতিসম হয়। আর একটু স্পষ্ট ভাষায় আমরা বলতে পারি যে একটি মুদ্রা ছুড়লে 'মাথা' পড়ার সম্ভাবনা $\frac{1}{2}$ এবং একটি ছক্কা ছোড়ার বেলায় 'তিনের গুণিতক' ঘটনার সম্ভাবনা $\frac{1}{3}$, যদি আমরা সম্ভাবনার পরিমাপ ভগ্নাংশ দিয়ে করি। কিন্তু এবার যদি প্রশ্ন করা হয় $\frac{1}{2}$ ও $\frac{1}{3}$ এই সংখ্যাগুলি কীভাবে পাওয়া গেল, তাহলে হয়ত অনেকেই সরাসরি সদুত্তর দিতে পারবেন না এবং শুধু বলবেন—'স্বজ্ঞা' (intuition) এবং 'অভিজ্ঞতা' থেকে।

2.2 উদ্দেশ্য

এই এককে আপনারা সম্বাবনাতত্ত্বের বিবর্তনের ইতিহাস জানতে পারবেন। বিশেষভাবে আপনারা জানবেন

- প্রাচীন সংজ্ঞা ও তার বিরুদ্ধ সমালোচনা
- পরিসাংখ্যিক ধারাবাহিকতার ধারণা ও সম্ভাবনার পরিসংখ্যা সংজ্ঞা
- পরিসংখ্যা সংজ্ঞার ত্রুটি

2.3 সম্ভাবনার প্রাচীন সংজ্ঞা

এই প্রাচীন সংজ্ঞা প্রধানত স্বজ্ঞানির্ভর। যদি স্বজ্ঞার বিশ্লেষণ করা দুরূহ ব্যাপার, প্রস্তাবনার শেষে উল্লিখিত দুটি দৃষ্টান্ত $\frac{1}{2}$ এবং $\frac{1}{3}$ সংখ্যার গঠন-প্রক্রিয়া বোঝা শক্ত নয়। মুদ্রা ছোড়ার যদৃচ্ছ পরীক্ষায় 2টি ঘটনাবিন্দু আছে এবং 'মাথা' ঘটনার 1টি ঘটনাবিন্দুর আছে এবং এই ঘটনার অবস্থিত ঘটনাবিন্দুর সংখ্যাকে মোট ঘটনাবিন্দুর সংখ্যা দিয়ে ভাগ করলে $\frac{1}{2}$ পাওয়া যায়। আবার ছক্কা ছোড়ার পরীক্ষায় মোট 6টি ঘটনাবিন্দু আছে, যার মধ্যে 'তিনের গুণিতক' ঘটনার 2টি আছে এবং 2-কে 6 দিয়ে ভাগ করলে $\frac{1}{3}$ ভগ্নাংশটি মেলে। কিন্তু কী অর্থে এই ভগ্নাংশগুলি সম্ভাবনাকে প্রকাশ করে তা বোঝা মুশকিল এবং তা স্বজ্ঞার উপরেই ছেড়ে দিতে হয়।

পড়ার সংখ্যা ও মুদ্রা ছোড়ার মোট সংখ্যার অনুপাত হবে প্রায় $\frac{1}{2}$ এবং যদি মুদ্রাটি আরও বেশিবার ছোড়া হয়, তাহলে এই অনুপাত $\frac{1}{2}$ এর আরও কাছাকাছি হবে।

সাধারণভাবে যদি একটি যদৃচ্ছ পরীক্ষা E যথাসম্ভব একরকম অবস্থায় বারবার অনুষ্ঠিত হয় এবং যদি N-বার পরীক্ষার মধ্যে একটি প্রদত্ত ঘটনা A $N(A)$-বার ঘটে, তাহলে $N(A)$-কে বলা হবে A-র **পরিসংখ্যা** (frequency) এবং $N(A)/N$ এই অনুপাতকে বলা হবে A-র **পরিসংখ্যা অনুপাত** (frequency ratio) বা **আপেক্ষিক পরিসংখ্যা** (relative frequency) যা $f(A)$ চিহ্নদ্বারা নির্দেশিত হবে, অর্থাৎ

$$f(A) = \frac{N(A)}{N} \qquad \text{..... (2.4.1)}$$

এখন এটা অভিজ্ঞতালব্ধ সত্য যে N যতই বেড়ে যায় $f(A)$-র মান ততই প্রায় সমান হয়ে আসে এবং এই ব্যাপারটাকে **পরিসাংখ্যিক ধারাবাহিকতা** (statistical regularity) বলা হয়। এই ধারাবাহিকতার কোনো যুক্তিগ্রাহ্য ব্যাখ্যা পাওয়া যায় না, কিন্তু পরীক্ষার দ্বারা এর সত্যতা যাচাই করা যায় এবং হয়েছে।

ফন মিজেস এই পরিসাংখ্যিক ধারাবাহিকতাকে সম্ভাবনার সংজ্ঞা তৈরির কাজে লাগাতে চাইলেন। এই চিন্তাধারায় আমরা ধরে নিই যে $N \to \infty$ হলে $f(A)$ একটি নির্দিষ্ট সীমার প্রতি অভিসারী হবে এবং এই সীমাকে A ঘটনার **সম্ভাবনা** বলা হবে যা $P(A)$ দ্বারা চিহ্নিত হবে, অর্থাৎ

$$P(A) = \lim_{N\to\infty} f(A) \qquad \text{..... (2.4.1)}$$

এই সংজ্ঞাকে আমরা পরিসংখ্যা সংজ্ঞা বলে উল্লেখ করব।

মন্তব্য

1. এই পরিসংখ্যা সংজ্ঞা প্রাচীন সংজ্ঞার সীমাবদ্ধতার থেকে মুক্ত। অসীম সংখ্যক ঘটনাবিন্দুর বা অপ্রতিসম ঘটনাবিন্দুর ক্ষেত্রে এই নতুন সংজ্ঞা প্রযোজ্য।

2. পরিসংখ্যা সংজ্ঞার আসল উপযোগিতা হল এর দ্বারা সম্ভাবনার একটা ব্যবহারিক অর্থ পাওয়া যায় যে যদৃচ্ছ পরীক্ষাটি অনেকবার পুনরাবৃত্তি করলে যে-কোনো ঘটনার প্রাপ্ত পরিসংখ্যা অনুপাত হবে তার সম্ভাবনা প্রায় সমান।

কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ নিয়ম

পরিসংখ্যা সংজ্ঞা থেকে সম্ভাবনার কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ নিয়ম সহজেই প্রতিষ্ঠা করা যায়।

$$f(B|A) = \frac{N(AB)}{N(A)} \qquad .....(2.4.9)$$

আমরা ধরে নেব যে $\lim_{N\to\infty} f(B|A)$ এই সীমার অস্তিত্ব আছে যাকে বলব '**A ঘটেছে এই অনুমানের ভিত্তিতে B-র শর্তাধীন সম্ভাবনা**' (conditional probability of B on the hypothesis that A has occurred) এবং একে চিহ্নিত করব $P(B|A)$ চিহ্ন দিয়ে, অর্থাৎ

$$P(B|A) = \lim_{N\to\infty} f(B|A) \qquad ..... (2.4.10)$$

এখন

$$f(B|A) = \frac{N(AB)}{N} \Big/ \frac{N(A)}{N} = \frac{f(AB)}{f(A)}$$

$N \to \infty$ হলে সীমা হিসেবে পাই

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

যদি $P(A) \neq 0$। অনুরূপে

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

যদি $P(B) \neq 0$।

অতএব, যদি $P(A), P(B) \neq 0$ হয়, আমরা সম্ভাবনার এই গুণনিয়ম পাই

$$P(AB) = P(A)\,P(B|A) = P(B)\,P(A|B) \qquad ..... (2.4.11)$$

নতুন তত্ত্বের সমালোচনা

সম্ভাবনার এই নতুন সংজ্ঞা যদিও নানা দিক থেকে আকর্ষণীয়, এর প্রকরণের মধ্যে একটা দুর্বলতা বা ত্রুটি আছে। এই সংজ্ঞায় পরিসংখ্যা অনুপাত একটি পরীক্ষালব্ধ সংখ্যা, কিন্তু তার সীমা নিতে হবে গাণিতিক অর্থে। এই ব্যবহারিক ও গাণিতিক ধারণার মিশেল বিশেষ অস্বস্তিকর এবং কোনো গণিতের তত্ত্বে গ্রহণযোগ্য নয়। এইরকম পরিস্থিতি গণিতের অন্য শাখায়ও দেখা যায়, যেমন জ্যামিতিতে বিন্দুর সংজ্ঞা কী হবে ? বিন্দুকে একান্বয়ে সংকোচনশীল খড়ির ফুটকির একটি ক্রমের সীমা হিসেবে সংজ্ঞায়িত করতে পারি, যা উপরোক্ত পরিসংখ্যা সংজ্ঞার অনুরূপ হবে। বিন্দুর এইরকম সংজ্ঞা আধুনিক জ্যামিতিতে অচল। বস্তুত জ্যামিতিকর তত্ত্বে বিন্দু, সরলরেখা ইত্যাদি ধারণা সংজ্ঞা আদৌ দেওয়া হয় না। পরিবর্তে এই মৌলিক

আমরা ধরে নেব যে $\lim_{N\to\infty} f(B|A)$ এই সীমার অস্তিত্ব আছে যা $P(B|A)$ দ্বারা চিহ্নিত হবে এবং যাকে বলা হবে A ঘটনা ঘটেছে এই অনুমানের ভিত্তিতে B ঘটনার শর্তাধীন সম্ভাবনা, অর্থাৎ

$$P(B|A) = \lim_{N\to\infty} f(B|A)$$

এই সংজ্ঞা থেকে সহজেই পাই সম্ভাবনার গুণনিয়ম (2.4.11)।

এই পরিসংখ্যা সংজ্ঞার বিরুদ্ধে প্রধান অভিযোগ হল এতে ব্যবহারিক ও গাণিতিক ধারণার মিশ্রণ ঘটেছে যা যুক্তির বিচারে গ্রাহ্য নয়। তাই শেষপর্যন্ত সম্ভাবনার সংজ্ঞার আশা ত্যাগ করে একটি স্বতঃসিদ্ধভিত্তিক তত্ত্বের কথা ভাবতে হয়।

2.6 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

1. সম্ভাবনার প্রাচীন সংজ্ঞাটি লিখুন এবং এই সংজ্ঞার বিরুদ্ধ সমালোচনাগুলি উল্লেখ করুন।

2. সম্ভাবনার পরিসংখ্যা সংজ্ঞাটি লিখুন এবং এর সাহায্যে প্রমাণ করুন যে $0 \le P(A) \le 1$ যেখানে A যে-কোনো একটি ঘটনা।

এই সংজ্ঞার ত্রুটি উল্লেখ করুন।

3. শর্তাধীন সম্ভাবনা বলতে কী বোঝায়? A ও B যে-কোনো দুটি ঘটনা হলে প্রমাণ করুন

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

4. একটি মুদ্রা পরপর দুবার ছোড়া হলে দুবারই মাথা পাওয়ার সম্ভাবনা প্রাচীন সংজ্ঞা অনুসারে নির্ণয় করুন।

5. একটি ছক্কা দুবার ছোড়া হল এবং উভয় ক্ষেত্রে উপরদিকে যে সংখ্যা উঠল তার পার্থক্য লক্ষ্য করা হল। এই পার্থক্য 3 হওয়ার সম্ভাবনা প্রাচীন সংজ্ঞা অনুসারে নির্ণয় করুন।

2.7 উত্তরমালা

4. $\frac{1}{4}$ **5.** $\frac{1}{6}$

একক 3 ❒ সম্ভাবনার স্বতঃসিদ্ধ (Axioms of Mathematical Probability)

গঠন

3.1 প্রস্তাবনা

এবার সম্ভাবনার সংজ্ঞার বদলে আমরা স্বতঃসিদ্ধভিত্তিক সম্ভাবনাতত্ত্ব পড়তে শুরু করব যার জনক ছিলেন রুশ অঙ্কবিদ্ কলমোগোরফ্। প্রথমে আমরা স্বতঃসিদ্ধগুলি বিবৃত করব। তারপর এই স্বতঃসিদ্ধগুলির সহজ ফলস্বরূপ কয়েকটি দরকারি নিয়মের প্রতিষ্ঠা করব। শেষে বেশ কয়েকটি উদাহরণে এই নিয়মগুলির প্রয়োগ কীভাবে করা যায় তা দেখাব।

3.2 উদ্দেশ্য

এই এককে আধুনিক সম্ভাবনাতত্ত্বের গোড়াপত্তন করা হবে। এই একক পড়লে আপনারা জানতে পারবেন

- গাণিতিক সম্ভাবনার স্বতঃসিদ্ধ
- স্বতঃসিদ্ধগুলির সহজ ফলস্বরূপ কয়েকটি নিয়ম
- এই নিয়মগুলি প্রয়োগের বিভিন্ন উদাহরণ

3.3 গাণিতিক সম্ভাবনার স্বতঃসিদ্ধ

মনে করুন E একটি যদৃচ্ছ পরীক্ষা যার ঘটনাদেশ হল S। আমরা ধরে নেব E-র সঙ্গে সম্পর্কিত যে-কোনো ঘটনা A-র জন্যে অর্থাৎ S-এর যে-কোনো উপসেট A-র জন্য একটি বাস্তব সংখ্যা আছে যাকে $P(A; E)$ বা $P(A)$ দ্বারা চিহ্নিত করব এবং A-র সম্ভাবনা বলে অভিহিত করব যা নিম্নলিখিত স্বতঃসিদ্ধগুলি মেনে চলে ঃ

I. $P(A) \geq 0$

II. নিশ্চিত ঘটনার সম্ভাবনা, $P(S) = 1$

III. যদি $A_1, A_2, \ldots$ ঘটনার এমন একটি সসীম বা অসীম ক্রম হয় যে এদের যে-কোনো জোড়া পরস্পর বিচ্ছিন্ন অর্থাৎ $A_i, A_j = (i \neq j,\ i, j = 1, 2, \ldots)$ তাহলে

$$P(A_1 + A_2 + \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$$

স্পষ্টতই এই স্বতঃসিদ্ধগুলি পরিসংখ্যাতত্ত্বে প্রমাণিত নিয়মগুলি অনুসরণেই নেওয়া হয়েছে এবং তৃতীয় স্বতঃসিদ্ধটি হল যোগনিয়মের প্রসারিত রূপ যা ঘটনার অসীম ক্রমের জন্যও প্রযোজ্য। এই নিয়মকে বলে **সম্পূর্ণ যোগনিয়ম**।

সম্ভাবনার পরিসংখ্যা ব্যাখ্যা ঃ এবার ভাবতে হবে সম্ভাবনা নামক এই আদর্শ সংখ্যাগুলি কীভাবে আমাদের অভিজ্ঞতার জগতে কাজে লাগাব অর্থাৎ সম্ভাবনার ব্যবহারিক মানে কী ? এর জন্যে আমরা ধরে নেব নিম্নলিখিত ব্যাখ্যা (সংজ্ঞা নয় !) যাকে সম্ভাবনার **পরিসংখ্যা ব্যাখ্যা** বলা হবে।

যদৃচ্ছ পরীক্ষা E যদি অনেকবার যথাসম্ভব একভাবে পুনরাবৃত্তি করা হয়, তাহলে যে-কোনো ঘটনা A-র পরিসংখ্যা অনুপাত তার সম্ভাবনার কাছাকাছি হবে, অর্থাৎ $f(A) \simeq P(A)$ এবং সেহেতু $f(A)$কে $P(A)$-র একটি পরীক্ষালব্ধ মান হিসেবে ধরা যাবে।

3.4 কয়েকটি নিয়মের প্রতিষ্ঠা

1. (1.5.1) থেকে আমরা পাই $A + \overline{A} = S,\ \overline{AA} = \Phi$ । তাই

$$1 = P(S) = P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$$

অথবা

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \qquad \text{.....} (3.4.1)$$

2. যেহেতু $\overline{S}, = \Phi,\ P(\Phi) = P(\overline{S}) = 1 - P(S) = 0$ বা

$$P(\Phi) = 0 \qquad \text{.....} (3.4.2)$$

অর্থাৎ অসম্ভব ঘটনার সম্ভাবনা শূন্য।

যদি অবশ্য $P(A)=0$ হয়, তাহলে আমরা সিদ্ধান্ত করতে পারি না যে A অসম্ভব ঘটনা ; সেক্ষেত্রে আমরা শুধু বলি A একটি **সম্ভাবনাত্মকভাবে** অসম্ভব ঘটনা।

অনুরূপে যদি $P(A)=1$ হয়, আমরা বলি A একটি **সম্ভাবনাত্মকভাবে নিশ্চিত** ঘটনা।

3. $P(A)=1-P(\overline{A})$ এবং যেহেতু $P(\overline{A})\geq 0, P(A)\leq 1$ ..... (3.4.3)

4. ধরুন $A\subseteq B$। তাহলে $B=A+(B-A)$ যেখানে A ও $B-A$ পরস্পর বিচ্ছিন্ন এবং তাই

$$P(B)=P(A)+P(B-A)$$

অথবা

$$P(B–A)=P(b)+P(A) \quad ..... (3.4.4)$$

আবার, যেহেতু $P(B-A)\geq 0$

$$P(A)\leq P(B) \quad ..... (3.4.5)$$

5. প্রাচীন সংজ্ঞার প্রমাণ। মনে করুন ঘটনাদেশ S-এ আছে nটি ঘটনাবিন্দু $U_1, U_2,..., U_n$। তাহলে আমরা লিখি

$$S=U_1+U_2+...+U_n$$

যেহেতু যে-কোনো দুটি ঘটনাবিন্দু পরস্পর বিচ্ছিন্ন, 3নং স্বতঃসিদ্ধ থেকে পাই

$$1=P(S)\ +P(U_1)+.....+P(U_n)$$

এখন যদি ঘটনাবিন্দুগুলির সম্ভাবনা সমান হয়,

$$P(U_1)=\ ...=\ P(U_n)=\{P(U_1)\ +...+\ P(U_n)\}\ /n=1/n$$

যদি ঘটনা A-র মধ্যে mটি ঘটনাবিন্দুর থাকে, যেমন , $U_1,...,U_m$ তবে

$$A=U_1+...+\ U_m$$

তাই

$$P(A)=P(U_1)+...+P(U_m)=m/n$$

m-এর বদলে $m(A)$ লিখলে পাই

$$p(A)=\frac{m(A)}{n} \quad ..... (3.4.6)$$

6. সাধারণ যোগনিয়ম ঃ এবার আমরা যোগনিয়মকে প্রসারিত করব দুটি ঘটনা A ও B-র জন্য যারা পরস্পর বিচ্ছিন্ন নাও হতে পারে। সেক্ষেত্রে $A-AB, AB$ এবং $B-AB$ এই ঘটনাগুলির যে-কোনো জোড়া পরস্পর বিচ্ছিন্ন এবং

$$A = (A - AB) + AB, \quad B = AB + (B - AB)$$

$$A + B = (A - B) + AB + (B - AB)$$

সুতরাং 3নং স্বতঃসিদ্ধ থেকে পাই

$$P(A) = P(A - AB) + P(AB)$$

$$P(B) = P(AB) + P(B - AB)$$

$$P(A + B) = P(A - AB) + P(AB) + P(B - AB)$$

উপরের তিনটি সমীকরণ থেকে $P(A-AB)$ ও $P(B-AB)$ অপনয়ন করে পাই

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) \qquad \text{..... (3.4.7)}$$

এটাকে বলে **সাধারণ যোগনিয়ম**। যে-কোনো তিনটি ঘটনা A, B, C-র জন্যে

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B+C) - P\{A(B+C)\}$$

$$= P(A) + P(B) - P(C) - P(BC) - P(AB + AC)$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(BC) - P(AB) - P(AC) + P(ABAC)$$

অথবা, যেহেতু $ABAC = ABC$,

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(BC) - P(CA) - P(AB) + P(ABC)$$

.....(3.4.8)

সাধারণভাবে nটি ঘটনার জন্যে সাধারণ যোগনিয়ম হবে

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

$$- P(A_1 A_2) - P(A_1 A_3) - \ldots - P(A_{n-1} A_n)$$

$$+ P(A_1 A_2 A_3) + P(A_1 A_2 A_4) + \ldots + P(A_{n-2} A_{n-1} A_n)$$

$$+ \ldots\ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \ldots A_n) \qquad \text{..... (3.4.9)}$$

7. যদি $\{A_n\}$ একটি একান্বয়ী ঘটনার ক্রম হয়, তাহলে

$$P(\lim A_n) = \lim P(A_n) \qquad \text{.....}(3.4.10)$$

প্রমাণ ঃ প্রথমে মনে করুন $\{A_n\}$ একটি একান্বয়ে প্রসারণশীল ঘটনার ক্রম যার জন্যে

$$\lim A_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$$

যদি ধরি

$$B_1 = A_1, B_n = A_n - A_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

$\{B_n\}$ একটি ঘটনার ক্রম যা জোড়াগতভাবে পরস্পর বিচ্ছিন্ন এবং

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} B_n$$

ও প্রত্যেক n-এর জন্য

$$A_n = \sum_{i=1}^{\infty} B_i$$

স্বতঃসিদ্ধ III ব্যবহার করে পাই

$$P(\lim A_n) = P\left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n)$$

$$= \lim \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = \lim P\left(\sum_{i=1}^{n} B_i\right) = \lim P(A_n)$$

এবার যদি $\{A_n\}$ একান্বয়ে সংকোচনশীল হয়, তাহলে $\{\overline{A}_n\}$ একান্বয়ে প্রসারণশীল হবে এবং উপরের প্রমাণিত অংশ থেকে পাই

$$P(\lim \overline{A}_n) = \lim P(\overline{A}_n)$$

(1.5.6) থেকে পাই

$$P(\lim \overline{A}_n) = P(\overline{\lim A_n}) = 1 - P(\lim A_n)$$

আবার $\lim\{P(\overline{A}_n)\} = \lim\{1 - P(\overline{A}_n)\} = 1 - \lim P(A_n)$ এবং তাই (3.4.10) সিদ্ধ হয়।

3.5 উদাহরণ

নীচের উদাহরণগুলিতে আমরা ধরে নেব যে প্রাসঙ্গিক ঘটনাদেশটি এমন যে প্রাচীন সংজ্ঞা খাটে অর্থাৎ ঘটনাদেশটি সসীম n-সংখ্যক ঘটনাবিন্দুর সমষ্টি যারা সমতুল্য বা সমসম্ভাবনাময়।

1. একটি মুদ্রা পরপর 3 বার জোড়া হল। (a) 2টি মাথা এবং (b) পরপর 2টি মাথা পড়ার ঘটনার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

এই যদৃচ্ছ পরীক্ষার ঘটনাবেশ আমাদের বিশেষভাবে জানা—1.6 অনুচ্ছেদের উদাহরণ 1 দেখুন। এই ঘটনাদেশে $n = 8$ টি ঘটনাবিন্দু আছে। যদি A '2টি মাথা' ঘটনাকে নির্দেশ করে, তাহলে A-র মধ্যে আছে 3টি ঘটনাবিন্দু ঃ U_2, U_3, U_4 এবং তাই $m(A) = 3$। প্রাচীন সংজ্ঞা (3, 4, 6) থেকে পাই

$$P(A) = \frac{m(A)}{n} = \frac{3}{8}$$

যদি '2টি পরপর মাথা' ঘটনা B হয়, তাহলে B-র মধ্যে আছে 2টি ঘটনাবিন্দু U_2, U_4। তাই $m(B) = 2$ এবং

$$P(B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

2. দুটি ছক্কা ছোড়া হল। প্রাপ্ত সংখ্যাদুটির যোগফল 10 বা তার বেশি হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

এখানে $n = 36$ মনে করুন A, B, C যথাক্রমে 'যোগফল 10', 'যোগফল 11' এবং 'যোগফল 12' নির্দেশ করে। তাহলে প্রশ্নের অভীষ্ট ঘটনা হল $A + B + C$ এবং যেহেতু A-র মধ্যে আছে 3টি ঘটনাবিন্দু $(4,6), (5,5), (6,4)$ B-র মধ্যে আছে 2টি ঘটনাবিন্দু $(5,6), (6,5)$ এবং C-র মধ্যে আছে 1টি ঘটনাবিন্দু $(6,6)$

$$m(A) = 3, m(B) = 2, m(C) = 1$$

$$P(A) = \frac{3}{36}, P(B) = \frac{2}{36}, P(C) = \frac{1}{36}$$

যেহেতু A, B, C জোড়াগতভাবে পরস্পর বিচ্ছিন্ন, স্বতঃসিদ্ধ III থেকে পাই

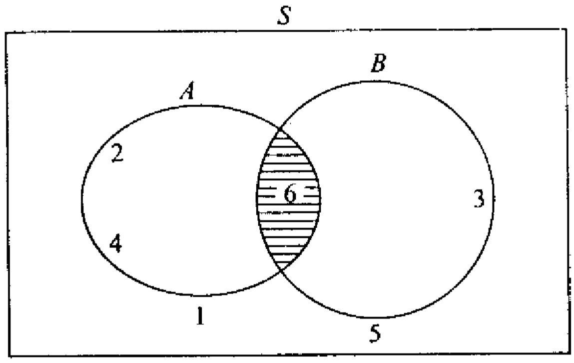
$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{1}{6}$$

3. একটি ছক্কা ছোড়া হল। যদি ফলাফল 'জোড় সংখ্যা বা 3-এর গুণিতক' হয়, আমি জিতি। আমার জেতার সম্ভাবনা কত ?

ধরুন A – জোড়সংখ্যা, $B - 3$ এর গুণিতক।

ঘটনাদেশ S এবং A, B ঘটনাদুটি সঙ্গোর চিত্রে রূপায়িত হল। লক্ষ্য করুন A, B পরস্পর বিচ্ছিন্ন নয় এবং দুটির মধ্যেই আছে এমন ঘটনাবিন্দু 1টি : 6। স্পষ্টতই $n = 6, m(A) = 3, m(A) = 3, m(B) = 2, m(AB) = 1$। অতএব

$$P(A) = \frac{3}{6}, P(B) = \frac{2}{6}, P(AB) = \frac{1}{6}$$



(3.4.7) দ্বারা আমার জেতার সম্ভাবনা

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{2}{3}$$

4. একটি ছক্কা k-বার পরপর ছোড়া হল। অন্তত একবার ছয় পড়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

এই যদৃচ্ছ পরীক্ষার ফলাফল রূপায়িত হতে পারে পরপর kটি পূর্ণসংখ্যার দ্বারা যার প্রত্যেকটির মান হতে পারে $1, 2, ..., 6$, যেমন $(5, 3, 1, ..., 3)$ স্পষ্টতই ঘটনাদেশে ঘটনাবিন্দুর মোট সংখ্যা হবে যতরকমভাবে kটি ঘর 6টি ভিন্ন বস্তুর দ্বারা পুনরাবৃত্তি করে পূর্ণ করা যায়। তাই $n = 6^k$।

মনে করুন 'অন্তত একবার ছয়' ঘটনাটি হল A। এক্ষেত্রে A-র পূরক ঘটনা $\overline{A}$ হবে 'কোনো ছয় নয়' যার মধ্যে ঘটনাবিন্দুর সংখ্যা হবে যত রকমভাবে kটি ঘর $1, 2, ..., 5$, এই 5টি ভিন্ন বস্তুর দ্বারা পূর্ণ করা যায়। অতএব

$$m(\overline{A}) = 5^k, \ P(\overline{A}) = 5^k/6^k$$

(3.4.1) দ্বারা

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k$$

5. ভালো করে ফেটানো দুটি তাসের গোছার প্রত্যেকটি থেকে একটি করে তাস টানা হল। এদের মধ্যে অন্তত একটি ইস্কাবনের বিবি হওয়ার সম্ভাবনা কী ?

ধরুন A—প্রথম তাসটি ইস্কাবনের বিবি, এবং B—দ্বিতীয় তাসটি ইস্কাবনের বিবি। এখানে $n = 52^2$।

আরও সঠিকভাবে বলতে গেলে A হল সেই ঘটনা যেখানে প্রথম তাস ইস্কাবনের বিবি ও দ্বিতীয় তাস যেকোনো এবং ঘটনা B হল প্রথম তাস যে-কোনো ও দ্বিতীয় তাস ইস্কাবনের বিবি। তাই $m(A) = m(B) = 52$ এবং

$$P(A) = P(B) = \frac{52}{52^2} = \frac{1}{52}$$

AB ঘটনার মধ্যে 1টি ঘটনাবিন্দু আছে যা হল দুটি তাসই ইস্কাবনের বিবি। তাই $m(AB) = 1$ এবং $P(AB) = 1/52^2$। আমাদের কাঙ্ক্ষিত ঘটনা হল $A + B$ যার সম্ভাবনা।

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{52} + \frac{1}{52} - \frac{1}{52^2} = \frac{103}{2704}$$

মন্তব্য ঃ উপরের অঙ্কে $P(A)$-র মান বের করার সময় আমরা যদি শুধু প্রথম টানার কথাই ভাবি যার ঘটনাদেশে আছে 52টি ঘটনাবিন্দু এবং A-তে আছে 1টি ঘটনাবিন্দু, $P(A) = 1/52$। উত্তরটা ঠিক, কিন্তু এই প্রক্রিয়ায় আমরা প্রশ্নের ঘটনাদেশের বদলে একটি খণ্ড ঘটনাদেশ বিবেচনা করছি যার যুক্তি এখনো আমাদের অজানা। পরে এই যুক্তির ব্যাখ্যা মিলবে।

6. একটি পাত্রে $N = N_1 + N_2$-সংখ্যক বল আছে যার মধ্যে N_1টি সাদা এবং N_2টি কালো। (a) একটি বল যদৃচ্ছভাবে টানা হল। বলটি সাদা হওয়ার সম্ভাবনা কত ? (b) যদি nটি বল টানা হয়, তার মধ্যে iটি কালো হওয়ার সম্ভাবনা কত ? (ধরুন এক রঙের বলগুলি নিজেদের মধ্যে ভিন্ন বলে চেনা যায়।)

(a) একটি বল টানা হলে ঘটনাদেশে Nটি ঘটনাবিন্দু আছে যার মধ্যে সাদা হওয়ার ঘটনার আছে N_1টি ঘটনাবিন্দু। অতএব একটি সাদা বল টানার সম্ভাবনা হল N_1/N।

(b) এক্ষেত্রে ঘটনাবিন্দুর চেহারা হবে n বলে একটি সমষ্টি। তাই ঘটনাবিন্দুর মোটসংখ্যা হবে Nটি ভিন্ন বস্তুর থেকে n বস্তুর যতগুলি ভিন্ন সমষ্টি গঠন করা যায় ততগুলি, অর্থাৎ

$$\binom{N}{n}$$

যদি এই n বলের মধ্যে i টি সাদা হয়, বাকি $(n-i)$ টি কালো। সুতরাং 'i টি সাদা বল' ঘটনার মধ্যে থাকা ঘটনাবিন্দুর সংখ্যা হবে

$$\binom{N_i}{i}\binom{N_2}{n-i}$$

এবং সেহেতু এর সম্ভাবনা হল

$$\frac{\binom{N_i}{i}\binom{N_2}{n-i}}{\binom{N}{n}} \qquad \text{.....(3.5.1)}$$

স্টারলিং-এর সূত্র

আমরা জানি বড় সংখ্যার গৌণিক (factorial)-এর মান বের করা কতটা কষ্টসাধ্য এবং এর আসন্ন মান নির্ণয়ের একটি সূত্র আছে যা **স্টারলিং-এর সূত্র** (Stirling's formula) নামে পরিচিত। সূত্রটি হল n-এর বড় মানের জন্যে

$$n! \simeq \sqrt{2\pi}\; n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$$

এই সূত্রটি যথেষ্ট নিখুঁত কেননা আমরা দেখি $n = 10$ হলে ভুলের পরিমাণ 0.8% আর $n = 100$ হলে ভুলের পরিমাণ মাত্র 0.08%।

7. ব্রিজ খেলায় 13 তাসের একহাতে একটি টেক্কা থাকার সম্ভাবনা কী ? সমস্যাটিকে এইভাবে বিবৃত করা যায়—একটি তাসের গোছায় 52টি তাস আছে যার মধ্যে 4টি টেক্কা ও 48টি অন্য তাস। গোছা থেকে 13টি তাস টানা হল। এই 13টি তাসের মধ্যে 1টি টেক্কা থাকার সম্ভাবনা কী ? এইভাবে বললে সমস্যাটি উদাহরণ 6(b)-র ঠিক অনুরূপ হয়। অতএব (3.5.1) দ্বারা উত্তর হবে

$$\binom{4}{1}\binom{48}{12}\Big/\binom{52}{13} \simeq 0.44$$

8. উদাহরণ 6-এর সমস্যাকে সহজেই দুয়ের বেশি রঙের বলের জন্যে বিস্তার করা যায়। মনে করুন একটি পাত্রে $N_1 = N_1 + N_2 + \ldots + N_m$ সংখ্যক বল আছে যার মধ্যে N_1টি প্রথম রঙের N_2টি দ্বিতীয় রঙের, ... এবং N_mটি m-তম রঙের।

পাত্র থেকে একটি k-তম রঙের বল টানার সম্ভাবনা হল $N_k/N\,(k = 1, 2, ..., m)$।

যদি $n = i_1 + i_2 + ... + i_m$-সংখ্যক বল একসঙ্গো টানা হয়, তার মধ্যে i_1টি প্রথম রঙের, i_2টি দ্বিতীয় রঙের, ... এবং i_mটি m-তম রঙের হওয়ার সম্ভাবনা হবে

$$\frac{\binom{N_1}{i_1}\binom{N_2}{i_2}\cdots\binom{N_m}{i_m}}{\binom{N}{n}} \qquad .....(3.5.2)$$

যা উদাহরণ 6-এর অনুরূপ যুক্তির দ্বারা প্রমাণিত হয়।

9. ব্রিজ খেলায় একহাতে 5টি ইস্কাবন, 4টি হরতন, 3টি রুইতন ও 1টি চিড়িতন থাকার সম্ভাবনা কী?

(3.5.2) দ্বারা এই সম্ভাবনা হল

$$\binom{13}{5}\binom{13}{4}\binom{13}{3}\binom{13}{1}\bigg/\binom{52}{13} \simeq 0.0054$$

10. একটি পাত্রে N_1টি সাদা ও N_2টি কালো বল আছে $(N = N_1 + N_2)$ যার থেকে পরপর একটি করে বল টানা হল ফেরত না দিয়ে। প্রথম সাদা বলটি পাওয়ার আগে iটি কালো বল পাওয়ার সম্ভাবনা কী?

মনে করুন বলগুলি এক এক করে টানা হল ফেরত না দিয়ে এবং Nটি ভিন্ন ঘরে সাজিয়ে রাখা হল। ঘটনাদেশে ঘটনাবিন্দুর মোটসংখ্যা হবে যতরকমভাবে Nটি ভিন্ন বল Nটি ঘরে, ফেরত না দিয়ে, সাজানো যেতে পারে, অর্থাৎ $N!$। এখন কাঙ্ক্ষিত ঘটনার মানে হচ্ছে প্রথম iটি ঘরে কালো বল আছে, $(i+1)$-তম ঘরটিতে আছে সাদা বল এবং শেষের $N-i-1$ ঘরে আছে বাকি $(N-i-1)$ টি বল যে-কোনোভাবে সাজানো। সুতরাং ঘটনাটিতে আছে

$$N_2(N_2-1)\ldots(N_2-i+1)\,.\,N_2\,.\,(N-i-1)!$$

-সংখ্যক ঘটনাবিন্দু এবং তাই এর সম্ভাবনা হল

$$\frac{N_1N_2(N_2-1)\ldots(N_2-i+1)}{N(N-1)\ldots(N-i)} \qquad .....(3.5.3)$$

স্পষ্টতই এই ফলাফল $i \ge 1$-এর জন্য সিদ্ধ। $i = 0$-র জন্য এই সম্ভাবনা হবে N_1/N (উদাহরণ $6(a)$)।

11. যদি rটি বল nটি প্রদত্ত খোপে যদৃচ্ছভাবে রাখা হয়, তাহলে প্রথম খোপে r_1 বল, দ্বিতীয় খোপে r_2 বল, ... এবং n-তম খোপে r_n বল $(r_1 + r_2 + \ldots + r_n = r)$ থাকার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

বলগুলি ভিন্ন হওয়ায় এদের $1, 2, \ldots, r$ নম্বর দিয়ে চিহ্নিত করতে পারি। যেহেতু প্রথম বলটি n খোপের যে-কোনো একটিতে রাখা যায় এবং দ্বিতীয়, তৃতীয় ..., r-তম বলের জন্য একই কথা খাটে, Ùåæì óíÐ vâìå Ùåææû`óã ½æÔÖ ðíû n^r। প্রদত্ত ঘটনাতে অবস্থিত ঘটনাবিন্দুর সংখ্যা হবে যতগুলি r ভিন্ন বলের এমন বিন্যাস পাওয়া যায় যে প্রথম r_1টি বল প্রথম খোপে, পরের r_2টি বল দ্বিতীয় খোপে, ..., শেষের r_nটি বল n-তম খোপে থাকে, কিন্তু যে-কোনো খোপে থাকা বলগুলির সাজানোর ক্রম অগ্রাহ্য হবে। সুতরাং প্রদত্ত ঘটনাতে

$$\frac{r!}{r_1!\, r_2! \ldots r_n!}$$

সংখ্যক ঘটনাবিন্দু আছে, এবং তাই এর সম্ভাবনা

$$\frac{n^{-r}\, r!}{r_1!\, r_2! \ldots r_n!} \qquad ..... (3.5.4)$$

3.6 সারাংশ

প্রথম সম্ভাবনাতত্ত্বের স্বতঃসিদ্ধগুলি বিবৃত হয়েছে যার সংখ্যা তিন এবং এগুলি পুরোনো তত্ত্বের ফলাফল অনুসরণে নেওয়া হয়েছে। স্বতঃসিদ্ধগুলির অন্যতম হল সম্পূর্ণ যোগনিয়ম যার ভূমিকা গুরুত্বপূর্ণ।

সম্ভাবনাকে ব্যবহারিক অর্থ দেয় পরিসংখ্যা ব্যাখ্যা, যা বলে যদি যদৃচ্ছ পরীক্ষাটি বহুসংখ্যকবার পুনরাবৃত্তি করা হয়, তাহলে একটি ঘটনার পরিসংখ্যা-অনুপাত এর সম্ভাবনার কাছাকাছি হবে।

এরপর স্বতঃসিদ্ধগুলির ফলশ্রুতি হিসেবে কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ নিয়মের প্রতিষ্ঠা করা হয়েছে যার মধ্যে আছে সাধারণ যোগনিয়ম যা যে-কোনো দুটি ঘটনার জন্যে প্রযোজ্য এবং ঘটনার একান্বয়ী ক্রমের জন্যে একটি সীমাসূত্র (3.4.10)।

3.7 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

1. (ক) গাণিতিক সম্ভাবনার স্বতঃসিদ্ধগুলি লিখুন এবং এর থেকে সম্ভাবনার প্রাচীন সংজ্ঞাটি প্রমাণ করুন।

(খ) নীচের সূত্রগুলি প্রমাণ করুন ঃ

$$P(\bar{A}+\bar{B}) = 1 - P(AB)$$

$$P(\bar{A}\,\bar{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB)$$

$$P(\bar{A}+B) = 1 - P(A) + P(AB)$$

$$P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB)$$

2. (ক) যে-কোনো দুটি ঘটনা A ও B-র জন্য প্রমাণ করুন

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

(খ) A ও B ঘটনাদুটির মধ্যে কেবলমাত্র একটির ঘটার সম্ভাবনা হল

$$P(A) + P(B) - 2P(AB)$$

—এটা প্রমাণ করুন।

3. প্রমাণ করুন

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) \leq P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

একে **বুলের অসমীকরণ** (Boole's inequality) বলে।

4. একটি মুদ্রা n-বার পরপর ছোড়া হল। rটি মাথা পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

5. দুটি ছক্কা ছুড়লে বিজোড় যোগফলের সম্ভাবনা কী ?

6. একটি ভালো করে ফেটানো তাসের গোছা থেকে দুটি তাস টানা হল। এর মধ্যে অন্তত একটি ইস্কাবন হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

7. দুটি পাত্রে যথাক্রমে 3টি সাদা, 7টি লাল, 15টি কালো বল এবং 10টি সাদা, 6টি লাল, 9টি কালো বল আছে। প্রত্যেক পাত্র থেকে একটি বল টানা হল। বলদুটি একই রঙের হওয়ার সম্ভাবনা কী ?

8. একটি পাত্রে তিনটি বল আছে যাদের নম্বর $1, 2, 3$। পরপর দুটি বল টানা হল প্রথম বলটি ফেরত দিয়ে। বলদুটির নম্বরের যোগফল 5 হওয়ার সম্ভাবনা কত ?

9. দেখান যে একটি ছক্কা 4-বার ছোড়ায় অন্তত একবার ছয় পড়ার সম্ভাবনা $\frac{1}{2}$ এর চেয়ে একটু বেশি এবং দুটি ছক্কার 24-বার ছোড়ায় অন্তত একবার দুই-ছয় পড়ার সম্ভাবনা $\frac{1}{2}$-এর একটু কম।

10. ন্যূনতম কতবার একটি ছক্কা ছোড়া হলে ছয় না পড়ার সম্ভাবনা $\frac{1}{2}$-এর চেয়ে কম ?

11. $1, 2, ..., n$ এই সংখ্যাগুলি যদৃচ্ছভাবে সাজানো হল। 1 ও 2 একসঙ্গে থাকার সম্ভাবনা কত ?

12. $1, 2, ..., 2n + 1$ এই সংখ্যাগুলির থেকে তিনটি সংখ্যা যদৃচ্ছভাবে নেওয়া হল। দেখান যে এই সংখ্যাগুলি সমান্তর প্রগতিতে থাকার সম্ভাবনা $3n/(4n^2 - 1)$।

13. একটি মুদ্রা $m + n$ বার $(m > n)$ ছোড়া হল। পরপর ঠিক m-বার মাথা পড়ার সম্ভাবনা $(n + 3)/2^{m+2}$, প্রমাণ করুন।

14. একটি পাত্রে nটি বল আছে যার থেকে যে-কোন সংখ্যক বল টানা হল। দেখান যে জোড়সংখ্যক বল টানার সম্ভাবনা $(2^{n-1} - 1)/(2^n - 1)$।

15. তাসের একটি পূর্ণ গোছা থেকে জোড়সংখ্যক তাস টানা হল। এদের মধ্যে অর্ধেক লাল আর অর্ধেক কালো হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

16. ব্রিজের এক হাতে অন্তত একটি টেক্কা থাকার সম্ভাবনা কত ?

17. ব্রিজ খেলায় 'উত্তর' ও 'দক্ষিণ' দুহাতে একত্রে সবকটি টেক্কা থাকার সম্ভাবনা কী ?

18. একটি লটারিতে 100টি পুরস্কার আছে এবং 10,000টি টিকিট ছড়া হল। এক ব্যক্তি ন্যূনতম কতটি টিকিট কিনলে তার অন্তত একটি পুরস্কার পাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{1}{2}$-এর চেয়ে বেশি হবে ?

19. 3 জন পুরুষ, 2 জন মহিলা ও 4 জন শিশুর একটি দল থেকে 4 জন ব্যক্তি মনোনীত করা হল। এর মধ্যে 1 জন পুরুষ, 1 জন মহিলা ও 1 জন শিশু থাকার সম্ভাবনা কত ?

20. ব্রিজের এক হাতে কোনো রঙের 5টি, দ্বিতীয় রঙের 4টি, তৃতীয় রঙের 3টি ও চতুর্থ রঙের 1টি তাস থাকার সম্ভাবনা কত ?

21. একটি পাত্রে N_1টি সাদা ও N_2টি কালো বল আছে। দুজন খেলোয়াড় A এবং B পর্যায়ক্রমে একটি করে বল টানবে ফেরত না দিয়ে। যে প্রথম একটি সাদা বল টানবে সে খেলা জিতবে। যদি A বল টানতে শুরু করে, তার জেতার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

22. একটি পূর্ণ তাসের গোছা থেকে পরপর একটি করে তাস টানা হলে প্রথম টেক্কার আগে পাঁচটি অন্য তাক পাওয়ার সম্ভাবনা কী ?

23. একটি পাত্রে N_1 টি সাদা ও N_2 টি কালো বল আছে যার থেকে kটি বল একের পর এক ফেরত না দিয়ে টানা হল কিন্তু তাদের রঙ লক্ষ্য করা হল না। তারপর আরও একটি বল টানা হল। এই বলটি সাদা হওয়ার সম্ভাবনা কত ?

24. যদি nটি খোপে rটি বল যদৃচ্ছভাবে রাখা হয়, প্রমাণ করুন যে একটি নির্দিষ্ট খোপে iটি বল থাকার সম্ভাবনা P_i যেখানে

$$P_i = \frac{\binom{r}{i}(n-1)^{r-i}}{n^r}$$

আরও দেখান যে একটি খোপে বৃহত্তম সম্ভাবনাময় বলের সংখ্যা i_m নীচের অসমতাগুলির দ্বারা নির্ধারিত হয়

$$(r+1)/n - 1 \le i_m \le (r+1)/n$$

অর্থাৎ যদি $(r+1)/n$ একটি পূর্ণসংখ্যা না হয়, i_m = বৃহত্তম পূর্ণসংখ্যা যা $(r+1)/n$ চেয়ে কম এবং যদি $(r+1)/n$ একটি পূর্ণসংখ্যা হয়, $i_m = (r+1)/n - 1$ বা $(r+1)/n$।

25. যদি nটি বস্তু a-জন পুরুষ ও b-জন মহিলার মধ্যে যদৃচ্ছভাবে বণ্টন করা হয় $(B < a)$ তাহলে দেখান যে মহিলাদের বিজোড়সংখ্যক বস্তু পাওয়ার সম্ভাবনা হবে

$$\frac{(a+b)^n - (a-b)^n}{2(a+b)^n}$$

3.8 উত্তরমালা

1. (খ) $\overline{A} + \overline{B} = \overline{AB}$, $\overline{AB} = \overline{A+B}$, $AB + \overline{A}B = B$

2. (খ) কাঙ্ক্ষিত ঘটনা $= (A - AB) + (B - AB)$ (3.4.4) ব্যবহার করুন।

3. $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2) \le P(A_1) + P(A_2)$ স্বতঃসিদ্ধ I দ্বারা। তারপর আরোহ পদ্ধতি ব্যবহার করুন।

4. $\dfrac{\binom{n}{r}}{2^n}$

5. $\dfrac{1}{2}$

6. A—অন্তত একটি ইস্কাবন $\overline{A}$— কোনো ইস্কাবন নয়। (3.5.1) দ্বারা

$$P(\overline{A}) = \binom{39}{2} \Big/ \binom{52}{2} = \frac{19}{34}\ P(A) = \frac{15}{34}$$

7. A, B, C—বল তিনটি যথাক্রমে সাদা, লাল ও কালো রঙের। কাঙ্ক্ষিত ঘটনা $= A + B + C$ যেখানে A, B, C জোড়াগতভাবে পরস্পর বিচ্ছিন্ন। $m = 625, m(A) = 30, m(B) = 42,\ m(C) = 135$। $P(A + B + C) = 207/625$।

8. $\dfrac{2}{9}$

9. প্রশ্নের সম্ভাবনা দুটি যথাক্রমে

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^4 \simeq .52,\ \ 1-\left(\frac{35}{36}\right)^4 \simeq .49$$

10. $(5/6)^k < 1/2 \Rightarrow k \geq 4$। উত্তর 4

11. $\dfrac{2}{n}$

12. ঘটনাবিন্দুর মোটসংখ্যা $= \binom{2n+1}{3} = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$। টানা তিনটি সংখ্যা সাজিয়ে এইভাবে লেখা যায় $a,\ a+d, a+2d$ যেখানে $a \geq 1, a+2d \leq 2n+1, d \geq 1$ এবং তাই $a \leq 2n-1$। যদি $a=1$, হয়, $1 \leq d \leq n$ যা দেয় nটি ঘটনাবিন্দু। যদি $a=2$ হয় $d \leq n\dfrac{1}{2}$ বা $1 \leq d \leq n-1$ যা দেয় $(n-1)$ টি ঘটনাবিন্দু। $a=3$ হলেও আমরা পাই $(n-1)$ টি ঘটনাবিন্দু ইত্যাদি। পরিশেষে $a=2n-2$ ও $a=2n-1$ এই দুক্ষেত্রেই পাই 1টি করে ঘটনাবিন্দু। সুতরাং প্রদত্ত ঘটনায় ঘটনাবিন্দুর সংখ্যা $= n+2.\ \dfrac{1}{2}\ (n-1)n = n^2$।

13. মনে করুন $(m+n)$-বার মুদ্রা নিক্ষেপের ফল $(m+n)$টি ঘরে লেখা হল। যেহেতু প্রত্যেকটি ঘরে 'মাথা' অথবা 'ল্যাজ' এই দুটি বসতে পারে, ঘটনাবিন্দুর মোট সংখ্যা $= 2^{m+n}$। যেহেতু $m > n$, পরপর mটি মাথা একবার মাত্র ঘরগুলিতে বসতে পারে যার শুরু 1-তম বা 2-তম ... বা $(n+1)$-তম ঘর থেকে। প্রথম এবং শেষ ক্ষেত্র ছাড়া m মাথার শৃঙ্খলের ঠিক আগে এবং পরে ল্যাজ থাকা আবশ্যিক যা না হলে শৃঙ্খলটি বৃদ্ধি পাবে। প্রথম ক্ষেত্রে শৃঙ্খলের ঠিক পরের ঘরটিতে এবং শেষক্ষেত্রে শৃঙ্খলের ঠিক আগের ঘরটিতে ল্যাজ বসবে। অতএব ঠিক mটি মাথার শৃঙ্খলের মধ্যে আছে $(n-1)2^{n-2} + 2.2^{n-1} = (n+3)\ 2^{n-2}$ সংখ্যক ঘটনাবিন্দু।

14. ঘটনাবিন্দুর মোট সংখ্যা $=\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n-1$ । প্রদত্ত ঘটনাবিন্দুর সংখ্যা $=$

$\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots=2^{n-1}-1$ ।

15. $$n=\binom{52}{2}+\binom{52}{4}+\ldots+\binom{52}{52}=2^{51}-1$$

$$m(A)=\binom{26}{1}^2+\binom{26}{2}^2+\ldots+\binom{26}{26}^2=\frac{52!}{(26!)^2}-1$$

$$P(A)=\left\{\frac{52!}{(26!)^2}-1\right\}\Big/(2^{51}-1)$$

16. $1-\binom{48}{13}\Big/\binom{52}{13}\simeq 0.696$

17. $$\binom{4}{4}\binom{48}{22}\Big/\binom{52}{26}=\frac{46}{833}$$

18. যদি kটি টিকিট কিনতে হয়, তাহলে

$$\frac{1}{2}<1-\binom{10000-k}{100}\Big/\binom{10000}{100}\simeq 1-(.99)^k$$

অথবা $(.99)^k<.5\Rightarrow k\geq 70$ । উত্তর 70

19. (3.5.2) দ্বারা উত্তর

$$\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{4}{2}\Big/\binom{9}{4}=\frac{2}{7}$$

20. 4টি বিভিন্ন রঙ নিজেদের মধ্যে 4!-ভাবে সাজানো যায় এই কথা মনে রেখে (3.5.2)-এর সাহায্যে উত্তর

$$4!\binom{13}{5}\binom{13}{4}\binom{13}{3}\binom{13}{1}\Big/\binom{52}{13}\simeq 0.129$$

21. (3.5.3) সূত্রের সম্ভাবনাকে $P_i(i \geq 1)$ এবং $p_0 = N_1/N$ লিখলে, উত্তর $p_0 + p_2 + \ldots$

22. $\dfrac{3036}{54145}$

23. এখানে যদৃচ্ছ পরীক্ষা হল $(k+1)$ -সংখ্যক বল টানা। ঘটনাবিন্দুর মোট সংখ্যা $= (N_1 + N_2)(N_1 + N_2 - 1) \ldots (N_1 + N_2 - k)$। প্রদত্ত ঘটনার অর্থ হল $(k+1)$ তম টানায় সাদা বল পাওয়া যায় এবং তাই এই ঘটনার অবস্থিত ঘটনাবিন্দুর সংখ্যা হল $(N_1 + N_2 - 1)(N_1 + N_2 - 2) \ldots (N_1 + N_2 - k) N_1$। অতএব কাঙ্ক্ষিত সম্ভাবনা $= N_1/(N_1 + N_2)$।

24. বলগুলিকে নম্বর দেওয়া হল $1, 2, \ldots, r$। মোট ঘটনাবিন্দুর সংখ্যা $= n^r$, কেননা 1নং বল n খোপের যে-কোনো একটিতে রাখা যায় এবং বল নং $2, 3, \ldots, r$-এর জন্যেও এটা সত্যি। এবার যদি i-সংখ্যক বল একটি নির্দিষ্ট খোপে রাখা হয়, আমাদের বাকি থাকছে $(r - i)$টি বল যা $(n-1)$ টি খোপে বণ্টন করতে হবে, এবং যেহেতু r বলের থেকে i বল $\binom{r}{i}$ ভাবে বাছা যায়, প্রদত্ত ঘটনার স্থিত ঘটনাবিন্দুর সংখ্যা $= \binom{r}{i}(n-1)^{r-i}$ যেখান থেকে প্রথম ফলাফলটি পাওয়া যায়। দ্বিতীয় অংশের জন্যে লক্ষ্য করুন

$$\frac{P_i}{P_i+1} - 1 = \frac{n\{i+1-(r+1)/n\}}{r-i} < \text{ বা } > 0$$

যদি $i + 1 - (r+1)/n <$ বা > 0, অর্থাৎ $i < (r+1)/n - 1$ বা $i > (r+1)/n - 1$, অর্থাৎ $p_i + 1 > p_i$ হবে

যদি $i+1<(r+1)/n$ এবং $p_{i+1}<p_i$ হবে যদি $i>(r+1)/n-1$ হয়। যদি $(r+1)/n$ একটি পূর্ণসংখ্যা না হয়, ধরুন k সেই পূর্ণসংখ্যা যার জন্যে $(r+1)/n-1<k<(r+1)/n$। তাহলে

$$p_0 < p_1 < \ldots < p_k > p_{k+1} > \ldots > p_r$$

যা দেখায় $i_m = k$।

আর যদি $(r+1)/n$ একটি পূর্ণসংখ্যা s হয়, তাহলে

$$p_0 < p_1 < \ldots < p_{s-1} = p_s > p_{s+1} > \ldots > p_r$$

যার থেকে $i_m = s-1$ বা s।

25. 24নং প্রশ্নের মতো মোট ঘটনাবিন্দুর সংখ্যা $=(a+b)^n$। a-জন পুরুষের মধ্যে $n-i$ বস্তু ও b-জন মহিলার মধ্যে i বস্তু বণ্টন করা যায় -ভাবে এবং তাই প্রদত্ত ঘটনার মধ্যে আছে

$$\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{3}a^{n-3}b^3+\ldots\ldots=\frac{1}{2}\{(a+b)^n-(a-b)^n\}$$

সংখ্যক ঘটনাবিন্দু।

একক 4 ❒ শর্তাধীন সম্ভাবনা (Conditional Probability)

গঠন

4.1 প্রস্তাবনা

এই এককে শর্তাধীন সম্ভাবনার সংজ্ঞা ও ব্যাখ্যা দেওয়া হবে। এই সংজ্ঞার ফলস্বরূপ আমরা পাব সম্ভাবনার গুণনিয়ম। এর পরে আসবে শর্তাধীন সম্ভাবনার একটি অতি প্রয়োজনীয় সূত্র এবং ব্যেজের উপপাদ্য (Bayes' theorem) যা একসময় দার্শনিকদের ভাবনার খোরাক হয়েছিল।

শেষে দুটি ঘটনার সম্ভাবনার নিরিখে স্বাধীনতা বা অনপেক্ষতার প্রসঙ্গ আলোচনা হবে এবং অনপেক্ষতার ধারণাকে দুয়ের বেশি ঘটনার জন্যে প্রসারিত করা হবে।

4.2 উদ্দেশ্য

এই একক পড়লে আপনারা জানতে পারবেন

- শর্তাধীন সম্ভাবনার সংজ্ঞা ও তার ব্যাখ্যা
- একটি প্রয়োজনীয় সূত্র ও ব্যেজের উপপাদ্য
- সম্ভাবনাত্মক অনপেক্ষতার ধারণা

4.3 শর্তাধীন সম্ভাবনা

আমাদের তত্ত্বে শর্তাধীন সম্ভাবনা (conditional probability) হবে এইরকম : ঘটনা A ঘটেছে এই অনুমানের ভিত্তিতে ঘটনা B-র **শর্তাধীন সম্ভাবনাকে** $P(B|A)$ দ্বারা চিহ্নিত হবে এবং এর সংজ্ঞা হবে

$$p(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \qquad \text{.....}(4.3.1)$$

যদি $P(A)\neq 0$ হয়। যদি $P(A)=0$ হয়, $P(B|A)$ সংজ্ঞায়িত নয়।

ব্যাখ্যা ঃ যদৃচ্ছ পরীক্ষাটির বহুবার পুনরাবৃত্তিতে যদি A ঘটনা ঘটেছে এই অনুমানের ভিত্তিতে B ঘটনার শর্তাধীন পরিসংখ্যা-অনুপাত $f(B|A)$ হয় (যার সংজ্ঞা 2.4 অনুচ্ছেদে দেওয়া হয়েছে), তাহলে $f(B|A)\simeq P(B|A)$। অনুরূপে, সংজ্ঞা অনুযায়ী

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

যদি $P(B)\neq 0$।

অতএব যদি $P(A), P(B)\neq 0$, আমরা পাই

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)\,P(A|B) \qquad \text{.....}(4.3.2)$$

এটাই হল **সম্ভাবনার গুণনিয়ম**। এই গুণনিয়মের তাৎপর্য হল যদি শর্তাধীন সম্ভাবনা $P(B|A)$ সংজ্ঞা (4.3.1) ব্যবহার না করে প্রত্যক্ষভাবে সমস্যার পরিস্থিতি বিচার করে বের করা যায়, তাহলে (4.3.2) সূত্রটি দিয়ে AB ঘটনার সম্ভাবনা নির্ণয় করা যায়।

গুণনিয়মের বিস্তার

তিনটি ঘটনা A, B, C-র জন্যে গুণনিয়ম হবে

$$P(ABC) = P(A)\ P(B|A)\ P(C|AB) \qquad \text{.....}\ (4.3.3)$$

প্রমাণ ঃ

$$\text{ডানপক্ষ} = P(A)\frac{P(AB)}{P(A)}\frac{P(ABC)}{P(AB)}=P(ABC)$$

সাধারণভাবে, nটি ঘটনার জন্যে

$$P(A_1A_2\dots A_n)=P(A_1)\,P(A_2|A_1)\,P(A_3|A_1A_2)\dots P(A_n|A_1A_2\dots A_{n-1}) \quad (4.3.4)$$

1. $P(AB|A) = P(B|A)$

2. $P(B + C|A) = P(B|A)\, P(C|A) - P(BC|A)$

যদি $ABC = \Phi$ হয়,

$$P(B + C|A) = P(B|A)\, P(C|A)$$

3. যদি ঘটনাদেশে সমসম্ভাবনাময় n-সংখ্যক ঘটনাবিন্দু থাকে, তাহলে

$$= P(A) = \frac{m(A)}{n}, \quad P(AB) = \frac{m(AB)}{n}$$

এবং (4.3.1) থেকে পাই

$$P(B|A) = \frac{m(AB)}{m(A)} \qquad \text{.....}(4.3.5)$$

অর্থাৎ আমরা বলতে পারি যে, যখন আমরা শর্ত করি যে A ঘটেছে, তখন আমরা একটা নতুন ঘটনাদেশ A-তে সীমাবদ্ধ থাকছি যার মধ্যে B-র অংশ হল AB যাতে আছে $m(AB)$ সংখ্যক ঘটনাবিন্দু এবং তাই (4.3.5) প্রাচীন সংজ্ঞারই অনুরূপ।

উদাহরণ

1. 3.5 অনুচ্ছেদের 3নং উদাহরণে $P(A|B)$ ও $P(A|B)$-এর মান বের করুন যেখানে A হচ্ছে 'জোড় সংখ্যা' ও B '3-এর গুণিতক'।

আমরা ইতিমধ্যে পেয়েছি

$$n = 6,\ m(A) = 3,\ m(B) = 2,\ m(AB) = 1$$

তাই

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, P(AB) = \frac{1}{6}$$

সংজ্ঞা অনুসারে

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1}{3}$$

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1}{2}$$

আরও সহজে (4.3.5) দ্বারা পাই

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{3}$$

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1}{2}$$

2. একটি গোছা থেকে পরপর দুটি তাস টানা হল প্রথমটি ফেরত না দিয়ে। প্রথম তাসটি ইস্কাবন হলে দ্বিতীয়টি ইস্কাবন হওয়ার সম্ভাবনা কী ?

যদি A—প্রথম তাস ইস্কাবন, B—দ্বিতীয় তাস ইস্কাবন, তাহলে AB—উভয় তাস ইস্কাবন। অতএব

$$m(A) = 13 \times 51,\ m(AB) = 13 \times 12$$

(4.3.5) দ্বারা

আমরা এইরকম প্রত্যক্ষ বিচারেও সঠিক উত্তর পাই : A ঘটনা ঘটেছে জানলে অর্থাৎ প্রথম তাসটি ইস্কাবন হলে, গোছায় 51টি তাস থাকে যার মধ্যে 12টি ইস্কাবন এবং এই শর্তাধীন দ্বিতীয় তাস টানার পরীক্ষায় ইস্কাবন হওয়ার সম্ভাবনা হল $\frac{12}{51}=\frac{4}{17}$। এইভাবে যদি আমরা প্রত্যক্ষভাবে শর্তাধীন সম্ভাবনা নির্ণয় করতে শিখে থাকি, তাহলে পরের প্রশ্নের উত্তর গুণনিয়ম ব্যবহার করে পেতে পারি।

3. 2নং প্রশ্নে উভয় তাসই ইস্কাবন হওয়ার সম্ভাবনা বের করুন।

আগের মতন প্রথম টানা ও শর্তাধীন দ্বিতীয় টানার পরীক্ষা আলাদ আলাদা বিচার করে

$$P(A)=\frac{13}{52}=\frac{1}{4},\quad P(B|A)=\frac{4}{17}$$

গুণনিয়ম (4.3.2) দ্বারা

$$P(AB)=P(A)\,P(B|A)=\frac{1}{4}\times\frac{4}{17}=\frac{1}{17}$$

4. পলিয়ার পাত্র সমস্যা (Polya's Urn Problem) ঃ একটি পাত্রে rটি লাল ও bটি কালো বল আছে। পাত্র থেকে nটি বল পরপর এমনভাবে টানা হল যে টানা বলটি ফেরত তো দেওয়া হলই এবং তার সঙ্গো টানা বলের রঙের cটি নতুন বল পাত্রে রাখা হল। nটি কালো বলের একটি সম্পূর্ণ শৃঙ্খলের সম্ভাবনা কত ?

মনে করুন, A_i—i-তম বল কালো $(i = 1, 2, ..., n)$ তাহলে কাঙ্ক্ষিত ঘটনা হল $(A_1 A_2, ..., A_n)$। স্পষ্টতই

$$P(A_1) = \frac{b}{r+b}$$

এবার শর্ত দিন যে A_1 ঘটেছে অর্থাৎ প্রথম বলটি কালো যার ফলে এবার পাত্রে থাকবে rটি লাল ও $(b + c)$ টি কালো বল। অতএব

$$P(A_2 | A_1) = \frac{b+c}{r+b+c}$$

অনুরূপে

$$P(A_3 | A_1 A_2) = \frac{b+2c}{r+b+2c}$$

$$\dots \qquad \dots \qquad \dots$$

$$P(A_n | A_1 A_2 \dots A_{n-1}) = \frac{b+(n-1)c}{r+b+(n-1)c}$$

(4.3.4) দ্বারা পাই

$$= P(A_1 A_2 \dots A_n) = \frac{b(b+c)(b+2c)\dots[b+(n-1)c]}{(r+b)(r+b+c))r+b+2c)\dots[r+b+(n-1)c]}$$

5. মিল সমস্যা (Match Problem) : একটি পাত্রে $1, 2, ..., n$ নম্বর-যুক্ত nটি টিকিট আছে। পাত্র থেকে ফেরত না দিয়ে পরপর একটি করে টিকিট টানা হল। যদি k-তম টানায় kনং টিকিট ওঠে, তাহলে আমরা একটি মিল হয়েছে বলি। (a) অন্তত একটি মিল, (b) কোনো মিল নয় এবং (c) ঠিক iটি মিলের সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

টানা টিকিটগুলিকে nটি বিভিন্ন ঘরে সাজিয়ে রাখা হল। n ঘরে n টিকিট $n!$-ভাবে সাজানো যায় এবং তাই ঘটনাবিন্দুর মোট সংখ্যা $n!$।

মনে করুন, A_k হল 'k-তম টানায় মিল' ঘটনাটি ($k = 1, 2, \ldots n$)। প্রথমে $P(A_1A_2 \ldots A_k)$ বের করা যাক। $A_1A_2 \ldots A_k$ ঘটনাটির মধ্যে আছে $(n-k)!$ টি ঘটনাবিন্দু, কেননা $1, 2, \ldots, k$ নং ঘরগুলি যথাক্রমে $1, 2, \ldots, k$ নং টিকিট দ্বারা অধিকৃত আছে, তাই বাকি $(n-k)$-সংখ্যক ঘর $(n-k)$-সংখ্যক টিকিট দ্বারা $(n-k)!$ ভাবে পূর্ণ করা যায়। অতএব

$$P(A_1A_2 \ldots A_k) = \frac{(n-k)!}{n!}$$

(a) (3.4.9) দ্বারা এবং প্রতিসাম্য ব্যবহার করে পাই

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n)$$

$$= nP(A_1) - \binom{n}{2} P(A_1A_2) + \ldots + (-1)^{n+1} + P(A_1A_2 \ldots A_n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} P(A_1A_2 \ldots A_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}$$

(b) কোনো মিল না হওয়ার সম্ভাবনা

$$= 1 - P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

(c) প্রতিসাম্যের বিচারে ঠিক iটি মিলের সম্ভাবনা হবে $\binom{n}{i} P(A_1A_2 \ldots A_iB)$, যেখানে B শেষ $n - i$ টানায় কোনো মিল না হওয়ার ঘটনাটি। এখন

$$P(A_1A_2 \ldots A_iB) = P(A_1 A_2 \ldots A_i)\, P(B | A_1 A_2 \ldots A_i)$$

$$= \frac{(n-i)!}{n!} P(B | A_1A_2 \ldots A_i)$$

$P(B | A_1 A_2 \ldots A_i)$ এই শর্তাধীন সম্ভাবনা বের করার জন্যে আমরা লক্ষ্য করি যে, যদি $A_1 A_2 \ldots A_i$ ঘটনাটি ঘটে থাকে, তাহলে $(n-i)$ টি টিকিট পাত্রে পড়ে থাকবে যাদের নম্বর হবে $i+1, i+2, \ldots, n$ এবং $i+1, i+2, \ldots, n$ নম্বর টানাও বাকি থাকবে। সুতরাং (b)তে n-এর পরিবর্তে $n+i$ ধরলে আমরা পাই

$$P(B|A_1 A_2 \ldots A_i) = \sum_{k=0}^{n-i} \frac{(-1)^k}{k!}$$

এবং ঠিক iটি মিলের সম্ভাবনা হবে

$$= \frac{1}{i!} \sum_{k=0}^{n-i} \frac{(-1)^k}{k!} \qquad \ldots\ldots (4.3.6)$$

4.4 ব্যেজের উপপাদ্য (Bayes' Theorem)

উপপাদ্য : যদি $A_1 A_2 \ldots A_n$ প্রদত্ত n-সংখ্যক জোড়াগতভাবে পরস্পর বিচ্ছিন্ন ঘটনা হয় যার মধ্যে অন্তত একটি নিশ্চিতভাবে ঘটবে, অর্থাৎ $A_1 A_2 = \Phi\ (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, n)$ এবং $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = S$, তাহলে যেকোনো একটি ঘটনা X-এর জন্যে

$$P(X) = P(A_1)P(X \mid A_1) + P(A_2)\, P(X \mid A_2) + \ldots\ P(A_n)\, P(X \mid A_n) \qquad \ldots\ldots (4.4.1)$$

এবং

(ব্যেজের উপপাদ্য) যদি $P(X) \neq 0$ হয়,

$$P(A_1|X) = \frac{P(A_i)P(X|A_i)}{P(A_1)P(X|A_1) + \ldots + P(A_n)P(X|A_n)} \qquad \ldots\ldots (4.4.2)$$

প্রমাণ : আমরা জানি

$$X = SX = (A_1 + A_2 + \ldots + A_n)\, X = A_1 X + A_2 X + \ldots + A_n X$$

যেহেতু $(A_i X)\,(A_j X) = A_i A_j X = \Phi X = \Phi\ (i \neq j;\ i, j = 1, 2 \ldots, n)\ A_1 X, A_2 X, \ldots, A_n X$ ঘটনাগুলি জোড়াগতভাবে পরস্পর বিচ্ছিন্ন এবং তাই

$$P(X) = P(A_1 X) + P(A_2 X) + \ldots + P(A_n X)$$

যেহেতু $P(A_i X) = P(A_i)\, P(X|A_i)$, (4.4.1) সূত্রটি প্রমাণিত হল।

আবার $P(A_i X) = P(X)\, P(A_i|X)$ এবং যদি $P(X) \neq 0$ হয়,

$$P(A_i X) = \frac{P(A_i)P(X|A_i)}{P(X)}$$

(4.4.1) ব্যবহার করলে (4.4.2) পাই।

মন্তব্য

1. (4.4.1) শর্তাধীন সম্ভাবনার একটি প্রয়োজনীয় সূত্র। এটা প্রয়োগ করা চলে যখন $P(X\,|\,A_1)$, ..., $P(X\,|\,A_n)$ এই শর্তাধীন সম্ভাবনাগুলি সহজে প্রত্যক্ষভাবে নির্ণয় করা যায়।

2. (4.4.2) সূত্রটিকে ব্যেজের উপপাদ্য বলা হয়। যদি প্রদত্ত $A_1, A_2, ..., A_n$ ঘটনাগুলিকে যে-কোনো ঘটনার কারণ বলে ভাবি, তাহলে এই কারণগুলির মধ্যে একটি সর্বদা ক্রিয়াশীল এবং বিভিন্ন কারণগুলি ক্রিয়াশীল হওয়ার অনুমানের ভিত্তিতে যে-কোনো ঘটনা X-এর শর্তাধীন সম্ভাবনা $P(X\,|\,A_1)$, $P(X\,|\,A_2), ..., P(X\,|\,A_n)$ যদি প্রত্যক্ষভাবে জানা যায়, তাহলে ব্যেজের সূত্র দ্বারা আমরা বের করতে পারব $P(A_i|X)$ অর্থাৎ X ঘটেছে এই অনুমানের ভিত্তিতে A_i ক্রিয়াশীল হওয়ার শর্তাধীন সম্ভাবনা। অতীতকালে গণিতবিদরা এই সূত্রের সাহায্যে অনেক দার্শনিক গুপ্তরহস্যের আবিষ্কার করার চেষ্টা করেছিলেন অবশ্যই সূত্রের সঠিক ব্যাখ্যা না মেনে।

3. (4.4.1) ও (4.4.2) সূত্রগুলির ঘটনার অসীম ক্রমের জন্যে বিস্তার সহজ ও রীতিমাফিক।

উদাহরণ

1. তিনটি একরকম পাত্রে সাদা ও কালো বল আছে। প্রথমটিতে 2টি সাদা ও 3টি কালো, দ্বিতীয়টিতে 3টি সাদা ও 5টি কালো এবং তৃতীয়টিতে 5টি সাদা ও 2টি কালো বল আছে। একটি পাত্র যদৃচ্ছভাবে নির্বাচন করা হল এবং তার থেকে একটি বল টানা হল। বলটি সাদা হওয়ার সম্ভাবনা কী? যদি বলটি সাদা হয়, তাহলে দ্বিতীয় পাত্রটি নির্বাচন করার সম্ভাবনা কী?

মনে করুন, A_i 'টানা বলটি i-তম পাত্র থেকে' $(i = 1, 2, 3)$। A_1, A_2, A_3 ঘটনাগুলি জোড়াগতভাবে পরস্পর বিচ্ছিন্ন এবং এদের মধ্যে একটি অবশ্যই নিশ্চিত। লক্ষ্যণীয় যে, A_i-কে i-তম পাত্র নির্বাচনের ঘটনা বলা চলে এবং প্রতিসাম্য বিচারে আমরা পাই

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$$

ধরুন, X—টানা বলটি সাদা। সহজেই

$$P(X|A_1) = \frac{2}{5}, \quad P(X|A_2) = \frac{3}{8}, \quad P(X|A_3) = \frac{5}{7}$$

(4.4.1) দ্বারা

$$P(X) = P(A_1)P(X\,|\,A_1) + P(A_2)\,P(X\,|\,A_2) + P(A_3)\,P(X\,|\,A_3)$$
$$= \frac{1}{3}.\frac{2}{5} + \frac{1}{3}.\frac{3}{8} + \frac{1}{3}.\frac{5}{7} = \frac{139}{280}$$

(4.4.2) দ্বারা

$$P(A_2|X) = \frac{P(A_2)P(X|A_2)}{P(X)} = \frac{35}{139}$$

2. লাপ্লাসের পাত্র সমস্যা (Laplace's Urn Problem) : $(N+1)$-সংখ্যক একরকম পাত্র আছে যাদের $0, 1, ..., N$ দ্বারা চিহ্নিত করা হল। এদের প্রত্যেকটির মধ্যে আছে Nটি সাদা ও কালো বল। i-তম পাত্রে আছে iটি কালো ও $(N-i)$টি সাদা বল $(i = 0, 1, ..., N)$। একটি পাত্র যদৃচ্ছভাবে নির্বাচন করা হল এবং তার থেকে পরপর nটি বল টানা হল, প্রতিবার বল ফেরত দিয়ে। যদি সবক'টি বলই কালো বেরোয়, তাহলে তারপর আর একটি বল টানলে সেটাও কালো হওয়ার সম্ভাবনা কত ?

মনে করুন, i-তম পাত্র নির্বাচনের ঘটনা A_i। তালে $A_0, A_1, ..., A_N$ ঘটনাগুলি জোড়াগতভাবে পরস্পর বিচ্ছিন্ন যার মধ্যে একটি নিশ্চিত। প্রতিসাম্য বিচারে $P(A_i)= 1/(N+1)$। ধরুন X—n বলের সবক'টি কালো।

সহজেই আমরা পাই $P(X|A) = i^n/N^n$ এবং (4.4.1) দ্বারা

$$P(X) = \sum_{i=0}^{N} P(A_i)P(X|A_i) = \frac{1}{N+1}\sum_{i=0}^{N}\left(\frac{i}{N}\right)^n$$

যদি $Y - (n+1)$-তম বলটি কালো, তাহলে $XY - (n+1)$টি বলের সবক'টি কালো। উপরের ফলাফলে n-এর বদলে $n+1$ ধরলে পাই

$$P(XY) = \frac{1}{N+1}\sum_{i=0}^{N}\left(\frac{i}{N}\right)^{n+1}$$

এবং কাঙ্ক্ষিত সম্ভাবনা হবে

$$P(Y|X) = \frac{P(XY)}{P(X)} = \frac{\sum_{i=0}^{N}\left(\frac{i}{N}\right)^{n+1}}{\sum_{i=0}^{N}\left(\frac{i}{N}\right)^{n}}$$

n যদি যথেষ্ট বড় সংখ্যা হয়, তাহলে এই ফলাফল একটি সুন্দর আকার নেয়। সেক্ষেত্রে

$$= P(X) \simeq \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N}\left(\frac{i}{N}\right)^{n} \simeq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

$$P(XY) \simeq \frac{1}{n+2}, P(Y|X) \simeq \frac{n+1}{n+2}$$

এই সূত্রকে লাপ্লাসের অনুগমন নিয়ম বলে।

4.5 সম্ভাবনাত্মক অনপেক্ষতা

মনে করুন, $P(A), P(B) \neq 0$। যদি $P(AB) = P(A)\,P(B)$ হয়, গুণনিয়ম থেকে পাই $P(B\,|\,A) = P(B)$ এবং $P(A|B) = P(A,)$ অর্থাৎ B ঘটনার সম্ভাবনা A ঘটনা ঘটার পূর্বজ্ঞানের উপর নির্ভরশীল নয় এবং একইসঙ্গে A ঘটনার সম্ভাবনা B ঘটার পূর্বজ্ঞানের উপর নির্ভরশীল নয়। তাই আমরা সংজ্ঞা দিই, A ও B ঘটনাদুটি **সম্ভাবনাত্মকভাবে অনপেক্ষ বা স্বাধীন** (stochastically independent) বলা হবে যদি

$$P(AB) = P(A)\,P(B) \qquad \text{.....}(4.5.1)$$

আমরা ধরে নেব $P(A)$ বা $P(B)$ শূন্য হলেও এই সংজ্ঞা খাটবে।

(4.5.1) সূত্রটি একটি সহজ গুণনিয়ম হিসেবে ব্যবহার করা যায় যদি আমরা A ও B-কে অন্য বিচারে স্বাধীন বলে ধরতে পারি। ব্যবহারিক অর্থে দুটি ঘটনাকে স্বাধীন বলে ধরতে পারি যদি তাদের মধ্যে কোনো কারণগত সম্পর্ক না থাকে অর্থাৎ যদি তারা কারণগতভাবে স্বাধীন হয়।

এবার তিনটি ঘটনা, A, B, C-র কথা ধরা যারা জোড়াগতভাবে স্বাধীন, অর্থাৎ

$$P(AB) = P(A)\,P(B), \quad P(BC) = P(B)\,P(C), \qquad \text{.....}(4.5.2)$$
$$P(AC) = P(A)\,P(C)$$

এর ফলে আমাদের মনে হতে পারে যে, A ও BC ঘটনাদুটিও স্বাধীন। এই অনুমান কিন্তু মিথ্যা যা নীচের অঙ্কটি প্রমাণ করে।

উদাহরণ

1. একটি মুদ্রা দুবার ছোড়া হলে, ঘটনাদেশে $(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)$ এই চারটি ঘটনাবিন্দু থাকে। মনে করুন, A—প্রথম ছোড়ায় মাথা, B—দ্বিতীয় ছোড়ায় মাথা, C—একটি মাথা। তাহলে A-এর মধ্যে আছে 2টি ঘটনাবিন্দু $(H, H), (H, T)$। B-র মধ্যে আছে 2টি ঘটনাবিন্দু $(H, H), (T, H)$ এবং

C-এর মধ্যে আছে 2টি ঘটনাবিন্দু $(H, T), (T, H)$। AB, BC, CA প্রত্যেকের মধ্যে 1টি করে ঘটনাবিন্দু ì ìí× í û¤ $ABC = \Phi$ তাই

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(AB) = P(BC) = P(CA) = \frac{1}{4}$$

$$P(ABC) = 0$$

সুতরাং (4.5.2) সিদ্ধ হচ্ছে, কিন্তু $P(ABC) \neq P(A)\,P(BC)$, অর্থাৎ A ও BC স্বাধীন নয়।

মনে করুন, A, B, C যে-কোনো তিনটি জোড়াগতভাবে স্বাধীন ঘটনা এবং A ও BC ঘটনাদুটিও স্বাধীন। তাহলে (4.5.2) সিদ্ধ হচ্ছে এবং

$$P(ABC) = P(A)\,P(BC)$$

যারপর (4.5.2) দ্বারা

$$P(ABC) = P(A)\,P(B)\,P(C) \qquad \text{.....}(4.5.3)$$

পক্ষান্তরে, যদি (4.5.2) ও (4.5.3) উভয় নিয়মই খাটে, তাহলে A, B, C জোড়াগতভাবে স্বাধীন হবে এবং A ও BC স্বাধীন হবে যেহেতু

$$P(ABC) = P(A)\,P(B)\,P(C) = P(A)\,P(BC)$$

এবং অনুরূপে B ও AC স্বাধীন এবং C ও AB স্বাধীন হবে।

এইসব বিবেচনা করে আমরা সংজ্ঞা দিই যে তিনটি ঘটনা A, B, C পরস্পর স্বাধীন হবে যদি (4.5.2) এবং (4.5.3) উভয়ই খাটে।

সাধারণভাবে $A_1, A_2, \ldots, A_n$ এই n-সংখ্যক ঘটনাকে পরস্পর স্বাধীন বা অনপেক্ষ বলা হবে যদি নিম্নলিখিত নিয়মগুলি খাটে :

$$P(A_i A_j) = P(A_i)\,P(A_j)$$

($i < j;\ i,\ j\ 1, 2, \ldots, n$ থেকে 2টি নেওয়ার যেকোনো সমবায়)

$$P(A_i, A_j, A_k) = P(A_i)\,P(A_j)\,P(A_k)$$

($i < j < k;\ i, j, k\ 1, 2, \ldots, n$ থেকে 3টি নেওয়ার যে-কোনো সমবায়) .....(4.5.4)

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1)\,P(A_2) \ldots P(A_n)$$

2. 4.3 অনুচ্ছেদের 1 নং অঙ্কে দেখান যে A ও B স্বাধীন।

এখানে

$$P(A)=\frac{1}{2},\quad P(B)=\frac{1}{3},\quad P(AB)=\frac{1}{6}$$

অতএব (4.5.1) খাটছে এবং তাই এই সিদ্ধান্ত।

3. 52টি তাসের একটি প্যাকেট থেকে একটি তাস টানা হল। এর ইস্কাবনের বিবি হওয়ার সম্ভাবনা কী ?

ধরুন, A—বিবি, B—ইস্কাবন। তাহলে AB—ইস্কাবনের বিবি। যেহেতু 'বিবি' ও 'ইস্কাবন' এই দুটি ঘটনার মধ্যে কোনো কারণগত সম্পর্ক নেই, আমরা A ও B-কে সম্ভাবনাত্মকভাবে স্বাধীন ধরতে পারি এবং গুণনিয়ম (4.5.2) কাজে লাগাতে পারি। এখন

$$P(A)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13},\quad P(B)=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$$

$$P(AB)=P(A)\,P(B)=\frac{1}{52}$$

4. একটি মুদ্রা ও একটি ছক্কা ছোড়া হল। দেখান যে 'মাথা' ও 'ছয়' এই ঘটনাদুটি স্বাধীন।

ঘটনাদেশে 12টি ঘটনাবিন্দু আছে যা হল $(H, 1), \ldots, (H, 6), (T, 1), \ldots, (T, 6)$। যদি A—মাথা, B—ছয় হয়, তাহলে $AB-(H, 6)$ এবং

$$P(A)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2},\quad P(B)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6},\quad P(AB)=\frac{1}{12}$$

তাই $P(AB)=P(A)\,P(B)$, অর্থাৎ, A ও B স্বাধীন।

মন্তব্য ঃ উপরের পরীক্ষায় মুদ্রা ছোড়া ও ছক্কা ছোড়া এই দুটি পরীক্ষা একত্রে করা হচ্ছে। যেহেতু 'মাথা' কেবলমাত্র মুদ্রা ছোড়ার সঙ্গো সম্পৃক্ত এবং 'ছয়' কেবলমাত্র ছক্কা ছোড়ার সঙ্গো সম্পৃক্ত বলে ধরতে পারি এবং মুদ্রা ছোড়া ও ছক্কা ছোড়া পরীক্ষা দুটি পরস্পরকে প্রভাবিত করে না, তাই আমরা ধরতে পারি 'মাথা' ও 'ছয়' ঘটনাদুটির মধ্যে কোনো কারণগত সম্পর্ক নেই এবং সরাসরি সিদ্ধান্ত করতে পারি যে ঘটনাদুটি স্বাধীন। এখানে লক্ষ্যণীয় যে, মুদ্রা ছোড়া ও ছক্কা ছোড়ার পরীক্ষাদুটি পরস্পর অনপেক্ষ এই কথা আমরা স্বাজ্ঞিক অর্থেই বললাম, কোনো সঠিক অর্থে নয়। দুটি যদৃচ্ছ পরীক্ষায় অনপেক্ষতার গাণিতিক সংজ্ঞা পরের এককে দেওয়া হবে।

4.6 সারাংশ

প্রথমে শর্তাধীন সম্ভাবনার সংজ্ঞা দেওয়া হল। সঙ্গো দেওয়া হল এর পরিসংখ্যা ব্যাখ্যা, যার সাহায্যে এর ব্যবহারিক অর্থ পাওয়া গেল। শর্তাধীন সম্ভাবনার সংজ্ঞা থেকে সরাসরি সম্ভাবনা গুণনিয়ম প্রতিষ্ঠা করা যায়। যদি শর্তাধীন সমস্যার পরিস্থিতি বিচার করে প্রত্যক্ষভাবে নির্ণয় করা যায়, তাহলে এই গুণনিয়মের দ্বারা অনেকগুলি ঘটনার একসঙ্গো সংঘটনের সম্ভাবনা পাওয়া যায়। এর পরে আসে একটি প্রয়োজনীয় সূত্র (4.4.1) এবং ব্যেজের উপপাদ্য।

শেষে দুটি ঘটনার সম্ভাবনাত্মক অনপেক্ষতার সংজ্ঞা দেওয়া হয়েছে এবং এই অনপেক্ষতার ধারণা তিন বা ততোধিক ঘটনার জন্যে সম্প্রসারিত করা হয়েছে।

4.7 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

1. (ক) সম্ভাবনার গুণনিয়মটি উল্লেখ করুন এবং প্রমাণ করুন।

(খ) যদি দুটি ঘটনা A ও B পরস্পর স্বাধীন হয় যেখানে $P(A)>0, P(B)>0$ তবে, দেখান যে A ও B পরস্পর বিচ্ছিন্ন হতে পারে না।

(গ) ব্যেজের উপপাদ্যটি প্রমাণ করুন।

2. দেখান যে

(ক) $P(A|B) \geq 1-\dfrac{P(\overline{A})}{P(B)}$

(খ) $P(A|B)=1-P(\overline{A}|B)$

3. (ক) যদি $P(A)=\dfrac{3}{4}$ এবং $P(\overline{B})=\dfrac{3}{8}$ হয়, তাহলে প্রমাণ করুন

$$\frac{3}{8} \leq P(AB) \leq \frac{5}{8}$$

(খ) যদি $P(A|B)=P(A)$ হয়, তাহলে প্রমাণ করুন $P(\overline{A}\,|\,B)=P(\overline{A})$।

4. একজন কর্মসচিব 4টি চিঠি এবং তার জন্যে 4টি খামের উপর ঠিকানা লেখেন। যদি তিনি ঠিকানা না দেখে যদৃচ্ছভাবে খামগুলির মধ্যে চিঠিগুলি ঢোকান, তালে একটিমাত্র চিঠি তার সঠিক ঠিকানা লেখা খামে যাওয়ার সম্ভাবনা কী? সবগুলি চিঠিই ভুল ঠিকানাযুক্ত খামে যাওয়ার সম্ভাবনাও নির্ণয় করুন।

5. 10টি ছাত্রের একরকম বর্ষাতি আছে যা তারা ক্লাস করার সময় একই তাকে ঝুলিয়ে রাখে। ক্লাসের পরে প্রত্যেক ছাত্র তাক থেকে একটি বর্ষাতি যদৃচ্ছভাবে বেছে নিয়ে বাড়ি চলে যায়। অন্তত একজন ছাত্র তার নিজস্ব বর্ষাতি নিয়ে যাওয়ার সম্ভাবনা কত ?

6. একটি পাত্রে 4টি সাদা ও 6টি কালো বল আছে। পাত্র থেকে দুটি বল পরপর টানা হল প্রথম বলটি ফেরত না দিয়ে। দ্বিতীয় বলটি সাদা হলে প্রথম বলটিও সাদা হওয়ার সম্ভাবনা কী ?

7. দুটি পাত্রে যথাক্রমে 2টি সাদা ও 1টি কালো এবং 1টি সাদা ও 5টি কালো বল আছে। একটি বল প্রথম পাত্র থেকে দ্বিতীয় পাত্রে স্থানান্তরিত করা হল এবং তারপর দ্বিতীয় পাত্র থেকে একটি বল টানা হল। টানা বলটি সাদা হওয়ার সম্ভাবনা কী ?

8. দুটি একরকম পাত্র আছে যার মধ্যে যথাক্রমে 4টি সাদা ও 3টি লাল এবং 3টি সাদা ও 7টি লাল বল আছে। একটি পাত্র যদৃচ্ছভাবে বাছা হল এবং তার থেকে একটি বল টানা হল। বলটি সাদা হওয়ার সম্ভাবনা কী ? যদি টানা বলটি সাদা হয়, তাহলে বলটি প্রথম পাত্র থেকে নেওয়ার সম্ভাবনা কী ?

9. তিনটি একরকম বাক্স আছে যার প্রত্যেকের দুটি দেরাজ আছে। প্রথম বাক্সের প্রত্যেক দেরাজে একটি করে সোনার মুদ্রা আছে। তৃতীয় বাক্সের প্রত্যেক দেরাজে একটি করে রুপোর মুদ্রা আছে এবং দ্বিতীয়টির একটি দেরাজে একটি সোনার মুদ্রা ও অন্যটিতে একটি রুপোর মুদ্রা আছে। একটি বাক্স যদৃচ্ছভাবে বাছা হল এবং তার একটি দেরাজ খোলা হল। যদি একটি সোনার মুদ্রা পাওয়া যায়, তাহলে সেটি দ্বিতীয় বাক্স থেকে আসার সম্ভাবনা কী ?

10. চারটি বাক্সের প্রত্যেকটিতে এক ডজন করে ডিম আছে। বাক্সগুলিতে যথাক্রমে $2, 3, 1, 0$টি পচা ডিম আছে। এই চারটি বাক্স থেকে যে-কোনো একটি বাক্স বেছে নিয়ে তার থেকে একটি ডিম তোলা হল, ডিমটি পচা হওয়ার সম্ভাবনা কত ?

11. 20জন পুরুষ ও 5জন মহিলার একটি দলে 10 জন পুরুষ ও 3 জন মহিলা চাকরি করেন। ঐ দল থেকে একজন বেছে নেওয়া হল। তিনি যদি পুরুষ হন, তবে তার চাকরি করার সম্ভাবনা কত ?

12. যদি A ও B ঘটনাদুটি অনপেক্ষ হয়, তাহলে দেখান যে, A ও $\overline{B}$ অনপেক্ষ এবং $\overline{A}$ ও $\overline{B}$ অনপেক্ষ।

13. যদি A, B, C পরস্পর অনপেক্ষ ঘটনা হয়, তাহলে দেখান যে, A ও $B + C$ অনপেক্ষ এবং $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ পরস্পর অনপেক্ষ।

14. যদি nটি পরস্পর স্বাধীন ঘটনার সম্ভাবনা $p_1, p_2, ..., p_n$ হয়, তাহলে দেখান যে এদের মধ্যে অন্তত একটি ঘটার সম্ভাবনা হবে

$$1-(1-p_1)(1-p_2)\dots(1-p_n)$$

15. একটি পরীক্ষার ফল ত্রিমাত্রিক দেশে 4টি বিন্দুর যে-কোনো একটি সমসম্ভাবনায় হতে পারে যাদের কার্তীয় স্থানাঙ্ক হল $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ এবং $(1,1,1)$। যদি A, B, C যথাক্রমে এই ঘটনাগুলি নির্দেশ করে : x-স্থানাঙ্ক 1, y-স্থানাঙ্ক 1, z-স্থানাঙ্ক 1, তাহলে A, B, C পরস্পর স্বাধীন কিনা যাচাই করুন।

4.8 উত্তরমালা

4. 4.3 অনুচ্ছেদের 5 নং উদাহরণের ফলের দ্বারা উত্তর হবে যথাক্রমে $\frac{1}{3}$ ও $\frac{3}{8}$

5. 4.3 অনুচ্ছেদের 5নং উদাহরণের (a) অংশের ফলের দ্বারা উত্তর হবে

$$\sum_{k=1}^{10}(-1)^{k-1}/k!$$

6. ব্যেজের উপপাদ্য দ্বারা উত্তর $\frac{1}{3}$

7. A_1, A_2—স্থানান্তরিত বল সাদা, কালো X—টানা বল সাদা। (4.4.1) দ্বারা উত্তর $\frac{5}{21}$

8. (4.4.1) ও (4.4.2) দ্বারা উত্তর যথাক্রমে $\frac{61}{140}$ ও $\frac{40}{61}$

9. (4.2.2) দ্বারা উত্তর $\frac{1}{3}$

10. $\frac{1}{8}$

11. $\frac{1}{2}$

12. A, B অনপেক্ষ হলে $P(AB)=P(A)\,P(B)$ যেহেতু $A=AB+A\overline{B}$ ও $AB\,A\overline{B}=\Phi$,

$$P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})=P(A)P(B)+P(A\overline{B})$$

বা $$P(A\overline{B})=P(A)\{1-P(B)\}=P(A)\,(\overline{B})$$

যা দেখায় A ও $\overline{B}$ অনপেক্ষ। এবার A ও $\overline{B}$ অনপেক্ষ হওয়ার দরুন, প্রথমাংশের দ্বারা $\overline{A}$ ও $\overline{B}$ অনপেক্ষ।

13. $P\{A(B+C)\}=P(AB+AC)=P(AB)+P(AC)-P(ABC)=P(A)\,P(B)+P(A)\,P(C)$ $-P(A)\,P(BC)=P(A)\,\{P(B)+P(C)-P(BC)\}=P(A)\,P(B+C)$ অর্থাৎ A ও $B+C$ অনপেক্ষ। 12 নং প্রশ্নের ফলের দ্বারা $\overline{A}$ ও $\overline{B+C}=\overline{B}\,\overline{C}$ অনপেক্ষ এবং $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ জোড়াগতভাবে অনপেক্ষ ইত্যাদি।

14. প্রদত্ত ঘটনা—$A_1, A_2, ..., A_n$ । $P(A_i)=p_i$, $P(\overline{A}_i)=1-p_i, (i=1,2,...,n)$ । $A_1, A_2, ..., A_n$ পরস্পর স্বাধীন হলে $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots \overline{A}_n$ পরস্পর স্বাধীন (13 নং প্রশ্ন) এবং তাই

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=1-P(\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots \overline{A}_n), =1-P(\overline{A}_1)\,P(\overline{A}_2)\,...\,P(\overline{A}_n)$$

13 নং প্রশ্নের ফলাফল ধরে না নিয়ে সরাসরি এইভাবে করা যায় :

$$\begin{aligned} P(A_1+A_2+...+A_n) &= \sum P(A_1)-\sum P(A_1A_2)+\sum P(A_1A_2A_3)-\ldots.. \\ &= \sum p_1-\sum p_1p_2)+\sum p_1p_2p_3-\ldots.. \\ &= -1\,(1-p_1)(1-p_2)...(1-p_n) \end{aligned}$$

15. $A=\{(1,0,0),(1,1,1)\}$ ইত্যাদি তাই $ABC=\{(1,1,1)\}$

$P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{2}, P(ABC)=\dfrac{1}{4}, P(ABC)\neq P(A)\,P(B)\,P(C)$ । তাই A, B, C পরস্পর স্বাধীন নয়।

একক 5 ❐ যৌগিক পরীক্ষা (Compound Experiments)

গঠন

5.1 প্রস্তাবনা

এই এককে একসঙ্গো সম্পাদিত দুটি যদৃচ্ছ পরীক্ষার অনপেক্ষতার সংজ্ঞা দেওয়া হবে। তারপর একটি প্রদত্ত যদৃচ্ছ পরীক্ষার দুই বা ততোধিক অনপেক্ষ প্রচেষ্টার কথা আলোচনা করা হবে।

বারনুলি প্রচেষ্টা একটি বিশেষ পরীক্ষার অনপেক্ষ প্রচেষ্টা যা আমাদের খুব কাজে লাগে। এই বারনুলি প্রচেষ্টার জন্যে আমরা পাই দ্বিপদ নিয়ম।

বারনুলি প্রচেষ্টার একটু পরিবর্ধন করে পাওয়া যায় দ্বিপদ নিয়মের বদলে বহুপদ নিয়ম।

বারনুলি প্রচেষ্টার অসীম ক্রমের কথাও সংক্ষেপে বলা হবে।

5.2 উদ্দেশ্য

এই একক পড়লে আপনারা জানতে পারবেন

- দুটি যদৃচ্ছ পরীক্ষার অনপেক্ষতার গাণিতিক সংজ্ঞা
- একটি যদৃচ্ছ পরীক্ষার দুই বা ততোধিক প্রচেষ্টার ধারণা
- বারনুলি প্রচেষ্টা ও তার জন্যে দ্বিপদ নিয়ম
- বহুপদ নিয়ম
- বারনুলি প্রচেষ্টার অসীম ক্রমের ধারণা

5.3 সেটের কার্তীয় গুণফল

মনে করুন S ও T দুটি প্রদত্ত সেট। S ও T-র **কার্তীয় গুণফল** (Cartesian product) হবে সব সাজানো জোড়া (x, y)-এর সেট যেখানে $x \in T, y \in T$ এবং $S \times T$ দ্বারা চিহ্নিত হবে।

উদাহরণস্বরূপ, যদি $S = \{x_1, x_2, \dots x_n\}, T = \{y_1, y_2, \dots y_n\}$ দুটি সসীম সেট হয়, তাহলে

$$S \times T = \{(x_i, y_i)\} \mid i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n\}$$

আমরা লিখব

$$S \times S = S^2, S \times S \times S = S^3, \dots$$

5.4 অনপেক্ষ যুগ্ম পরীক্ষা

মনে করুন E একটি যদৃচ্ছ পরীক্ষা যার ঘটনাদেশ S-এ mটি ঘটনাবিন্দু $U_1, U_2, \dots, U_m$ আছে যার সম্ভাবনা

$$P(U_i) = p_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \qquad \text{..... (5.4.1)}$$

এবং তাই

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \qquad \text{..... (5.4.2)}$$

মনে করুন E' আর একটি যদৃচ্ছ পরীক্ষা যার ঘটনাদেশ S'-এ আছে nটি ঘটনাবিন্দু $U'_1, U'_2, ...,$ U'_n যার সম্ভাবনা

$$P(U'_1) = p'_j \ \ (j = 1, 2, ..., n) \qquad ..... (5.4.3)$$

এমন যে

$$\sum_{j=1}^{n} p'_j = 1 \qquad ..... (5.4.4)$$

ধরুন E ও E' এই দুটি পরীক্ষা পরপর এমনভাবে করা হল যে দ্বিতীয় পরীক্ষা E' প্রথম পরীক্ষা E-র ফলাফলের উপর কোনোভাবে নির্ভর না করে, অর্থাৎ E-এর ফলাফল E'-এর সম্পাদন কোনোভাবে প্রভাবিত করে না। আমরা E ও E' পরীক্ষার অনপেক্ষতার গাণিতিক সংজ্ঞা দিতে চলেছি, কিন্তু সেটার ধারণা করার জন্যে নীচের স্বাজ্ঞিক আলোচনা কাজে আসবে।

E ও E'-এর যুগ্ম সম্পাদনাকে যৌগিক পরীক্ষা E'' বলা হোক। এর সঙ্গো সম্পৃক্ত ঘটনাবিন্দুগুলি হবে

$$(U_1, U'_j)...., m_j (i = 1, 2, \ j = 1, 2, ..., \ n)$$

অর্থাৎ E''-এর ঘটনাদেশ S'' হলে $S'' = S'' = S \times S'$।

এবার E''-এর সঙ্গো যুক্ত দুটি ঘটনার কথা ভাবুন, যাদের নাম হল 'E-তে U_i ঘটবে' এবং 'E'-এ U'_j ঘটবে'। প্রথমটিতে স্থিত ঘটনাবিন্দুগুলি হল

$$(U_1, U'_1), (U_i, U'_2), ..., (U_i, U'_n)$$

এবং দ্বিতীয়তে স্থিত ঘটনাবিন্দুগুলি হল

$$(U_1, U'_1), (U_2, U'_j), ..., (U_m, U'_j)$$

এই ঘটনাদুটির গুণফল বা ছেদ হচ্ছে একটিমাত্র ঘটনাবিন্দু (U_i, U'_j)। সাধারণবুদ্ধি বলে যদি E ও E' পরস্পরকে প্রভাবিত না করে তাহলে E''-এর সঙ্গো যুক্ত উপরোক্ত ঘটনাদুটি সম্ভাবনাত্মকভাবে অনপেক্ষ হবে, অর্থাৎ

$$P\{(U_i, U'_j)\} = p_i, p'_j (i = 1, 2, ..., m, j = 1, 2, ..., n) \qquad ..... (5.4.5)$$

কেননা E''-এর সঙ্গো যুক্ত প্রথম ঘটনাটি E-এর সঙ্গো যুক্ত ঘটনাবিন্দু U_j বলে ধরা যেতে পারে এবং অনুরূপে E''-এর সঙ্গো যুক্ত দ্বিতীয় ঘটনাটি E'-এর সঙ্গো যুক্ত ঘটনাবিন্দু U'_j বলে ধরা যেতে পারে।

এইবার আমরা যদৃচ্ছ পরীক্ষাদুটি E ও E'-কে স্বাধীন বা অনপেক্ষ (independent) বলব যদি যৌগিক পরীক্ষা E''-এর ঘটনাদেশ S''-এর ঘটনাবিন্দুগুলির সম্ভাবনা (5.4.5) সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয়।

এই সংজ্ঞা যথার্থ কেননা নির্দিষ্ট সম্ভাবনাগুলি অঋণাত্মক এবং

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i p'_j = \sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{i=1}^{n} p'_j = 1.1 = 1$$

যা একটি আবশ্যিক শর্ত।

উপপাদ্য : যদি A, B যথাক্রমে E ও E'-এর সঙ্গে যুক্ত যে-কোনো ঘটনা হয় এবং E ও E' অনপেক্ষ পরীক্ষা হয়, তাহলে

$$P\{(A, B)\} = P(A)\,P(B) \qquad \text{.....(5.4.6)}$$

প্রমাণ : ধরুন

$$A = \sum_{\alpha} U_{\alpha}, \qquad B = \sum_{\beta} U'_{\beta}$$

যেখানে $\alpha\{1, 2, \cdots, m\}$ এই সেটের একটি উপসেটের মান গ্রহণ করে এবং $\beta\{1, 2, \cdots, n\}$ এই সেটের একটি উপসেটের মান গ্রহণ করে। অতএব

$$P(A) = \sum_{\alpha} p_{\alpha}, \qquad P(B) = \sum_{\beta} p'_{\beta}$$

E''-এর সঙ্গে যুক্ত (A, B)-কে লেখা যায়

$$(A, B) = \sum_{\alpha}\sum_{\beta}(U_{\alpha}, U'_{\beta})$$

তাই

$$\begin{aligned} P\{(A, B)\} &= \sum_{\alpha}\sum_{\beta} P\{(U_{\alpha}, U'_{\beta})\} \\ &= \sum_{\alpha}\sum_{\beta} p_{\alpha} p'_{\beta} = \sum_{\alpha} p_{\alpha} \sum_{\beta} p'_{\beta} = P(A)\,P(B) \end{aligned}$$

উপরের সব আলোচনা দুইয়ের বেশিসংখ্যক পরীক্ষার জন্যে সহজেই সম্প্রসারিত করা যায়।

5.5 যদৃচ্ছ পরীক্ষার অনপেক্ষ পুনরাবৃত্তি

একটি প্রদত্ত যদৃচ্ছ পরীক্ষার E যদি পরপর দুবার সম্পাদিত হয়, তাহলে E পরীক্ষার এই দুটি প্রচেষ্টাকে যুগ্মভাবে যৌগিক পরীক্ষার E_2 বলা হবে, যার ঘটনাদেশ $S \times S = S^2\, m^2$ সংখ্যক ঘটনাবিন্দু $(U_i, U_j), (i, j = 1, 2, ..., m)$ ধারণ করে। এই প্রচেষ্টাদুটি স্বাধীন বা অনপেক্ষ হওয়ার গাণিতিক সংজ্ঞা হল

$$P\{(U_i, U_j)\} = p_i p_j \quad (i, j = 1, 2, ..., m) \qquad .....(5.5.1)$$

যা (5.4.5) থেকে পাওয়া যায় এবং এর ব্যবহারিক অর্থ এই হবে যে E-র প্রচেষ্টাদুটি যথাসম্ভব একইরকম অবস্থায় সম্পাদিত হওয়া, অর্থাৎ প্রথম প্রচেষ্টার ফল কোনোভাবে দ্বিতীয় প্রচেষ্টার সম্পাদনকে প্রভাবিত করে না।

E-এর rটি অনপেক্ষ প্রচেষ্টার জন্যে যৌগিক পরীক্ষাটি হবে E_r যার ঘটনাদেশ S^r যার মধ্যে আছে m^r-এর সংখ্যক ঘটনাবিন্দু

$$(U_{i_1}, U_{i_2}, ..., U_{i_r}) \quad (i_1, i_2, ..., i_r = 1, 2, ..., m)$$

এবং

$$P\{(U_{i_1}, U_{i_2}, ..., U_{i_r})\} = p_{i_1}, p_{i_2}, ..., p_{i_r}$$

$$(i_1, i_2, ..., i_r = 1, 2, ..., m) \qquad .....(5.5.2)$$

আগের অনুচ্ছেদের উপপাদ্যের প্রসারিত রূপ হবে

উপপাদ্য : ধরা যাক E একটি যদৃচ্ছ পরীক্ষা এবং $A_1, A_2, ..., A_r E$-র সঙ্গো যুক্ত ঘটনা। E-এর r-সংখ্যক অনপেক্ষ প্রচেষ্টার জন্যে

$$P\{(A_1, A_2, ..., A_r)\} = P(A_1)\, P(A_2) ...\, P(A_r) \qquad .....(5.5.3)$$

উদাহরণ : একটি পাত্র থেকে, যার মধ্যে $1, 2, ..., n$ নম্বরযুক্ত nটি টিকিট আছে, kটি টিকিট একসঙ্গো টানা হল এবং পরের বার টানার আগে টিকিটগুলি ফেরত দেওয়া হল। এই ধরনের rটি টানার $1, 2, ..., r$ নম্বরযুক্ত টিকিট যথাক্রমে $1, 2, ..., r$ নং টানার না ওঠার সম্ভাবনা কত ?

যদি i নং টিকিট k টিকিটের একটি না থাকার ঘটনাকে A_i বলা হয়, তাহলে

$$P(A_i) =$$

যেহেতু টানা বলগুলি প্রতিবার ফেরত দেওয়া হচ্ছে, এই ধরনের টানার rটি প্রচেষ্টা অনপেক্ষ এবং (5.2.2) দ্বারা পাই

$$P\{(A_1, A_2, \ldots, A_r)\} = \left(\frac{n-k}{n}\right)^r$$

5.6 বারনুলি প্রচেষ্টা

একটি যদৃচ্ছ পরীক্ষার ঘটনাদেশ এমন যে তার মধ্যে দুটি ঘটনাবিন্দু আছে যাদের 'সাফল্য' এবং 'অসাফল্য' বলা হবে। এই ধরনের পরীক্ষার অনপেক্ষ প্রচেষ্টার সসীম ক্রমকে **বারনুলি প্রচেষ্টা** (Bernoulli trials) বলা হবে যদি সাফল্যের সম্ভাবনা সব প্রচেষ্টাতেই সমান থাকে।

মনে করুন E একটি যদৃচ্ছ পরীক্ষা যার ঘটনাদেশ S-এ দুটি ঘটনাবিন্দু 'সাফল্য' (s) এবং 'অসাফল্য' (f) আছে। ধরা যাক, সাফল্যের সম্ভাবনা p, অর্থাৎ

$$P(s) = p, P(f) = 1 - p = q \text{ (ধরুন)}$$

E-র nটি অনপেক্ষ প্রচেষ্টার যৌগিক পরীক্ষা E_n-এর ঘটনাদেশ $S^n(s, s, f, s, \ldots, f)$ এই ধরনের 2^n-সংখ্যক ঘটনাবিন্দুর সমষ্টি সম্ভাবনা (5.5.2) দ্বারা

$$P\{(s, s, f, s, \ldots, f)\} = p \, . \, p . q \, . \, p \ldots q \qquad \ldots.. (5.6.1)$$

দ্বিপদ নিয়ম : মনে করুন A_i 'iটি সাফল্য' ঘটনাকে নির্দেশ করে যা যৌগিক পরীক্ষা E_n-এর সঙ্গে যুক্ত। ধরা যাক nটি প্রচেষ্টার ফলাফল n-সংখ্যক ঘরে লেখা হবে। এখন A_i ঘটনার মানে হচ্ছে এই n টি ঘরের iটিতে sচিহ্ন বসেছে এবং তাই বাকি $n - i$ ঘরে f চিহ্ন আছে। যেহেতু n-সংখ্যক ঘর থেকে iটি ঘর $\binom{n}{i}$-ভাবে নির্বাচন করা যায়, A_i ঘটনাটিতে $\binom{n}{i}$-সংখ্যক ঘটনাবিন্দু আছে যার প্রত্যেকটির সম্ভাবনা $p^i q^{n-i}$। অতএব

$$P(A_i) = \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$$

$$= \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n) \qquad \ldots.. (5.6.2)$$

এটাই **দ্বিপদ নিয়ম** (binomial law) নামে পরিচিত।

1. $A_0, A_1, ..., A_n$ ঘটনাগুলি জোড়াগতভাবে পরস্পর বিচ্ছিন্ন যার মধ্যে অন্তত একটি নিশ্চিত, অর্থাৎ

$$S^n = A_0 + A_1 + ... + A_n$$

তাই

$$P(S'') = \sum_{i=0}^{n} P(A_i) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i q^{n-1} = (p+q)^n = 1$$

2. $P(A_0) = q''$ যা 'কোনো সাফল্য নয়' এই ঘটনার সম্ভাবনা। তাই অন্তত একটি সাফল্যের সম্ভাবনা $= P(\overline{A}_0) = 1 - q''$। $P(A_n) = p^n$, অর্থাৎ, সবগুলি প্রচেষ্টায় সাফল্যের সম্ভাবনা হল p''।

3. বৃহত্তম সম্ভাবনা : বৃহত্তম সম্ভাবনাময় সাফল্যের সংখ্যা নির্ণয় করার জন্যে আমরা লক্ষ্য করি যে

$$\frac{P(A_i)}{P(A_{i+1})} - 1 = \frac{i - (n+1)p + 1}{(n-i)p}$$

এবং মনে করুন $i = i_m$-এর জন্যে $P(A_i)$ বৃহত্তম।

যদি $(n+1)p$ একটি পূর্ণসংখ্যা না হয়, ধরুন $(n + 1)$-p-এর চেয়ে কম বৃহত্তম পূর্ণসংখ্যা r_2, অর্থাৎ

$$(n+1)p - 1 < r < (n+1)p$$

তাহলে $p(A_0) < P(A_1) < ... < P(A_r) > P(A_{r+1}) > ... > P(A_n)$ যা দেখায় যে $i_m = r$।

যদি $(n+1)p$ একটি পূর্ণসংখ্যা হয়, $(n+1)p = s$ লিখলে পাই

$$P(A_0) < P(A_1) < ... < P(A_{s-1}) > P(A_s) > P(A_{s+1}) > ... > P(A_n)$$

এবং সেহেতু $i_m = s - 1$ বা s।

দুটি ক্ষেত্রের ফলই এই অসমতাগুলি দ্বারা প্রকাশ করা চলে

$$(n+1)p - 1 \le i_m \le (n+1)p \qquad ..... (5.6.3)$$

যেখানে i_m একটি (বা দুটি) পূর্ণসংখ্যা।

উদাহরণ

1. 3.5 অনুচ্ছেদের 1নং অঙ্কে 2টি মাথা পড়ার সম্ভাবনা দ্বিপদ নিয়ম (5.6.2) দ্বারা বের করা যায়। এখানে মনে করুন যদৃচ্ছ পরীক্ষাটি হচ্ছে মুদ্রা ছোড়া এবং দেখা যে ফল মাথা হল কিনা। সেহেতু মাথা পড়লে সাফল্য এবং ল্যাজ পড়লে অসাফল্য হয়েছে বলা যায় এবং সাফল্যের সম্ভাবনা, $p = \frac{1}{2}$। তাই $q = 1 - \mathrm{p} = \frac{1}{2}$ এবং কাঙ্ক্ষিত সম্ভাবনা $=$ 3টি বারনুলি প্রচেষ্টায় 2টি সাফল্যের সম্ভাবনা, যা হল

$$\binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}$$

2. 3.5 অনুচ্ছেদের 4নং অঙ্কে যদি ধরি যদৃচ্ছ পরীক্ষাটি ছক্কা ছোড়া এবং দেখা যে ছয় পড়েছে কিনা, তালে প্রশ্নদত্ত পরীক্ষা হল এই পরীক্ষার k-বার বারনুলি প্রচেষ্টা যেখানে সাফল্যের সম্ভাবনা, $p = 1/6$ এবং কাঙ্ক্ষিত সম্ভাবনা $= k$-বার বারনুলি প্রচেষ্টায় অন্তত একটি সাফল্যের সম্ভাবনা $= 1 - q^k = 1 - (5/6)^k$, যেহেতু $q = 1 - q = 5/6$।

3. একটি পাত্রে $N = N_1 + N_2$ বল আছে, যার মধ্যে N_1 টি সাদা ও N_2 টি কালো। যদি পাত্র থেকে পরপর nটি বল টানা হয়, তাহলে তার মধ্যে i-বার সাদা বল পাওয়ার সম্ভাবনা বের করুন যদি (a) টানা বল প্রতিবার ফেলত দেওয়া হয়, (b) টানা বল ফেরত না দেওয়া হয়।

(a) **ফেরত দিয়ে টানা :** মনে করুন পরীক্ষাটি হচ্ছে একটি বল টানা এবং দেখা যে বলটি সাদা কিনা। তাহলে সাফল্য হল সাদা বল এবং অসাফল্য কালো বল, এবং সাফল্যের সম্ভাবনা, $p = N_1/N_2$ এবং $q = 1 - p = N_1/N$। যদি টানা বল সবসময় ফেরত দেওয়া হয়, তাহলে প্রশ্নদত্ত পরীক্ষা একটি n-বার বারনুলি প্রচেষ্টা হবে এবং তার মধ্যে iটি সাদা বল বা সাফল্যের সম্ভাবনা হল

$$P(A_i) = \binom{n}{i} p^i q^{n-i} = \binom{n}{i}\left(\frac{N_1}{N}\right)^i\left(\frac{N_2}{N}\right)^{n-i} \qquad \text{..... (5.6.4)}$$

(b) **ফেরত না দিয়ে টানা :** যদি টানা বল ফেরত না দেওয়া হয়, বলগুলি পরপর টানা বা একসঙ্গো টানার মধ্যে কোনো তফাত নেই, তাই প্রদত্ত প্রশ্ন ও 3.5 অনুচ্ছেদের $6(b)$নং প্রশ্ন একই এবং কাঙ্ক্ষিত সম্ভাবনা হবে (3.5.1), অর্থাৎ

$$\binom{N_1}{i}\binom{N_2}{n-i}\bigg/\binom{N}{n}$$

এবার যদি $N \to \infty$ কিন্তু p স্থির থাকে, উপরোক্ত সম্ভাবনা একটা চিত্তাকর্ষক রূপ নেয়। এক্ষেত্রে $N_1 = pN \to \infty, N_1 = qN \to \infty$ এবং উপরোক্ত সম্ভাবনা

$$= \frac{N_1(N_1-1)\ldots(N_1-i+1)}{i!} \times \frac{N_2(N_2-1)\ldots(N_2-n+i+1)}{(n-i)!}$$

$$\times \frac{n!}{N(N-1)\ldots(N-n+1)}$$

$$= \binom{n}{i}\left(\frac{N_1}{N}\right)^i \left(\frac{N_2}{N}\right)^{n-i}$$

$$\times \frac{\left(1-\frac{1}{N_1}\right)\ldots\left(1-\frac{i-1}{N_1}\right)\left(1-\frac{1}{N_2}\right)\ldots\left(1-\frac{n-i-1}{N_2}\right)}{\left(1-\frac{1}{N}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{N}\right)}$$

$$\to \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \qquad [q = 1-p$$

অতএব দেখা যাচ্ছে যে ফেরত না দিয়ে টানার ক্ষেত্রে আমরা দ্বিপদ নিয়ম পাই সীমামান হিসেবে।

4. A এবং B একটা খেলা খেলে যাতে শুধু হার ও জিৎ আছে এবং এই খেলায় A-র জেতার সম্ভাবনা হল p। এই খেলা পরপর চলতে থাকলে, nটি খেলায় B-র জিতের আগে mটি খেলায় A-র জেতার সম্ভাবনা কত ?

প্রস্তাবিত ব্যাপারের নিষ্পত্তি হবে $(m + n - 1)$-সংখ্যক খেলায় যার মধ্যে অন্তত mটি খেলায় A-র জিৎ হল অভীষ্ট ঘটনা। Aর জিতকে সাফল্য বললে, আমরা পাই একটি সংখ্যক বারনুলি প্রচেষ্টা যার জন্যে সাফল্যের সম্ভাবনা হচ্ছে p, এবং তার মধ্যে অন্তত mটি সাফল্যের সম্ভাবনা হল

$$\sum_{i=m}^{m+n-1} \binom{m+n-1}{i} p^i (1-p)^{m+n-1-i} \qquad \ldots\ldots(5.6.5)$$

5. বানাখের দেশলাই-বাক্স সমস্যা (Branch's Match-box Problem) : একজন গণিতবিদ্ সবসময় দুটি দেশলাই-বাক্স রাখেন, যার প্রত্যেকটিতে nটি দেশলাই থাকে। যখন প্রয়োজন হয়, তখন তিনি যদৃচ্ছভাবে একটি বাক্স নির্বাচন করেন এবং তার থেকে একটি কাঠি টানেন। যখন প্রথম বাক্সটি প্রথমবারের জন্যে খালি দেখা যায়, তখন দ্বিতীয় বাক্সটিতে ঠিক iটি কাঠি থাকার সম্ভাবনা কত ?

প্রশ্নদত্ত ঘটনাটির অর্থ হল প্রথম বাক্সটি $(n+1)$-বার নির্বাচন করা হয়েছে যার মধ্যে n-বার কাঠি বের করা হয়েছে, এবং শেষবার বাক্সটি খালি দেখা গেছে এবং দ্বিতীয় বাক্সটি $(n-i)$-বার নির্বাচন করা হয়েছে, যার ফলে তাতে iটি কাঠি অবশিষ্ট আছে এবং তদুপরি শেষবার প্রথম বাক্সটি নির্বাচিত হয়েছে যখন এটা খালি দেখা গেছে, কিন্তু অন্যান্যবার বাক্সদুটি যে-কোনো ক্রমে নির্বাচন করা যেতে পারে।

একটি পরীক্ষার কথা ভাবা যাক, যা হল একটি বাক্স নির্বাচন করা এবং দেখা যে নির্বাচিত বাক্সটি প্রথমটি কিনা। তাই এই পরীক্ষার সাফল্য হল প্রথম বাক্স নির্বাচন এবং এই পরীক্ষাটি $n+1+n-i = 2n-i+1$ বার সম্পাদিত হয়েছে। অতএব আমরা $(2n-i+1)$। বারনুলি প্রচেষ্টা পাচ্ছি যেখানে সাফল্যের সম্ভাবনা $p = \dfrac{1}{2}$। সুতরাং প্রথম $(2n-i)$ প্রচেষ্টায় n-বার যে-কোনো ক্রমে সাফল্য এবং শেষবার সাফল্য এই ঘটনার সম্ভাবনা (5.5.3) ও (5.6.2) দ্বারা পাই

$$\binom{2n-i}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-i}\cdot\frac{1}{2}=\binom{2n-i}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-i+1} \qquad \textbf{(5.6.6)}$$

6. একটি পাত্রে $1, 2, \ldots, n$ নম্বরযুক্ত nটি টিকিট আছে, যার থেকে rটি পরপর টানা এবং প্রতিবার ফেরত দেওয়া হল। টানা টিকিটের বৃহত্তম নম্বর i হওয়ার সম্ভাবনা কী ?

মনে করুন X_i হল টানা টিকিটগুলির নম্বর $\geq i$ এই ঘটনা যা r-বার টানায় প্রত্যেকবার প্রাপ্ত টিকিটের নম্বর $\leq i$ ঘটনার সমার্থক। এবার একটি পরীক্ষার কথা ভাবুন যা হল পাত্র থেকে একটি টিকিট টানা এবং দেখা যে প্রাপ্ত টিকিটের নম্বর $\leq i$ কিনা, অর্থাৎ প্রাপ্ত টিকিটের নম্বর $1, 2, \ldots, i$ সংখ্যাগুলির একটি কিনা। তাই এই পরীক্ষার সাফল্যের সম্ভাবনা i/n। যেহেতু $X_i\, r$-সংখ্যক বারনুলি প্রচেষ্টায় সবগুলি সাফল্য, $P(X_i) = (i/n)^r$।

স্পষ্টতই অভীষ্ট ঘটনা হল $X_i - X_{x-1}$, যেখানে $X_{i-1} \subseteq X_i$। (3.4.4) দ্বারা পাই

$$P(X_i - X_{i-1}) = P(X_i) - P(X_{i-1})$$
$$= \{i^r - (i-1)^r\}/n^r \qquad .....(5.6.7)$$

পোয়াসঁ আসন্নতা (Poisson approximation) : ধরা যাক $p = \mu/n$, যেখানে μ একটি প্রদত্ত ধনাত্মক সংখ্যা। যদি $n \to \infty$ হয়, $p \to 0$ এবং

$$P(A_i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!} p^i (1-p)^{n-i}$$

$$= \frac{\mu^i}{i!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{i-1}{n}\right)\frac{\{\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{-n/\mu}\}^{-\mu}}{\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^i}$$

$$\to e^{-\mu}\frac{\mu'}{i!} \qquad \text{যখন } n \to \infty$$

তাই যদি সাফল্যের সম্ভাবনা p খুব কম এবং প্রচেষ্টায় সংখ্যা n খুব বেশি হয় এমন যে $\mu = np$ মাঝারি মানের হয়, তাহলে আমরা একটি আসন্নসূত্র পাই যাকে বলে দ্বিপদ নিয়মের পোয়াসঁ আসন্নতা :

$$P(A_i) \simeq e^{-\mu}\frac{\mu^i}{i!} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots) \qquad \ldots..(5.6.8)$$

লক্ষ্য করুন $n \to \infty$ হলে সীমাঘটনাদেশ

$$S^{\infty} = A_0 + A_1 + \ldots$$

যেহেতু $A_0, A_1, \ldots$ ঘটনাগুলি জোড়াগতভাবে বিচ্ছিন্ন, স্বতঃসিদ্ধ III দ্বারা পাই

$$P(S^{\infty}) = P(A_0) + P(A_1) + \ldots$$

$$= e^{-\mu}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\mu^i}{i!} = e^{-\mu}.e^{\mu} = 1 = 1$$

7. একটি পাত্রে 1টি সাদা ও 99টি কালো বল আছে। যদি 1000 বার একটি করে বল ফেরত সহকারে টানা হয়, তাহলে 10টি সাদা বলের সম্ভাবনা কী?

এখানে $n = 1000, p = 1/1000, \mu = np = 10$। অতএব পোয়াসঁ আসন্নতার শর্ত সিদ্ধ হচ্ছে এবং

(5.6.8) দ্বারা উত্তর $\simeq e^{-10}\dfrac{10^{10}}{10!} = 0.125$।

দ্বিপদ নিয়মের দ্বারা কষা সঠিক উত্তর হল 0.126 যা দেখায় যে পোয়াসঁ আসন্নসূত্র যথেষ্ট নিখুঁত।

5.7 বহুপদ নিয়ম

এটা দ্বিপদ নিয়মের একটা সাধারণীকরণ। যদি যদৃচ্ছ পরীক্ষা E-র ঘটনাদেশে দুটির বদলে mটি ঘটনাবিন্দু $U_1, U_2, ..., U_m$ থাকে যার সম্ভাবনা

$$P(U_k) = P_k \quad (= 1, 2, ..., m) \qquad .....(5.7.1)$$

এমন যে

$$\sum p_k = 1$$

তাহলে সেই E-র nটি অনপেক্ষ প্রচেষ্টার যৌগিক পরীক্ষা E_n-এর ঘটনাদেশ S^n-এ m^n -সংখ্যক ঘটনাবিন্দু থাকবে যার চেহারা হবে $(U_3, U_m, U_4, ..., U_3, U_1)$ এই ধরনের। E_n পরীক্ষায় 'U_1 i_1-বার, U_2 i_2 বার, ..., U_m i_n-বার ঘটার ঘটনাকে $A_{i_1 i_2 ... i_m}$ দ্বারা চিহ্নিত করলে, যেখানে $\sum i_k = n$, এই ঘটনার মধ্যে থাকা ঘটনাবিন্দুর সংখ্যা হবে

$$\frac{n!}{i_1 ! i_2 \dots i_m !}$$

যা nটি ভিন্ন বস্তুর (প্রচেষ্টার) বিন্যাস, যার মধ্যে i_1টি একরকম (যাতে U_1 ঘটছে), i_2টি একরকম (যাতে U_2 ঘটেছে) ইত্যাদি এবং প্রত্যেকটি ঘটনাবিন্দুর সম্ভাবনা হল $p_1^{i_1} p_2^{i_2} \cdots p_m^{i_m}$। অতএব

$$P(A_{i_1 i_2 ... i_m}) = \frac{n!}{i_1 ! i_2 ! \dots i_m !} p_1^{i_1} p_2^{i_2} \dots p_m^{i_m} \qquad .....(5.7.3)$$

$$(i_1, i_2, ..., i_m = 0, 1, 2, ..., n \text{ এমন যে } \sum i_k = n)$$

এই সূত্রের ডানপক্ষ $(p_1 + p_2 + ... + p_m)^n$-এর বহুপদ বিস্তৃতির সাধারণ পদ এবং তাই একে **বহুপদ নিয়ম** বলা হয়।

এখন $A_{i_1 i_2 ... i_m} (i_1, i_2, ..., i_m = 0, 1, 2, ..., n$ এমন যে $\sum i_k = n)$ ঘটনাগুলি জোড়াগতভাবে বিচ্ছিন্ন এবং

$$S^n = \sum A_{i_1 i_2 ... i_m}$$

যেখানে যোগ হবে $i_1, i_2, ..., i_m$-এর সব মানের জন্যে যার যোগফল n।

$$P(S^n) = \Sigma\, P(A_{i_1 i_2 \cdots i_m})$$

$$= \sum \frac{n!}{i_1!\,i_2!\ldots i_m!} p_1^{i_1} p_2^{i_2} \ldots p_m^{i_m}$$

$$= (p_1 + p_2 + \ldots + p_m)^n = 1$$

উদাহরণ

1. একটি ছক্কা 10-বার ছোড়া হলে, ছয় 4- বার, পাঁচ 2-বার ও অন্যান্য সংখ্যা একবার করে পড়ার সম্ভাবনা কত ?

(5.7.3) দ্বারা উত্তর $= \dfrac{10!}{4!2!1!1!1!1!}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{10} \simeq 0.0013$

2. একটি পাত্রে $N = N_1 + N_2 + \ldots + N_m$-সংখ্যক বল আছে, যার মধ্যে N_1 প্রথম রঙের, N_2 দ্বিতীয় রঙের, ..., N_m m-তম রঙের। $n = i_1 + i_2 + \ldots + i_m$-সংখ্যক বল একটি করে পরপর টানা হলে এদের মধ্যে i_1টি প্রথম রঙের, i_2টি দ্বিতীয় রঙের, ..., i_m-টি m-তম রঙের হওয়ার সম্ভাবনা কী, যদি (a) টানা বলগুলি ফেরত দেওয়া হয়, (b) টানা বলগুলি ফেরত না দেওয়া হয় ?

(a) **ফেরত দিয়ে টানা :** মনে করুন E পাত্র থেকে একটি বল টেনে তার রঙ লক্ষ্য করার পরীক্ষা। তাহলে E-র ঘটনাদেশে mটি ঘটনাবিন্দু থাকবে যা হল mটি ভিন্ন রঙ এবং k-তম রঙের সম্ভাবনা $= N_k / N = p_k$ (ধরুন), $k = 1, 2, \ldots, m$ এবং তাই $\sum p_k = 1$।

এখন E-এর এই n-বার প্রচেষ্টা অনপেক্ষ কেননা টানা বল প্রত্যেকবার ফেরত দেওয়া হচ্ছে এবং (5.7.3) দ্বারা

কাঙ্ক্ষিত সম্ভাবনা $= \dfrac{n!}{i_1!\,i_2!\ldots i_m!} p_1^{i_1} p_2^{i_2} \ldots p_m^{i_m}$

$$= \frac{n!}{i_1!\,i_2!\ldots i_m!}\left(\frac{N_1}{N}\right)^{i_1}\left(\frac{N_2}{N}\right)^{i_2}\cdots\left(\frac{N_m}{N}\right)^{i_m} \qquad (5.7.4)$$

(b) **ফেরত না দিয়ে টানা** : এক্ষেত্রে nটি বল একসঙ্গো টানা চলতে পারে এবং (3.5.2) দ্বারা উত্তর হবে

$$\frac{\binom{N_1}{i_1}\binom{N_2}{i_2}\cdots\binom{N_m}{i_m}}{\binom{N}{n}}$$

যদি $N \to \infty$ কিন্তু $p_1, p_2, ..., p_m$ স্থির থাকে, উপরোক্ত সম্ভাবনা সীমা হবে

$$\frac{n!}{i_1 i_2 ! \ldots i_m !} p_1^{i_1} p_2^{i_2} \cdots p_m^{i_m}$$

5.8 বারনুলি প্রচেষ্টার অসীম ক্রম

এবার বারনুলি প্রচেষ্টার একটি অসীম ক্রমের কথা বিবেচনা করুন। একটি মূল পরীক্ষা E দেওয়া আছে যার ঘটনাদেশ S-এ সাফল্য (s) ও অসাফল্য (f) নামক দুটিমাত্র ঘটনাবিন্দু আছে যাদের সম্ভাবনা যথাক্রমে p ও $q = 1 - p$ এবং এই E-র অসীমসংখ্যক ঘটনাবিন্দু আছে এবং প্রচেষ্টা ক্রমের অনপেক্ষতার সংজ্ঞা হবে এইরকম

$$P\{(A_1, A_2, ...)\} = P(A_1)\, P(A_2)... \qquad .....(5.8.1)$$

যেখানে $A_1, A_2, ..., E$-র সঙ্গো যুক্ত ঘটনার একটি ক্রম এবং ডানপক্ষের অসীম গুণফলের অস্তিত্ব আছে। লক্ষ্যণীয় যে E-র সঙ্গো যুক্ত মাত্র চারটি সম্ভব : s, f, Φ, S।

বিশেষভাবে যদি (5.8.1)-এ $A_n = S$ হয় যখন $n > r$, তাহলে

$$P\{(A_1, A_2, ..., A_r, S, S, ...)\} = P(A_1)\, P(A_2) ...\, P(A_r) \qquad .....(5.8.2)$$

উদাহরণ

1. বারনুলি প্রচেষ্টার একটি অসীম ক্রমে যেখানে সাফল্যের সম্ভাবনা p, প্রথম সাফল্যের আগে i-বার অসাফল্যের সম্ভাবনা কী?

উল্লিখিত ঘটনার প্রথম i প্রচেষ্টার f এবং $(i+1)$-তম প্রচেষ্টার s এবং পরবর্তী সবগুলি প্রচেষ্টার নিশ্চিত ঘটনা S থাকবে। তাই (5.8.2) দ্বারা কাঙ্ক্ষিত সম্ভাবনা হবে $q^i p$।

2. A ও B পালা করে একটি মুদ্রা ছুড়তে থাকে এবং যে প্রথম মাথা পাবে সে জিতবে। যদি A খেলা শুরু করে, তাহলে তার জেতার সম্ভাবনা কত?

মনে করুন $A(2n+1)$ তম খেলায় জিতেছে ঘটনাটি A_n, অর্থাৎ $(2n+1)$ তম খেলায় ফল মাথা এবং তার আগের $2n$-সংখ্যক খেলার ফল ল্যাজ হয়েছে $(n = 0, 1, 2, ...)$। (5.8.2) দ্বারা $P(A_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$ এবং অভীষ্ট ঘটনা হল $\sum A_n$ যার সম্ভাবনা

$$= \sum P(A_n) = \sum \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} = 2/3$$

5.9 সারাংশ

প্রথমে পরপর বা একসঙ্গো সম্পাদিত দুটি যদৃচ্ছ পরীক্ষার যৌগিক পরীক্ষার প্রদত্ত যদৃচ্ছ পরীক্ষা দুটির অনপেক্ষতার ব্যাখ্যা ও গাণিতিক সংজ্ঞা দেওয়া হয়েছে।

পরের অনুচ্ছেদে একটি পরীক্ষার অনেকগুলি প্রচেষ্টার অনপেক্ষতার কথা আলোচিত হয়েছে। এর বিশেষ ক্ষেত্রে আমরা পাই বারনুলি প্রচেষ্টার ধারণা যার জন্যে দ্বিপদ নিয়ম (5.6.2) খাটে।

বারনুলি প্রচেষ্টার এক ধরনের সাধারণীকরণ করে বহুপদ নিয়ম পাওয়া যায়। শেষে বারনুলি প্রচেষ্টার অসীম ক্রমের ধারণা দেওয়া হয়েছে।

5.10 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

1. 52 টি তাসের একটি প্যাকেট থেকে তিনটি তাস পরপর টানা হল, টানা তাস প্রতিবার ফেরত দিয়ে। ‘ইস্কাবন, হরতন বা রুইতন, বিবি’ এই ঘটনার সম্ভাবনা কী ? যদি উল্লিখিত ফলগুলির ক্রম অগ্রাহ্য করা হয়, তাহলে সম্ভাবনা কত হবে ?

2. একটি সমস্যা সমাধান A করতে পারার সম্ভাবনা 2/5 এবং তা B করতে পারার সম্ভাবনা 1/3। যদি দুজনেই স্বাধীনভাবে চেষ্টা করে, সমস্যাটির সমাধানের সম্ভাবনা কত ?

3. একটি মুদ্রা 5 বার ছুড়লে (a) টি মাথা, (b) অন্তত 3টি মাথা, (c) সর্বাধিক 3টি মাথা ঘটনার সম্ভাবনা কী ?

4. (a) 6টি ছক্কা একসঙ্গো ছুড়লে তিনের গুণিতক দুবার পাওয়ার সম্ভাবনা কী ?

(b) একটি ছক্কা পরপর 10-বার ছুড়লে অন্তত একবার 6 পাওয়া যাবে তার সম্ভাবনা কত ?

5. 52টি তাসের একটি প্যাকেট থেকে পরপর 4টি তাস ফেরতসহকারে টানা হল। তাসগুলি সব একই রঙের হওয়ার সম্ভাবনা কী ?

6. একটি নিশানা বিদ্ধ করার সম্ভাবনা 1/5। যদি 10টি গুলি ছোড়া হয়, অন্তত 2-বার নিশানা বিদ্ধ হওয়ার সম্ভাবনা কী ? ন্যূনতম কতবার গুলি ছুড়লে অন্তত একবার নিশানা বিদ্ধ করার সম্ভাবনা 1/2-এর বেশি হবে ?

7. একটি ত্রুটিপূর্ণ ছক্কা 10-বার ছুড়লে জোড় সংখ্যা 5-বার পাওয়ার সম্ভাবনা ঐ একই ঘটনা 4-বার ঘটার সম্ভাবনার দ্বিগুণ। সেই ছক্কা 4-বার ছুড়লে জোড় সংখ্যা কখনো না পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

8. একটি নবজাতকের মেয়ে হওয়ার সম্ভাবনা 1/3। 8টি শিশুবিশিষ্ট একটি পরিবারে 4 বা 5টি মেয়ে হওয়ার সম্ভাবনা কত ?

9. তিনের গুণিতক এই ঘটনা সর্বাধিক সম্ভাবনাময় সংখ্যা নির্ণয় করুন যখন ছক্কাটি ছোড়া হয় (a)50-বার, (b)100-বার।

10. একটি মুদ্রা পরপর ছোড়া হলে দেখান যে nটি ল্যাজের আগে mটি মাথা পাওয়ার সম্ভাবনা

11. n-বার বারনুলি প্রচেষ্টায় n-তম প্রচেষ্টায় i-তম সাফল্যের সম্ভাবনা কী ?

12. বানাখের দেশলাই-বাক্স সমস্যায় প্রথম বাক্স থেকে শেষ কাঠিটি টানার সময় দ্বিতীয় বাক্সে ঠিক i-টি কাঠি থাকার সম্ভাবনা কী ?

13. একটি ছক্কা n-বার ছুড়লে একটি প্রদত্ত সংখ্যা i হবে প্রাপ্ত সংখ্যাগুলির (a) বৃহত্তম, (b) ক্ষুদ্রতম এই ঘটনার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

14. 500 জন লোকের মধ্যে ঠিক একজনের জন্মদিন নববর্ষের দিন হওয়ার সম্ভাবনা কী ? (ধরুন বছরে 365 দিন আছে।)

15. 52টি তাসের একটি প্যাকেট থেকে একটি তাস 260 বার টানা ও ফেরত দেওয়া হল। হরতনের বিবি 4-বার পাওয়ার সম্ভাবনা কী ?

16. একটি মেশিনের 1000টি পরস্পর যুক্ত যন্ত্রাংশ আছে যারা স্বাধীনভাবে বিকল হতে পারে। যদি একটি যন্ত্রাংশ একমাসে বিকল হওয়ার সম্ভাবনা 10^{-3} হয়, তাহলে মেশিনটি একমাস ধরে সচল থাকার (অর্থাৎ কোনো যন্ত্রাংশ বিকল না হওয়ার) সম্ভাবনা কত ?

17. A ও B পালা করে একজোড়া ছক্কা ছোড়ে এবং A ছোড়া শুরু করে। A জেতে যদি সে B সাত পাওয়ার আগে ছয় পায় এবং B জেতে যদি সে A ছয় পাওয়ার আগে সাত পায়। A-র জেতার সম্ভাবনা কত ?

18. তিন ব্যক্তি পালা করে একটি মুদ্রা ছেড়ে এবং যে প্রথম মাথা পাবে সে জিতবে। তিনজনের জেতার সম্ভাবনা যথাক্রমে কত ?

5.11 উত্তরমালা

1. একটি তাস টানার পরীক্ষায় A—ইস্কাবন, B—হরতন, বা রুইতন, C—বিবি।

$$P(A) = 1/4, P(B) = 1/2, P(C) = 1/13$$

প্রথম উত্তর $= P\{(A, B, C)\} = P(A)\, P(B)\, P(C) = 1/104.$ দ্বিতীয় উত্তর $= 3!/104 = 3/52$

2. A না পারার সম্ভাবনা 3/5 এবং B না পারার সম্ভাবনা 2/3। তাই সমাধান না পাওয়া অর্থাৎ A না পারা এবং B না পারা এই ঘটনার সম্ভাবনা (5.6.4) দ্বারা $\frac{3}{2}.\frac{2}{3} = \frac{2}{5}$ এবং উত্তর $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$।

3. $(a)\, 5/6, (b)\, 1/2, (c)\, 13/16$

4. $(a)\, 80/243, (b)\, 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10}$

5. 1/64

6. $1 - (.8)^{10} - 2\,(.8)^9 \simeq 0.624, 4$

7. $\binom{10}{5} p^5 (1-p)^5 = 2\binom{10}{4} p^4 (1-p)^6 \Rightarrow p = 5/8,$ উত্তর $= (3/8)^4$

8. 1568/6561

9. (a) 16 বা 17, (b) 33

10. (5.6.5) দ্বারা

11. n-তম প্রচেষ্টায় s এবং বাকি $(n-1)$-সংখ্যক প্রচেষ্টায় $(i-1)$টি s, এই ঘটনার সম্ভাবনা চাই। যেহেতু $(n-1)$-সংখ্যক প্রচেষ্টা থেকে $(n-1)$-সংখ্যক প্রচেষ্টা $\binom{n-1}{i-1}$ ভাবে নির্বাচন করা যায় যেগুলিতে s হবে, কাঙ্ক্ষিত সম্ভাবনা হবে $\binom{n-1}{i-1} p^i q^{n-i}$ $(p = 1 - p)$।

12. আগের প্রশ্নের মতো এখানে $(2n-i)$ সংখ্যক প্রচেষ্টার $(2n-i)$-তম প্রচেষ্টার s (প্রথম বাক্স) এবং বাকি $(2n-i-1)$-সংখ্যক প্রচেষ্টার $(n-1)$টি s, এই হচ্ছে কাঙ্ক্ষিত ঘটনা যার সম্ভাবনা

$$\binom{2n-i-1}{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-i}$$

13. 5.6 অনুচ্ছেদের 6 নং উদাহরণ দেখুন। উত্তর : (a) $\{i^n-(i-1)^n\}/6^n$, (b) $\{(7-i)^n-(6-i)\}^n/6^n$

14. $n=500, p=1/365, np=500/365\ \mu$। (5.6.8) দ্বারা উত্তর $\simeq e^{-\mu}\mu=0.348$

15. উত্তর $\simeq 5^4 e^{-5}/4!$

16. উত্তর $\simeq 1/e$

17. একজোড়া ছক্কা ছোড়ায় ছয় পাওয়ার সম্ভাবনা, $p_1=5/36$ এবং সাত পাওয়ার সম্ভাবনা, $p_2=1/6$। তাহলে $q_1=1-p_1=31/36$, $p_2=1-p_2=5/6$। মনে করুন $A_n-A(2n+1)$টি খেলায় জিতেছে অর্থাৎ $(2n+1)$-তম খেলায় ছয় পড়েছে, কিন্তু $2, 4, ..., 2n$-তম খেলায় সাত পড়েনি $(n=0, 1, 2, ...)$।

$X=\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ হচ্ছে আমাদের অভীষ্ট ঘটনা, যেখানে $A_0, A_1, ...$ জোড়াগতভাবে বিচ্ছিন্ন এবং একটি বারনুলি প্রচেষ্টার অসীম ক্রমের সঙ্গো যুক্ত। অতএব

$$P(X)=\sum_{n=0}^{\infty} P(A_n)=\sum_{n=0}^{\infty} q_1{}^n q_2{}^n p_1 = p_1/(1-q_1q_2)^{-1}=30/61$$

18. A_n—প্রথম ব্যক্তি $3n+1$ খেলায় জয়ী, অর্থাৎ $(3n+1)$-তম খেলায় প্রথম মাথা পড়েছে $(n=0, 1, 2, ...)$। $A_0, A_1, ...$ জোড়াগতভাবে বিচ্ছিন্ন এবং একটি বারনুলি প্রচেষ্টার অসীম ক্রমের সঙ্গো যুক্ত যার জন্যে সাফল্যের সম্ভাবনা, $p=1/2$। প্রথম ব্যক্তির জেতার সম্ভাবনা

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right)=\left(\sum_{n=0}^{\infty} P(A_n)\right)p(A_n)=\sum_{n=0}^{\infty}(1-p)^{3n}\ p=4/7$$

অনুরূপে দ্বিতীয় ও তৃতীয় ব্যক্তির জেতার সম্ভাবনা যথাক্রমে 2/7 ও 1/7।

একক 6 ❐ সম্ভাবনা নিবেশন (Probability Distributions)

গঠন

6.1 প্রস্তাবনা

সাধারণভাবে একটি ঘটনাদেশের ঘটনাবিন্দুগুলি বিমূর্ত অর্থাৎ সংখ্যা হিসেবে পাওয়া যায় না এবং বিমূর্ত বস্তু নিয়ে গাণিতিক আলোচনা বেশিদূর এগোয় না। পরিবর্তে যদি ঘটনাদেশের উপর একটি বাস্তবমান অপেক্ষক সংজ্ঞায়িত করা যায়, তাহলে অপেক্ষকের মানগুলি হবে বাস্তব সংখ্যা যা আমাদের বিশেষ পরিচিত এবং যার জন্যে বিশ্লেষণতত্ত্ব আমাদের অনেকটাই জানা। এই ধারণায় চালিত হয়ে আমরা অবতারণা করব যদৃচ্ছ চলের যা হল ঘটনাদেশের উপর সংজ্ঞায়িত একটি বাস্তবমান অপেক্ষক।

তারপর আসবে যদৃচ্ছ চলের নিবেশন অপেক্ষকের ধারণা যা একটি বাস্তব চলের বাস্তবমান অপেক্ষক। এই নিবেশন যদৃচ্ছ চলের গতিপ্রকৃতি বর্ণনা করবে।

একটি যদৃচ্ছ চল যে বিভিন্ন মান গ্রহণ করে তার সেটকে চলের বর্ণালি বলা যেতে পারে। এই বর্ণালি বিচ্ছিন্ন হতে পারে, আবার অবিচ্ছিন্নও হতে পারে। আমরা বলব যদৃচ্ছ চলটি বা তার নিবেশন বিচ্ছিন্ন বা অবিচ্ছিন্ন যদি তার বর্ণালি বিচ্ছিন্ন বা অবিচ্ছিন্ন হয়।

বিচ্ছিন্ন এবং অবিচ্ছিন্ন এই দুধরনের নিবেশনের কথা আমরা পৃথকভাবে আলোচনা করব এবং প্রতিক্ষেত্রে কয়েকটি বিশেষ নিবেশনের কথা বলব যা প্রয়োগের ক্ষেত্রে গুরুত্বপূর্ণ।

6.2 উদ্দেশ্য

এই একক পড়লে আপনারা জানতে পারবেন

- যদৃচ্ছ চলের ধারণা
- নিবেশন অপেক্ষকের সংজ্ঞা ও তার ধর্ম
- বিচ্ছিন্ন নিবেশন ও কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ বিচ্ছিন্ন নিবেশনের কথা
- অবিচ্ছিন্ন নিবেশন ও কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ অবিচ্ছিন্ন নিবেশনের কথা

6.3 যদৃচ্ছ চল

ধরা যাক E একটি প্রদত্ত যদৃচ্ছ পরীক্ষা ও S তার ঘটনাদেশ। যদি S-এর প্রতিটি ঘটনাবিন্দু U-এর জন্যে প্রদত্ত নিয়ম অনুযায়ী একটিমাত্র বাস্তবসংখ্যা $X = X(U)$ নিরূপণ করা যায় অর্থাৎ X একটি বাস্তবমান অপেক্ষক যার সংজ্ঞাভূমি হল S, তাহলে X-কে একটি **যদৃচ্ছ চল** (random variable) বা **চলক** (variate) বলা হবে।

একটি যদৃচ্ছ চল X যে বিভিন্ন মানগুলি গ্রহণ করে তার সেটকে X-এর বর্ণালি বলা হবে। এই বর্ণালি বিচ্ছিন্ন অথবা অবিচ্ছিন্ন হতে পারে যার জন্যে X-কে **বিচ্ছিন্ন** (discrete) বা **অবিচ্ছিন্ন** (continuous) যদৃচ্ছ চল বলা হবে।

মনে করুন, A একটি বাস্তব সংখ্যার সেট। সেইসব ঘটনাবিন্দু U-এর সেট যার জন্যে $X(U) \in A$ ঘটনাটিকে $X \in A$ দ্বারা সূচিত করা হবে, অর্থাৎ $(X \in A) = \{U \mid X(U) \in A\}$। নীচে উল্লিখিত $X = a$, $-\infty < X \leq a$ ইত্যাদি এই অর্থে বিভিন্ন ঘটনা নির্দেশ করবে।

উদাহরণ 1 : একটি মুদ্রা ছোড়ার যদৃচ্ছ পরীক্ষার কথা ধরুন। এর ঘটনাদেশের উপর একটি যদৃচ্ছ চল X এইভাবে সংজ্ঞায়িত হতে পারে—মাথার জন্যে $X = 1$, ল্যাজের জন্যে $X = 0$। এখানে X-এর বর্ণালিতে দুটি সংখ্যা আছে $0, 1$। $X = 0$ এবং $X = 1$ যথাক্রমে ল্যাজ ও মাথা ঘটনাকে নির্দেশ করে। আমরা জানি $P(X = 0) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$।

$-\infty < X < \infty$ এই অসমীকরণ নিশ্চিত ঘটনা Sকে নির্দেশ করে এবং আমরা লিখতে পারি

$$(X = 0) + (X = 1) = (-\infty < X < \infty) = S$$

যেহেতু $(X = 0)$ ও $(X = 1)$ পরস্পর বিচ্ছিন্ন

$$P(X = 0) + P(X = 1) = 1$$

যা সত্যি।

উদাহরণ 2 : 1.6 নং অনুচ্ছেদের 5নং উদাহরণের একটি যদৃচ্ছ চল X-এর সংজ্ঞা দেওয়া হল—ছেলে $\to X = 1$, মেয়ে $\to X = 0$। এখানে $P(X = 0)$ ও $P(X = 1)$ সমান নাও হতে পারে।

উদাহরণ 3 : একটি ছক্কা ছোড়ার পরীক্ষার X যদি প্রাপ্ত সংখ্যা হয়, তাহলে X এই পরীক্ষার সঙ্গো যুক্ত একটি যদৃচ্ছ চল যার সংজ্ঞা এইরকম

এক $\to X = 1$, দুই, $\to X = 2, \ldots,$ ছয় $\to X = 6$

X-এর বর্ণালী হবে $\{1\,2, \ldots, 6\}$ সেটটি, এবং

$$P(X = i) = 1/6 \quad (i = 1, 2, \ldots, 6)$$

উদাহরণ 4 : মনে করুন যদৃচ্ছ পরীক্ষাটি হল এক প্যাকেট তাস থেকে একটি তাস টানা এবং X হল তাসের নম্বর (গোলামের জন্যে 11, বিবির জন্যে 12 ও সাহেবের জন্যে 13 ধরে)। তাহলে X একটি যদৃচ্ছ চল যা এই 52টি ঘটনাবিন্দুবিশিষ্ট ঘটনাদেশের উপর সংজ্ঞায়িত। X-র বর্ণালী $\{1, 2, \ldots, 13\}$ সেট এবং $X = 1$ ঘটনায় $X=1$টি ঘটনাবিন্দু আছে, তাই $P(X = 1) = 4/52 = 1/13$।

উদাহরণ 5 : তিনটি বারনুলি প্রচেষ্টার কথা বিবেচনা করুন। আমরা জানি এর ঘটনাদেশ S^3এ $2^3 = 8$টি ঘটনাবিন্দু আছে এবং যদি X সাফল্যের সংখ্যা হয়, তাহলে X একটি যদৃচ্ছ চল যার সংজ্ঞা হল

$$(F, F, F) \to X = 0 \qquad \left.\begin{array}{l}(S, S, F)\\(S, F, S)\\(F, S, S)\end{array}\right\} \to X = 2$$

$$\left.\begin{array}{l}(S, F, F)\\(F, S, F)\\(F, F, S)\end{array}\right\} \to X = 1 \qquad (S, S, S) \to X = 3$$

X-এর বর্ণালি হল $\{0, 1, 2, 3\}$ এবং $P(X = 0) = q^3, P(X = 1) = 3q^3, p(X = 1) = 3q^3 p, P(X = 2) = 3pq^2, P(X = 3) = p^3$ ।

উদাহরণ 6 : একটি পাত্রে $1, 2, ..., n$ নম্বর দেওয়া nটি টিকিট আছে যার থেকে একটি টিকিট টানা হল এবং X যদি টানা টিকিটের নম্বর হয়, তাহলে X-এর সম্ভাব্য মান হল $1, 2, ..., n$ এবং

$$P(X = i) = 1/n \qquad (i = 1, 2, ..., n)$$

উদাহরণ 7 : 5.6 অনুচ্ছেদের 6নং উদাহরণে যদি X টানা টিকিটের বৃহত্তম নম্বর নির্দেশ করে, তাহলে X একটি যদৃচ্ছ চল যার বর্ণালি $\{1, 2, ..., n\}$ এবং (5.6.7) দ্বারা

$$P(X = i) = \{i^n - (i-1)^n\} / n^r \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

উদাহরণ 8 : 3.5 অনুচ্ছেদের 10নং উদাহরণে যদি প্রথম সাদা বলটি পাওয়ার আগে কালো বল পাওয়ার সংখ্যা X হয়, তাহলে X একটি যদৃচ্ছ চল যার বর্ণালি $\{0, 1, 2, ..., N_2\}$ এবং (3.5.3) দ্বারা

$$P(X = i) = \frac{N_1 N_2 (N_2 - 1)\ldots(N_2 - i + 1)}{N(N-1)\ldots(N-i)} \; (i = 1, 2, ..., N_2)$$

$$P(X = 0) = N_1 / N$$

উদাহরণ 9 : 1.6 অনুচ্ছেদের 3নং উদাহরণে যদি X টেলিফোনে কলের সংখ্যা হয়, তাহলে যদৃচ্ছ চল X-এর গ্রহণযোগ্য মান হল $0, 1,, 2, ...$ অর্থাৎ সব অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

উপরোক্ত সব যদৃচ্ছ চলগুলি বিচ্ছিন্ন। $1 - 8$ উদাহরণে সব বর্ণালি সসীম এবং 9 নং উদাহরণে বর্ণালি অসীম।

উদাহরণ 10 : 1.6 অনুচ্ছেদের 4 নং উদাহরণে যদি X দণ্ডের মাপা দৈর্ঘ্য হয়, তাহলে X একটি যদৃচ্ছ চল যার বর্ণালি হল সমগ্র বাস্তব অক্ষ এবং তাই X একটি অবিচ্ছিন্ন যদৃচ্ছ চল।

6.4 নিবেশন অপেক্ষক

একটি যদৃচ্ছ চল X-এর **নিবেশন** বা **বিভাজন অপেক্ষক** (distribution function) একটি বাস্তব চল x-এর অপেক্ষক যা $F_x(x)$ (নীচের x চিহ্ন X-এর সম্বন্ধজ্ঞাপক) বা শুধু $F(x)$ দ্বারা সূচিত হয় এবং যার সংজ্ঞা হল

$$F(x) = P(-\infty < X \le x) \qquad \text{.....}(6.4.1)$$

$F(x)$-এর **মৌলিক ধর্ম**

মনে করুন $b > a$ $-\infty < X \le a$ ও $a < X \le b$ এই ঘটনাদুটি পরস্পর বিচ্ছিন্ন এবং

$$(-\infty < X \le a) + (a < X \le b) = (-\infty < X \le b)$$

তাই

$$P(-\infty < x \le a) + P(a < X \le b) = P(-\infty < X \le b)$$

অথবা

$$F(a) + P(a < X \le b) = F(b)$$

বা

$$F(a) - F(a) = P\,(a < X \le b) \qquad \text{.....}(6.4.2)$$

1. স্বতঃসিদ্ধ I দ্বারা $P(a < X \le b) \ge 0$, সেহেতু $F(b) \ge F(b)$ যখন $b > a$ হয়, অর্থাৎ $F(x)$ একটি একান্বয়ে বর্ধমান অপেক্ষক।

2. ধরা যাক $A_n(-\infty < X \le -n)$ এই ঘটনাকে নির্দেশ করে $(n = 1, 2, \ldots,)$। তাহলে $\{A_n\}$ একটি একান্বয়ে সংকোচনশীল ঘটনার ক্রম যার জন্যে $\lim A_n = \Phi$, অসম্ভব ঘটনা। এখন

$$P(\lim A_n) = P(\Phi) = 0$$

এবং

$$P(A_n) = P(-\infty < X \le -n) = F(-n)$$

সুতরাং $\lim P(A_n) = F(-\infty)$ এবং (3.4.10) দ্বারা পাই

$$F(-\infty) = 0 \qquad \text{.....}(6.4.3)$$

3. ধরুন $A_n = (-\infty < X \le n)\ (n = 1, 2, ...)$। তাহলে $\{A_n\}$ একটি একান্বয়ে প্রসারণশীল ঘটনার ক্রম যার জন্যে $\lim A_n = (-\infty < X < \infty) = S$। সুতরাং

$$P(\lim A_n) = P(S) = 1$$

এবং

$$P(A_n) = P(-\infty < X \le n) = F(n)$$

সেহেতু (3.4.10) দ্বারা পাই

$$F(\infty) = 1 \qquad .....(6.4.4)$$

4. যে-কোনো স্থির সংখ্যা a-র জন্যে, ধরুন

$$A_n = \left(a - \frac{1}{n} < X \le a\right) \quad (n = 1, 2, ...)$$

তাহলে $\{A_n\}$ একটি একান্বয়ে সংকোচনশীল ঘটনার ক্রম এবং $\lim A_n = (X = a)$। এখন

$$P(\lim A_n) = P(X = a)$$

$$P(A_n) = F(a) - F\left(a - \frac{1}{n}\right)$$

এবং তাই

$$\lim P(A_n) = F(a) - F(a-0)$$

(3.4.10) থেকে পাই

$$F(a) - F(a-0) = P(X - a) \qquad .....(6.4.5)$$

5. একটি একান্বয়ে সংকোচনশীল ঘটনার ক্রম $\{A_n\}$-এর সংজ্ঞা দিই

$$A_n = \left(a < X \le a + \frac{1}{n}\right) \quad (n = 1, 2, ...)$$

স্পষ্টতই, $\lim A_n = \Phi$, তাই

$$P(\lim A_n) = P(\Phi) = 0$$

$$\lim P(A_n) = \lim\left[F\left(a+\frac{1}{n}\right) - F(a)\right] = F(a+0) - F(a)$$

(3.4.10) থেকে পাই

$$F(a+0) = F(a) \qquad .....(6.4.6)$$

অতএব দেখা যাচ্ছে নিবেশন অপেক্ষক $F(x)$ একান্বয়ে বর্ধমান, $F(-\infty) = 0, F(\infty) = 1$; প্রত্যেক বিন্দুতে এটি ডানদিকে সন্তত, কিন্তু যদি $P(X = a) > 0$ হয়, তাহলে $F(x)$ এর a-বিন্দুতে বাঁদিকে একটা লম্ফ-অসান্তত্য আছে যেখানে লম্ফের উচ্চতা হল $P(X = a)$।

$y = F(x)$ এই বক্ররেখাকে **নিবেশন বক্ররেখা** বলা হয় যা $y = 0$ ও $y = 1$ এই দুই রেখার মধ্যে আবদ্ধ থাকে।

সম্ভাবনা ভর : x-অক্ষ বরাবর একটি ভরের রৈখিক নিবেশনের কথা চিন্তা করুন যার মোট ভর 1। এই ভরের বিন্যাস একটি অপেক্ষক $F(x)$ দ্বারা এইভাবে প্রকাশ করা যায় যে $(-\infty, x)$ অন্তরে ভরের পরিমাণ $F(x)$। তাহলে যেকোনো অন্তর (a, b)-তে থাকা ভরের পরিমাণ হবে $F(b) - F(a)$। এবার যদি $F(x)$ একটি সম্ভাবনা নিবেশন অপেক্ষক হয়, তাহলে এই ভরের পরিমাণ $P(a < X \le b)$ অর্থাৎ (a, b) অন্তরে X থাকার সম্ভাবনা। সম্ভাবনার এই কাল্পনিক ভর-সদৃশকে ‘সম্ভাবনা ভর’ (probablity mass) বলা হয়।

6.5 ধাপ অপেক্ষক

একটি অপেক্ষক $F(x)$-এর $[a, b]$ অন্তরে সংজ্ঞা এইভাবে দেওয়া হল। $[a, b]$ অন্তরটি $c_0, c_1, \ldots,$ c_m বিন্দু দ্বারা m টি উপ-অন্তরে ভাগ করা হল যেখানে $a = c_0 < c_1 < \ldots c_m = b$ এবং

$$\begin{aligned}
F(x) &= f_0 && c_0 \le x < c_1 \\
&= f_0 + f_1 && c_1 \le x < c_2 \\
&\ldots \qquad \ldots && \ldots \qquad .....(6.5.1) \\
&= f_0 + f_1 + \ldots + f_{m-1} && c_{m-1} \le x < c_m \\
&= f_0 + f_1 + \ldots + f_{m-1} + f_m && x = c_m
\end{aligned}$$

যেখানে $f_0, f_1, \ldots, f_m$ ধনাত্মক ধ্রুবক।

$F(x)$ প্রত্যেক উপ-অন্তর $c_{k-1} \leq x < c_k$-তে ধ্রুব $(k = 1, 2, ..., m)$ এবং আমরা বলি যে, $F(x)[a, b]$তে খণ্ডভাবে ধ্রুব। তাছাড়া $F(x)$-এর প্রত্যেক c_k বিন্দুতে লম্ফ-অসান্ততা আছে, অসান্ততা c_k-র বাঁদিকে আছে কিন্তু ডানদিকে নয় এবং c_k বিন্দুতে লম্ফের উচ্চতা, $F(c_k+0) - F(c_k-0) = F(c_k) - F(c_k-0) = f_k$। এহেন অপেক্ষককে **ধাপ অপেক্ষক** বলা হয় যার $c_1, c_2, ..., c_m$ বিন্দুতে যথাক্রমে $f_1, f_2, ..., f_m$ উচ্চতার ধাপ আছে।

উপরোক্ত ধাপ অপেক্ষকের সংজ্ঞা সহজেই $(-\infty, \infty)$-তে প্রসারিত করা যায়, যার একটি গুরুত্বপূর্ণ প্রয়োগ পরের অনুচ্ছেদে পাওয়া যাবে।

6.6 বিচ্ছিন্ন নিবেশন

একটি যদৃচ্ছ চল X যদি $... x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, ...$ $(... x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 ...)$ এই বিচ্ছিন্ন মানগুলি গ্রহণ করে এবং

$$P(X = x_i) = f_i \qquad (i = 0, \pm 1, \pm 2, ...) \qquad .....(6.6.1)$$

তাহলে নিবেশন অপেক্ষকের সংজ্ঞা হবে এইরকম

$x_i \leq x < x_i + 1$ অন্তরে

$$F(x) = P(-\infty < X \leq x) = P\left\{ \sum_{\alpha=-\infty}^{i} (X = X_\alpha) \right\}$$

$$= \sum_{\alpha=-\infty}^{i} P(X = x_\alpha) = \sum_{\alpha=-\infty}^{i} f_\alpha \; (i = 0, \pm 1, \pm 2, ...) \qquad .....(6.6.2)$$

অর্থাৎ $F(x)$ একটি ধাপ অপেক্ষক যার বর্ণালির প্রত্যেক বিন্দু x_i-তে f_i উচ্চতার ধাপ আছে।

আনুষ্ঠানিকভাবে আমরা বিচ্ছিন্ন নিবেশনের সংজ্ঞা এইভাবে দেব। একটি যদৃচ্ছ চল X বা তার নিবেশনকে বিচ্ছিন্ন বলা হবে যদি তার নিবেশন অপেক্ষক $F(x)$ একটি ধাপ অপেক্ষক হয় যার x_i বিন্দুতে $f_i (> 0)$ উচ্চতার ধাপ আছে $(i = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ অর্থাৎ যার সংজ্ঞা (6.6.2)। এবার দেখি এই $F(x)$-এর

নিবেশন অপেক্ষক হওয়ার সব যোগ্যতা আছে কিনা। $F(x)$ একান্বয়ে বর্ধমান, কেননা সব f_i ধনাত্মক, $f(x)$ প্রত্যেক বিন্দুর ডানদিকে সন্তত, $F(-\infty)=0$ এবং $F(\infty)=1$ হয় যদি

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} f_i = 1 \qquad \text{.....} (6.6.3)$$

তাই (6.6.3) $F(x)$ নিবেশন অপেক্ষক হওয়ার একটি আবশ্যিক শর্ত।

এই $F(x)$ থেকে শুরু করে কীভাবে সম্ভাবনা নিবেশটি নির্ধারণ করা যায় তা এবার দেখব।

1. যদি a একটি ধাপবিন্দু বা অসান্তত্যের বিন্দু না হয়, তাহলে (6.4.5) দ্বারা পাই $P(X-a)=F(a) - F(a-0)=0$।

একটি ধাপবিন্দু x_i-র জন্যে $P(X=x_i)=F(x_i)-F(x_i-0)=f_i>0$। তাই প্রমাণ হল যে X-এর বর্ণালিতে কেবল $x_i(i=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ এই ধাপবিন্দুগুলিই আছে এবং x_i-তে সম্ভাবনা ভর f_i।

2. (6.4.2) দ্বারা

$$P(a<x\le b)=\sum_{a<x_i\le b} f_i \qquad \text{.....} (6.6.4)$$

যেখানে i-এর সেইসব মানের জন্যে যোগফল নিতে হবে যার জন্যে $a<x_i\le b$।

সম্ভাবনা চিত্র : নিবেশন বক্ররেখা $y=F(x)$ ছাড়াও বিচ্ছিন্ন নিবেশনের ক্ষেত্রে আর একটি সচিত্র রূপায়ণ সম্ভব, যাকে বলে সম্ভাবনা চিত্র। বর্ণালির প্রত্যেকটি বিন্দু x_i-তে যদি একটি f_i উচ্চতার কোটি আঁকা হয় তাহলে যে চিত্র তৈরি হয় তাকে সম্ভাবনা চিত্র বলে।

উদাহরণ 1 : একটি যদৃচ্ছ চল $X-1, 0, 1$ এই মানগুলি নিতে পারে যথাক্রমে 1/3, 1/2, 1/6 সম্ভাবনার সঙ্গো। নিবেশনটি নির্ণয় করুন।

$-\infty<x<-1$ হলে $\quad F(x)=P(\Phi)=0$

$-1\le x<0$ হলে $\quad F(x)=P(X=-1)=1/3$

$0\le x<1$ হলে $\quad F(x)=P\{(X=-1)+(X=0)\}$

$$=P(X=-1)+P(X=0)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$$

$1\le x<\infty$ হলে $F(x)=P\{(X=-1)+(X=0)+(X=1)\}$

$$= P(X=-1) + P(X=0) + P(X=1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} = 1$$

উদাহরণ 2 : ধরা যাক

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 && -\infty < x < 0 \\ &= 1/5 && 0 \le x < 1 \\ &= 3/5 && 1 \le x < 3 \\ &= 1 && 3 \le x < \infty \end{aligned}$$

দেখান যে $F(x)$ একটি সম্ভাব্য নিবেশন অপেক্ষক এবং নিবেশনের বর্ণালি ও সম্ভাবনা ভরগুলি নির্ণয় করুন।

$F(x)$ একটি ধাপ অপেক্ষক এবং তাই একটি বিচ্ছিন্ন যদৃচ্ছ চলের নিবেশন অপেক্ষক। ধাপবিন্দুগুলি হল $0, 1, 3$ যেখানে ধাপের উচ্চতা যথাক্রমে $1/5, 3/5, -1/5 = 2/5, 1-3/5 = 2/5$। তাই বর্ণালির বিন্দুগুলি হল $0, 1, 3$ যেখানে সম্ভাবনা ভর যথাক্রমে $1/5, 2/5, 2/5$।

6.7 গুরুত্বপূর্ণ বিচ্ছিন্ন নিবেশন

(1) একবিন্দু নিবেশন (One-point distribution) : বর্ণালিতে একটিমাত্র বিন্দু আছে ঃ a এবং

$$P(X = a) = 1 \qquad \text{.....}(6.7.1)$$

যেখানে a একটি প্রচল অর্থাৎ a-র বিভিন্ন মানের জন্যে বিভিন্ন একবিন্দু নিবেশন পাওয়া যায়।

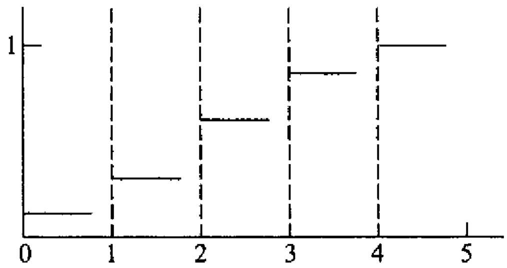
উদাহরণ 1 : যদি যে-কোনো ঘটনাদেশ S-এর প্রত্যেকটি ঘটনাবিন্দুর জন্যে $X = a$ হয়, তাহলে $X = a$ নিশ্চিত ঘটনা, যার ফলে $P(X = a) = 1$। অতএব X-এর নিবেশন একবিন্দু।

(2) দ্বিপদ নিবেশন (Binomial distribution) : এখানে বর্ণালির বিন্দুগুলি হল $0, 1, .., n,$ অর্থাৎ

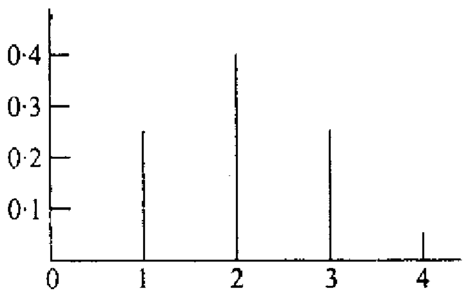
$$\left.\begin{aligned} x_i &= i \qquad (i = 0, 1, 2, ..., n) \\ f_i &= \binom{n}{i} p^i (1 = p)^{n-i} \end{aligned}\right\} \qquad ..... (6.7.2)$$

যেখানে n, একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং $p (0 < p < 1)$ দ্বিপদ নিবেশনের দুটি প্রচল। আমরা দেখি যে প্রদত্ত f_i-গুলি আবশ্যিক শর্ত (6.6.3) সিদ্ধ করে। এই নিবেশনকে আমরা দ্বিপদ (n, p) বলে উল্লেখ করব।

নীচে $n = 4, p = \frac{1}{2}$-এর জন্যে দ্বিপদ নিবেশনের বক্ররেখা (যা একটি ধাপ অপেক্ষক) এবং সম্ভাবনা চিত্র দেওয়া হল।



দ্বিপদ নিবেশন বক্ররেখা $\left(n = 4, p = \frac{1}{2}\right)$



দ্বিপদ সম্ভাবনা চিত্র $\left(n = 4, p = \frac{1}{2}\right)$

উদাহরণ 2 : একটি n-সংখ্যক বারনুলি প্রচেষ্টায় যেখানে সাফল্যের সম্ভাবনা p, যদি সাফল্যের সংখ্যা X হয়, তাহলে X 0, 1, 2, ..., n এই মানগুলি গ্রহণ করতে পারে, অর্থাৎ

$$x_i = i \qquad (i = 0, 1, 2, ..., n)$$

এর দ্বিপদ নিয়ম (5.6.2) দ্বারা

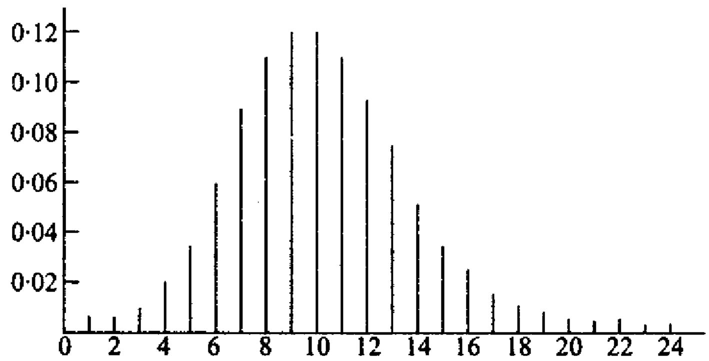
$$f_i = P(X = x_i) = P(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

যা প্রমাণ করে যে X একটি দ্বিপদ (n, p) যদৃচ্ছ চল।

(3) পোয়াসঁ নিবেশন (Poisson distribution) : এখানে বর্ণালী হচ্ছে সব অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা অর্থাৎ

$$\left.\begin{aligned} x_i &= i \qquad (i = 0, 1, 2, ...) \\ f_i &= e^{-\mu}\frac{\mu^i}{i!} \end{aligned}\right\} \qquad .....(6.7.3)$$

যেখানে $\mu(>0)$ একমাত্র প্রচল। এই নিবেশনকে আমরা পোঁয়াস-μ বলব। আবশ্যিক শর্ত (6.6.3) এখানে সিদ্ধ হচ্ছে।



পোয়াসঁ সম্ভাবনা চিত্র $(\mu = 10)$

দ্বিপদ নিবেশনের সীমারূপে পোয়াসঁ নিবেশন : 5.6 নং অনুচ্ছেদের পোয়াসঁ আসন্নতার আলোচনা থেকে পাওয়া যায় যে, দ্বিপদ (n, p) নিবেশন, যেখানে $p = \mu/n$, μ একটি প্রদত্ত ধনাত্মক সংখ্যা, পোয়াসঁ-μ নিবেশনের প্রতি অভিসারী হয় যখন $n \to \infty$।

উদাহরণ 3 : একটি n-বার বারনুলি প্রচেষ্টায় সাফল্যের সংখ্যা আসন্নরূপে পোয়াসঁ-μ হবে যদি n খুব বেশি এবং সাফল্যের সম্ভাবনা p খুব কম হয় এমন যে $\mu = np$ মাঝারি মানের হয়।

উদাহরণ 4 : পোয়াসঁ নিবেশন যে কেবলমাত্র দ্বিপদ নিয়মের সীমা হিসেবেই পাওয়া যায় তা নয়। অনেক বাস্তব সমস্যায় পোয়াসঁ নিবেশন স্বরূপেই উৎপন্ন হয় যা এবার আমরা দেখব।

পোয়াসঁ পদ্ধতি (Poisson process) : যদৃচ্ছ চলের একটি গোষ্ঠী $X(t)$ যেখানে সময় t একটি প্রচল, তাকে একটি **সম্ভাবনাত্মক পদ্ধতি** (stochastic process) বলা হয়। পোয়াসঁ পদ্ধতি এমনি একটি পদ্ধতি যাতে একটি প্রদত্ত সময়ের অন্তরে কোনো পরিবর্তনের সংখ্যা গণনা করা হয় এবং যার জন্যে নীচের নিয়ম দুটি খাটে :

1. $(t, t+h)$ অন্তরে পরিবর্তনের সংখ্যা $(0, t)$ অন্তরে ইতিমধ্যে ঘটে যাওয়া পরিবর্তনের সংখ্যার উপর নির্ভর করে না এবং একথা সব ধনাত্মক t ও h-এর জন্যে সত্যি।

2. $(t, t+h)$ অন্তরে ঠিক একটি পরিবর্তনের সম্ভাবনা হবে $\lambda h + o(h)$, যেখানে λ একটি প্রদত্ত ধনাত্মক ধ্রুবক এবং ঐ অন্তরে একাধিক পরিবর্তনের সম্ভাবনা $o(h)$। $o(h)$ h-এর এমন একটি অপেক্ষক নির্দেশ করে যে $o(h)/h \to 0$ যখন $h \to 0$।

যদি $(0, t)$ অন্তরে পরিবর্তনের সংখ্যা হয় $X(t)$, তাহলে আমরা প্রমাণ করব যে $X(t)$ একটি পোয়াসঁ যদৃচ্ছ চল।

প্রমাণ : স্পষ্টতই $X(t)$ $0, 1, 2, \ldots$ এইসব মানগুলি গ্রহণ করতে পারে এবং সুবিধার্থে আমরা লিখি

$$P\{X(t) = i\} = P_i(t) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

$(0, t)$ এবং $(t, t+h)$ পরপর এই দুটি অন্তরের কথা ভাবুন $(h > 0)$। মনে করুন $(0, t)$ অন্তরে পরিবর্তনের সংখ্যা গণনা করার পরীক্ষা হল E এবং $(t, t+h)$ অন্তরে পরিবর্তনের সংখ্যা গণনা করার পরীক্ষা E'। E ও E'-এর যুগ্ম সম্পাদনকে যৌগিক পরীক্ষা E'' বলা হোক, আমরা প্রথম নিয়মটির এই অর্থ করব যে E ও E' পরীক্ষাদুটি অনপেক্ষ।

এখন E''-এর সঙ্গে যুক্ত $X(t+h) = i$ $(i \leq 1)$ এই ঘটনাটি নিম্নলিখিত তিনটি জোড়াগতভাবে পরস্পর বিচ্ছিন্ন ঘটনার যোগফল হিসেবে লেখা যায় :

(a) E-তে iটি পরিবর্তন অর্থাৎ $X(t) = i$ এবং E'-এ কোনো পরিবর্তন নয়

(b) E'-তে $(i-1)$ টি পরিবর্তন অর্থাৎ $X(t) = i - 1$ এবং E'-এ একটি পরিবর্তন

(c) E'-তে একাধিক পরিবর্তন এমন যে E''-এ মোট পরিবর্তনের সংখ্যা i

যেহেতু E ও E' অনপেক্ষ, (5.4.6) ও দ্বিতীয় নিয়ম ব্যবহার করে পাই

$$P_i(t+h) = P_i(t)\{1-\lambda h + o(h)\} + P_{i-1}(t)\{\lambda h + o(h)\} + o(h)$$

অথবা

$$P_i(t+h) - P_i(t) = -\lambda h P_i(t) + \lambda h P_{i-1}(t) + o(h)$$

h দিয়ে ভাগ করার পর $h \to 0$ করলে পাই

$$P'_i(t) = -\lambda P_i(t) + \lambda P_{i-1}(t) \qquad (i \geq 1) \qquad (i)$$

$i = 0$ হলে আমাদের আলোচ্য ঘটনা হল $X(t+h) = 0$ অর্থাৎ $(0, t+h)$ অন্তরে কোনো পরিবর্তন নয়, যা একমাত্র একভাবে ঘটতে পারে : E ও E' উভয়েই কোনো পরিবর্তন নয়। তাই এক্ষেত্রে

$$P_o(t+h) = P_o(t)\{1-\lambda h + o(h)\}$$

যার থেকে পাই

$$P'_0(t) = -\lambda P'_0(t) \qquad (ii)$$

আর আমাদের আছে প্রারম্ভিক শর্ত

$$P_0(0) = 1 \qquad (iii)$$

$$P_i(0) = 0 \qquad (i \leq 1) \qquad (iv)$$

যা স্পষ্টতই যুক্তিযুক্ত।

শর্ত (iii)-এর সাহায্যে সমীকরণ (ii) সমাধান করে পাই

$$P_0(t) = e^{-\lambda t} \qquad (v)$$

ধরুন

$$P_i(t) = e^{-\lambda t} Q_i(t) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (vi)$$

(v) থেকে

$$Q_0(t) = 1 \qquad (vii)$$

এবং (iv) থেকে

$$Q_i(0) = 0 \qquad (i \leq 1) \qquad (viii)$$

(i)-এ (vi) বসালে আমরা পাই

$$Q'_i(t) = \lambda Q_{i-1}(t) \qquad (ix)$$

এবার $Q'_1(t) = \lambda Q_0(t) = \lambda$ তাই $(viii)$ ব্যবহার করে পাই

$$Q_1(t) = \lambda t$$

তারপর $Q'_2(t) = \lambda Q_1(t) = \lambda^2 t$। সমাকলন করে $(viii)$-এর সাহায্যে পাই

$$Q_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2}$$

আবার $Q'_3(t) = \lambda Q_2(t) = \lambda(\lambda t)^2/2$। অতএব

$$Q_3(t) = \frac{(\lambda t)^3}{3!}$$

ইত্যাদি এবং সাধারণভাবে

$$Q_i(t) = \frac{(\lambda t)^i}{i!}$$

(vi)-এর দ্বারা

$$P_i(t) = e^{-\lambda t}\,\frac{(\lambda t)^i}{i!}$$

অথবা

$$P\{X(t) = i\}\; e^{-\lambda t}\,\frac{(\lambda t)^i}{i!} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

যা প্রমাণ করে যে $X(t)$ পোয়াসঁ নিবেশিত যার প্রচল λt।

পোয়াসঁ পদ্ধতির উপরোক্ত নিয়মদুটি অনেক ব্যবহারিক ক্ষেত্রেই খাটে, যেমন একটি টেলিফোনে প্রদত্ত সময়ের অন্তরে আসা কলের সংখ্যা, কোনো রাস্তায় প্রদত্ত সময়ের অন্তরে দুর্ঘটনার সংখ্যা, একটি তেজস্ক্রিয় পদার্থের নমুনায় প্রদত্ত সময়ের অন্তরে বিচ্ছুরিত অণুর সংখ্যা, প্রদত্ত সময়ের অন্তরে একটি গাইগার-মুয়েলার (Geiger-Müller) গণক দ্বারা গোনা মহাজাগতিক রশ্মিকণার সংখ্যা ইত্যাদি সব পোয়াসঁ পদ্ধতি বলে ধরা যেতে পারে।

একক ৪-এ দেখানো হবে যে পোয়াসঁ নিবেশনের প্রচল μ যদৃচ্ছ চল X-এর সম্ভাবনার নিরিখে গড়মান নির্দেশ করে। তাই বলতে পারি, যে একটি পোয়াসঁ পদ্ধতির জন্যে $(0, t)$ অন্তরে পরিবর্তনের গড়সংখ্যা হল λt এবং তাই λ ধ্রুবকের অর্থ দাঁড়ায় একক সময়ে পরিবর্তনের গড়সংখ্যা। এই ব্যাখ্যা মেনে নিয়ে পরের অঙ্কটি কষা যাক।

উদাহরণ 5 : একটি তেজস্ক্রিয় উৎস থেকে প্রতি সেকেন্ডে গড়ে 2.5টি কণা বিচ্ছুরিত হয়। 4 সেকেন্ডের অন্তরে দুই বা ততোধিক কণা বিচ্ছুরিত হওয়ার সম্ভাবনা কত ?

এখানে $\lambda = 2.5$ তাই 4 সেকেন্ডে বিচ্ছুরিত কণার সংখ্যা একটি পোয়াসঁ যদৃচ্ছ চল যার প্রচল $4\lambda =$ 10, অতএব অভীষ্ট সম্ভাবনা হবে

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$$

মন্তব্য ঃ পোয়াসঁ পদ্ধতিতে প্রচল t সময় ছাড়াও অন্য কিছু নির্দেশ করতে পারে।

6.8 অবিচ্ছিন্ন নিবেশন

একটি যদৃচ্ছ চল X-এর নিবেশন অবিচ্ছিন্ন বলা হবে যদি এর নিবেশন অপেক্ষক $F(x)$ সর্বত্র সন্তত এবং এর অন্তরকলজ $F'(x)$ খণ্ডভাবে সন্তত হয় অর্থাৎ $F'(x)$-এর কয়েকটি বিন্দুতে লম্ফ অসান্তত্য থাকতে পারে এমন যে একটি সসীম অন্তরে সসীমসংখ্যক এইরকম অসান্তত্য বিন্দু থাকতে পারে।

1. যেহেতু $F(x)$ যে-কোনো বিন্দু a-তে সন্তত (6.4.5) দ্বারা

$$P(X = a) = F(a) - F(a - 0) = 0$$

2. (6.4.2) দ্বারা $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx$, অথবা

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx \qquad \text{.....}(6.8.1)$$

যেখানে

$$f(x) = F'(x) \qquad \text{.....}(6.8.2)$$

$f(x)$ অপেক্ষকটিকে নিবেশনের বা X-এর **সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক** বলা হয়।

3. (6.8.1)-এ b-বদলে x লিখে এবং $a \to -\infty$ করলে পাই

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \qquad .....(6.8.3)$$

4. যেহেতু $F(x)$ সর্বত্র একান্বয়ে বর্ধমান

$$\text{সর্বত্র } f(x) \geq 0 \qquad .....(6.8.4)$$

এবং (6.4.4) দ্বারা

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \qquad .....(6.8.5)$$

$f(x)$ একটি সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক হওয়ার আবশ্যিক শর্ত হল (6.8.4) ও (6.8.5)

5. অন্তরক (differential) চিহ্ন ব্যবহার করে লিখতে পারি

$$P(x < X \leq x + dx) = F(x + dx) - F(x)$$

$$= dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx \qquad .....(6.8.6)$$

এই অন্তরককে নিবেশন বা যদৃচ্ছ চলের **সম্ভাবনা অন্তরক** বলা হয়।

উদাহরণ

1. ধ্রুবক K-এর মান বের করুন যার জন্যে

$$f(x) = Kx(1-x) \qquad 0 < x < 1$$

$$= 0 \qquad \text{অন্যত্র}$$

একটি সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক। নিবেশন অপেক্ষকটি নির্মাণ করুন, এবং $P\left(x > \frac{1}{2}\right)$ নির্ণয় করুন।

(6.8.5) দ্বারা $1 = K\int_0^i x(1-x)dx = K/6$ বা $K = 6$।

$F(x)$ (6.8.3) দ্বারা নিরূপিত হয়। যখন $-\infty < x < 0, F(x) = 0$।

যখন $0 \leq x < 1$

$$F(x) = 6\int_0^x x(1-x)dx = x^2\ (3-2x)$$

এবং যখন $1 < x < \infty$

$$F(x) = 6\int_0^x x(1-x)dx = 1$$

$$P\left(X > \frac{1}{2}\right) = \int_{1/2}^{\infty} f(x)dx = 6\int_{1/2}^{1} x(1-x)dx = \frac{1}{2}$$

শেষোক্ত ফলটি এইভাবেও পাওয়া যায়

$$P\left(X > \frac{1}{2}\right) = 1 - P\left(X \le \frac{1}{2}\right) = 1 - F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

2. দেখান যে

$$F(x) = 0 \qquad -\infty < x < 0$$
$$= 1 - e^{-x} \qquad 0 \le x < \infty$$

একটি নিবেশন অপেক্ষক এবং নিবেশনটি অবিচ্ছিন্ন। সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক নির্ণয় করুন।

যেহেতু $F(x)$ একান্বয়ে বর্ধমান, $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$, $F(x)$ সর্বত্র সন্তত $F'(x)$-এর $x = 0$ বিন্দুতে কেবল একটি লম্ফ অসান্তত্য আছে, $F(x)$ একটি অবিচ্ছিন্ন যদৃচ্ছ চলের নিবেশন অপেক্ষক। (6.8.2) দ্বারা

$$f(x) = 0 \qquad -\infty < x < 0$$
$$= e^{-x} \qquad 0 < x < \infty$$

6.9 গুরুত্বপূর্ণ অবিচ্ছিন্ন নিবেশন

(1) **আয়তক্ষেত্রিক বা সম নিবেশন (Rectangular বা uniform distribution) :** এক্ষেত্রে সম্ভাবনা ঘনত্ব $f(x)$ একটি প্রদত্ত অন্তরে ধ্রুব এবং তার বাইরে শূন্য, অর্থাৎ

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \qquad a < x < b \qquad \text{.....(6.9.1)}$$
$$= 0 \qquad \text{অন্যত্র}$$

$a, b\ (> a)$ নিবেশনের দুটি প্রচল। আবশ্যিক শর্ত (6.8.5) সিদ্ধ হচ্ছে।

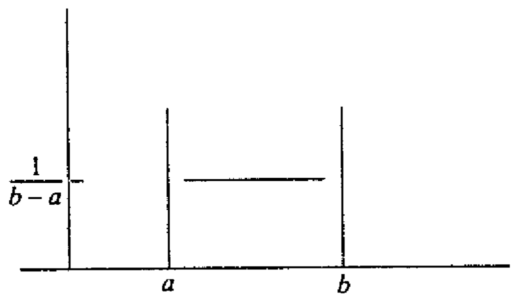
(6.8.3) দ্বারা নিবেশন অপেক্ষক

$$F(x) = 0 \qquad -\infty < x < a$$

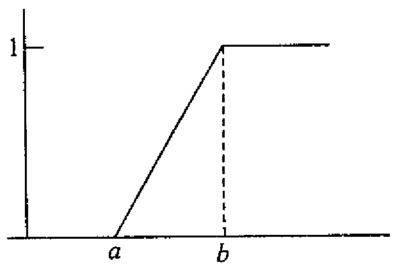
$$= \qquad a \le x \le b \qquad \text{.....(6.9.2)}$$

$$= 1 \qquad b < x < \infty$$

ঘনত্ব বক্ররেখা $y = f(x)$ এবং নিবেশন বক্ররেখা $y = F(x)$ নীচে চিত্রিত হল



আয়তক্ষেত্রিক ঘনত্ব বক্ররেখা



আয়তক্ষেত্রিক নিবেশন বক্ররেখা

উদাহরণ : (a, b) অন্তরে একটি বিন্দু X এমন যদৃচ্ছভাবে নেওয়া হল যে এর যে-কোনো উপান্তরে X থাকার সম্ভাবনা ঐ উপান্তরের দৈর্ঘ্যের আনুপাতিক। তাহলে $X(a, b)$ অন্তরে সমভাবে নিবেশিত।

প্রমাণ : প্রশ্নের শর্ত থেকে পাই, নিবেশক অপেক্ষক

$$F(x) = 0 \qquad -\infty < x < a$$

$$= \lambda(x - a) \qquad a \le x \le b$$

$$= 1 \qquad b < x < \infty$$

($\lambda =$ ধ্রুবক)। যেহেতু $F(b + 0) = F(b), \lambda = 1/(b - a)$।

অন্যভাবে

$$f(x)dx = \lambda\, dx \qquad a < x < b$$

$$= 0 \qquad \text{অন্যত্র}$$

(6.8.5) দ্বারা $\lambda = 1/(b - a)$।

মন্তব্য : অনেক সময় 'একটি প্রদত্ত অন্তরে একটি বিন্দু যদৃচ্ছভাবে নির্বাচিত বা নেওয়া হল' এই উক্তির অর্থ ধরা হয় যে যদৃচ্ছ বিন্দুটির প্রদত্ত অন্তরে সম নিবেশন আছে।

(2) স্বাভাবিক নিবেশন (Normal distribution) : এর সংজ্ঞা হল

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \qquad -\infty < x < \infty \qquad \text{.....(6.9.3)}$$

m ও $\sigma\,(>0)$ স্বাভাবিক নিবেশনের দুটি প্রচল। আমরা বলব যদৃচ্ছ চলটি স্বাভাবিক (m, σ)।

আমরা দেখি

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-x^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-x} x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} = 1$$

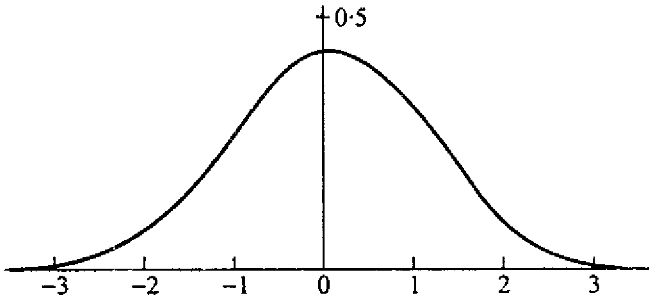
অর্থাৎ (6.8.5) শর্ত পালিত হচ্ছে। (6.8.3) দ্বারা

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dx \qquad \text{.....(6.9.4)}$$

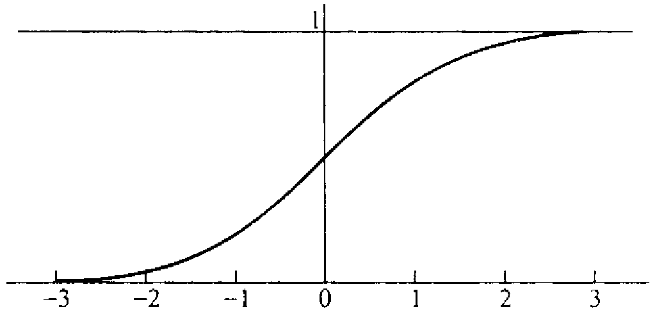
$m = 0, \sigma = 1$ এই বিশেষ ক্ষেত্রে নিবেশনটিকে **আদর্শ স্বাভাবিক নিবেশন** বলা হয়, যার ঘনত্ব অপেক্ষক ও নিবেশন অপেক্ষককে যথাক্রমে বিশেষ চিহ্ন $\phi(x)$ ও $\Phi(x)$ দ্বারা সূচিত করা হবে, অর্থাৎ

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{3}}\,dx \qquad \text{.....(6.9.5)}$$

আদর্শ স্বাভাবিক নিবেশনের ঘনত্ব অপেক্ষক ও নিবেশন অপেক্ষকের চিত্র নীচে দেওয়া হল।



আদর্শ স্বাভাবিক ঘনত্ব অপেক্ষক



আদর্শ স্বাভাবিক নিবেশন অপেক্ষক

এই স্বাভাবিক নিবেশন সম্ভাবনা তত্ত্বে একটি বড় ভূমিকা পালন করবে যা আমরা পরবর্তী এককে দেখব।

(3) কোশি নিবেশন (Cauchy distribution) : এর সংজ্ঞা হল

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\lambda}{\lambda^2 + (x-\mu)^2} \quad -\infty < x < \infty \qquad \text{.....(6.9.6)}$$

$\lambda(>0)$ ও μ দুটি প্রচল। সহজেই যাচাই করা যায় যে (6.8.5) শর্তটি পালিত হচ্ছে। (6.8.3) দ্বারা

$$F(x) = \frac{\lambda}{\pi} \int_{-\infty}^{x} \frac{dx}{\lambda^2 + (x-\mu)^2}$$

অথবা

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{x-\mu}{\lambda}\right) + \frac{1}{2} \qquad \text{.....(6.9.7)}$$

(4) গামা নিবেশন (Gamma distribution) : এই নিবেশনের বর্ণালি হল বাস্তব অক্ষের ধনাত্মক অর্ধ এবং এর ঘনত্ব অপেক্ষক হল

$$f(x) = \frac{e^{-x} x^{l-1}}{\Gamma(l)} \qquad 0 < x < \infty \qquad \text{.....(6.9.8)}$$

$$= 0 \qquad \text{অন্যত্র}$$

$l\,(>0)$ নিবেশনের একটিমাত্র প্রচল। এই নিবেশনকে $\gamma(l)$ নিবেশন বলে উল্লেখ করা হবে।

আমরা জানি

$$\Gamma(l)=\int_0^\infty e^{-x}x^{l-1}dx$$

এবং তাই

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = \int_0^\infty f(x)\ dx = 1$$

(5) প্রথম প্রকার বিটা নিবেশন (Beta distribution of the first kind) : এখানে বর্ণালি হচ্ছে (0, 1) অন্তর এবং

$$f(x)=\frac{x^{l-1}(1-x)^{m-1}}{B(l,m)} \qquad 0<x<1 \qquad \text{.....(6.9.9)}$$

$$=0 \qquad \text{অন্যত্র}$$

প্রচলগুলি হল l, m যারা ধনাত্মক এবং নিবেশনকে $\beta_1(l, m)$ নিবেশন বলা হয়। লক্ষ্যণীয় যে

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{B(l,m)}\int_0^1 x^{l-1}(1-x)^{m-1}dx = \frac{B(l,m)}{B(l,m)} = 1$$

(6) দ্বিতীয় প্রকারের বিটা নিবেশন (Beta distribution of the second kind) : এর সংজ্ঞা হল

$$f(x)=\frac{x^{l-1}}{B(l,m)(1+x)^{l+m}} \qquad 0<x<\infty \qquad \text{.....(6.9.10)}$$

$$=0 \qquad \text{অন্যত্র}$$

যেখানে l, m দুটি ধনাত্মক প্রচল। যদৃচ্ছ চলটিকে $\beta_2(l, m)$ চলক বলা হবে। (6.8.5) শর্তটি পালিত হচ্ছে যেহেতু আমরা জানি

$$= B(l,m) = \int_0^\infty \frac{x^{-l-1}dx}{(1+x)^{l+m}}$$

6.10 সারাংশ

এই এককে প্রথমে যদৃচ্ছ চল বা চলকের সংজ্ঞা দেওয়া হয়েছে। যদৃচ্ছ চল বিমূর্ত ঘটনাদেশের উপর সংজ্ঞায়িত একটি বাস্তবমান অপেক্ষক। তারপর আসে নিবেশন অপেক্ষক $F(x)$-এর কথা। $(-\infty, x)$ এই অন্তরে যদৃচ্ছ চলটি থাকার ঘটনার সম্ভাবনাই হল $F(x)$। এই সম্ভাবনা অপেক্ষক যদৃচ্ছ চলের সম্ভাবনাত্মক গতিপ্রকৃতি বর্ণনা করে। তারপর সম্ভাবনা অপেক্ষকের কয়েকটি মৌলিক ধর্ম প্রতিষ্ঠা করা হয়। প্রসঙ্গাত আসে সম্ভাবনা ভরের ধারণা—একটি অন্তরে যদৃচ্ছ চলটি থাকার সম্ভাবনাকে সেই অন্তরে অবস্থিত সম্ভাবনা ভর বলা হয়। যে মানগুলি একটি যদৃচ্ছ চল গ্রহণ করে তাদের সমষ্টিকে চলের বর্ণালি বলা হয়। যদৃচ্ছ চল বা তার নিবেশনকে বিচ্ছিন্ন বা অবিচ্ছিন্ন বলা হয় যদি তার বর্ণালি বিচ্ছিন্ন বা অবিচ্ছিন্ন হয়। এই দুধরনের নিবেশনের সাধারণ ধর্ম ও কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ বিচ্ছিন্ন ও অবিচ্ছিন্ন নিবেশনের কথা আলোচিত হয়েছে।

6.11 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

1. যদি $F(x)$ একটি যদৃচ্ছ চল X-এর নিবেশন অপেক্ষক হয়, তাহলে দেখান যে

$$P(a < X < b) = F(b-0) - F(a)$$

$$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a-0)$$

2. একটি চলক X $1, 2, \ldots, n$ এই মানগুলি গ্রহণ করতে পারে এবং $X = i$ ঘটনার সম্ভাবনা $1/i(i+1)$-এর সমানুপাতিক। X-এর নিবেশন অপেক্ষক নির্ণয় করুন। $P(3 < X \le n)$ ও $P(X > 5)$ এই সম্ভাবনাগুলির মান বের করুন।

3. একটি নিবেশন অপেক্ষক $F(x)$-এর সংজ্ঞা হল

$$\begin{aligned} F(x) &= A & -\infty < x < -1 \\ &= B & -1 \le x < 0 \\ &= C & 0 \le x < 2 \\ &= D & 2 \le x < \infty \end{aligned}$$

যেখানে A, B, C, D ধ্রুবক। A, B, C, D-র মান নির্ণয় করুন যদি জানা থাকে যে $P(X = 0) = 1/6$, $P(x > 1) = 2/3$, যেখানে X চালকের নিবেশন অপেক্ষক $F(x)$।

4. $\{0, 1, 2, 3\}$ এবং $\{0, 1, 2, 3\}$ এই সেটদুটির প্রত্যেকটি থেকে একটি সংখ্যা যদৃচ্ছভাবে বাছা হল। প্রাপ্ত সংখ্যাদুটির যোগফলের সম্ভাবনা নিবেশন নির্ধারণ করুন।

5. একটি মুদ্রাকে তিনবার ছোড়া হলে মোট মাথা পড়ার সংখ্যার সম্ভাবনা নিবেশন নির্ণয় করুন।

6. একটি সম্ভাবনা নিবেশন অপেক্ষক নির্ণয় করুন যেখানে i বিন্দুতে সম্ভাবনা ভর

$$f_i = \frac{i}{15} \qquad\qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

7. যদি একটি সম্ভাবনা নিবেশন অপেক্ষক $F(x)$-এর সংজ্ঞা নিম্নরূপ হয়

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 & x < 1 \\ &= \frac{1}{4} & 1 \le x < 3 \\ &= \frac{1}{2} & 3 \le x < 5 \\ &= \frac{3}{4} & 5 \le x < 7 \\ &= 1 & x \ge 7 \end{aligned}$$

তবে মান নির্ণয় করুন

(a) $P(X \le 5)$ (b) $P(X = 3)$ (c) $P(X < 3)$ (d) $P(X > 1)$

(e) $P(X = 5)$

8. একটি চলক X-এর সম্ভাবনা নিবেশন অপেক্ষকটি নিম্নরূপ

$$\begin{aligned} F(x) &= 1 - \frac{1}{2}e^{-x} & x \ge 0 \\ &= 0 & x < 0 \end{aligned}$$

এক্ষেত্রে $P(X = 0)$ এবং $P(X > 1)$-এর মান নির্ণয় করুন।

9. একটি চলক X-এর সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক হল

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{40}e^{-\frac{x}{40}} & x \ge 0 \\ &= 0 & \text{অন্যত্র} \end{aligned}$$

এক্ষেত্রে মান নির্ণয় করুন

(a) $P(X \le 15)$ (b) $P(40 < X \le 50)$ (c) $P(X > 10)$

10. একটি পাত্রে 4টি সাদা ও 6টি কালো বল আছে যার থেকে পরপর 5টি বল টানা হল। টানা বলগুলির মধ্যে সাদা বলের সংখ্যার সম্ভাবনা নিবেশন নির্ণয় করুন, যদি (a) বল প্রত্যেকবার ফেরত দেওয়া হয়, (b) বল ফেরত না দেওয়া হয়।

11. বানাখের দেশলাই-বাক্স সমস্যায় (অনুচ্ছেদ 5.6 উদাহরণ 5) একটি বাক্সে পড়ে থাকা কাঠির সংখ্যা যখন প্রথমবারের মতো অন্য বাক্সটি খালি দেখা যায়, তার সম্ভাবনা নিবেশন নির্ণয় করুন।

12. একটি বারনুলি প্রচেষ্টার অসীম ক্রমে প্রথম সাফল্যের আগের অসাফল্যের সংখ্যার সম্ভাবনা নিবেশন নির্ণয় করুন যেখানে সাফল্যের সম্ভাবনা p।

13. যদি X পোয়াসঁ-μ চলক হয়, তবে প্রমাণ করুন

$$P(X < n) = \frac{1}{n!}\int_{\mu}^{\infty} e^{-x} x^{n} dx$$

যেখানে n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

14. যদি প্রত্যেক 15 বছরে গড়ে একবার যুদ্ধ হয়, তাহলে 25 বছরে কোনো যুদ্ধ না হওয়ার সম্ভাবনা কী ?

15. একটি 500 পাতার বইতে 500টি মুদ্রণত্রুটি থাকে। তাহলে একটি নির্দিষ্ট পাতার সর্বাধিক 3টি মুদ্রণত্রুটি থাকার সম্ভাবনা কী ?

16. 100 লিটার জলে 10^{6}টি বীজাণু আছে। এই জলের 1 ঘনসেমি নমুনা বীজানুশূন্য হওয়ার সম্ভাবনা কী ?

17. একটি অপেক্ষক যার মান $(-1, 1)$ অন্তরে $|x|$ এবং অন্যত্র শূন্য। দেখান যে এটি একটি সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক এবং তার প্রতিষঙ্গী সম্ভাবনা নিবেশন অপেক্ষক নির্ণয় করুন।

18. একটি অপেক্ষক $f(x)$-এর সংজ্ঞা হল :

$$\begin{aligned} f(x) &= x && 0 < x < 1 \\ &= k - x && 1 < x < 2 \\ &= 0 && \text{অন্যত্র} \end{aligned}$$

দেখান যে ধ্রুবক k-এর নির্দিষ্ট মানের জন্যে $f(x)$ একটি সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক। চলকটি $\frac{1}{2}$ ও $\frac{3}{2}$-এর মধ্যে থাকার সম্ভাবনা বের করুন।

19. একটি বিন্দু X একটি সরলরেখাদণ্ড AB-এর উপর যদৃচ্ছভাবে নেওয়া হল। AB-র মধ্যবিন্দু O হলে AX, BX ও AO একটি ত্রিভুজের বাহু হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

20. একটি বিন্দু P a ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তের উপর যদৃচ্ছভাবে নেওয়া হল। দেখান যে AP জ্যাটি প্রদত্ত বৃত্তের অন্তর্লিখিত সমবাহু ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্যের চেয়ে বেশি হওয়ার সম্ভাবনা 1/3।

21. 2a দৈর্ঘ্যের একটি সরলরেখাদণ্ড AB-র উপর যদৃচ্ছভাবে একটি বিন্দু P নেওয়া হল। AP, PB এই আয়তক্ষেত্রে ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2}a^2$ অতিক্রম করবার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

22. একটি বিন্দু একটি প্রদত্ত অন্তরে যদৃচ্ছভাবে নেওয়া হলে যে দুটি উপান্তর উৎপন্ন হয়, তার বামটি ও ডানটির দৈর্ঘ্যের অনুপাত একটি ধ্রুবক k-এর চেয়ে কম হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

23. যদি X একটি স্বাভাবিক (m, σ) চলক হয়, প্রমাণ করুন

$$P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$$

$$P(|X - m| > a\sigma) = 2[1 - \sigma(a)]$$

যেখানে $\Phi(x)$ আদর্শ স্বাভাবিক নিবেশন অপেক্ষক।

6.12 উত্তরমালা

1. (6.4.2) ও (6.4.5) ব্যবহার করুন।

2. $x_i = i$ $(i = 1, 2, ..., n)$; $f_i = k/i\,(i+1)$ ($k =$ ধ্রুবক)। $1 = \sum f_i = k\sum\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{i+1}\right)$

$= k\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{kn}{n+1} \Rightarrow k = (n+1)/n$ উত্তর $F(x) = i(n+1)/n(i+1)$ $(i \le x < i+1)$ $(i = 1, 2, ..., n)$; $(n-3)/4n$, $(n-5)/6n$।

3. $A = F(-\infty)\,0, D = F(\infty) = 1, 1/6 = P(X = 0) = F(0) - F(-0) = C - B, 2/3 = P(X > 1) = 1 - F(1) = 1 - C \Rightarrow B = 1/6, C = 1/3$।

4. বর্ণালি : 0, 1, ..., 6 যাতে সম্ভাবনা ভর যথাক্রমে 1/6, 1/8, 3/16, 1/4, 3/16, 1/8, 1/6

5. বর্ণালি : 0, 1, 2, 3 সম্ভাবনা ভর যথাক্রমে : $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$

6. $F(x) = 0 \qquad x < 1$

$$= \frac{1}{15} \qquad 1 \le x < 2$$

$$= \frac{3}{15} \qquad 2 \le x < 3$$

$$= \frac{6}{15} \qquad 3 \le x < 4$$

$$= \frac{10}{15} \qquad 4 \le x < 5$$

$$= 1 \qquad x \ge 1$$

7. (a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{3}{4}$ (e) $\frac{1}{4}$

8. $P(X = 0) = F(0) - F(0) - F(0-0) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) - 0 = \frac{1}{2}$

$P(X > 1) = 1 - P(X \le 1) = 1 - F(1) = 1 - \left(1 - \frac{1}{2e}\right) = \frac{1}{2e}$

9. (a) $1 - e^{-\frac{3}{8}}$ (b) $e^{-1} - e^{-\frac{5}{4}}$ (c) $e^{-\frac{1}{4}}$

10. 5.6 অনুচ্ছেদের 3 নং অঙ্কে, $N_1 = 4$, $N_2 = 6$, $N = 10$, $n = 5$। উত্তর (a) দ্বিপদ $(5, p)$ যেখানে $p = N_1/N = .4$ (b) $x_i = i$

$$f_i = \binom{N_1}{i}\binom{N_2}{n-i}\Bigg/\binom{N}{n}$$

এবার দেখা যাক i-এর কী কী মান সম্ভব। $0 \le i \le N_1$ এবং $0 \le n - i \le N_2$ অর্থাৎ $n - N_2 \le i \le n$, তাই $\max\{0, n - N_2\} \le i \le \min\{N_1, n\}$। সাম্প্রতিক অঙ্কে $0 \le i \le 4$। বর্ণালি 0, 1, 2, 3, 4 এবং সম্ভাবনা ভর যথাক্রমে 1/42, 10/42, 20/42, 10/42, 1/42।

11. উল্লিখিত ঘটনায় প্রথম বাক্সটি খালি দেখা যেতে পারে অথবা দ্বিতীয় বাক্সটি খালি দেখা যেতে পারে এবং প্রত্যেক ক্ষেত্রে ঘটনায় সম্ভাবনা হল যা (5.6.6) দ্বারা প্রদত্ত। তাই অভীষ্ট সম্ভাবনা নিবেশনের বর্ণালি $x_i = i (i = 0, 1, ..., n)$,

$$f_i = \binom{2n-i}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-i}$$

12. 5.8 অনুচ্ছেদের উদাহরণ 1 দেখুন $x_i = i\ (i = 0, 1, 2, ...), f_i = q^i\ (q = 1 - p)$।

13. $\frac{1}{n!}\int_{\mu}^{\infty} e^{-x}x^n dx = \frac{e^{-\mu}\mu^n}{n!} + \frac{1}{(n-1)!}\int_{\mu}^{\infty} e^{-x}x^{n-1}dx$

14. পোয়াসঁ পদ্ধতি : t বছরে যুদ্ধের সংখ্যা X পোয়াসঁ নিবেশিত যার প্রচল $\mu = \lambda t$ যেখানে $\lambda = 1/15, t = 2/5,$ তাই, $\mu = 5/3,$ এবং $P(X = 0) = e^{-5/3}$।

15. পোয়াসঁ পদ্ধতি : t-সংখ্যক পাতায় মুদ্রণত্রুটির সংখ্যা X পোয়াসঁ নিবেশিত যার প্রচল $\mu = \lambda t$ যেখানে $\lambda = 500/500 = 1, t = 1,$ অতএব $\lambda = 1$।

$$P(X \geq 3) = e^{-\mu}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}\right) = 8/5e$$

16. পোয়াসঁ পদ্ধতি : t ঘনসেমি জলে বীজাণুর সংখ্যা X পোয়াসঁ নিবেশিত যার প্রচল $\mu = \lambda t, \lambda = 10^6/10^5 = 10, t = 1, \mu = 10$। তাই উত্তর e^{-10}।

17. $f(x) \geq 0$ সর্বত্র এবং $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-1}^{1}(x)dx = 1$ তাই $f(x)$ একটি সম্ভাব্য ঘনত্ব অপেক্ষক। $f(x) = 0\ (x \leq -1), (1-x)^2/2\ (-1 < x \leq 0), (1+x)^2/2\ (0 < x \leq 1), 1(x > 1)$।

18. $k = 2, P(1/2 < X < 3/2) = 3/4$

19. A, B, X বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে a, b, X ধরুন। $X(a, b)$ অন্তরে সমভাবে নিবেশিত। উল্লিখিত ঘটনা হল $X, -a, b-X$ এবং $(b-a)/2$ সংখ্যাগুলি এমন যে $X - a + b - X > (b-a)/2, X - a + (b-a)/2 > b - X, b - X + (b-a)/2 > X - a$ অর্থাৎ $(3a+b)/4 < X < (a+3b)/4$ উত্তর 1/2

20. মনে করুন বৃত্তের কেন্দ্র O। কোণ $POA = X$ একটি যদৃচ্ছ চল যা $(0, 2\pi)$ অন্তরে সমভাবে নিবেশিত। উল্লিখিত ঘটনা হল $2a\sin\frac{1}{2}X > \sqrt{3}a$ অর্থাৎ $\sin\frac{1}{2}X > \sqrt{3}/2$ অর্থাৎ $\frac{1}{3}\pi < \frac{1}{2}X < \frac{2}{3}\pi$ বা $2\pi 3 < X < 4\pi/3$ যার সম্ভাবনা $= (4\pi/3 - 2\pi/3)2\pi = 1/3$।

21. A, B, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $0, 2a, X$ ধরুন। $X(0, 2a)$ অন্তরে সমভাবে নিবেশিত। উল্লিখিত ঘটনা হল

22. মনে করুন অন্তরটি (a, b) এবং যদৃচ্ছ বিন্দুটি X। X (a, b) অন্তরে সমভাবে নিবেশিত। উল্লিখিত ঘটনা $(X-a)/(b-X)<k$ অর্থাৎ $a<X<(a+bk)/(1+k)$ যার সম্ভাবনা $=k/(1+k)$।

23.
$$P(a<X<b)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_a^b e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{(a-m)/\sigma}^{(b-m)/\sigma} e^{\frac{-y^2}{2}}dy=\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$$

$$P(|X-m|>a\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\left[\int_{m+a\sigma}^{\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx+\int_{-\infty}^{m-a\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma}}dx\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_a^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy+\int_{-\infty}^{-a} e^{-\frac{y^2}{2}}dy\right]=2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

$$=2[1-\Phi(a)]$$

একক 7 ❐ যদৃচ্ছ চলের রূপান্তর এবং গাণিতিক প্রত্যাশা (Transformation of Random Variables and Mathematical Expectations)

গঠন

7.1 প্রস্তাবনা

এই এককে দুটি আলাদা বিষয় আলোচিত হবে যা হল যদৃচ্ছ চলের রূপান্তর এবং গাণিতিক প্রত্যাশা।

যদি $y = g(x)$ একটি প্রদত্ত বাস্তব অপেক্ষক হয় এবং ঘটনাদেশ S-এর উপর সংজ্ঞায়িত X একটি যদৃচ্ছ চল হয়, তাহলে $Y = g(X)$ ও S-এর উপর সংজ্ঞায়িত একটি যদৃচ্ছ চল। X-এর নিবেশন দেওয়া থাকলে Y-এর নিবেশ নির্ণয় করা হল প্রথম বিষয়টির সমস্যা।

দ্বিতীয় বিষয়টি হল গাণিতিক প্রত্যাশা। যদি X একটি প্রদত্ত যদৃচ্ছ চল এবং $g(x)$ একটি বাস্তব অপেক্ষক হয়, $g(X)$-এর গাণিতিক প্রত্যাশা বলতে বুঝব X-এর সম্ভাবনা নিবেশনের সাপেক্ষে $g(X)$-এর এক ধরনের গড়মান। বিশেষভাবে X-এর প্রত্যাশা হবে X-এর সম্ভাবনাত্মক গড়মান।

7.2 উদ্দেশ্য

এই একক পড়লে আপনারা জানতে পারবেন

- অবিচ্ছিন্ন যদৃচ্ছ চলের রূপান্তরের কথা
- বিচ্ছিন্ন যদৃচ্ছ চলের রূপান্তরের কথা
- গাণিতিক প্রত্যাশার সংজ্ঞা

7.3 অবিচ্ছিন্ন যদৃচ্ছ চলের রূপান্তর

মনে করুন X একটি ঘটনাদেশ S-এ সংজ্ঞায়িত একটি যদৃচ্ছ চল এবং $y = g(x)$ বাস্তব চল x-এর একটি প্রদত্ত অপেক্ষক। এখন S-এর প্রত্যেক ঘটনাবিন্দুর জন্যে X-এর একটি মান আছে এবং X-এর এই মানের জন্যে $Y = g(X)$-এর একটি মান আছে, অর্থাৎ $Y = g(Y)$ S-এ সংজ্ঞায়িত একটি যদৃচ্ছ চল। X- এর নিবেশন জানা থাকলে Y-এর নিবেশন নির্ণয় করাই আমাদের সমস্যা।

এই অনুচ্ছেদে আমরা ধরব X একটি অবিচ্ছিন্ন যদৃচ্ছ চল এবং $y = g(x)$ একটি সন্ততভাবে অন্তরকলনযোগ্য অপেক্ষক যা প্রকৃতভাবে একান্বয়ী, অর্থাৎ সর্বত্র $\frac{dy}{dx} > 0$ বা সর্বত্র $\frac{dy}{dx} < 0$, যার ফলে বিপরীত অপেক্ষক $x = g^{-1}(y)$ অনন্যরূপে বিদ্যমান।

যদি $\frac{dy}{dx} > 0$ হয়, $y = g(x)$ প্রকৃতভাবে একান্বয়ে বর্ধমান যার ফলে বিপরীত অপেক্ষক $x = g^{-1}(y)$ ও প্রকৃতভাবে একান্বয়ে বর্ধমান। তাই $X \le x$ ঘটনাটি $g(X) \le g(x)$ বা $Y \le y$ ঘটনার সমার্থক কেননা ঘটনাদুটি পরস্পরকে দ্যোতনা করে। অতএব $P(X \le x) = P(Y \le y)$ অর্থাৎ $F_x(x) = F_y(y)$। অন্তরক নিলে পাই

$$dF_x(x) = dF_y(y) = dF \text{ (ধরুন)}$$

অথবা

$$dF = f_y(y)\,dy = f_x(x)dx = f_x(x)\,\frac{dx}{dy}dy$$

যা দেখায়

$$f_y(y) = f_x(x)\,\frac{dx}{dy} \qquad (7.3.1)$$

যদি $\frac{dy}{dx} < 0$ হয়, $y = g(x)$ প্রকৃতভাবে একান্বয়ে হ্রাসমান এবং বিপরীত অপেক্ষক $x = g^{-1}(y)$-ও প্রকৃতভাবে একান্বয়ে হ্রাসমান। অতএব

$$(X \le x) = \{g(X) \ge g(x)\} = (Y \ge y)$$

এবং

$$P(X \le x) = P(Y \ge y) = 1 - P(Y < y)$$

অথবা

$$F_x(x) = 1 - F_y(y)$$

এবং তাই

$$dF_x(x) = dF_y(y)$$

বা

$$f_y(y)dy = -f_x(x)dx = f_x(x)\frac{dx}{dy}dy$$

যার ফলে

$$f_y(y) = f_x(x)\frac{dx}{dy} \qquad \text{.....}(7.3.2)$$

(7.3.1) এবং (7.3.2) সূত্রদুটি একত্রে লেখা যায়

$$f_y(y) = f_x(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| \qquad \text{.....}(7.3.3)$$

উভয় ক্ষেত্রেই বিপরীত অপেক্ষক $x = g^{-1}(y)$ বিদ্যমান যার ফলে (7.3.3)-র ডানপক্ষ y-এর অপেক্ষক হিসেবে প্রকাশ করা চলে।

উদাহরণ

1. যদি X স্বাভাবিক (m, σ) চালক হয়, $Y = aX + b$ চালকের নিবেশন নির্ণয় করুন যেখানে a, b ধ্রুবক।

ধরুন $y = ax + b$, তাহলে

$$\frac{dy}{dx} = a, \quad x = \frac{y-b}{a}$$

যখন x $-\infty$ থেকে ∞ পর্যন্ত বিচরণ করে, তখন y-ও একই অন্তরে বিচরণ করে। এখানে

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \left|\frac{dx}{dy} = \frac{1}{|a|}\right|$$

এবং (7.3.3) দ্বারা পাই

$$f_x(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}|a|\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}|a|\sigma} e^{-\frac{(y-\overline{am+b})^2}{2a^2\sigma^2}}$$

যা দেখায় যে Y-এর নিবেশন স্বাভাবিক $(am, + b\,|a|\sigma)$। বিশেষভাবে $\frac{x-m}{\sigma}$ একটি আদর্শ স্বাভাবিক চালক।

2. যদি X একটি $\beta_2(l, m)$ চলক হয়, তাহলে দেখান যে $Y = 1/X$ একটি $\beta_2(m, l)$ চলক।

প্রমাণ : বাস্তব চলের জন্যে লিখি $y = 1/x$। তাহলে

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} < 0$$

$$\begin{aligned} dF &= f_x(x)dx = f_x(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|dy \\ &= \frac{x^{l-1}x^2}{B(l,m)(1+x)^{l+m}}dy \\ &= \frac{y^{m-1}}{B(m,l)(1+y)^{m+l}}dy \ (0 < y < \infty) \end{aligned}$$

যা উপরোক্ত উক্তি প্রমাণ করে।

3. যদি X একটি আদর্শ স্বাভাবিক চলক হয়, তাহলে প্রমাণ করুন যে $Y = \frac{1}{2}X^2$ একটি $\gamma(\frac{1}{2})$ চলক।

প্রমাণ : ধরুন $y = \frac{1}{2}X^2$। তাহলে $\frac{dy}{dx} = x$ যার ফলে y সর্বত্র একান্বয়ী নয়। তাছাড়া যখন x $-\infty$ থেকে ∞ পর্যন্ত বিচরণ করে, y শুধু 0 থেকে ∞ পর্যন্ত দুবার বিপরীত দিকে বিচরণ করে। এই অসুবিধের জন্যে উপরোক্ত সূত্র সরাসরি প্রয়োগ করা যাচ্ছে না। কিন্তু আমরা প্রতিসাম্য ব্যবহার করে এই অসুবিধে দূর করতে পারি যারপর সূত্র (7.3.3) ব্যবহার করা যাবে।

ধরুন $x > 0$।

$$(y < Y \leq y + dy) = \{x^2 < X^2 (x + dx)^2\}$$

$$= \{-x - dx \leq X < -x\} + \{x < X \leq x + dx\}$$

যেহেতু আদর্শ স্বাভাবিক ঘনত্ব অপেক্ষক মূলবিন্দুর সাপেক্ষে প্রতিসম

$$P(-x - dx \leq X < -x) - P(x < X \leq x + dx)$$

যার ফলে

$$P(y < Y \leq y + dy) = 2P(x < X \leq x + dx)$$

অথবা

$$f_y(y)\, dy = 2f_x(x)dx = 2f_x(x)\,\frac{dx}{dy}dy$$

তাই

$$f_y(y) = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^{2/2}}.\frac{1}{x} = \frac{e^{-y}y^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \quad (0 < y < \infty)$$

যা দেখায় Y একটি $\gamma(\frac{1}{2})$ চলক।

7.4 বিচ্ছিন্ন যদৃচ্ছ চলের রূপান্তর

আগের মতো মনে করুন X ঘটনাদেশ S-এ সংজ্ঞায়িত একটি চলক এবং $y = g(x)$ বাস্তব চল x-এর একটি অপেক্ষক যার ফলে $Y = g(X)$ S-এ সংজ্ঞায়িত একটি চলক। X-এর নিবেশন জানা থাকলে Y-এর নিবেশন নির্মাণ করতে হবে।

এবার ধরব X একটি বিচ্ছিন্ন চলক যার বর্ণালি $x_i(= 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), f_i = P(X = x_i)$ $(i = 0, \pm 1, \ldots)$ জানা আছে। আমরা ধরে নেব $y = g(x)$ প্রকৃতভাবে একান্বয়ী যার ফলে বিপরীত অপেক্ষক $x = g^{-1}(y)$ অনন্যভাবে বিদ্যমান। ধরুন

$$y_i = g(x_i) \qquad \ldots\ldots(7.4.1)$$

যেহেতু $y = g(x)$ রূপান্তরের অনন্য বিপরীত আছে

$$(X = x_i) = \{g(X) = g(x_i)\} = (Y = y_i)$$

অতএব Y-এর বর্ণালি হবে $y_i (i = 0, \pm 1, ...)$ যা (7.4.1) থেকে পাওয়া যায় এবং $P(X = x_i) = P(Y = y_i)$ অর্থাৎ

$$f_{yi} = f_{xi} \qquad \text{.....(7.4.2)}$$

উদাহরণ : যদি X একটি দ্বিপদ (n, p) চলক হয়, $Y = aX + b$ চলকের নিবেশন বের করুন।

আমরা জানি

$$x_i = i, f_i = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \qquad (i = 0, 1, 2, ..., n)$$

মনে করুন, $y = ax + b$। (7.4.1) থেকে পাই

$$y_i = ai + b \qquad (i = 0, 1, 2, .., n)$$

এবং (7.4.2) থেকে পাই

$$f_{yi} = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \qquad (i = 0, 1, 2, .., n)$$

7.5 গাণিতিক প্রত্যাশা

মনে করুন X একটি প্রদত্ত যদৃচ্ছ চল এবং $g(x)$ বাস্তব চল x-এর একটি **সন্তত** অপেক্ষক। আমরা জানি $g(X)$ একটি যদৃচ্ছ চল যার নিবেশন X-এর নিবেশনের দ্বারা সম্পূর্ণভাবে নির্ধারিত হয়। X-এর এহেন অপেক্ষক $g(X)$-এর **গাণিতিক প্রত্যাশা** (mathematical expectation) বা **গড়মান** (mean value) এই চিহ্ন দিয়ে সূচিত হবে এবং এর সংজ্ঞা হবে

$$E\{g(X)\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} g(x_i) f_i \qquad \text{বিচ্ছিন্ন নিবেশনের জন্যে}$$

$$\text{.....(7.5.1)}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx \qquad \text{অবিচ্ছিন্ন নিবেশনের জন্যে}$$

যদি উপরোক্ত অসীম শ্রেণী বা সমাকল পরমভাবে অভিসারী হয়। যদি উপরোক্ত অসীম শ্রেণী বা সমাকল অভিসারী হয় কিন্তু পরমভাবে নয়, তাহলে আমরা বলব যে প্রত্যাশাটি অস্তিত্বহীন। স্পষ্টতই প্রত্যাশা একটি সংখ্যা যা X-এর নিবেশন ও $g(x)$ অপেক্ষকের উপর নির্ভরশীল।

কয়েকটি সহজ ধর্ম

নীচে দেওয়া প্রত্যাশার ধর্মগুলি সহজেই প্রমাণ করা যায় :

1. $E(a) = a$ (a ধ্রুবক)
2. $E\{ag(X)\} = aE\{g(X)\}$ (a ধ্রুবক)
3. $E\{g_1(X) + g_2(X) + . + g_n(X)\} = E\{g_1(X)\} + E\{g_2(X)\} + ... + E\{g_n(X)\}$
4. $|E\{g(X)\}| \le E\{|g(X)|\}$
5. যদি সর্বত্র $g(x) \ge 0$ হয়, তাহলে $E\{g(x)\} \ge 0$
6. যদি সর্বত্র $g(x) \ge 0$ হয় এবং $E\{g(X)\} = 0$, তাহলে $g(X) = 0$, অর্থাৎ $g(X)$ একটি $x = 0$-তে একবিন্দু যদৃচ্ছ চল।

মন্তব্য : যদি আমরা লিখি $Y = g(X)$, তাহলে আমরা এই চলকের দুটি সংজ্ঞা পাই—প্রথমটি X-এর নিবেশন সাপেক্ষে যা হল $E\{g(X)\}$ এবং দ্বিতীয়টি Y-এর নিবেশন সাপেক্ষে যা হল $E(Y)$, যেখানে Y-এর নিবেশন X-এর প্রদত্ত নিবেশন দ্বারা নির্ণীত হয়েছে। আমাদের প্রত্যাশার সংজ্ঞা সদর্থক হতে হলে চাই $E(Y) = E\{g(X)\}$। যে-কোনো সন্তত অপেক্ষক $g(x)$-এর জন্যে এটা সত্যি। প্রমাণ সহজতর করার জন্যে আমরা ধরে নেব যে $g(x)$ সন্ততভাবে অন্তরকলনযোগ্য এবং প্রকৃতভাবে একান্বয়ী, ধরুন, বর্ধমান এবং X একটি অবিচ্ছিন্ন চলক।

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_y(y) dy$$

$y = g(x)$ প্রতিস্থাপন করে এবং (7.3.1) ব্যবহার করে পাই

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_x(x) \frac{dx}{dy} \frac{dy}{dx} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_x(x) dx = E\{g(X)\}$$

উদাহরণ

1. একটি ছক্কা ছুড়লে যে সংখ্যা পাওয়া যায় তাকে X দ্বারা সূচিত করলে $E\{g(X)\}$-এর মান নির্ণয় করুন, যেখানে $g(x) = 2x^2 + 1$।

$$E(x^2) = 1^2 . \frac{1}{6} + 2^2 . \frac{1}{6} + 3^2 . \frac{1}{6} + 4^2 . \frac{1}{6} + 5^2 . \frac{1}{6} + 6^2 . \frac{1}{6} + \frac{91}{6}$$

$$E\{g(X)\} = E(2X^2+1)$$
$$= 2E(x^2)+E(1)$$
$$= 2.\frac{91}{6}+1$$
$$= \frac{94}{3}$$

2. একটি পাত্রে N_1 টি সাদা ও N_2 কালো বল আছে $(N = N_1 + N_2)$ যার থেকে পরপর একটি করে বল ফেরত না দিয়ে টানা হল। প্রথম সাদা বলটি পাওয়ার আগে কালো বলের সংখ্যার গাণিতিক প্রত্যাশা নির্ণয় করুন।

মনে করুন X প্রথম সাদা বলটি পাওয়ার আগে কালো বলের সংখ্যা। চলক $X\, 0, 1, 2, ..., N_2$ মান গ্রহণ করতে পারে, অর্থাৎ $x_i = i = (i = 0, 1, 2, ..., N_2)$ এবং f_i-এর মান 6.3 অনুচ্ছেদের ৪নং উদাহরণে উল্লিখিত আছে, যা ব্যবহার করে পাই

$$E(X) = \sum_{1}^{N_2} \frac{iN_1N_2(N_2-1)\ldots(N_2-i+1)}{N(N-1)\ldots(N-i)}$$

যেহেতু $\sum f_i = 1$ আমরা পাই

$$\sum_{i=1}^{N_2} \frac{N_1(N_2-1)\ldots(N_2-i+1)}{(N-1)\ldots(N-i)} = \frac{N_2}{N_1}$$

যা N_1, N_2-র জন্যে একটি অভেদ। N_1-এর বদলে N_1+1 বসিয়ে পাই

$$\sum_{i=1}^{N_2} \frac{N_2(N_2-1)\ldots(N_2-i+1)}{(N-1)\ldots(N-i+1)} = \frac{N_2}{N_1+1}$$

এই দুটি অভেদের অন্তর নিলে মেলে

$$E(X) = \frac{N_2}{N_1+1}$$

3. একটি পাত্রে $1, 2, ..., n$ নম্বরযুক্ত nটি টিকিট আছে যার থেকে rটি টিকিট পরপর টানা ও প্রতিবার ফেরত দেওয়া হল। টানা টিকিটগুলির বৃহত্তম সংখ্যার প্রত্যাশা নির্ণয় করুন।

X উল্লিখিত বৃহত্তম সংখ্যা হলে, X-এর জন্যে $x_i = i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ এবং (5.6.7) দ্বারা

$$f_i = \{i^r - (i-1)^r\} / n^r \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

অতএব

$$\begin{aligned} E(X) &= n^{-r} \sum_{i=1}^{n} i\{i^r - (i-1)^r\} \\ &= n^{-r} \sum_{i=1}^{n} \{i^{r+1} - (i-1)^{r+1} - (i-1)^r\} \\ &= n - n^{-r} \sum_{i=1}^{n} (i-1)^r \end{aligned}$$

যেহেতু

$$\sum_{i=1}^{n} \{i^{r+1} - (i-1)^{r+1}\} / n^{r+1} = 1$$

যা $\sum_{i=1}^{n} f_i = 1$ অভেদে r-এর বদলে $r+1$ বসিয়ে পাই।

যদি n খুব বড় সংখ্যা হয়

$$n^{-r} \sum_{i=1}^{n} (i-1)^r \simeq n \int_0^1 x^r dr = \frac{n}{r+1}$$

যার ফলে

$$E(X) \simeq \frac{nr}{r+1}$$

4. নিচের সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষকের ক্ষেত্রে $E(X)$-এর মান নির্ণয় করুন।

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4x}{5} && 0 < x \le 1 \\ &= \frac{2}{5}(3-x) && 1 < x \le 2 \\ &= 0 && \text{অন্যত্র} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^2 xf(x)dx \\ &= \int_0^1 x.\frac{4x}{5}dx + \int_1^2 x.(3-x)dx \\ &= \frac{4}{5}.\frac{1}{3} + \frac{2}{5}.\frac{13}{6} = \frac{17}{15} \end{aligned}$$

5. a ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তের উপর একটি বিন্দু যদৃচ্ছভাবে নেওয়া হল। বৃত্তের উপর অবস্থিত একটি স্থির বিন্দু থেকে এই যদৃচ্ছ বিন্দুর দূরত্বের প্রত্যাশা কত ?

মনে করুন O বিন্দু বৃত্তের কেন্দ্র, A বৃত্তের উপর স্থির বিন্দুটি এবং P বৃত্তের উপর নেওয়া যদৃচ্ছ বিন্দু। কোণ POA একটি যদৃচ্ছ চল X যা $(0, 2\pi)$ অন্তরে সমভাবে নিবেশিত, অর্থাৎ এর সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \qquad (0 < x < 2\pi)$$

এখন $PA = 2a\sin\frac{1}{2}X$ এবং

$$E(2\sin\frac{1}{2}X) = \frac{a}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\frac{1}{2}xdx = \frac{4a}{\pi}$$

7.6 সারাংশ

এই এককে যদৃচ্ছ চলের রূপান্তরের কথা আলোচিত হয়েছে—প্রথমে অবিচ্ছিন্ন চলের জন্যে এবং পরে বিচ্ছিন্ন চলের জন্যে।

শেষে গাণিতিক প্রত্যাশার সংজ্ঞা ও কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হয়েছে।

7.7 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

1. যদি $X(-1, 1)$ অন্তরে সমভাবে নিবেশিত হয়, তাহলে $|X|$-এর নিবেশন নির্ণয় করুন।

2. একটি অর্ধবৃত্তের ব্যাসার্ধ 1 এবং কেন্দ্র মূলবিন্দুতে অবস্থিত। ঐ অর্ধবৃত্তের উপর একটি বিন্দু যদৃচ্ছভাবে নেওয়া হল। প্রমাণ করুন যে ব্যাসের উপর এর অভিক্ষেপবিন্দুর কেন্দ্র থেকে দূরত্ব এই চলকটির ঘনত্ব অপেক্ষক হবে

$$\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1 < x < 1)$$

3. একটি স্থিরবিন্দু (λ, μ) $(\lambda, 0)$-এর ভিতর দিয়ে গমনকারী একটি সরলরেখা y-অক্ষের সঙ্গো কোণ X উৎপন্ন করে যেখানে $X(0, \pi)$ অন্তরে একটি সমচলক। প্রমাণ করুন যে y-অক্ষের ছেদিতাংশ Y-এর নিবেশ ন কোশি (λ, μ)।

4. একটি চলক X-এর ঘনত্ব অপেক্ষক $2xe^{-x^2}$ $(0 < x < \infty$ হলে) X^2 চলকের নিবেশন বের করুন।

5. যদি X একটি $\gamma(l)$অপেক্ষক হয়, $\sqrt{X}$ চলকের ঘনত্ব অপেক্ষক নির্ণয় করুন।

6. যদি $X\,\beta_1(l, m)$ চলক হয়, প্রমাণ করুন যে $X/(1-X)$ একটি $\beta_2(l, m)$ চলক।

7. একটি পোয়াসঁ-μ চলকের বর্গের নিবেশন বের করুন।

8. কোনো পাত্রে 3টি লাল বল ও 2টি সাদা বল আছে। এক ব্যক্তি পুনঃস্থাপন ছাড়াই পাত্র থেকে পরপর দুটি বল তোলে। যদি দুটি বলের রঙ একই হয় তবে সে 20 টাকা পায় এবং বলদুটি আলাদা রঙের হলে তাকে 20 টাকা ফেরত দিতে হয়। এক্ষেত্রে তার প্রাপ্য টাকার গাণিতিক প্রত্যাশা কত ?

9. দুজন খেলোয়াড় A ও B পরপর একটি ছক্কা ফেলতে থাকে। প্রথমে যার ছয় পড়বে, সেই জিতবে। পুরস্কার হল 99 টাকা। যদি A প্রথমে ছক্কা ফেলে তবে তার প্রাপ্য টাকার গাণিতিক প্রত্যাশা কত ?

10. একটি পাত্রে N_1 টি সাদা ও N_2 টি কালো বল আছে, যার থেকে nটি বল ফেরত না দিয়ে টানা হল $(n \le N_1 + N_2)$। টানা বলগুলির মধ্যে সাদা বলের সংখ্যার প্রত্যাশা নির্ণয় করুন।

11. $2a$ দৈর্ঘ্যের একটি সরলরেখাদণ্ড AB-এর উপর একটি বিন্দু P যদৃচ্ছভাবে নেওয়া হল। $AP.AB$ এই আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের প্রত্যাশা কত ?

12. $X(0, \frac{1}{2}\pi)$ অন্তরে সমভাবে নিবেশিত। $\sin X$ এই অপেক্ষকটির প্রত্যাশা নির্ণয় করুন। $Y = \sin X$ চলকের নিবেশন নির্ণয় করুন এবং এই নিবেশনের সাপেক্ষে Y-এর প্রত্যাশা বের করুন। দেখান যে এই দুটি মানই এক।

13. বানাখের দেশলাই-বাক্স সমস্যায় (6.11 অনুচ্ছেদের 11নং অঙ্ক) একটি বাক্সে পড়ে থাকা কাঠির সংখ্যা যখম প্রথমবারের মতো অন্য বাক্সটি খালি দেখা যায়, তার প্রত্যাশা নির্ণয় করুন।

14. বারনুলি প্রচেষ্টার একটি অসীম ক্রমে প্রথম সাফল্যের আগে অসাফল্যের সংখ্যার প্রত্যাশা কী ?

15. যদি $X\gamma(l)$ চলক হয়, $E(\sqrt{X})$ নির্ণয় করুন।

16. যদি যদৃচ্ছ চল X-এর সম্ভাবনা ঘনত্ব হয়

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-x} && x>0 \\ &= 0 && \text{অন্যত্র} \end{aligned}$$

তবে $g(X) = e^{\frac{3X}{4}}$ অপেক্ষকের প্রত্যাশা নির্ণয় করুন।

17. যদৃচ্ছ চল X-এর সম্ভাবনা ঘনত্ব হল

$$\begin{aligned} f(x) &= 2(1-x) && 0<x<1 \\ &= 0 && \text{অন্যত্র} \end{aligned}$$

(a) দেখান $E(X^r) = \dfrac{2}{(r+1)(r+2)}$

(b) উপরের ফল ব্যবহার করে $E[(2X+1)^2]$-এর মান নির্ণয় করুন।

7.8 উত্তরমালা

1. লিখুন $Y = |X|$; Y-এর বর্ণালি $[0, 1]$ এবং নিবেশন অপেক্ষক

$$F(y) = P(X \le y) = P(|X| \le y)$$

$y<0$ হলে $F(y) = 0, y>1$ হলে $F(y) = 1$ এবং $0 \le y \le 1$ হলে

$$F(y) = P(-y < X < y) = 2y/2 = y$$

ঘনত্ব অপেক্ষক $F(y) = F'(y) = 1$ যদি $0 < y < 1$ এবং শূন্য অন্যত্র। তাই $Y(0, 1)$-এ সমচলক।

2. $X = \cos Y$, $Y(0, \pi)$-তে সমচলক। X-এর বর্ণালি $(-1, 1)$। লিখুন $x = \cos y$; $\dfrac{dx}{dy} = -\sin y = -\sqrt{1-x^2} < 0$ (7.3.3) দ্বারা।

$$f_x(x) = f_y(y)\left|\frac{dy}{dx}\right| = \frac{1}{\pi}\left|\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right| \; (-1<x<1)$$

3. $Y = \mu + \lambda \cot X$; $X(0, \pi)$-তে সমচলক। Y-এর বর্ণালি $(-\infty, \infty)$, $y = \mu + \lambda \cot x$; $\dfrac{dy}{dx} = -\lambda$
$\left\{1 + \left(\dfrac{y-\mu}{\lambda}\right)^2\right\} < 0$ । (7.3.3) দ্বারা

$$f_y(y) = \frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{\lambda^2 + (y-\mu)^2} \; (-\infty < y < \infty)$$

4. $Y = X^2$ হলে Y-এর বর্ণালি $(0, \infty)$ এবং লিখতে এবং $y = x^2$ । (7.3.3) থেকে

$$f_y(y) = 2xe^{-x^2} \big/ 2x = e^{-y} \quad (0 < y < \infty)$$

5. $f_y(y) = e^{-(\log y)^2/2} \big/ y\sqrt{2\pi} \quad (0 < y < \infty)$

6. লিখি $Y = X/(1-X)$; $y = x/(1-x)$; X-এর বর্ণালি $(0, 1)$ তাই Y-এর বর্ণালি $(0, \infty)$ এবং (7.3.3) থেকে সরাসরি প্রমাণ পাওয়া যাবে।

7. $x_i = i^2$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$; $f_i = e^{-\mu}\mu^i/_i!$ (7.4.1) দ্বারা।

8. 4 টাকা ক্ষতি

9. 54 টাকা

10. $P(X = i) = \binom{N_i}{i}\binom{N_2}{n-i} \Big/ \binom{N_1 + N_2}{n}$; i-এর সম্ভাব্য মান নির্ধারিত হবে $0 \le i \le N_1; 0 \le n - i \le N_2$ এই দুটি অসমীকরণ দ্বারা, অর্থাৎ $\max\{0, n - N_2\} \le i \le \min\{N_1, n\}$ । যেহেতু $\sum f_i = 1$

$$\sum \binom{N_1}{i}\binom{N_2}{n-i} \Big/ \binom{N_1 + N_2}{n} = 1$$

যা যে-কোনো N_1, N_2-র জন্যে একটি অভেদ। এখন

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum i \binom{N_1}{i}\binom{N_2}{n-i} \Big/ \binom{N_1 + N_2}{n} \\ &= \frac{nN_1}{N_1 + N_2} \sum \binom{N_1 - 1}{i-1}\binom{N_2}{n-i} \Big/ \binom{N_1 + N_2 - 1}{n-1} \\ &= \frac{nN_1}{N_1 + N_2} \end{aligned}$$

11. A, B, P-র স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $0, 2a, X; X\,(0, 2a)$-তে সমভাবে নিবেশিত। $AP.\ PB = X(2a - X)$, তার প্রত্যাশা

$$\frac{1}{2a}\int_0^{2a} x(2a-x)dx = 2a^3/3$$

12. $2/\pi, 2/\pi\sqrt{1-y^2}\ \ (0<y<1)$

13. অনুচ্ছেদ 6.11-এর 11 নং অঙ্ক দেখুন। অভীষ্ট প্রত্যাশা

$$= \sum_0^n i\binom{2n-i}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-i} \sum_{i=0}^{n}\{n(n-i)\}\binom{2n-i}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-i}$$

$$= n-(n+1)\sum_{i=0}^{n-1}\binom{2n-i}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-i}$$

$\sum_{i=0}^{n} f_i = 1$ থেকে এই অভেদ পাই

$$\sum_0^n \binom{2n-i}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-i} = 1$$

যাতে n-এর বদলে $n+1$ লিখলে পাই

$$1 = \sum_0^{n+1}\binom{2n-i+2}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-i+2}$$

$$= \binom{2n+2}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2} + \binom{2n+1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} + \sum_{i=2}^{n+1}\binom{2n-i+2}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-i+2}$$

$$= \binom{2n+1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} + \sum_{i=2}^{n+1}\binom{2n-i}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-i}$$

যার থেকে উত্তর পাই $(2n+1)\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} - 1$।

14. অনুচ্ছেদ 6.11-এর 12নং অঙ্ক দেখুন। অভীষ্ট প্রত্যাশা

$$\sum_{i=0}^{\infty} iq^i p = q / p$$

এর প্রমাণ এইভাবে করা যায় : $\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$ অভেদকে q-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করলে পাই

$$\sum_{i=0}^{\infty} iq^{i-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

15. উত্তর হল

$$\frac{1}{\Gamma(l)} \int_0^{\infty} \sqrt{x}\, e^{-x} x^{l-1} dx = \frac{1}{\Gamma(l)} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{l-\frac{1}{2}} dx = \Gamma(l+\tfrac{1}{2}) / \Gamma(l)$$

16. 4

17. (a) $E(X^r) = \int_0^1 x^r .2(1-x)dx = \dfrac{2}{(r+1)(r+2)}$

(b) $r = 1$ ও 2 বসিয়ে পাই, $E(X) = \frac{1}{3}$ $E(X^2) = \frac{1}{6}$ । তাই

$$\begin{aligned} E[(2X+1)^2] &= E[4X^2 + 4X + 1] = 4E(X^2) + 4E(X) + E(1) \\ &= 4.\frac{1}{6} + 4.\frac{1}{3} + 1 = 3 \end{aligned}$$

একক 8 ❒ নিবেশনের বৈশিষ্ট্যসমূহ (Characteristic of Distribution)

গঠন

8.1 প্রস্তাবনা

একটি সম্ভাবনা নিবেশনের বিভিন্ন বৈশিষ্ট্যের কথা আমাদের জানা প্রয়োজন। প্রধান বৈশিষ্ট্যগুলি হল—অবস্থিতি অর্থাৎ নিবেশনের সম্ভাবনা ভরগুলি মোটামুটিভাবে কোথায় অবস্থিত তার ধারণা, বিস্তৃতি

অর্থাৎ ভরগুলি কতদূর পর্যন্ত বিস্তৃত তার ধারণা, অসমপক্ষতা অর্থাৎ নিবেশনটি কতখানি অপ্রতিসম এবং তীক্ষ্ণতা অর্থাৎ ঘনত্ব অপেক্ষক বা সম্ভাবনা চিত্রটি কতখানি তীক্ষ্ণ। আসলে আমরা উপরোক্ত বৈশিষ্ট্যগুলির উপযুক্ত মাপকাঙ্ক নির্ণয় করতে চাই। প্রত্যেক বৈশিষ্ট্যের একাধিক মাপকাঙ্ক থাকা সম্ভব এবং আছে। এসবের বিবরণ এই এককে পাওয়া যাবে। বেশিরভাগ মাপকাঙ্ক প্রত্যাশা হিসেবে সংজ্ঞায়িত, কয়েকটি নয়।

8.2 উদ্দেশ্য

এই একক পড়লে আপনারা জানতে পারবেন নিবেশনের

- বিভিন্ন ধরনের বৈশিষ্ট্যের কথা
- গড়মান, ভ্রামকসমূহ, ভেদমান, তৃতীয় ও চতুর্থ কেন্দ্রীয় ভ্রামকের কথা
- ভ্রামক-উৎপাদক ও বৈশিষ্ট্য অপেক্ষকের কথা যার থেকে ভ্রামকগুলি পাওয়া যায়
- মধ্যমা, ভূয়িষ্ঠক, চতুর্থাংশিক মাপকাঙ্কের কথা যারা প্রত্যাশা হিসেবে সংজ্ঞায়িত নয়
- বিভিন্ন মাপকাঙ্কের উপযোগিতা

8.3 প্রয়োজনীয় বিভিন্ন বৈশিষ্ট্য

প্রস্তাবনায় যেমন বলা হয়ে আমাদের প্রধান প্রয়োজনীয় বৈশিষ্ট্যগুলি হল **অবস্থিতি** (location), **বিস্তৃতি** (dispersion), **অসমপক্ষতা** (skewness) এবং **তীক্ষ্ণতা** (kurtosis)। প্রত্যেক বৈশিষ্ট্যের জন্যে একাধিক মাপকাঙ্ক ব্যবহৃত হয়। কোন্ ক্ষেত্রে কোন্ মাপকাঙ্ক বেশি উপযোগী তা শেষ পর্যায়ে আলোচিত হবে।

8.4 গড়মান

X চলকের বা তার নিবেশনের গড়মান বা গড় (mean value বা mean) $m(X)$ বা m_x বা শুধু m দ্বারা চিহ্নিত করা হয় এবং তার সংজ্ঞা হল

$$m = E(X) \qquad \text{.....} (8.4.1)$$

এই গড় সম্ভাবনা ভর নিবেশনের ভরকেন্দ্র এবং তাই m অবস্থিতির একটি মাপকাঙ্ক।

উদাহরণ

1. দ্বিপদ নিবেশন

$$m = \sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i} = \sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}$$

$$= np\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}p^{i-1}(1-p)^{n-i} = np\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}p^i(1-p)^{n-1-i}$$

বা $m = np$।

2. পোয়াসঁ নিবেশন

$$m = \sum_{i=0}^{\infty} i\frac{e^{-\mu}\mu^i}{i!} = e^{-\mu}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\mu^i}{(i-l)!}$$

$$= e^{-\mu}\mu\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\mu^{i-1}}{(i-1)!} = \mu e^{-\mu}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\mu^i}{i!} = \mu e^{-\mu}e^{\mu} = \mu$$

3. স্বাভাবিক নিবেশন

$$m(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx + m\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx + m = 0 + m = m$$

লক্ষণীয় যে $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx$ এবং তাই $m(X)$-এর সংজ্ঞাকারী অসীম সমাকলটি পরমভাবে অভিসারী এবং সেহেতু $m(X)$-এর অস্তিত্ব আছে এবং তার মান m।

4. কোশি নিবেশন

এই একটি নিবেশনের দৃষ্টান্ত যার গড়মান অস্তিত্বহীন।

$$m = \frac{\lambda}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{\lambda^2+(x-\mu^2)} = \frac{\lambda}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-\mu)dx}{\lambda^2+(x-\mu)^2}+\mu$$

$$= \frac{\lambda}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{\lambda^2+x^2}+\mu$$

যেহেতু শেযোক্ত সমাকলটি পরমভাবে অভিসারী নয়, m-এর অস্তিত্ব নেই। (সমাকলটি অভিসারীও নয়। কিন্তু এর কোশি মুখ্যমান আছে যা হল শূন্য।)

5. গামা নিবেশন

$$m = \frac{1}{\Gamma(l)}\int_{0}^{\infty} xe^{-x}x^{l-1}dx = \frac{1}{\Gamma(l)}\int_{0}^{\infty} e^{-x}x^{l}dx = \frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(l)} = l$$

8.5 ভ্রামকসমূহ

মনে করুন k একটি অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা। একটি স্থিরবিন্দু a-র সাপেক্ষে X-এর (বা তার নিবেশনের) **k বর্গের** বা **k-তম ভ্রামক**-এর (moment of order k বা kth moment) সংজ্ঞা হবে $E\{(X-a)^k\}$। ভ্রামককে **পরিঘাতও** বলা হয়।

$E\{|X-a|^k\}$ কে বলা হবে X-এর a বিন্দুর সাপেক্ষে k-তম পরম ভ্রামক। লক্ষণীয় যে k-তম ভ্রামক অস্তিত্বমান হয় একমাত্র যদি k-তম পরম ভ্রামকে অস্তিত্বমান হয়। আবার সহজেই প্রমাণ করা যায় যে যদি k-তম ভ্রামকের অস্তিত্ব থাকে তাহলে $(k-1)$-তম ভ্রামকও অস্তিত্বমান হয়। এটা শ্রেণি ও অসীম সমাকলের অভিসারিতা-তত্ত্ব থেকে পাওয়া যায় একথা মনে রেখে যে, $|X-a|^k \leq |X-a|^{k+1}+1$ সব x-এর জন্যে। অতএব যদি k-তম ভ্রামকের অস্তিত্ব থাকে তো k-এর চেয়ে কম সব বর্গের ভ্রামকও অস্তিত্বমান।

$a=0$ ধরলে, আমরা পাই মূলবিন্দুর সাপেক্ষে k-তম ভ্রামক বা শুধু **k-তম ভ্রামক** যার চিহ্ন হবে $\alpha_k(X)$ বা α_{xk} বা α_k। তাই

$$\alpha_k = E(X^k) \qquad .....(8.51)$$

স্পষ্টতই $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = m,$ অর্থাৎ প্রথম ভ্রামকই হল গড়।

$a = m$ হলে আমরা পাই কেন্দ্রীয় ভ্রামক যার পৃথক গুরুত্ব আছে। ***k*-তম কেন্দ্রীয় ভ্রামক** $\mu_k(X)$ বা μ_{xk} বা μ_k দ্বারা সূচিত হবে এবং তার সংজ্ঞা হবে

$$\mu_k = E\{(X-m)^k\} \qquad \text{.....(8.5.2)}$$

লক্ষ্য করুন $\mu_0 = 1, \mu_1 = 0$ সব নিবেশনের জন্যে।

যেহেতু

$$(X-m)^k = \sum_{i=0}^{k}(-1)\binom{k}{i}X^{k-1}m^i$$

দুপক্ষের প্রত্যাশা নিয়ে পাই

$$\mu_k = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\alpha_{k-i}m^i \qquad \text{.....(8.5.3)}$$

এই সূত্র μ_k-কে $\alpha_k, \alpha_{k\text{-}1}, ..., \alpha_0$-র রূপে প্রকাশ করে। বিশেষভাবে

$$\mu_2 = \alpha_k - m^2$$

$$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_2 m + 2m^3 \qquad \text{.....(8.5.4)}$$

$$\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_3 m + 6\alpha_2 m^2 + 3m^4$$

... ...

যদি $g(x)$ একটি সন্তত বাস্তব অপেক্ষক হয়, $g(X)$ চালকের ভ্রামক এইভাবে নিরূপিত হবে ঃ

লিখুন $Y = g(X)$, তাই $m_y = E(Y) = E\{g(X)\}$ এবং

$$\alpha_k\{g(X)\} = E[\{g(X)^k\}] \qquad \text{.....(8.5.5)}$$

$$\mu_k(Y) = E\{(Y-m_y)^k\}$$

অথবা

$$\mu_k\{g(X)\} = E[\{g(X)-m_y\}^k] \qquad \text{.....(8.5.6)}$$

যেখানে

$$m_y = E\{g(X)\} \qquad \text{.....(8.5.7)}$$

যদি $Y = aX + b$ (a, b ধ্রুবক), তাহলে $m_y = am_x + b$। তাই

$$\mu_k(aX+b) = E\{(aX+b-am_x-b)^k\}$$

বা

$$\mu_k(aX+b) = a^k\mu_k(X) \qquad \text{.....(8.5.8)}$$

উদাহরণ

1. স্বাভাবিক সম্ভাবনা

যেহেতু এখানে গড় m,

$$\mu_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^k e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^{k-1}(x-m)e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}[-\sigma^2(x-m)^{k-1}e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}\Big|_{-\infty}^{\infty}$$

$$+ (k-1)\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^{k-2}e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}dx]$$

$$= (k-1)\sigma^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^{k-2}e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}dx$$

অথবা

$$\mu_k = (k-1) = \sigma^2\mu_{k-2}$$

যেহেতু $\mu_0 = 1, \mu_1 = 0,$

$$\mu_{2k+1} = 0, \mu_{2k} = 1, 3, 5, \ldots (2k-1)\sigma^{2k}$$

2. গামা নিবেশন

$$\alpha_k = \frac{1}{\Gamma(l)}\int_0^{\infty}x^k e^{-x}x^{l-1}dx = \frac{1}{\Gamma(l)}\int_0^{\infty}e^{-x}x^{l+k-1}dx$$

$$= \frac{\Gamma(l+k)}{\Gamma(l)}$$

অথবা

$$\alpha_k = l(l+1)\ldots(l+k-1)$$

8.6 ভেদমান

দ্বিতীয় কেন্দ্রিক ভ্রামক μ_2 খুবই গুরুত্বপূর্ণ এবং একে X-এর **ভেদমান** (variance) বলা হবে এবং লেখা হবে var(X), অর্থাৎ

$$\text{var}(X) = E\{(X-m)^2\} \qquad \ldots..(8.6.1)$$

সংজ্ঞা থেকে এটা পরিষ্কার যে ভেদমান গড়ের সাপেক্ষে সম্ভাবনা ভরের বিস্তৃতির মাপক, অথবা বলতে পারা যায় যে ভর গড় ঘনীভূত হওয়ার বিপরীত মাপক।

এখন ভেদমানের একক চলকের এককের বর্গ। তাই চলকের এককের একটি বিস্তৃতির মাপক পেতে হলে আমরা ভেদমানের বর্গমূল নিতে পারি যাকে বলা হবে **আদর্শ-বিচ্যুতি** বা **সমক-বিচ্যুতি** (standard deviation) এবং যার চিহ্ন হবে $\sigma(X)$ বা σ_x বা σ, অর্থাৎ

$$\sigma = \sqrt{\text{var}(X)} \qquad \text{.....}(8.6.2)$$

1. যেহেতু $(x-m)^2 \geq 0$ সব x-এর জন্যে, $\text{var}\,(X) = 0$ দ্যোতনা করে $X = m$, অর্থাৎ X-এর m-এ একবিন্দু নিবেশন আছে।

2. যে-কোনো বিন্দু সাপেক্ষে দ্বিতীয় ভ্রামক ন্যূনতম হয় যখন বিন্দুটি গড় হয়।

প্রমাণ :

$$(X-a)^2 = (X-m+m-a)^2 = (X-m)^2 + 2(m-a)\,(X-m) + (m-a^2)$$

প্রত্যাশা নিলে

$$E\{(X-a)^2\} = \mu_2 + 2(m-a)\,E(X-m) + (m-a)^2$$

$$= \mu_2 + (m-a)^2 \geq \mu_2$$

এবং সমান চিহ্ন সিদ্ধ হয় যদি ও একমাত্র যদি $a = m$।

3. নিম্নলিখিত সূত্রগুলি কাজে আসবে

$$\sigma^2 = \alpha^2 - m^2 \qquad \text{.....}(8.6.3)$$

$$\sigma^2 = E\{X(X-1)\} - m(m-1) \qquad \text{.....}(8.6.4)$$

(8.6.3), (8.5.4)-এর প্রথম সূত্রটি। (8.6.4)-এর জন্যে দেখি

$$(X-m)^2 - X(X-1) = -(2m-1)X + m^2$$

প্রত্যাশা নিলে পাই

$$E\{(X-m)^2\} - E\{(X-1)\} = -(2m-1)m + m^2 = -(-m-1)$$

যার ফলে (8.6.4) প্রমাণিত হল।

4. (8.5.8)-এ $k = 2$ বসিয়ে পাই

$$\text{var}\,(aX + b) = a^2\,\text{var}\,(X) \qquad \text{.....}(8.6.5)$$

$a = 0$ বসিয়ে পাই, একটি ধ্রুবকের ভেদমান শূন্য। আবার

$$\sigma(aX + b) = |a|\sigma\,(X) \qquad \text{.....}(8.6.6)$$

আদর্শীকৃত চলক : যে-কোনো চলক X-এর গড় m ও সমক-বিচ্যুতি σ হলে

$$X^* = \frac{X - m}{\sigma}$$

X-এর এই রৈখিক অপেক্ষকের গড় 0 এবং সমক-বিচ্যুতি 1। X^*-কে X-এর প্রতিসঙ্গী আদর্শীকৃত বা প্রমাণীকৃত চলক বলা হবে।

সহজেই দেখা যায় যে $aX + b$ চলকের প্রতিসঙ্গী আদর্শীকৃত চলক হল $\dfrac{a}{|a|}X^*$ যা X^* যখন a ধনাত্মক।

লক্ষণীয় যে X^* শূন্যমাত্রিক এবং তাই এর সব ভ্রামক শূন্যমাত্রিক এবং গড় 0 হওয়ার দরুন কেন্দ্রিয় ভ্রামক ও ভ্রামক একই।

উদাহরণ

1. দ্বিপদ নিবেশন : এক্ষেত্রে সূত্র (8.6.4) বেশি সুবিধাজনক হবে।

$$E\{X(X-1)\} = \sum_{i=0}^{n} i(i-1)\binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

$$=$$

$$= n(n-1)p^2$$

যেহেতু $m = np$, (8.6.4) দ্বারা

$$\sigma = n(n-1)p^2 - np(np-1) = np(1-p)$$

2. পোয়াসঁ নিবেশন ঃ $m = \mu$ এবং

$$E\{X(X-1)\} = \sum_{i=0}^{\infty} i(i-1)e^{-\mu}\frac{\mu^i}{i!}$$

$$= e^{-\mu}\mu^2 \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\mu^{i-2}}{(i-2)!} = \mu^2$$

তাই (8.6.4) দ্বারা

$$\sigma^2 = \mu^2 - \mu(\mu - 1) = \mu, \qquad \mu = \sqrt{\mu}$$

3. স্বাভাবিক নিবেশন ঃ আমরা জানি গড় $= m$ এবং 8.5 অনুচ্ছেদের উদাহরণ। 1 থেকে $k =$ 2 বসিয়ে পাই $\mu_2 = \sigma^2$ অর্থাৎ σ নিবেশনের সমক-বিচ্যুতি নির্দেশ করে।

4. গামা নিবেশন : 8.5 অনুচ্ছেদের 2 নং উদাহরণে $\alpha_2 = l(l+1)$ (8.6.3) দ্বারা $\sigma^2 = l$ বা $\sigma = \sqrt{l}$।

5. কোটি নিবেশন : যেহেতু এখানে গড়ের অস্তিত্ব নেই, ভেদমান বা দ্বিতীয় বর্গের ভ্রামক অস্তিত্বহীন। বস্তুত $E\{(X-\mu)^2\}$-এর মান অসীম।

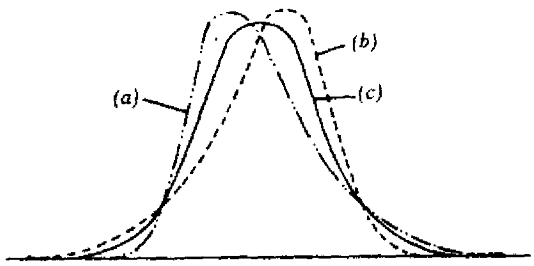
8.7 তৃতীয় কেন্দ্রীয় ভ্রামক

যদি একটি নিবেশন প্রতিসম হয়, তাহলে যে বিন্দুর সাপেক্ষে প্রতিসম তাই হবে গড় এবং সবকটি বিজোড় বর্গের কেন্দ্রিয় ভ্রামক শূন্য হবে। আবার সব নিবেশনের ক্ষেত্রেই $\mu_1 = 0$। যদি $\mu_3 \neq 0$ হয়, তখন μ_3-কে **অপ্রতিসাম্য বা অসমপক্ষতা** (asymmetry বা skewness) এই বৈশিষ্ট্যের মাপক হিসেবে ধরা যেতে পারে। এখন এই ধরনের বৈশিষ্ট্যের মাপক শূন্যমাত্রিক হওয়া বাঞ্ছনীয়। তাই X-এর বদলে X^*-এর তৃতীয় ভ্রামক, $\mu_3(X^*) = \mu_3/\sigma^3$-কে **অসমপক্ষতার মাপকাঙ্ক** (coefficient of skewness) বলা হবে এবং γ_1 দ্বারা চিহ্নিত হবে, অর্থাৎ

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \qquad \text{.....(8.7.1)}$$

যখন $\gamma_1 > 0$ তখন ঘনত্ব বক্ররেখায় (অবিচ্ছিন্ন নিবেশনের জন্যে) ডানদিকে বাঁদিকের চেয়ে বেশি লম্বা ল্যাজ থেকে এবং এর বিপরীত হয় যখন $\gamma_1 < 0$। নীচের চিত্রে γ_1-র ঋণাত্মক, ধনাত্মক ও শূন্য

মানের জন্যে তিনটি ঘনত্ব বক্ররেখার ছবি দেওয়া হল।



$(a)\ \gamma_1 < 0,\ (b)\ \gamma_1 > 0,\ (c)\ \gamma_1 = 0$

যদি $\mu_3 = 0$ হয়, কিন্তু $\mu_5 \neq 0$ তখন আমরা $\mu_5(X^*) = \mu_5/\sigma^5$-কে অসমপক্ষতার মাপক হিসেবে নিতে পারি।

উদাহরণ

গামা নিবেশন : 8.5 অনুচ্ছেদের উদাহরণ 2 থেকে পাই

$$\alpha_2 = l(l+1),\ \alpha_3 = l(l+1)(l+2)$$

তাই (8.5.4) দ্বারা

$$\mu_3 = 2l,\ \gamma_1 = 2l/l^{3/2} = 2/\sqrt{l}$$

8.8 চতুর্থ কেন্দ্রীয় ভ্রামক

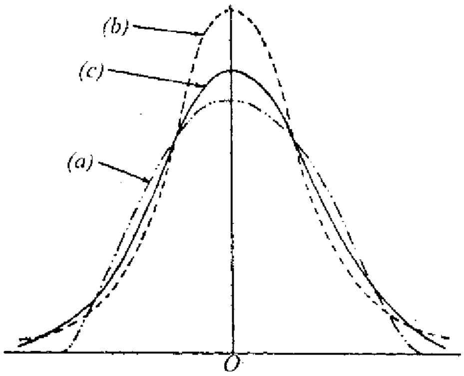
চতুর্থ কেন্দ্রীয় ভ্রামক μ_4 বা $\mu_4(X^*) = \mu_4/\sigma^4$ সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক বা সম্ভাবনা চিত্রের **তীক্ষ্ণতার** (kurtosis) মাপক এবং **তীক্ষ্ণতার মাপকাঙ্ক** (coefficient of kurtosis) β_2-র সংজ্ঞা হল

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} \qquad \text{.....(8.8.1)}$$

স্বাভাবিক নিবেশনের জন্যে $\mu_4 = 3\sigma^4$ (8.5 অনুচ্ছেদের 1নং উদাহরণ), তাই $\beta_2 = 3$। ব্যবহারিক ক্ষেত্রে স্বাভাবিক নিবেশনকে আদর্শ মানা হয়, তাই যদি

$$\gamma_2 = \beta_2 - 3 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 \qquad \text{.....(8.8.2)}$$

হয় γ_2-কে **আধিক্যের মাপকাঙ্ক** (coefficient of excess) বলা হবে। $\gamma_2 > 0$ হলে X-এর ঘনত্ব অপেক্ষক স্বাভাবিক চলকের চাইতে বেশি তীক্ষ্ণ হবে এবং $\gamma < 0$ হলে তার বিপরীত হবে। চিত্রে দুটি প্রতিসম আদর্শীকৃত ঘনত্ব অপেক্ষক যাদের জন্যে $\gamma_2 > 0$ ও $\gamma_2 < 0$ এবং আদর্শ স্বাভাবিক ঘনত্ব অপেক্ষকের ছবি দেওয়া হল



$(a)\ \gamma_2 < 0, (b)\ \gamma_2 > 0, (c)\ \gamma_2 = 0$

উদাহরণ

গামা নিবেশন : (8.5.4) ও 8.5 অনুচ্ছেদের 2নং উদাহরণের ফলাফল ব্যবহার করে পাই

$$\begin{aligned}\mu_4 &= l(l+1)(l+2)(l+3) - 4(l+1)(l+2)l + 6l(l+1)l^2 - 3l^4 \\ &= 3l(l+2)\end{aligned}$$

তাই

$$\beta_2 = 3l(l+2)/l^2 = 6/l + 3, \quad \gamma_2 = 6/l$$

8.9 ভ্রামক-উৎপাদক অপেক্ষক

একটি চলক X-এক ভ্রামক-উৎপাদক অপেক্ষক একটি বাস্তব চল t-এর অপেক্ষক যা $\psi_x(t)$ বা $\psi(t)$ দ্বারা সূচিত হবে এবং যার সংজ্ঞা হল

$$\psi(t) = E(e^{tX}) \qquad \text{.....(8.9.1)}$$

$\psi(t)$-র শ্রেণি বা সমাকল রূপায়ণকে যথাক্রমে পদানুক্রমে বা সমাকলন চিহ্নের ভিতর k-বার $t = 0$-তে অন্তরকলন করে পাই

$$\psi^{(k)}(0) = E(X^k) = \alpha_k \qquad \text{.....(8.9.2)}$$

যদি উপরোক্ত প্রক্রিয়া সিদ্ধ হয়। অতএব $\psi(t)$-র ঘাত-শ্রেণিতে বিস্তৃতি হবে

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k!} t^k \qquad \text{..... (8.9.3)}$$

তাই যদি কোনো নিবেশনের জন্যে $\psi(t)$-কে সরাসরি পদ্ধতিতে ঘাত-শ্রেণিতে বিস্তৃত করা যায়, তাহলে t^k-র সহগ হবে $\psi_k/k!$। এটাই $\psi(t)$-র ভ্রামক-উৎপাদক অপেক্ষক নামের সার্থকতা।

$\psi(t)$-র একটা অসুবিধে হচ্ছে যে $t \neq 0$ হলে $\psi(t)$-র শ্রেণি বা সমাকল রূপায়ণ অনেক ক্ষেত্রেই অভিসারী হয় না অর্থাৎ $\psi(t)$-র মান অস্তিত্বহীন হয়। এই অসুবিধে দূর করার জন্যে $\psi(t)$-র বদলে অন্য একটি অনুরূপ অপেক্ষক ব্যবহৃত হয় যার কথা আমরা পরের অনুচ্ছেদে পড়ব।

8.10 বৈশিষ্ট্য অপেক্ষক

একটি চলক X-এর বা তার নিবেশনের **বৈশিষ্ট্য অপেক্ষক** বাস্তব চল t-র একটি জটিলমান অপেক্ষক, যার চিহ্ন হবে $\chi_x(t)$ বা $\chi(t)$ এবং সংজ্ঞা হবে

$$\chi(t) = E(e^{itX}) = E(\cos tX) + iE(\sin tX) \qquad \text{..... (8.10.1)}$$

যেখানে $i = \sqrt{-1}$।

যেহেতু $|\cos tx| \leq 1, |\sin tx| \leq 1$ সব x-এর জন্যে, $\chi(t)$ সব t-র জন্যে এবং সব নিবেশনের জন্যে অস্তিত্বমান। একথা প্রমাণ করা যায় যে যদি ভ্রামক α_k অস্তিত্বমান হয়, $\chi(t)$কে $t = 0$ তে k-বার অন্তরকলন করা চলে যার ফল

$$\chi^{(k)}(0) = i^k \alpha_k \qquad \text{..... (8.10.2)}$$

তাই $\chi(t)$-র it-র ঘাত-শ্রেণিতে বিস্তৃতি হবে (অভিসারিতার ব্যাপার বিচার না করে)

$$\chi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma_k}{k!} (it)^k \qquad \text{..... (8.10.2)}$$

যেখানে $(it)^k$-র সহগ হচ্ছে $\alpha_k/k!$।

বৈশিষ্ট্য অপেক্ষকের সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ ধর্মের কথা এবার বলি। আমরা জানি, একটি নিবেশন অপেক্ষক $F(x)$ দেওয়া থাকলে বৈশিষ্ট্য অপেক্ষক $\chi(t)$ সংজ্ঞা (8.10.1) দ্বারা অনন্যভাবে নির্ধারিত হয়। গুরুত্বপূর্ণ উপপাদ্যটি হল এই যে এর বিপরীতও সত্যি, অর্থাৎ একটি প্রদত্ত বৈশিষ্ট্য অপেক্ষক $\chi(t)$-র প্রতিসঙ্গী নিবেশন অপেক্ষক $F(x)$-ও অনন্য। এই মৌলিক উপপাদ্যটির প্রমাণ আমাদের আওতার বাইরে। আমরা এই উপপাদ্যের সত্যতা মেনে নিয়ে এর অনেকগুলি গুরুত্বপূর্ণ প্রয়োগ করব

এইভাবে—মনে করুন আমরা একটি অজানা নিবেশনের $\chi(t)$ পরোক্ষভাবে নির্ণয় করেছি যা একটি জানা নিবেশন অপেক্ষক $F(x)$-এর প্রতিসঙ্গী বৈশিষ্ট্য অপেক্ষক। তাহলে আমরা সিদ্ধান্ত করতে পারি যে এই $F(x)$-ই অজানা নিবেশনের নিবেশন অপেক্ষক।

যদি $g(x)$ একটি সন্তত অপেক্ষক হয়, $Y = g(X)$ চলকের বৈশিষ্ট্য অপেক্ষকের সংজ্ঞা হবে

$$\chi_x(t) = E(e^{itY}) = E\{e^{itg(X)}\} \qquad \text{.....(8.10.4)}$$

$Y = aX + b$ হলে

$$\chi_y(t) = e^{ibt}\chi_x(at) \qquad \text{.....(8.10.5)}$$

$X^* = (X - m)/\sigma$ চালকের জন্যে

$$\chi_{x^*}(t) = e^{-imt/\sigma}\chi_x(t/\sigma) \qquad \text{.....(8.10.6)}$$

উদাহরণ

1. দ্বিপদ নিবেশন

$$\chi(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{itk}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(pe^{it})^k(1-p)^{n-k}$$

$$= (pe^{it} + 1 - p)^n = (pe^{it} + q)^n \qquad [q = 1 - p]$$

2. পোয়াসঁ নিবেশন

$$\chi(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{itk}e^{-\mu}\frac{\mu^k}{k!} = e^{-\mu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mu e^{it})^k}{k!}$$

$$= e^{-\mu}e^{\mu e^{it}} = e^{\mu(e^{it}-1)}$$

3. স্বাভাবিক নিবেশন

$$\chi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}dx$$

$$= e^{imt-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-m-i\sigma^2t)^2/2\sigma^2}dx$$

$$= e^{imt-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$$

4. গামা নিবেশন

$$\chi(t) = \frac{1}{\Gamma(l)}\int_0^{\infty} e^{itx}e^{-x}x^{l-1}dx = \frac{1}{\Gamma(l)}\int_0^{\infty} e^{-(1-it)x}x^{l-1}dx$$

$$= \frac{1}{(1-it)} \cdot \frac{1}{\Gamma(l)} \int_0^\infty e^{-x} x^{l-1} dx = \frac{1}{(1-it)^l}$$

8.11 মধ্যমা

মধ্যমা এমন একটি বিন্দু যা সম্ভাবনা ভর নিবেশনকে দুই সমানভাগে ভাগ করে। মধ্যমার চিহ্ন হবে μ এবং সংজ্ঞা হবে

$$F(\mu) = \frac{1}{2} \qquad .....(8.11.1)$$

মধ্যমা একটি গুরুত্বপূর্ণ অবস্থিতির মাপক। স্পষ্টতই মধ্যমা μ নিবেশন বক্ররেখা $y = F(x)$ এবং সরলরেখা $y = \frac{1}{2}$-এর ছেদবিন্দুর x স্থানাঙ্ক। সন্তত চলকের জন্যে $F(x)$ সন্তত এবং প্রকৃতভাবে একান্বয়ে বর্ধমান, তাই μ অস্তিত্বমান ও অনন্য। কিন্তু বিচ্ছিন্ন চলকের বেলায় দুটি সমস্যা দেখা দেয় : প্রথমটি হল সরলরেখা $y = \frac{1}{2}$, $y = F(x)$-কে আদৌ ছেদ করে না এবং এই ধাপ অপেক্ষকের দুটি অনুভূমিক অংশের মধ্যে দিয়ে গমন করে এবং দ্বিতীয়টি হল $y = \frac{1}{2}$, $y = F(x)$-কে এমন সব বিন্দুগুলিতে ছেদ করে যার জন্যে x একটি অন্তর (x_k, x_{k+1})-এ থাকে যেখানে x_k, x_{k+1} বর্ণালির পরপর দুটি বিন্দু এবং তাই এই অন্তরের প্রত্যেক বিন্দুই (8.11.1) সিদ্ধ করে।

প্রথম সমস্যার সমাধানকল্পে μ-এর সংজ্ঞা এইভাবে প্রসারিত করা হয়—মধ্যমা μ এমন একটি বিন্দু যার জন্যে

$$F(\mu - 0) \le \frac{1}{2}, \; F(\mu) \ge \frac{1}{2} \qquad .....(8.11.2)$$

এই অসমীকরণদুটির জ্যামিতিক অর্থ হল এই যে নিবেশন বক্ররেখার খাড়া ধাপগুলিও তার অংশ হিসেবে বিবেচিত হচ্ছে $y = \frac{1}{2}$ সরলরেখার সঙ্গো ছেদের প্রসঙ্গো।

দ্বিতীয় সমস্যার সমাধান করতে (x_k, x_{k+1}) এই অন্তরের মধ্যবিন্দু $\frac{1}{2}(x_k, x_{k+1})$-কে প্রকৃত মধ্যমা বলে ধরা হবে। সংজ্ঞার উপরোক্ত দুটি সম্প্রসারণ করলে মধ্যমা সবক্ষেত্রেই বিদ্যমান এবং অনন্য।

মধ্যমার একটি গুরুত্বপূর্ণ ধর্ম হল এই যে, c-বিন্দুর সাপেক্ষে প্রথম পরম ভ্রামক ন্যূনতম হয় যখন c হচ্ছে মধ্যমা।

প্রমাণ : অবিচ্ছিন্ন নিবেশনের ক্ষেত্রে প্রমাণ দিই ; বিচ্ছিন্ন ক্ষেত্রে প্রমাণ অনুরূপ হবে।

যদি $c > \mu$ হয়

$$E(|X-c|) = \int_{-\infty}^{c}(c-x)f(x)dx + \int_{c}^{\infty}(x-c)f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{c}(c-x)f(x)dx + \int_{\mu}^{c}(c-x)f(x)dx$$

$$\int_{\mu}^{\infty}(x-c)f(x)dx - \int_{\mu}^{c}(x-c)f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\mu}(\mu-x)f(x)dx + \int_{\mu}^{\infty}(x-\mu)f(x)dx$$

$$= +(c-\mu)\left\{\int_{-\infty}^{\mu} f(x)dx - \int_{\mu}^{\infty} f(x)dx\right\} + 2\int_{\mu}^{c}(c-x)f(x)dx$$

$$= E(|X-\mu|) + (c-\mu)\{2F(\mu)-1\} + 2\int_{\mu}^{c}(c-x)f(x)dx$$

$$= E(|X-\mu|) + 2\int_{\mu}^{c}(c-x)f(x)dx \qquad \text{(8.11.1) দ্বারা}$$

যেহেতু $c > \mu$, ডানপক্ষের সমাকলের মান অঋণাত্মক এবং তাই

$$E(|X-c|) \geq E(|X-\mu|)$$

অনুরূপে $c < \mu$ হলে আমরা পাই

$$E(|X-c|) = E(|X-\mu|) + 2\int_{c}^{\mu}(x-c)f(x)dx \geq E(|X-\mu|)$$

$E(|X-\mu|)$ মধ্যমা μ-এর সাপেক্ষে একটি বিস্তৃতির মাপক। একটি প্রতিসম নিবেশনের জন্যে যে বিন্দুর সাপেক্ষে প্রতিসাম্য সেটাই মধ্যমা হয় এবং গড়ের সমান হয় যদি তার অস্তিত্ব থাকে।

উদাহরণ

1. একটি বিচ্ছিন্ন নিবেশনের কথা ভাবুন, যার বর্গালির বিন্দুগুলি হল $0, 1, 2, ..., n$ এবং প্রত্যেকটিতে সমান সম্ভাবনা ভর $1/(n+1)$ আছে। যদি n জোড় হয়, কোনো বিন্দুই (8.11.1) সিদ্ধ করে না কিন্তু প্রসারিত সংজ্ঞা (8.11.2) দ্বারা μ বর্গালি বিন্দু $\frac{1}{2}n$। আর যদি n বিজোড় হয় $\frac{1}{2}(n-1) \leq x < \frac{1}{2}(n+1)$ এই অন্তরের সব বিন্দুই (8.11.1) সিদ্ধ করে, তাই প্রসারিত সংজ্ঞা অনুযায়ী এই অন্তরের মধ্যবিন্দু $\frac{1}{2}n = \mu$।

2. স্বাভাবিক নিবেশন : এটা গড় m-এর সাপেক্ষে প্রতিসম, তাই $\mu = m$।

3. কোশি নিবেশন : এটাও μ বিন্দুর সাপেক্ষে প্রতিসম, তাই μ–ই মধ্যমা। কোশি নিবেশনে গড় অস্তিত্বমান নয়।

8.12 ভূয়িষ্ঠক

অবিচ্ছিন্ন নিবেশন : সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক $f(x)$ যে বিন্দুতে চরমমান প্রাপ্ত হয় তাকে নিবেশনের ভূয়িষ্ঠক বলে। $f(x)$ একাধিক বিন্দুতে চরমমান প্রাপ্ত হতে পারে, তাই ভূয়িষ্ঠকও স্বাভাবিক হতে পারে।

বিচ্ছিন্ন নিবেশন : বর্ণালির যে বিন্দুতে আপেক্ষিকভাবে উচ্চতম কোটি আছে তাকে নিবেশনের ভূয়িষ্ঠক বলা হবে, অর্থাৎ x_k একটি ভূয়িষ্ঠক যদি

$$f_k > f_{k-1}, f_{k+1} \qquad \text{.....} (8.12.1)$$

এক্ষেত্রেও একাধিক ভূয়িষ্ঠক থাকা সম্ভব।

ভূয়িষ্ঠক অবস্থানের মাপক হিসেবে ব্যবহৃত হয়। বিশেষ করে যদি তা একটিমাত্র হয়। একটি প্রতিসম নিবেশন যার জন্যে ভূয়িষ্ঠক অনন্য ও গড় অস্তিত্বমান, ভূয়িষ্ঠক ও গড় অভিন্ন।

একটি নিবেশন যার একটিমাত্র ভূয়িষ্ঠক M এবং গড় m, $m - M$ রাশিটি নিবেশনের অপ্রতিসাম্যের উপর নির্ভর করে এবং আমরা অসমপক্ষতার অন্য একটি মাপক হিসেবে

$$\frac{m - M}{\sigma} \qquad \text{.....} (8.12.2)$$

এই রাশিটি ব্যবহার করি।

উদাহরণ

1. গামা নিবেশন

$$f'(x) = \frac{e^{-x} x^{l-2}}{\Gamma(l)}(l - 1 - x)$$

যা শূন্য হয় যখন $x = l - 1$ এবং 0 ($l > 2$ হলে)। সহজেই যাচাই করা যায় যে $(l - 1)$-এ $f(x)$ চরমমান প্রাপ্ত হয়, তাই $M = l - 1$।

অসমপক্ষতার মাপকাঙ্ক $(8.12.2) = l/\sqrt{l}$ যেখানে $\gamma_1 = 2/\sqrt{l}$ (অনুচ্ছেদ 8.7 উদাহরণ)।

2. একটি দ্বিপদ $(2n, \frac{1}{2})$ চলকের জন্য $f_i = \binom{2n}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$ যা $i = n$-এর জন্যে চরম, তাই $M = n$ যা গড়ও বটে।

8.13 চতুর্থাংশিক

দুটি বিন্দু $\xi_{1/4}$ এবং $\xi_{3/4}$ যার সংজ্ঞা হল

$$F(\xi_{1/4}) = 1/4, F(\xi_{3/4}) = 3/4 \qquad .....(8.13.1)$$

(মধ্যমার মতো সম্প্রসারণসহ), তাদের যথাক্রমে নিম্ন চতুর্থাংশিক ও উচ্চ চতুর্থাংশিক বলা হয়।

$\frac{1}{2}(\xi_{3/4} - \xi_{1/4})$ রাশিটিকে বলা হয় **আন্তঃচতুর্থাংশিক পাল্লার্ধ** (semi-interquartile range) যা একটি বিস্তৃতির মাপক।

উদাহরণ

কোশি নিবেশন : এখানে

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{x-\mu}{\lambda}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$$

যখন যথাক্রমে $x = \mu - \lambda, \mu + \lambda$। সুতরাং $\xi_{1/4} = \mu - \lambda$, $\xi_{3/4} = \mu + \lambda$ এবং আন্তঃচতুর্থাংশিক পাল্লার্ধ $= \lambda$।

8.14 বিভিন্ন মাপকাঙ্কের উপযোগিতা

1. আমরা তিনটি প্রধান অবস্থানের মাপকের অবতারণা করেছি—গড়, মধ্যমা এবং ভূয়িষ্ঠক। এদের মধ্যে কেবল গড়ই প্রত্যাশা হিসেবে সংজ্ঞায়িত, তাই এই গড়ের নির্ধারণ পদ্ধতি অন্য দুটির চাইতে সহজ। কিন্তু গড়ের একটা অসুবিধে, এটা সবসময় অস্তিত্বমান হয় না। আবার যখন ছোট ছোট সম্ভাবনা ভর দূরে দূরে অবস্থিত থাকে তখন গড়, যা কিনা ভর-বিন্যাসের ভরকেন্দ্র, অবস্থিতির সঠিক নির্দেশ দেয় না। সেইসব ক্ষেত্রেও গড় অবস্থিতির মাপক হিসেবে উপযোগী নয়।

2. বিস্তৃতির মাপক হিসেবে আমাদের সমক-বিচ্যুতি, গড় বা মধ্যমার সাপেক্ষে প্রথম পরম ভ্রামক ও আন্তঃচতুর্থাংশিক পাল্লার্ধ। যখন গড় অবস্থানের মাপক, তখন স্বাভাবিকভাবেই সমক-বিচ্যুতিকে বিস্তৃতির মাপক নেওয়া হয়। আবার যখন মধ্যমা অবস্থানের মাপক, তখন উপযুক্ত বিস্তৃতির মাপক হবে

মধ্যমার সাপেক্ষে প্রথম পরম ভ্রামক। যখন সমক-বিচ্যুতি বা প্রথম পরম ভ্রামক সহজে পাওয়া যায় না, তখন আন্তঃচতুর্থাংশিক পাল্লার্থ বিস্তৃতির মাপক হিসেবে ব্যবহৃত হয়।

3. যদিও γ_1, γ_2 এবং (8.12.2) মাপকাঙ্কগুলি শূন্যমাত্রিক, এদের কোনো তাত্ত্বিক সীমা জানা নেই, যা নিশ্চিতভাবে একটা অসুবিধে। ব্যবহারিক ক্ষেত্রে এদের মান অবশ্য কমই হয়।

8.15 সারাংশ

একটি সম্ভাবনা নিবেশনের বিভিন্ন বৈশিষ্ট্যগুলির মধ্যে প্রধান হল অবস্থিতি, বিস্তৃতি, অসমপক্ষতা ও তীক্ষ্ণতা। এই এককে এই বৈশিষ্ট্যগুলির মাপক হিসেবে ব্যবহৃত কয়েকটি সূচকের সংজ্ঞা দেওয়া হয়েছে এবং তাদের বিষয়ে আলোচনা করা হয়েছে। একটি বৈশিষ্ট্যের একাধিক মাপকাঙ্ক দেওয়া হয়েছে এবং কোন্ ক্ষেত্রে কোনটি বেশি উপযোগী তাও আলোচিত হয়েছে।

8.16 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

1. একটি নিখুঁত ছক্কা ছোড়া হলে প্রদর্শিত সংখ্যার গড় ও ভেদমান নির্ণয় করুন।

2. আয়তক্ষেত্রিক নিবেশনের গড় ও ভেদমান নির্ণয় করুন।

3. **পাস্কাল নিবেশনের** (Pascal distribution) সংজ্ঞা হল $x_i = i(i = 0, 1, 2, ...)$ এবং

$$f_i = \frac{1}{1+\mu}\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^i \qquad (\mu > 0)$$

এই নিবেশনের গড় ও ভেদমান নির্ণয় করুন।

4. একটি বিচ্ছিন্ন চলক X মান i গ্রহণ করার সম্ভাবনা $\frac{1}{8}\binom{3}{i}(i = 0, 1, 2, 3)$ হলে X-এর জন্যে α_1, α_2 নির্ণয় করুন।

5. 2-এর সাপেক্ষে প্রথম, দ্বিতীয় এবং তৃতীয় ভ্রামক যদি যথাক্রমে 1, 16 এবং –40 হয়, তাহলে নিবেশনের গড়, ভেদমান ও তৃতীয় কেন্দ্রিয় ভ্রামক নির্ণয় করুন।

6. একটি সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক $f(x) = \frac{3}{4}x(2-x)\ (0 < x < 2)$। গড়, ভেদমান ও অসমপক্ষতার সহগাঙ্ক γ_1 বের করুন।

7. দ্বিপদ (n, p) নিবেশনের জন্যে দেখান যে

$$u_{k+1} = p(1-p)\left(nk\mu_{k-1} + \frac{d\mu_k}{dp} \right)$$

এর থেকে γ_1 ও γ_2-র মান বের করুন।

8. প্রমাণ করুন : $\{E(X)\}^2 \le E(X^2)$ এবং এর সাহায্যে দেখান যে গড়-সাপেক্ষে প্রথম পরম ভ্রামকের সর্বাধিক মান সমক-বিচ্যুতির সমান।

9. পোয়াসঁ-μ নিবেশনের জন্যে দেখান যে

$$\mu_{k+1} = \mu\left(k\mu_{k-1} + \frac{d\mu_\kappa}{d\mu} \right)$$

এর থেকে γ_1 ও γ_2-র মান বের করুন।

10. স্বাভাবিক (m, σ) নিবেশনের জন্যে গড়-সাপেক্ষে প্রথম পরম ভ্রামক $\sqrt{2/\pi\sigma}$, এটা প্রমাণ করুন।

11. $\beta_1(l, m)$ নিবেশনের k-তম ভ্রামক নির্ণয় করুন এবং তার থেকে ভেদমান বের করুন। আরও দেখান যে $l, m > 1$ হলে নিবেশনের একটিমাত্র ভূয়িষ্ঠক আছে যার মান $(l-1)(l+m-2)$।

12. একটি অবিচ্ছিন্ন নিবেশনের ঘনত্ব অপেক্ষক

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-(\log x)^2/2} \qquad (0 < x < \infty)$$

(একে **লগ-স্বাভাবিক নিবেশন** বলা হয়)। গড়, ভূয়িষ্ঠক, সমক-বিচ্যুতি এবং অসমপক্ষতার সূচক (8.12.2) নির্ণয় করুন।

13. পোয়াসঁ-μ নিবেশনের ভূয়িষ্ঠক M এমন একটি (বা দুটি) পূর্ণসংখ্যা $\mu - 1 \le M \le \mu$, এটা দেখান।

14. একটি সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক $f(x) = ae^{-ax}\ (0 < x < \infty\,;\ a > 0)$। ভ্রামক-উৎপাদক অপেক্ষক নির্ণয় করুন এবং তার থেকে α_k বের করুন।

15. দেখান যে $(-a, a)$ অন্তরে সম নিবেশনের ভ্রামক-উৎপাদক অপেক্ষক $\sinh at/at$। এর দ্বারা কেন্দ্রিয় ভ্রামকগুলি নির্ণয় করুন।

16. প্রমাণ করুন যে পাস্কাল নিবেশনের (3নং প্রশ্ন) বৈশিষ্ট্য অপেক্ষক $[1-\mu(e^{it}-1)]$। একে it-র ঘাত-শ্রেণিতে বিস্তার করে $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$-এর মান বের করুন এবং তার থেকে অসমপক্ষতার মাপকাঙ্ক γ_1 এবং আধিক্যের মাপকাঙ্ক γ_2 বের করুন।

17. দ্বিপদ $(4, \frac{1}{4})$ নিবেশনের গড়, মধ্যমা ও ভূয়িষ্ঠক নির্ণয় করুন।

18. পোয়াসঁ নিবেশনের মধ্যমা নির্ণয় করুন যদি গড় 2 হয়।

19. একটি গোছা থেকে একটি তাস যদৃচ্ছভাবে টানা হলে, টানা তাসের নম্বরের (গোলামের নম্বর 11, বিবির নম্বর 12 ও সাহেবের নম্বর 13 ধরুন) নিম্ন ও উচ্চ চতুর্থাংশিক এবং আন্তঃচতুর্থাংশিক পাল্লার্ধ নির্ণয় করুন।

20. লাপ্লাস নিবেশন-এর (Laplace distribution) সংজ্ঞা হল

$$f(x) = \frac{1}{2\lambda} e^{-|x-\mu|/\lambda} \qquad (-\infty < x < \infty; \lambda > 0)$$

গড়-সাপেক্ষে প্রথম পর ভ্রামক এবং আন্তঃচতুর্থাংশিক পাল্লার্ধ নির্ণয় করুন।

8.17 উত্তরমালা

1. $\frac{7}{2}; \frac{35}{12}$

2. $(a+b)/2; (b-a)^2/12$

3. $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = (1-x)^{-1}$ এই অভেদকে পরপর দুবার অবকলন করে এবং $x = \mu/(1+\mu)$ বসিয়ে পাই $m = \mu\, E\{X(X-1)\} = 2\mu^2, \mu^2 = \mu(\mu+1)$।

4. $3/2, 3$

5. $3, 15, -86$

6. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ নির্ণয় করুন, তারপর (8.5.4) ব্যবহার করুন। উত্তর $1, 1/5, 0$

7. $m = np$, $\mu_k = \sum_{i=0}^{n} (i-np)^k \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$ একে p-র সাপেক্ষে অবকলন করে এগোন।

8. $0 \le (X-m)^2 = X^2 - 2mX + m^2$। প্রত্যাশা নিলে

$$0 \le E(X^2) - 2m^2 + m^2 = E(X^2) - m^2$$

X-এর বদলে $|X-m|$ বসালে পাই $\{E(|X-m|)\}^2 \le \sigma^2$ ।

9. $m = \mu,\ \mu_k = \sum_{i=0}^{\infty}(i-\mu)^k e^{-\mu}\frac{u^i}{i!}$ । একে μ-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে এগোন।

10. $E(|X-m|) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}|x-m|e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}|x|e^{-x^2/2\sigma^2}dx$

$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_0^{\infty} xe^{-x^2/2\sigma^2}dx = \sqrt{2/\pi}\sigma$

11. $\frac{l(l+1)\ldots(l+k-1)}{(l+m)(l+m+1)\ldots(l+m+k-1)},\ \frac{lm}{(l+m)^2(l+m+1)}$

12. $\sqrt{e},\ 1/e,\ \sqrt{e(e-1)},\ (1-e^{-3/2})/\sqrt{e-1}$

13. $f_{i+1}/f_i - 1 = (\mu+1-i)/(i+1)$ ইত্যাদি

14. $1/(1-t/a), k1/a^k$

15. $\mu_{2k+1} = 0,\ \mu_{2k} = a^{2k}/(2k+1)$

16. $\alpha_1 = \mu, \alpha_2 = \mu + 2\mu^2, \alpha_3 = \mu + 6\mu^2 + 6\mu^3, \alpha_4 = \mu + 14\mu^2 + 36\mu^3 + 24\mu^4$

$\gamma_1 = (2\mu+1)/\sqrt{\mu(\mu+1)}, \gamma_2 = (6\mu^2 + 6\mu + 1)/\mu(\mu+1)$

17. 1, 1, 1

18. 2

19. 4, 10, 3

20. $m = \frac{1}{2\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-|x-\mu|/\lambda}dx = \frac{1}{2\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)e^{-|x-\mu|/\lambda}dx + \mu$

$$= \frac{1}{2\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-|x-\mu|/\lambda}dx + \mu = 0 + \mu = \mu$$

নিবেশনটি μ-এর সাপেক্ষে প্রতিসম এই বিচারে $x \geq \mu$ হলে

$$F(x) \quad = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\lambda}\int_{\mu}^{x} e^{-|x-\mu/\lambda|}dx$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\lambda}\int_{\mu}^{x} e^{-|x-\mu/\lambda|}dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}[1 - e^{-(x-\mu)/\lambda}]$$

বা

$$F(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{-(x-\mu)/\lambda} \qquad \text{যদি } x \geq \mu$$

অনুরূপে

$$F(x) = \frac{1}{2}e^{-(\mu-x)/\lambda} \qquad \text{যদি } x < \mu$$

$$F(\mu) = \frac{1}{2},\ F(\lambda_{1/4}) = \frac{1}{4} \Rightarrow \xi_{1/4} < \mu, \qquad \text{তাই } \xi_{1/4} = \mu - \lambda \log_e 2$$

$$F(\xi_{3/4}) = \frac{3}{4} \Rightarrow \xi_{3/4} > \mu \qquad \text{তাই } \xi_{3/4} = \mu + \lambda \log_e 2$$

আন্তঃচতুর্থাংশিক পাল্লার্ধ $= \lambda \log_e 2$

$$E\,(|X - m|) \quad = E(|X - \mu|)$$

$$= \frac{1}{2\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} |x - \mu| e^{-|x-\mu|/\lambda}dx$$

$$= \frac{1}{2\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-|x-\mu|/\lambda}dx - \frac{1}{\lambda}\int_{0}^{\infty} xe^{-x/\lambda}dx$$

$$= \frac{1}{2\lambda}\int_{0}^{\infty} ye^{-y}dy = \lambda$$

পর্যায়
2

সম্ভাবনাতত্ত্ব

একক 9 ❐ দ্বিমাত্রিক নিবেশন (Two-dimensional distributions)

গঠন

9.1 প্রস্তাবনা

এই এককে আমরা আলোচনা করব সম্ভাবনার দ্বিমাত্রিক নিবেশনের কথা অর্থাৎ দুটি যদৃচ্ছ চলের যুগ্ম নিবেশনের কথা। প্রথমেই যদৃচ্ছ চলদুটির যুগ্ম নিবেশন অপেক্ষকের সংজ্ঞা দেওয়া হবে এবং এর থেকে চলদুটির আলাদা আলাদা একমাত্রিক নিবেশন অপেক্ষক নির্ণয় করা যাবে। প্রসঙ্গত আসবে চলদুটির সম্ভাবনার নিরিখে অনপেক্ষতার ধারণা।

তারপর বিচ্ছিন্ন ও অবিচ্ছিন্ন নিবেশনের ক্ষেত্রে এই আলোচনা বিস্তারিতভাবে করা হবে এবং শেষে বহুমাত্রিক ক্ষেত্রে আলোচনা সম্প্রসারিত হবে।

9.2 উদ্দেশ্য

এই একক পড়লে আপনারা জানতে পারবেন

- দ্বিমাত্রিক নিবেশন অপেক্ষকের সংজ্ঞা ও তার ধর্ম
- প্রান্তিক নিবেশনের (marginal distributions) নির্ণয়
- যদৃচ্ছ চলদুটির অনপেক্ষতার সংজ্ঞা
- বিচ্ছিন্ন ও অবিচ্ছিন্ন নিবেশনের ক্ষেত্রে বিস্তারিত আলোচনা
- কয়েকটি বিশেষ দ্বিমাত্রিক অবিচ্ছিন্ন নিবেশনের কথা
- বহুমাত্রিক ক্ষেত্রে উপরোক্ত ধারণার সম্প্রসারণ

9.3 দ্বিমাত্রিক নিবেশন অপেক্ষক

মনে করুন X ও Y দুটি যদৃচ্ছ চল যা একই ঘটনাদেশ S-এ সংজ্ঞায়িত। X ও Y-এর **যুগ্ম নিবেশন অপেক্ষক** অথবা দ্বিমাত্রিক যদৃচ্ছ চল (X, Y)-এর নিবেশন অপেক্ষক $F_{x,y}(x, y)$ বা কেবল $F(x, y)$ দ্বারা চিহ্নিত হবে এবং তার সংজ্ঞা হল

$$F(x, y) = P(-\infty < X \le x, -\infty < Y \le y) \qquad .....(9.3.1)$$

যেখানে $(-\infty < X \le x, -\infty < Y \le y)$ এই ঘটনার মানে হল $(-\infty < X \le x)$ ঘটনাদুটির একসঙ্গো সংঘটন, অর্থাৎ

$$(-\infty < X \le x, -\infty < Y \le y) = (-\infty < X \le x)\,(-\infty < Y \le y)$$

***F(x,y)*-এর ধর্ম :**

1. ধরুন $a < b, c < d$। তাহলে

$$(-\infty < X \le a, -\infty < Y \le c) + (a < X \le b, -\infty < Y \le c)$$
$$= (-\infty < X \le b, -\infty < Y \le c)$$

এবং বাঁদিকের ঘটনাদুটি পরস্পর বিচ্ছিন্ন এবং তাই

$$F(a, c) + P(a < X \le b, -\infty < Y \le c) = F(b, c)$$

বা
$$F(b, c) - F(a, c) = P(a < X \le b, -\infty < Y \le c) \qquad .....(9.3.2)$$

যেহেতু এর ডানপক্ষ অঋণাত্মক

$$F(b, c) \ge F(a, c)\ (a < c)$$

অনুরূপে আমরা পাই

$$F(a, d) - F(a, c) = P(-\infty < X \le a, c < Y \le d) \qquad .....(9.3.3)$$

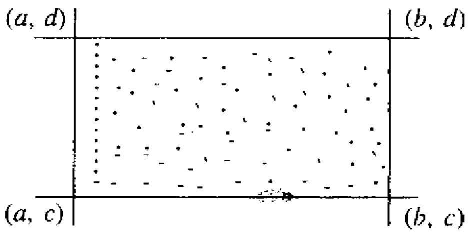
যার থেকে প্রমাণ হয়

$$F(a, d) \ge F(a, c)\ (c < d)$$

অতএব $F(x, y)\ x, y$ দুটি চলসাপেক্ষেই একান্বয়ে বর্ধমান।

2. xy-সমতলে নিম্নলিখিত অর্ধমুক্ত আয়তক্ষেত্রের কথা ভাবুন :

$$a < x \le b\,,\ c < y \le d$$



স্পষ্টতই,

$$F(b, d) + F(a, c) - F(a, d) - F(b, c)$$
$$= P(a < X \le b, c < Y \le d) \qquad .....(9.3.4)$$

3. (9.3.1)-এ যথাক্রমে $x \to -\infty$ এবং $y \to -\infty$ করে পাই

$$F(-\infty, y) = 0, F(x, -\infty) = 0 \qquad .....(9.3.5)$$

আবার $x \to -\infty, y \to -\infty$ হলে পাই

$$F(\infty, \infty) = 1 \qquad ..... (9.3.6)$$

4. (9.3.2) এবং (9.3.3) থেকে যথাক্রমে পাওয়া যায়

$$F(a+0, c) = F(a, c), F(a+c, +0) = F(a, c) \qquad ..... (9.3.7)$$

5. (9.3.4) থেকে নীচের ফলগুলি সহজেই পাওয়া যায় :

$$F(b, d) + F(b-0, c) - F(b-0, d) - F(b, c)$$
$$= P(X = b, c < Y \le d) \qquad ..... (9.3.8)$$

$$F(b, d) + F(a,\ d-0) - F(a, d) - F(a, d-0)$$
$$= P(a < X \le b, Y = d) \qquad ..... (9.3.9)$$

$$F(b, d) + F(b-0, d-0) - F(b-0,\ d) - F(b, d-0)$$
$$= P(X = b, Y = d) \qquad ..... (9.3.10)$$

প্রান্তিক নিবেশন

X, Y চলকদুটির যুগ্ম নিবেশন অপেক্ষক $F(x, y)$ জানা থাকলে তার থেকে X-এর নিবেশন অপেক্ষক $F_x(x)$ এবং Y-এর নিবেশন অপেক্ষক $F_y(y)$ সহজেই নির্ণয় করা যায় যাদের যুগ্ম নিবেশনের **প্রান্তিক নিবেশন অপেক্ষক** বলা হয়।

(9.3.1)-এ $y \to \infty$ হলে এবং যেহেতু $(-\infty < Y < \infty) = S$, নিশ্চিত ঘটনা, তাই

$$(-\infty < X \le x, -\infty < Y < \infty) = (-\infty < X \le x) S = (-\infty < X \le x)$$

এবং আমরা পাই $F(x, \infty) = P(-\infty < X \le x)$ অথবা

$$F_x(x) = F(x, \infty) \qquad ..... (9.3.11)$$

অনুরূপে

$$F_y(y) = F(\infty, y) \qquad ..... (9.3.12)$$

অনপেক্ষ যদৃচ্ছ চল

যদি $-\infty < X \le x$ এবং $-\infty < Y \le y$ এই ঘটনাদুটি সব x, y-এর জন্যে অনপেক্ষ হয়, তাহলে

$$P(-\infty < X \le x, -\infty < Y \le y) = P(-\infty < X \le x)\, P(-\infty < Y \le y)$$

বা,
$$F(x\, y) = F_x(x)\, F_y(y) \qquad ..... (9.3.13)$$

(9.3.13)-কেই X, Y চলকদুটির **অনপেক্ষতার** সংজ্ঞা বলে ধরা হবে।

দুটি চলকের অনপেক্ষতার একটি সহজ সমতুল্য শর্ত নীচের উপপাদ্যে আছে।

উপপাদ্য I : দুটি চলক X, Y-এর অনপেক্ষতার একটি আবশ্যিক ও পর্যাপ্ত শর্ত হল এই যে তাদের যুগ্ম নিবেশন অপেক্ষক $F(x, y)$ দুটি অপেক্ষকের গুণফল হিসেবে লেখা যায় যার একটি কেবলমাত্র x-এর অপেক্ষক ও অন্যটি কেবলমাত্র y-এর অপেক্ষক।

প্রমাণ। শর্তটি স্পষ্টতই আবশ্যিক। এটা পর্যাপ্ত দেখাতে গেলে ধরা যাক $F(x, y) = g(x)h(y)$। তাহলে (9.3.6) দ্বারা $g(\infty)\, h(\infty) = 1$। এবার লিখুন

$$F(x, y) = \frac{g(x)\ h(y)}{g(\infty)\ h(\infty)}$$

(9.3.11) থেকে পাই

$$F_x(x) = F(x, \infty) = \frac{g(x)}{g(\infty)}$$

অনুরূপে,
$$F_y(y) = \frac{h(y)}{h(\infty)}$$

অতএব (9.3.13) সিদ্ধ হচ্ছে, অর্থাৎ X, Y অনপেক্ষ।

উপপাদ্য II : যদি X, Y অনপেক্ষ হয়, তাহলে

$$P(a < X \le b, c < Y \le d) = P(a < X \le b)\, P(c < Y \le d) \qquad \text{..... (9.3.14)}$$

প্রমাণ। (9.3.4) দ্বারা

$$P(a < X \le b, c < Y \le d) = F(b,\ d) + F(a, d) - F(a, d) - F(b, c)$$

যদি X, Y অনপেক্ষ হয়, (9.3.13) দ্বারা

$$\begin{aligned} \text{ডানপক্ষ} &= F_x(b)\, F_y(d) + F_x(a)\, F_y(c) - F_x(a)\, F_y(d) - F_x(b)\, F_y(c) \\ &= \{F_x(b) - F_x(a)\}\, \{F_y(d) - F_y(c)\} \\ &= P(a < X \le b)\, P(c < Y \le d) \end{aligned}$$

উপপাদ্য III : X, Y অনপেক্ষ হলে

$$P(X = b, Y = d) = P(X = b)\, P(Y = d) \qquad \text{..... (9.3.15)}$$

প্রমাণ। (9.3.14)-এ $a \to b, c \to d$, উভয়ই বাঁদিক থেকে, করলে শেষোক্ত ফল মেলে।

9.4 বিচ্ছিন্ন দ্বিমাত্রিক নিবেশন

একটি দ্বিমাত্রিক চলক (X, Y)-এর নিবেশনকে **বিচ্ছিন্ন** বলা হয় যদি তার নিবেশন অপেক্ষক $F(x, y)$ দ্বিমাত্রায় একটি ধাপ অপেক্ষক হয় যার (x_i, y_i) বিন্দুতে $f_{ij}(> 0)$ উচ্চতার ধাপ আছে $(i, j, = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ অর্থাৎ

$$F(x, y) = \sum_{\beta=-\infty}^{j} \sum_{\alpha=-\infty}^{i} \alpha\beta \qquad \text{যখন } x_i \le x < x_{i+1},\ y_i \le y_j \le y < y_{j+1}$$

$$(i, j, = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \qquad \text{..... (9.4.1)}$$

এই অপেক্ষকটি নিবেশন অপেক্ষকের সব শর্ত পালন করে যদি

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_{ij} = 1 \qquad \text{..... (9.4.2)}$$

এবার দেখুন কীভাবে $F(x, y)$ নিবেশনের সবিশেষ বর্ণনা করে।

1. যদি (b, d) একটি ধাপবিন্দু না হয়, (9.3.10) দ্বারা $P(X = b, Y = d) = 0$, কিন্তু যেহেতু (x_i, y_i) একটি ধাপবিন্দু,

$$P(X = x_i, Y = y_j) = F(x_i, y_i) + F(x_i, -0, y_j - 0) - F(x_i, -0, y_j) - F(x_i, y_j - 0)$$

অথবা
$$P(X = x_i, y = y_j) = f_{ij} \qquad \text{..... (9.4.3)}$$

অর্থাৎ সম্ভাবনা ভর f_{ij} সমতলের (x_i, y_j) বিন্দুতে অবস্থিত $(i, j, = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$।

2. X-এর (প্রান্তিক) নিবেশন এইভাবে মেলে ঃ

$x_i \leq x < x_{i+1}$ হলে

$$F_x(x) = F(x, \infty) = \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \sum_{\infty}^{i} f_\beta = \sum_{\alpha=-\infty}^{i} f_\alpha .$$

যেখানে
$$f_i = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_{ij} \qquad \text{..... (9.4.4)}$$

অতএব আমরা দেখি যে $F_x(x)$ একটি ধাপ অপেক্ষক যার x_i বিন্দুতে f_i উচ্চতার ধাপ আছে $(i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$। একমাত্রিক বিচ্ছিন্ন নিবেশনের তত্ত্ব থেকে পাওয়া যায় যে $x_i (i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ বিন্দুগুলিই X-এর বর্ণালি এবং $P(X = x_i) = f_i$, অথবা

$$f_{xi} = f_{i\cdot} \qquad \text{..... (9.4.5)}$$

তাই $x = x_i$ সরলরেখার উপরে অবস্থিত সব সম্ভাবনা ভরগুলি যোগ করলে X চলকের নিবেশন পাওয়া যায়

অনুরূপে, $y_j (j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ Y-এর বর্ণালী এবং

$$f_{yi} = P(Y = y_i) = f_{\cdot j} \qquad \text{..... (9.4.6)}$$

যেখানে
$$f_{\cdot j} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_{ij} \qquad \text{..... (9.4.7)}$$

3. এক্ষেত্রে X, Y-এর অনপেক্ষতার সমতুল্য শর্ত দাঁড়াবে এইরকম :

$$f_{ij} = f_{xi} f_{yj} = f_{i\cdot} f_{\cdot j} \qquad \text{সব } i, j\text{-র জন্যে} \qquad \text{..... (9.4.8)}$$

এই শর্তের আবশ্যিকতা অনুচ্ছেদ 9.3-এর উপপাদ্য III থেকে সরাসরি মেলে।

আবার যদি (9.4.8) সিদ্ধ হয়, তাহলে (9.4.1) দ্বারা পাই ঃ

$x_i \leq x < x_{i+1}$, $y_j \leq y < y_{i+1}$ হলে

$$F(x,y) = \sum_{\beta=-\infty}^{j} \sum_{\alpha=-\infty}^{i} f_{\alpha\beta}$$

$$= \sum_{\beta=-\infty}^{j} \sum_{\alpha=-\infty}^{i} f_{x\alpha} f_{y\beta}$$

$$= \left(\sum_{\alpha=-\infty}^{i} f_{x\alpha} \right) \left(\sum_{\beta=-\infty}^{j} f_{y\beta} \right)$$

অথবা

$$F(x, y) = F_x(x)\, F_y(y)$$

যা সব x, y-এর জন্যে সিদ্ধ। তাই (9.4.8) শর্তটি পর্যাপ্তও বটে।

উদাহরণ

1. একটি পাত্রে $0, 1, 2, 3$ নম্বরযুক্ত চারটি সাদা বল, $0, 1, 2$ নম্বরযুক্ত তিনটি লাল বল এবং $0, 1$ নম্বরযুক্ত দুটি কালো বল আছে। পাত্রটি থেকে একটি বল যদৃচ্ছভাবে টানা হল। দুটি চলক X, Y-এর সংজ্ঞা দেওয়া হল এইরকম : X মান $0, 1, 2$ গ্রহণ করে যখন বলের রঙ যথাক্রমে সাদা, লাল ও কালো হয় এবং Y হল বলের নম্বর। X, Y-এর যুগ্ম নিবেশন নির্ণয় করুন। X, Y-এর প্রান্তিক নিবেশনগুলি বের করুন।

একটু স্পষ্ট করে ভাবলে এক্ষেত্রে যদৃচ্ছ পরীক্ষাটি হল পাত্র থেকে একটি বল টানা এবং যেহেতু পাত্রের বলগুলিকে রঙ ও নম্বরের সাহায্যে আলাদাভাবে চিহ্নিত করা যায়, ঘটনাদেশ S-কে এইভাবে লেখা যায় :

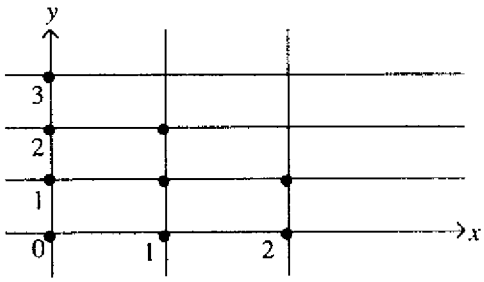
$S = \{(W,0), (W,1), (W,2), (W,3), (R,0), (R,1), (R,2), (B,0), (B,1)\}$ যাতে 9টি ঘটনাবিন্দু আছে যার প্রত্যেকটি সম্ভাবনা হল 1/9।

X, Y-এর নিজস্ব বর্ণালিগুলি হল

$$x_i = i (i = 0, 1, 2)$$

$$y_i = j (j = 0, 1, 2, 3)$$

তাই দ্বিমাত্রিক চলক (X, Y)-এর বর্ণালি হবে



$(x_i, y_j) = (i, j)$

$(i = 0, 1, 2; j = 0, 1, 2, 3)$

(i, j) যদি $(1, 3), (2, 2), (2, 3)$ বিন্দুগুলি না হয়, $(X = i, Y = j)$ একটি ঘটনাবিন্দু সূচিত করে যার সম্ভাবনা 1/9 এবং (i, j) যদি $(1, 3), (2, 2), (2, 3)$ বিন্দুগুলির যেকোনো একটি হয়, $(X = i, Y = j)$ একটি অসম্ভব ঘটনা। তাই

$$f_{13} = f_{22} = f_{23} = 0$$

এছাড়া আর সব $f_{ij} = 1/9$।

এখন $$f_{xi} = f_{i\cdot} = \sum_{j=0}^{3} f_{ij}$$

$$f_{x0} = \frac{4}{9}, f_{x1} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}, f_{x^2} = \frac{2}{9}.$$

$$f_{yj} = f_{\cdot j} = \sum_{i=0}^{2} f_{ij}$$

$$f_{y0} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}, f_{y1} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}, f_{y^2} = \frac{2}{9}, f_{y^3} = \frac{1}{9}$$

X, Y অনপেক্ষ নয়, কেননা শর্ত (9.4.8) সিদ্ধ হচ্ছে না।

2. যদি X, Y দুটি পোয়াসঁ চলক হয় যাদের প্রচল যথাক্রমে μ_1 ও μ_2, তাহলে

$$x_i = i\,(i = 0, 1, 2, ...), f_{xi} = e^{-\mu_1} \frac{\mu_1^i}{i!}$$

$$y_i = j\,(j = 0, 1, 2, ...), f_{yi} = e^{-\mu_2} \frac{\mu_2^i}{j!}$$

এবং দ্বিমাত্রিক চলক (X, Y)-এর বর্ণালি হল ঃ $(x_i, y_j) = (i, j)\ (i, j = 0, 1, 2, ...)$। এখন যদি X,Y অনপেক্ষ হয়, (9.4.8) দ্বারা

$$f_{ij} = e^{-(\mu_1+\mu_2)} \frac{\mu_1^i \mu_2^j}{i!\,j!}$$

পক্ষান্তরে, যদি একটি দ্বিমাত্রিক নিবেশনের জন্যে f_{ij}-র উপরোক্ত মান হয়, তাহলে

$$f_{i\cdot} = e^{-(\mu_1+\mu_2)} \frac{\mu_1^i}{i!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mu_2^j}{j!} = e^{-\mu_1} \frac{\mu_1^i}{i!}$$

অনুরূপে, $$f_{\cdot j} = e^{-\mu_2} \frac{\mu_2^j}{j!}$$

এবং $f_{ij} = f_{i\cdot} f_{\cdot j}$ সব i, j-র জন্যে সিদ্ধ হচ্ছে। অতএব X, Y দুটি অনপেক্ষ চলক যারা যথাক্রমে পোয়াসঁ-μ_1 ও পোয়াসঁ-μ_2।

9.5 অবিচ্ছিন্ন দ্বিমাত্রিক নিবেশন

দুটি চলক X, Y-এর যুগ্ম নিবেশনকে **অবিচ্ছিন্ন** বলা হয় যদি তাদের যুগ্ম নিবেশন অপেক্ষক $F(x, y)$ সর্বত্র সন্তত হয় এবং এর প্রথম ও দ্বিতীয় আংশিক অন্তরকলজগুলি সর্বত্র খণ্ডভাবে সন্তত (piecewise continuous), অর্থাৎ সমগ্র xy তলে সন্তত এই ব্যতিক্রম ছাড়া যে-কোনো বদ্ধ ক্ষেত্রে (bounded region) সসীমসংখ্যক লম্ফ-অসান্তত্যের বক্ররেখা থাকতে পারে।

1. যেহেতু $F(x, y)$ সর্বত্র সন্তত, যে-কোনো বিন্দু (b, d)-র জন্যে

$$P(X = b, Y = d) = 0$$

যা (9.3.10) থেকে মেলে।

2. যেহেতু

$$\int_c^d\int_a^b \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dxdy = \int_c^d \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{(b,y)} - \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{(a,y)} \right\} dy$$
$$= F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c)$$

(9.3.4) দ্বারা

$$P(a < X \le b, c < Y \le d) = \int_c^d\int_a^b f(x, y) dx\, dy \qquad \text{..... (9.5.1)}$$

যেখানে

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \qquad \text{..... (9.5.2)}$$

স্বভাবতই $f(x, y)$-কে X ও Y-এর **যুগ্ম সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক** বলা হয়।

যদি আয়তাকার ক্ষেত্রের বদলে আমরা xy-তলে যে-কোনো ক্ষেত্র R নিই, তাহলে

$$P\{(X, Y) \in R\} = \iint_R f(x, y) dxdy \qquad \text{..... (9.5.3)}$$

3. $$F(x, y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x, y) dxdy \qquad \text{..... (9.5.4)}$$

4. যেহেতু $F(x, y)$ উভয় চল, x, y-সাপেক্ষে একান্বয়ে বর্ধমান,

$$f(x, y) \ge 0 \text{ সব } x, y\text{-এর জন্যে} \qquad \text{..... (9.5.5)}$$

এবং যেহেতু $F(\infty, \infty) = 1$,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx\, dy = 1 \qquad \text{..... (9.5.6)}$$

অতএব একটি অপেক্ষক $f(x, y)$-কে সম্ভাব্য দ্বিমাত্রিক সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক হতে হলে (9.5.5) ও (9.5.6) এই শর্তদুটি অবশ্য পালনীয়।

5. সম্ভাবনা অন্তরক

$$P(x < X \le x + dx, y < Y \le y + dy)$$
$$= F(x + dx, y + dy) + F(x, y) - F(x + dx, y) - F(x, y + dy)$$
$$= dF(x, y)$$

$$= \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dx\, dy = f(x, y) dx\, dy \qquad ..... (9.5.7)$$

6. X, Y-এর (প্রান্তিক) নিবেশনগুলির জন্য

$$F_x(x) = F(x, \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\infty}^{x} f(x, y) dx\ dy$$

তাই, $$F_x(x) = F'_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \qquad ..... (9.5.8)$$

এবং অনুরূপে, $$f_x(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \qquad ..... (9.5.9)$$

7. X, Y-এর অনপেক্ষতার আবশ্যিক ও পর্যাপ্ত শর্ত হল

$$f(x, y) = f_x(x) f_y(y) = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \right\} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \right\} \qquad ..... (9.5.10)$$

যদি X, Y অনপেক্ষ হয়, সংজ্ঞা দ্বারা

$$F(x, y) = F_x(x)\, F_y(y)$$

তাই, $$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = F'_x(x)\, F'_y(y)$$

বা, $$f(x, y) = f_x(x) f_y(y)$$

আবার যদি (9.5.10) সিদ্ধ হয়, সমাকলন করে পাই

$$\int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} . f(x, y) dx\ dy = \left\{ \int_{-\infty}^{x} f_x(x) dx \right\} \left\{ \int_{-\infty}^{y} f_y(y) dy \right\}$$

যা দেয় (9.3.13)। অতএব উপরের উক্তি প্রমাণিত হল।

উদাহরণ : X, Y চলকদুটির যুগ্ম সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষকের মান হল $K(1 - x - y), x + y = 1$ সরলরেখা ও অক্ষদ্বয় দ্বারা বেষ্টিত ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের মধ্যে এবং শূন্য অন্যত্র। ধ্রুবক K-এর মান এবং $P\left(X < \frac{1}{2}, Y > \frac{1}{4} \right)$ নির্ণয় করুন। X, Y-এর প্রান্তিক নিবেশনগুলি বের করুন এবং চলকদুটি অনপেক্ষ কিনা বিচার করুন।

প্রশ্নানুসারে

$$f(x, y) = K(1 - x - y) \qquad x > 0, y > 0, x + y + 1$$
$$= 0 \qquad \text{অন্যত্র}$$

(9.5.6) দ্বারা

$$1 = K\int_0^1\int_0^{1-y}(1-x-y)dx\,dy = \frac{1}{2}K\int_0^1(1-y)^2\,dy = \frac{1}{6}K$$

যার ফলে $K = 6$। তাই

$$P\left(X < \frac{1}{2}; Y > \frac{1}{4}\right) = 6\int_0^{1/2}\int_{1/4}^{1-x}(1-x-y)dx\,dy$$

$$= 3\int_0^{1/2}\left(\frac{3}{4} - x\right)^2 dx = 13/32$$

(9.5.8) থেকে

$$f_X(x) = 6\int_{1/4}^{1-x}(1-x-y)dy = 3(1-x)^2 \qquad (0 < x < 1)$$

অনুরূপে, $$f_Y(y) = 6\int_0^{1-y}(1-x-y)dx = 3\,(1-y)^2 \qquad (0 < y < 1)$$

যেহেতু $f(x, y) \neq f_X(x) f_Y(y)$, x, y অনপেক্ষ নয়।

9.6 কয়েকটি বিশেষ দ্বিমাত্রিক অবিচ্ছিন্ন নিবেশন

(1) আয়তক্ষেত্রিক বা সম-নিবেশন (Rectangular or uniform distribution) এর ঘনত্ব অপেক্ষক

$$f(x, y) = \frac{1}{(b-a)(d-c)} \qquad \text{যখন } a < x < b, c < y < d$$

$$= 0 \qquad \text{অন্যত্র} \qquad \ldots\ldots (9.6.1)$$

এই নিবেশনের চারটি প্রচল আছে—$a, b, c, d\,(a < b, c < d)$। ঘনত্ব অপেক্ষকের আবশ্যিক শর্ত (9.5.6) এখানে পালিত হচ্ছে।

স্পষ্টতই X, Y অনপেক্ষ এবং যথাক্রমে (a, b) ও (c, d) অন্তরে সম-নিবেশিত।

বিপরীতক্রমে, যদি X, Y দুটি অনপেক্ষ চলক হয় যারা যথাক্রমে (a, b) ও (c, d) অন্তরে সম-নিবেশিত, তাহলে সহজেই প্রমাণ করা যায় যে দ্বিমাত্রিক চলক (X, Y) $a < x < b, c < y < d$ এই আয়তক্ষেত্রে সম-নিবেশিত।

আয়তাকার ক্ষেত্রের পরিবর্তে যে-কোনো ক্ষেত্র R-এ সম-নিবেশনের সংজ্ঞা হবে

$$f(x, y) = \frac{1}{R} \qquad R\text{-এর ভিতরে}$$

$$= 0 \qquad R\text{-এর বাইরে}$$

যেখানে R-এর ক্ষেত্রফল R লেখা হল।

যদি R' R-এর একটি উপক্ষেত্র হয়, তাহলে

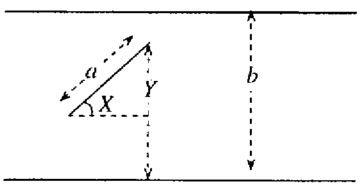
$$P\{(X, Y) \in R'\} = \int_{R'} f(x, y) dx\, dy = \frac{R'}{R} \qquad ......(9.6.2)$$

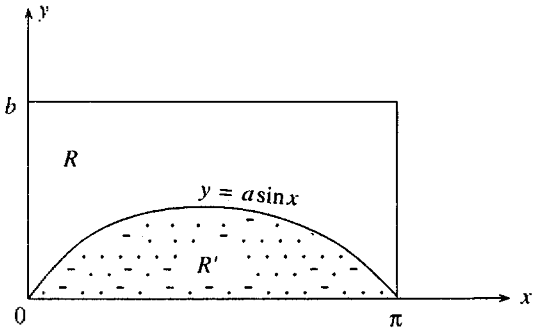
এবার আমরা (9.6.2) সূত্রের সাহায্যে কয়েকটি সমস্যার সমাধান করব।

উদাহরণ

1. বিউফোঁর সূচ সমস্যা (Buffon's Needle Problem) : একটি খাড়া বোর্ডের উপর সমদূরত্বে অনুভূমিক সমান্তরাল রেখা আঁকা আছে যেখানে দুটি পরপর সমান্তরাল রেখার মধ্যে দূরত্ব b। একটি সূচ যার দৈর্ঘ্য $a(< b)$ যদৃচ্ছভাবে বোর্ডের উপর ছোড়া হলে সূচটি একটি সমান্তরাল রেখাকে ছেদ করার সম্ভাবনা কত ?

ধরা যাক সূচটি অনুভূমিক সঙ্গে যে কোণ উৎপন্ন করে তা হল চলক X এবং চলক Y হল সূচের





উপরের প্রান্তটি দূরত্ব ঠিক তার নিচের সমান্তরাল রেখার থেকে। পরীক্ষার পদ্ধতি থেকে ধরা যেতে পারে যে X, Y উভয়ই সমভাবে নিবেশিত, $X(0, \pi)$ অন্তরে ও $Y(0, \text{b})$ অন্তরে এবং X, Y অনপেক্ষ। অতএব দ্বিমাত্রিক চলক (X, Y) আয়তক্ষেত্র $R: 0 < x < \pi < 0 < y < b$-এর উপর সমভাবে নিবেশিত।

সূচটি একটি সমান্তরাল রেখাকে ছেদ করে এই ঘটনা হল $0 \le Y \le a \sin X$ অথবা যদৃচ্ছ বিন্দু (X, Y) R': $0 \le y \le a \sin x$ এই ক্ষেত্রে অবস্থিত। এখন

$$R = \pi b,\ R' = \int_0^{\pi} a \sin x\, dx = 2a$$

(9.6.2) দ্বারা নির্ণেয় সম্ভাবনা হল $2a/\pi b$।

2. $(-1, 1)$ অন্তরে দুটি বিন্দু যদৃচ্ছভাবে ও স্বাধীনভাবে নির্বাচন করা হল। এই বিন্দুগুলির দ্বারা অন্তরটি যে তিন ভাগে বিভক্ত হল তারা একটি ত্রিভুজের বাহু হওয়ার সম্ভাবনা কত ?

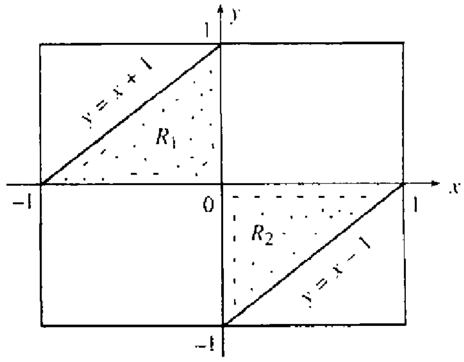
নির্বাচিত বিন্দুদুটি যদৃচ্ছ চলক X, Y দ্বারা সূচিত করা যাক। তাহলে আমরা ধরতে পারি X, Y অনপেক্ষ এবং প্রত্যেকটি $(-1, 1)$ অন্তরে সম-নিবেশিত যার ফলে দ্বিমাত্রিক চলক (X, Y) $x = \pm 1, y \pm 1$ সরলরেখাগুলির দ্বারা বেষ্টিত একটি বর্গক্ষেত্র R-এ সম-নিবেশিত।

যদি $Y > X$ হয়, তাহলে কাঙ্ক্ষিত ঘটনা নিম্নলিখিত অসমতাগুলির দ্বারা প্রকাশ করা যায় :

$X+1+Y-X > 1-Y$ বা $Y > 0$

$Y-X+1-Y > X-1$ বা $X < 0$

$X+1+1-Y > Y-X$ বা $Y < X+1$



অর্থাৎ (X, Y) থাকে একটি ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র R_1-এ যা $y = x+1$ সরলরেখা ও অক্ষদুটির দ্বারা বেষ্টিত।

অনুরূপে, যখন $X > Y$, কাঙ্ক্ষিত ঘটনার মানে দাঁড়ায় (X, Y) ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র R_2-এ থাকে যা $y = x-1$ ও অক্ষদুটির দ্বারা বেষ্টিত। যেহেতু

$$R = 4,\ R_1 = R_2 = \frac{1}{2}$$

কাঙ্ক্ষিত সম্ভাবনা হল $(R_1 + R_2)/R = 1/4$।

(2) দ্বিমাত্রিক স্বাভাবিক নিবেশন : এখানে

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_x\sqrt{1-\rho^2}}\, e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - 2\rho\frac{(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right\}}$$

$$(-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty) \qquad \text{.....} (9.6.3)$$

যেখানে $m_x, m_y, \sigma_x(>0), \sigma_y(>0)$ এবং $\rho(-1 < \rho < 1)$ নিবেশনটির পাঁচটি প্রচল।

X-এর (প্রান্তিক) নিবেশনের প্রসঙ্গে

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - 2\rho\frac{(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right\}} dy$$

$x' = \dfrac{x-m_x}{\sigma_x},\ y' = \dfrac{y-m_y}{\sigma_y}$ ধরলে

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x'^2 - 2\rho x'y' + y'^2)}{2(1-\rho^2)}} dy'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{x'^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y'-\rho x')^2}{2(1-\rho^2)}} dy'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{x'^2}{2}}$$

যেহেতু গুণের দ্বিতীয় পদের চেহারা

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y'-m)^2}{2\sigma^2}} dy'$$

যার মান 1,

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

অর্থাৎ X-এর নিবেশন হচ্ছে স্বাভাবিক (m_x, σ_x)। অনুরূপে Y-এর নিবেশন স্বাভাবিক (m_y, σ_y)। লক্ষ্য করুন X ও Y-এর নিজস্ব নিবেশনগুলি প্রচল ρ-এর উপর নির্ভর করে না।

আরও আমরা দেখি

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)dx \ = 1$$

যা একটি আবশ্যিক শর্ত।

নিম্নলিখিত উপবৃত্ত পরিবারের কথা বিবেচনা করুন :

$$\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - 2\rho\frac{(x-m_x)(x-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_x)}{\sigma_x^2} = \lambda^2 \qquad \text{..... (9.6.4)}$$

যেখানে λ একটি প্রচল। এই পরিবারের প্রত্যেকটি উপবৃত্তের উপর ঘনত্ব অপেক্ষক ধ্রুবক এবং তাই এগুলিকে **সমসম্ভাবনার উপবৃত্ত** বলা হয়।

উপবৃত্ত λ-র উপর

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{\lambda^2}{2(1-\rho^2)}}$$

এবং এই উপবৃত্তের **ক্ষেত্রফল**

$$A = A(\lambda) = 1\Big/\sqrt{\frac{1}{\lambda^4\sigma_x^2\sigma_y^2} - \frac{\rho^2}{\lambda^4\sigma_x^2\sigma_y^2}} = \frac{\pi\lambda^2\sigma_x\sigma_y}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

তাই

$$dA = \frac{2\pi\lambda\sigma_x\sigma_y}{\sqrt{1-\rho^2}} d\lambda$$

যা উপবৃত্ত λ ও উপবৃত্ত $\lambda + d1\lambda$-র মধ্যেকার ক্ষুদ্রাংশের ক্ষেত্রফল। (X, Y) এই ক্ষুদ্রাংশে থাকার সম্ভাবনা স্পষ্টতই

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho}} e^{-\frac{\lambda^2}{2(1-\rho^2)}} . \frac{2\pi\lambda\sigma_x\sigma_y}{\sqrt{1-\rho^2}} d\lambda$$

$$= \frac{\lambda e^{-\frac{\lambda^2}{2(1-\rho^2)}}}{1-\rho^2} d\lambda$$

এবং সেহেতু (X, Y) উপবৃত্ত λ-র ভিতরে থাকার সম্ভাবনা হল

$$= \frac{1}{1-\rho^2} \int_0^{\lambda} \lambda_e \frac{\lambda^2}{2(1-\rho^2)} d\lambda$$

$$= 1 - e^{-\frac{\lambda^2}{2(1-\rho^2)}} \qquad \text{..... (9.6.5)}$$

9.7 বহুমাত্রিক সম্প্রসারণ

প্রথমে তিনটি চলক X, Y, Z-এর কথা ভাবা যাক। X, Y, Z-এর যুগ্ম নিবেশন অপেক্ষক বা ত্রিমাত্রিক চলক (X, Y, Z)-এর নিবেশন অপেক্ষক $F(x, y, z)$-এর সংজ্ঞা হবে

$$F(x, y, z) = P(-\infty < X \leq x, -\infty < Y \leq y, -\infty < Z \leq z) \qquad \text{..... (9.7.1)}$$

(X, Y) চলকের প্রান্তিক নিবেশনের জন্যে

$$F_{x,y}(x, y) = F(x, y, \infty) \qquad \text{..... (9.7.2)}$$

এবং তাই

$$F_x(x) = F_{x,y}(x, \infty) = F(x, \infty, \infty) \qquad \text{..... (9.7.3)}$$

ইত্যাদি।

(X, Y) ও Z চলকদুটিকে অনপেক্ষ বলা হবে যদি

$$F(x, y, z) = F_{x,y}(x, y) F_z(z) \qquad \text{..... (9.7.4)}$$

অবিচ্ছিন্ন নিবেশনের বেলায় যদি $f(x, y, z)$ X, Y, Z চলকের যুগ্ম ঘনত্ব অপেক্ষক হয়, তাহলে প্রান্তিক ঘনত্ব অপেক্ষকগুলি এইভাবে পাওয়া যাবে ঃ

$$f_{x,y}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) dz \qquad \text{..... (9.7.5)}$$

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x, y) dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) dy\, dz \qquad \text{..... (9.7.6)}$$

অনপেক্ষতার শর্ত (9.7.4) হয়ে দাঁড়াবে

$$f(x, y, z) = f_{x,y}(x, y) f_z(z) \qquad \text{..... (9.7.7)}$$

X, Y, Z চলকগুলিকে পরস্পর অনপেক্ষ বলা হবে যদি

$$F(x, y, z) = F_x(x) F_y(y) F_z(z) \qquad \text{..... (9.7.8)}$$

উপপাদ্য : যদি X, Y, Z পরস্পর অনপেক্ষ হয়, তাহলে (i) X ও Y অনপেক্ষ, (ii) (X, Y) ও Z অনপেক্ষ।

প্রমাণ। (9.7.8) দ্বারা

$$F_{x,y}(x, y) = F(x, y, \infty) = F_x(x)\, F_y(y)\, F_x(\infty) = F_x(x)\, F_y(y)$$

এবং তাই

$$F(x, y, z) = F_{x,y}(x, y)\, F_z(z)$$

যা উপপাদ্যটি প্রমাণ করে।

¼ÓëËÛìí û nটি চলক $X_1, X_2, ..., X_n$-কে **পরস্পর অনপেক্ষ** বলা হয় যদি তাদের যুগ্ম সম্ভাবনা অপেক্ষক

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = F_{x_1}(x_1) F_{x_2}(x_2) \dots F_{xn}(x_n) \qquad ..... (9.7.9)$$

অবিচ্ছিন্ন নিবেশনের বেলায় (9.7.9)-এর সমতুল্য শর্ত হবে

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = f_{x_1}(x_1) f_{x_2}(x_2) \dots f_{xn}(x_n) \qquad ..... (9.7.10)$$

যেখানে বাঁদিক হল চলকগুলির যুগ্ম সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক।

n-সংখ্যক চলকের বেলায় উপরোক্ত উপপাদ্যের সম্প্রসারণ সহজ এবং স্পষ্ট।

9.8 সারাংশ

এখানে প্রথমে দ্বিমাত্রিক সম্ভাবনা নিবেশনের জন্য নিবেশন অপেক্ষকের সংজ্ঞা দেওয়া হল এবং এর থেকে চলকদুটির নিজ নিজ নিবেশন অপেক্ষক নির্ণয় করার পদ্ধতির আলোচনা হল। দুটি চলকের অনপেক্ষতার সংজ্ঞা এই প্রসঙ্গে দেওয়া হল।

উপরোক্ত আলোচনা বিচ্ছিন্ন ও অবিচ্ছিন্ন নিবেশনের ক্ষেত্রে আলাদা করে বিশদভাবে করা হল। কয়েকটি বিশেষ অবিচ্ছিন্ন দ্বিমাত্রিক নিবেশনের কথা বলা হল যার মধ্যে দ্বিমাত্রিক স্বাভাবিক নিবেশন অন্যতম।

শেষে কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ ফলাফলের বহুমাত্রিক সম্প্রসারণ করা হল।

9.9 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

1. একটি মুদ্রার দুপিঠে যথাক্রমে 0 ও 1 সংখ্যাদুটি অঙ্কিত আছে। এই মুদ্রাটি অনপেক্ষভাবে দুবার ছোড়া হল। এই যদৃচ্ছ পরীক্ষার যুক্ত দুটি চলক X ও Y-এর সংজ্ঞা যদি নিম্নরূপ হয়, তাহলে তাদের যুগ্ম নিবেশন নির্ণয় করুন, এবং তার থেকে X ও Y-এর প্রান্তিক নিবেশন বের করুন। যাচাই করুন চলকদুটি অনপেক্ষ কিনা।

(i) X, Y যথাক্রমে প্রথম ও দ্বিতীয় প্রাপ্ত সংখ্যা।

(ii) X—প্রথম প্রাপ্ত সংখ্যা, Y—প্রাপ্ত সংখ্যাদুটির যোগফল।

2. একটি মুদ্রার দুপিঠে যথাক্রমে 0 ও 1। সংখ্যাদুটি অঙ্কিত আছে এবং একটি ছক্কার বিপরীত পিঠে একই সংখ্যা অঙ্কিত আছে এবং সংখ্যাগুলি হল 1, 2, 3। প্রথমে মুদ্রাটি ছোড়া হল এবং ছক্কাটি তারপর অনপেক্ষভাবে ছোড়া হল। X, Y চলকদুটির সংজ্ঞা নিম্নরূপে হলে X ও Y-এর যুগ্ম নিবেশন নির্ণয় করুন। তাদের প্রান্তিক নিবেশনগুলি নির্ণয় করুন এবং যাচাই করুন চলকদুটি অনপেক্ষ কিনা।

(i) X—মুদ্রার প্রাপ্ত সংখ্যা, Y—ছক্কার প্রাপ্ত সংখ্যা।

(ii) X—মুদ্রার প্রাপ্ত সংখ্যা, Y—ছক্কার প্রাপ্ত সংখ্যা থেকে মুদ্রার প্রাপ্ত সংখ্যার বিয়োগফল।

3. একটি পাত্রে $0, 1, 2, ..., 8$ এই নম্বরযুক্ত 9টি বল আছে, যার মধ্যে প্রথম 4টি সাদা, পরের 3টি লাল এবং শেষের 2টি কালো। যদি সাদা, লাল, কালো এই রঙগুলিকে যথাক্রমে রঙ নম্বর $0, 1, 2$ বলা হয়, তাহলে একটি বল টানায় বলের নম্বর ও রঙের এই দুটি চলকের যুগ্ম নিবেশন নির্ণয় করুন। এর থেকে চলকদুটির নিজস্ব নিবেশনগুলি বের করুন। চলকদুটি কি অনপেক্ষ ?

4. একটি পাত্রে 12টি সাদা, লাল ও কালো বল আছে, যার মধ্যে প্রত্যেক রঙের 4টি করে, $0, 1, 2, 3$ নম্বরযুক্ত বল আছে। সাদা, লাল, কালো এই রঙগুলিকে নম্বর দেওয়া হল যথাক্রমে $0, 1, 2$। দেখান যে একটি বল টানায় বলের নম্বর ও রঙের নম্বর দুটি অনপেক্ষ চলক।

5. X, Y-এর যুগ্ম ঘনত্ব অপেক্ষক হল

$$f(x, y) = (6 - x - y)/8 \qquad 0 < x < 2, 2 < y < 4$$
$$= 0 \qquad \text{অন্যত্র}$$

নির্ণয় করুন

(i) $P(x < 1, Y < 3)$ (ii) $P(X + Y < 3)$

6. ধ্রুবক K-এর মান নির্ণয় করুন যার জন্য

$$f(x, y) = Kxy \qquad (0 < x < 1, 0 < y < x)$$

একটি সম্ভাব্য দ্বিমাত্রিক ঘনত্ব অপেক্ষক হয়। প্রান্তিক ঘনত্ব অপেক্ষকগুলি নির্ণয় করুন এবং দেখান যে চলকদুটি অনপেক্ষ নয়।

7. যদি দ্বিমাত্রিক ঘনত্ব অপেক্ষক

$$f(x, y) = 3x^2 - 8xy + 6y^2 \qquad (0 < x < 1, 0 < y < 1)$$

হয়, তাহলে দেখান যে অপেক্ষকদুটি অনপেক্ষ নয়।

8. X, Y-এর যুগ্ম ঘনত্ব অপেক্ষক হল

$$f(x, y) = 2 \qquad (0 < x < 1, 0 < y < x)$$

X ও Y-এর নিজস্ব ঘনত্ব অপেক্ষকগুলি নির্ণয় করুন।

9. (X, Y)-এর ঘনত্ব অপেক্ষক হল

$$f(x, y) = 2 \qquad \text{যখন } x + y < 1, x > 0, y < 0$$
$$= 0 \qquad \text{অন্যত্র}$$

$f_X(x)$ নিরূপণ করুন।

10. X, Y দুটি অনপেক্ষ $(0, 1)$ অন্তরে সম-নিবেশিত চলক এবং k একটি ধ্রুবক $(0 < k < 1)$। তাহলে নীচের সম্ভাবনাগুলি নির্ণয় করুন :

(i) $P(|X - Y| < k)$ (ii) $P(XY < k)$

11. যদি X, Y অনপেক্ষ চলক হয় যার প্রত্যেক $(-1, 1)$ অন্তরে সম-নিবেশিত, তাহলে $t^2 + 2xt + Y = 0$ এই সমীকরণের বাস্তব বীজ থাকার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

12. একটি বর্গাকার নিশানা বোর্ডের শীর্ষবিন্দুগুলি হল $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, 1)$। একটি বর্শাফলক

এই বোর্ডের উপর যদৃচ্ছভাবে নিক্ষেপ করা হলে ছেদবিন্দু যদি (X, Y) হয়, তাহলে X, Y-এর প্রান্তিক ঘনত্ব অপেক্ষক নির্ণয় করুন এবং দেখান যে তারা অনপেক্ষ নয়।

13. একটি সরলরেখাখণ্ড ABC বিন্দুর দ্বারা AC ও AB এই দুভাগে বিভক্ত যাদের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a ও b। দুটি বিন্দু P ও Q স্বাধীনভাবে ও যদৃচ্ছভাবে যথাক্রমে AC ও CB-র উপর নেওয়া হল। AP, PQ, QB একটি ত্রিভুজ তৈরি করতে পারার সম্ভাবনা কত ?

14. দ্বিচলক স্বাভাবিক নিবেশনে সেই সমসম্ভাবনার উপবৃত্ত λ, যেখানে উপবৃত্ত λ ও উপবৃত্ত $\lambda+d\lambda$-র মধ্যেকার ক্ষুদ্রাংশে থাকা সম্ভাবনা ভর চরম হয়। (স্থির $d\lambda$–র জন্য), তাকে চরম সম্ভাবনার উপবৃত্ত বলা হয়। এই উপবৃত্তের বাইরে থাকা সম্ভাবনা ভর নির্ণয় করুন।

9.10 উত্তরমালা

1. এই যদৃচ্ছ পরীক্ষার ঘটনাদেশ $S = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$, যার প্রত্যেকটি ঘটনাবিন্দু সম্ভাবনা 1/4 কেননা প্রচেষ্টাদুটি অনপেক্ষ।

(i) (X, Y)-এর বর্ণালি $(x_i, y_j) = (i, j)\ (i, j = 0, 1)$।

$$f_{ij} = P(X = i, Y = j) = \frac{1}{4}$$

যেহেতু $(X = i, Y = j)$ একটি ঘটনাবিন্দু (i, j)।

$f_{xi} = f_{i\cdot} = \frac{1}{2}, f_{xj} = f_{\cdot j} = \frac{1}{2}$ সব i, j-র জন্য। $f_{ij} = f_{i\cdot} f_{\cdot j}$ সব i, j-র জন্য, তাই X, Y অনপেক্ষ।

(ii) (X, Y)-এর বর্ণালি ঃ $(x_i, y_j) = (i, j)\ (i = 0, 1; j = 0, 1, 2)$

$$f_{00} = P(X = 0, Y = 0) = \frac{1}{4}, f_{01} = P(X = 0, Y = 1) = \frac{1}{4}$$
$$f_{02} = P(X = 0, Y = 2) = 0, f_{10} = P(X = 1, Y = 0) = 0$$
$$f_{11} = P(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{4}, f_{12} = P(X = 1, Y = 2) = \frac{1}{4}$$
$$f_{0\cdot} = \frac{1}{2}, f_{1\cdot} = \frac{1}{2}, f_{\cdot 0} = \frac{1}{4}, f_{\cdot 1} = \frac{1}{2}, f_{\cdot 2} = \frac{1}{4}$$
$$f_{x0} = f_{x1} = \frac{1}{2}, f_{y0} = \frac{1}{4}, f_{y1} = \frac{1}{2}, f_{x2} = \frac{1}{4}$$

$f_{00} \neq f_{0\cdot} f_{\cdot 0}$, তাই X, Y অনপেক্ষ নয়।

2. এখানে ঘটনাদেশ $S = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$, যার প্রত্যেকটি ঘটনাবিন্দুর সম্ভাবনা $\frac{1}{6}$।

(i) (X, Y)-এর বর্ণালি : $(x_i, y_i) = (i, j)\ (i = 0, 1; j = 1, 2, 3)$

$$f_{ij} = P(X = i, Y = j) = \frac{1}{6} \qquad \text{সব } i, j\text{-র জন্য}$$

যেহেতু $(X = i, Y = j)$ একটি ঘটনাবিন্দু।

$$f_{xi} = f_{i\cdot} = \frac{1}{2}; f_{xj} = f_{\cdot j} = \frac{1}{3}$$ সব i, j-র জন্য

$f_{ij} = f_{i\cdot} f_{\cdot j}$, সব i, j-র জন্য, তাই X, Y অনপেক্ষ।

(ii) (X, Y)-এর বর্ণালি ঃ $(x_i, y_i) = (i, j)$ $(i = 0, 1; j = 1, 2, 3)$

$$f_{00} = P(X = 0,\ Y = 0) = 0,\ f_{01} = P(X = 0, Y = 1) = \frac{1}{6}$$

$$f_{02} = P(X = 0, Y = 2) = \frac{1}{6}, f_{03} = P(X = 1, Y = 3) = \frac{1}{6}$$

অনুরূপে, $$f_{10} = \frac{1}{6},\ f_{11} = \frac{1}{6},\ f_{12} = \frac{1}{6},\ f_{13} = 0$$

$$f_0 = \frac{1}{2},\ f_{1\cdot} = \frac{1}{2},\ f_{\cdot 0} = \frac{1}{6}, f_{\cdot 1} = \frac{1}{3},\ f_{\cdot 2} = \frac{1}{2}, f_{\cdot 3} = \frac{1}{6}$$

$$f_{xi} = (i = 0,1),\ f_{xj} = \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\ (j = 0,\ 1,\ 3,\ 2)$$

$f_{00} \neq f_{0\cdot} f_{\cdot 0}$, অতএব X, Y অনপেক্ষ নয়।

3. মনে করুন X—বলের নম্বর, Y—রঙের নম্বর। (X, Y)-এর বর্ণালি $(x_i, y_i) = (i, j)$ $(i = 0, 1, \ldots, 8; j = 0, 1, 2)$।

$f_{ij} = \frac{1}{9}$ যদি $(i = 0, 1, 2, 3; j = 0), (i = 4, 5, 6; j = 1), (i = 7, 8; j = 2)$ এবং অন্য সব $f_{ij} = 0$

$$f_{xi} = f_{i.} = \frac{1}{9}$$ সব i-এর জন্য

$$f_{xi} = f_{.j} = \frac{4}{9,}\frac{1}{3}, \frac{2}{9}$$ $(j = 0, 1, 2)$

X, Y অনপেক্ষ নয়।

4. X—বলের নম্বর, Y—রঙের নম্বর। (X, Y)-এর বর্ণালি : $(x_i, y_i) = (i, j)$ $(i = 0, 1, 2, 3; j = 0, 1, 2)$।

$f_{ij} = 1/12$ সব i, j-জন্য। $f_{xi} = f_i = \frac{1}{4}$ সব i-এর জন্য এবং $f_{xj} = f_{.j} = \frac{1}{3}$ সব j-র জন্য।

$f_{ij} = f_{i\cdot} f_{\cdot j}$ সব i, j-র জন্য, তাই X, Y অনপেক্ষ।

5. (i) $P(X < 1, Y < 3) \quad = P(0 < X < 1, 2 < Y < 3)$

$$= \frac{1}{8}\int_2^3\int_0^1 (6 - x - y)dx\,dy = \frac{3}{8}$$

(ii) $P(X + Y < 3)$ $$\frac{1}{8}\cdot\int_2^3\int_0^{3-y} (6 - x - y)dx\,dy = \frac{5}{24}$$

6. $K = 8, f_x(x) = 4x^3\ (0 < x < 1), f_y(y) = 4y(1 - y)^2\ (0 < y < 1)$। $f(x, y) \neq f_x(x)\ f_y(y)$, অতএব X, Y অনপেক্ষ নয়।

7. $f_X(x) = 3x^2 - 4x + 2\ (0 < x < 1),\ f_Y(y) = 6y^2 - 4y + 1\ (0 < x < 1)$ । $f(x, y) \neq f_X(x)\ f_Y(y)$, তাই এই সিদ্ধান্ত।

8. $f_X(x) = 2x\ (0 < x < 1);\ f_Y(y) = 2(1 - y)\ (0 < y < 1)$

9. $f_X(x) = 2\,(1 - x)\ (0 < x < 1)$

10. $(X, Y)\ R : 0 < x < 1, 0 < y < 1$ এই বর্গের উপর সম-নিবেশিত।

(i) $|X, Y| < k$ হল $Y < X + k$ যদি $Y > X$ এবং $Y > X - k$ যদি $Y < X$ হয়, অর্থাৎ (X, Y) R'-এ থাকে যেখানে $R'R$-এর সেই অংশ যা $y = x \pm k$ সরলরেখাদুটির মধ্যে নিবন্ধ। $R = 1, R' = 1 - (1 - k)^2$ $= k(2 - k)$ । (9.6.2) দ্বারা নির্ণেয় সম্ভাবনা $= k\,(2 - k)$ ।

(ii) $XY < K$ এই ঘটনার মানে হল $(X, Y)\ R' : xy < k$, R-এর এই উপক্ষেত্র থাকে। $R = 1$, ।

$R' = k + k\int\limits_k^1 dx / x = k(1 - \log k)$ । (9.6.2) দ্বারা নির্ণেয় সম্ভাবনা $= k(1 - \log k)$ ।

11. $(X, Y)\ R : -1 < x < 1, -1 < y < 1$ এই বর্গক্ষেত্র সম-নিবেশিত। কাঙ্ক্ষিত ঘটনাটি হল $x^2 > y$ অথবা $(X, Y)\ R' : x^2 > y$, R-এর এই উপক্ষেত্রে থাকে। $R = 4, R' = 2 + 2\int\limits_0^1 x^2 dx = 8/3$ অতএব নির্ণেয় সম্ভাবনা $= 2/3$ ।

12. যদি $0 < x < 1$ হয়,

$$f_X(x) = \int\limits_{-(1-x)}^{1-x} \frac{1}{2}\,dy = 1 - x$$

যদি $-1 < x < 0$ হয়,

$$f_X(x) = \int\limits_{-1-x}^{1+x} \frac{1}{2}\,dy = 1 + x$$

অনুরূপভাবে,

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 - y & \text{যদি } 0 < y < 1 \\ 1 + y & \text{যদি } -1 < y < 0 \end{cases}$$

13. A-কে মূলবিন্দু ধরে মনে করুন X, Y যথাক্রমে P, Q-র স্থানাঙ্ক। X, Y অনপেক্ষ এবং (X, Y) $R : 0 < x, < a, a < y < a + b$ এই আয়তক্ষেত্রে সমভাবে নিবেশিত। কাঙ্ক্ষিত ঘটনা হল $X < (a + b)/2, Y > (a + b)/2, Y > X\,(a + b)/2$ অথবা $(X, Y)\ R' : x < (a + b)/2, y > (a + b)/2, y < x + (a + b)/2$ এই ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রে থাকে। $R = ab$, $R' = \frac{1}{2}b^2$ তাই নির্ণেয় সম্ভাবনা $= b/2a$ ।

14. উপবৃত্ত λ ও $\lambda + d\lambda$-র মধ্যেকার ক্ষেত্রে থাকা সম্ভাবনা ভর চরম হয় যখন $\lambda e^{-\lambda^2/2(1-\rho^2)}$ চরম হয়, এবং তা হয় যখন $\lambda^2 = 1 - \rho^2$ । (9.6.5) দ্বারা নির্ণেয় সম্ভাবনা ভর $= 1/\sqrt{e}$ ।

একক 10 ❐ শর্তাধীন নিবেশন এবং দ্বিমাত্রিক রূপান্তর (Conditional distributions and two-dimensional transformation)

গঠন

10.1 প্রস্তাবনা

এই এককে প্রথমে শর্তাধীন নিবেশনের ধারণা দেওয়া হবে বিচ্ছিন্ন ও অবিচ্ছিন্ন ক্ষেত্রে আলাদা আলাদাভাবে। এরপর দ্বিমাত্রিক চলকের রূপান্তরের তত্ত্ব আলোচনা করা হবে। এই তত্ত্বের সাহায্যে দুটি চলকের যেকোনো সন্তত অপেক্ষকের সম্ভাবনা নিবেশন নির্ণয় করার পদ্ধতি বর্ণনা করা হবে যা একটি বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ বিষয়। শেষে কয়েকটি প্রয়োজনীয় ফলাফলের বহুমাত্রিক সম্প্রসারণ করা হবে।

10.2 উদ্দেশ্য

এই একক পড়লে আপনারা জানতে পারবেন

- শর্তাধীন নিবেশনের ধারণা
- দ্বিমাত্রিক চলকের রূপান্তর তত্ত্ব
- দুটি চলকের যে-কোনো অপেক্ষকের নিবেশন নির্ণয় পদ্ধতি
- উপরোক্ত প্রয়োজনীয় ফলাফলের বহুমাত্রিক সম্প্রসারণ

10.3 শর্তাধীন নিবেশন

বিচ্ছিন্ন নিবেশন

সংজ্ঞা থেকে শর্তাধীন সম্ভাবনা,

অবিচ্ছিন্ন নিবেশন : এখানে

$$P(a < X \le b | y < Y < y + \Delta y) = \frac{P(a < X \le b, y < Y < y + \Delta y)}{P(y < Y < y + \Delta y)}$$

$$= \frac{\int_y^{y+\Delta y} \int_a^b f(x, y) dx\ dy}{\int_y^{y+\Delta y} f_y(y) dy}$$

$f(x, y)$ ও $f_y(y)$-কে নিজ নিজ সমাকলনের অঞ্চলে সন্তত ধরলে গড়মান উপপাদ্য দ্বারা পাই

$$P(a < X \le b | y < Y < y + \Delta y) = \frac{\Delta y \int_a^b f(x, \eta_1) dx}{\Delta y f_y(\eta_2)} \qquad (y < \eta_1 = \eta_1(x), \eta_2 < y + \Delta y)$$

$$= \frac{\int_a^b f(x, \eta_1) dx}{f_y(\eta_2)}$$

এবার $\Delta y \to 0$ করলে পাই

$$P(a < X \le b | Y = y) = \frac{\int_a^b f(x, y) dx}{f_y(y)}$$

যেখানে বাঁপক্ষের অর্থ হল

$$\lim_{\Delta y \to 0} P(a < X \le b \mid y < Y < y + \Delta y)$$

যদি লিখি

$$f_x(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_y(y)} \qquad \text{..... (10.3.7)}$$

তাহলে

$$P(a < X \le b \mid y = y) = \int_a^b f(x \mid y) dx \qquad \text{..... (10.3.8)}$$

অতএব $f_x(x|y) \ge 0$ এবং (10.3.7)-কে সমাকলন করে পাই

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x|y) dx = 1 \qquad \text{..... (10.3.9)}$$

$$P\left(X<\frac{1}{2}\middle|Y=\frac{1}{4}\right)=\frac{32}{9}\int_0^{1/2}\left(\frac{3}{4}-x\right)dx=\frac{8}{9}$$

3. দ্বিমাত্রিক স্বাভাবিক নিবেশনের বেলায়

$$f_X(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_y(y)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma_x^2(1-\rho^2)}\left\{x-m_x-\rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-m_y)\right\}^2} \quad ..... (10.3.16)$$

যা দেখায় যে $Y = y$ অনুমানের ভিত্তিতে X-এর শর্তাধীন নিবেশনও স্বাভাবিক যার প্রচলগুলি হল

$$\left(m_x+\rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-m_y),\sigma_x\sqrt{1-\rho^2}\right)$$

অনুরূপে $X = x$ অনুমানের ভিত্তিতে Y-এর শর্তাধীন নিবেশন হবে স্বাভাবিক

$$\left(m_y+\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(y-m_x),\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}\right)$$

10.4 দ্বিমাত্রিক চলকের রূপান্তর

এই রূপান্তর তত্ত্বে আমরা কেবল অবিচ্ছিন্ন নিবেশনের কথা আলোচনা করব। ধরা যাক $(x, y) \to (u, v)$ একটি বাস্তব চলের রূপান্তর যার সংজ্ঞা হল

$$u = u(x, y) \; v = v(x, y)$$

যেখানে $u(x, y), v(x, y)$ সর্বত্র সন্ততভাবে অন্তরকলনযোগ্য এবং রূপান্তরের জ্যাকোবিয়ান (Jacobian)

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$$

সর্বত্র >0 অথবা সর্বত্র <0 যার ফলে বিপরীত রূপান্তর $(u, v) \to (x, y)$ $x = x(u, v), y = y(u, v)$ দ্বারা অনন্যভাবে সংজ্ঞায়িত।

X, Y-এর যুগ্ম ঘনত্ব অপেক্ষক দেওয়া থাকলে আমাদের নির্ণয় করতে হবে $U = u(X, Y)$ ও $V = v(X, Y)$ এই দুটি চলকের যুগ্ম ঘনত্ব অপেক্ষক।

উপরোক্ত রূপান্তরের ফলে সম্ভাবনা অন্তরক অপরিবর্তিত থাকছে, অর্থাৎ

$$dF = P(x < X \le x + dx, y < Y \le y + dy)$$
$$= P(< U \le u + dy, v < V \le v + dv)$$

প্রমাণ। যদি লিখি

$$u=\frac{x-m_x}{\sigma_x}, v=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left\{\frac{y-m_y}{\sigma_y}-\rho\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right\}$$

তাহলে $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\dfrac{1}{\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}$, একটি ধনাত্মক ধ্রুবক। (10.4.1) দ্বারা

$$f_{u,\,v}(u,\,v)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\frac{(x-m_x)}{\sigma_x{}^2}-2\rho\frac{(x-m_x)-(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y{}_2}\right\}}\times\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-(u^2+v^2)/2}=\frac{1}{2\pi}e^{u^2/2}.\frac{1}{2\pi}e^{-v^2/2}$$

যা উপপাদ্যটি প্রমাণ করে।

2. যদি X, Y অনপেক্ষ γ-চলক হয় যার প্রচল যথাক্রমে l ও m তাহলে (i) $X+Y$ একটি $\gamma(l+m)$ চলক এবং (ii) X/Y একটি $\beta_2(l,\,m)$ চলক।

প্রমাণ। উপরোক্ত দুটি ফলই একসঙ্গো প্রমাণ করা যাবে যদি আমরা ধরি

$$U=X+Y,\ V=X/Y;\ u=x+y,\ v,\ x/y$$

তাহলে $$x=\frac{uv}{1+v}, y=\frac{uv}{1+v}; \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=-\frac{x+y}{y^2}$$

যেহেতু x, y 0 থেকে ∞ পর্যন্ত বিচরণ করে, u, v-ও 0 থেকে ∞ পর্যন্ত বিচরণ করে।

যেহেতু X, Y অনপেক্ষ, তাদের যুগ্ম সম্ভাবনা অন্তরক

$$dF=\frac{e^{-x}x^{l-1}e^{-y}y^{m-1}}{\Gamma(l)}\frac{e^{-x}y^{m-1}}{\Gamma(m)}dx\ dy$$

$$=\frac{e^{-(x+y)}x^{l-1}y^{m-1}}{\Gamma(l)\Gamma(l)}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|du\ dv$$

$$=\frac{e^{-(x+y)}x^{l-1}y^{m-1}}{\Gamma(l)\Gamma(m)(x+y)}du\ dv$$

$$=$$

এখন $f\left(u, \frac{u}{v}\right) = v + \frac{u}{v}$ যখন $0 < v < 1, 0 < \frac{u}{v} < 1$, অর্থাৎ যখন $u < v < 1$ $(0 < u < 1)$ এবং অন্যত্র শূন্য। তাই

$$f_u(u) = \int_u^1 \left(1 + \frac{u}{v^2}\right) dv = 2(1-u) \quad (0 < u < 1)$$

উপপাদ্য :যদি X, Y দুটি অনপেক্ষ অবিচ্ছিন্ন চলক হয়, তাহলে $U = X + Y$-এর ঘনত্ব অপেক্ষক হবে

$$f_u(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(v) f_y(u-v) dv \qquad \text{.....} (10.5.2)$$

প্রমাণ। ধরা যাক $u = x + y, v = x$। তাহলে

$$x = v,\ y = u,\ \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = -1$$

যেহেতু X, Y অনপেক্ষ

$$f_{x,\,y}(x, y) = f_x(x)\, f_y(y) = f_x(v)\, f_y(u-v)$$

এবং $(10.5.1)$ থেকে সূত্রটি পাওয়া যায়।

উদাহরণ

2. যদি X, Y দুটি অনপেক্ষ স্বাভাবিক চলক হয় যাদের প্রচল যথাক্রমে (m_x, σ_x) ও (m_y, σ_y) তাহলে $= X + Y$ একটি স্বাভাবিক (m, σ) চলক যেখানে $m = m_x + m_y$, $\sigma^2 = \sigma_x{}^2 + \sigma_y{}^2$।

প্রমাণ। (10.5.2) দ্বারা

$$f_u(u) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\{v-m_x)^2/\sigma_x^2 + (u-v-m_y)^2/\sigma_y^2\}} dy$$

এখন

$$\begin{aligned}
&\frac{(v-m_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(u-v-m_y)^2}{\sigma_y^2} \\
&= \frac{(v-m_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(u-m-\overline{v-m_x})^2}{\sigma_y^2} \\
&= \frac{(u-m)^2}{\sigma_y^2} + \frac{2(u-m(v-m_x)}{\sigma_y^2} + \frac{\sigma^2}{\sigma_x^2\sigma_y^2}(v-m_x)^2 \\
&= \frac{\sigma^2}{\sigma_x^2\sigma_y^2}\left\{v - m_x - \frac{\sigma_x^2}{\sigma^2}(u-m\right\}^2 + \frac{(u-m)^2}{\sigma^2}
\end{aligned}$$

এই ফলাফল প্রমাণ করতে হলে নীচের অভেদটি বিবেচনা করুন :

$$(1+x)^{n_1+n_2} = (1+x)^{n_1}(1+x)^{n_2}$$

তাহলে

$$\sum_{k=0}^{n_1+n_2}\binom{n_1+n_2}{k}x^k = \sum_{j=0}^{n_2}\sum_{i=0}^{n_1}\binom{n_1}{i}\binom{n_2}{j}x^{i+j}$$

দুপক্ষ থেকে x^k-এর সহগ সমান করলে উপরোক্ত ফল প্রমাণিত হয়।

10.6 বহুমাত্রিক সম্প্রসারণ

প্রথমে অনুচ্ছেদ 10.4-এর উপপাদ্যটি তিনটি চলকের ক্ষেত্রে সম্প্রসারিত করা হবে।

উপপাদ্য I : যদি (X, Y) ও Z দুটি অনপেক্ষ চলক হয় এবং $u=u(x, y)$ ও $w=w(z)$ নিজ নিজ চলের সন্ততভাবে অন্তরকলনযোগ্য অপেক্ষক হয়, তাহলে $U=u(X, Y)$ ও $W=w(Z)$ চলদুটিও অনপেক্ষ।

প্রমাণ। আমরা ধরে নিচ্ছি যে আর একটি বাস্তব অপেক্ষক $v=v(x, y)$ আছে যার জন্য $(x, y)\to(u, v)$ এই রূপান্তরের জ্যাকোবিয়ান সর্বত্র >0 অথবা সর্বত্র <0 এবং $\dfrac{dw}{dz}$ সর্বত্র >0 অথবা সর্বত্র <0। তাই

$$f_{u,v}(u, v)=f_{x,y}(x, y)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|, \; f_W(w)=f_Z(z)\left|\frac{dz}{dw}\right|$$

যেহেতু

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\frac{dw}{dz}$$

যা সর্বত্র >0 অথবা সর্বত্র <0 (10.4.1) সূত্রটির তিন চলকের জন্য সম্প্রসারিত রূপ থেকে পাই

$$f_{u,v,w}(u, v, w)=f_{x,y,z}(x, y, z)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|$$

যেহেতু (X, Y) ও W অনপেক্ষ, (9.7.7) থেকে পাই

$$f_{u,v,w}(u, v, w)=f_{x,y}(x, y)f_{x,y}(z)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\left|\frac{dz}{dw}\right|$$

অথবা $\qquad f_{u,v,w}(u, v, w)=f_{u,v}(u, v)f_W(w)$

v-র সাপেক্ষে $-\infty$ থেকে ∞ পর্যন্ত সমাকলন করে পাই

$$f_{u,w}(u, w)=f_u(u)f_W(w)$$

অতএব U ও W অনপেক্ষ।

3. 9.9 অনুচ্ছেদের 5নং প্রশ্নে নির্ণয় করুন $P(X < 1 \mid Y = 3)$।

4. 9.9 অনুচ্ছেদের 7নং প্রশ্নে $f_x(x|y), f_y(y|x)$ নির্ণয় করুন।

5. 9.9 অনুচ্ছেদের 8নং প্রশ্নে শর্তাধীন ঘনত্ব অপেক্ষকগুলি নির্ণয় করুন।

6. 9.9 অনুচ্ছেদের 9নং প্রশ্নে $f_y(y|x)$ নির্ণয় করুন।

7. মনে করুন (X, Y) একটি দ্বিমাত্রিক চলক যার নিবেশন হল সাধারণ দ্বিমাত্রিক স্বাভাবিক নিবেশন। যদি

$$U = (X - m_x)\cos\alpha\,(Y - m_y)\sin\alpha$$

$$V = (X - m_x)\sin\alpha\,(Y - m_y)\cos\alpha$$

এই রৈখিক রূপান্তর করা হয়, তাহলে দেখান যে U, V অনপেক্ষ হবে যদি

$$\tan\alpha = \frac{2\rho\sigma_x\sigma_x}{\sigma_x^2\sigma_y^2}$$

8. যদি X, Y অনপেক্ষ এবং যথাক্রমে $\gamma(l)$ ও $\gamma(m)$ চলক হয়, দেখান যে $U = X + Y$, $V = X/(X + Y)$ অনপেক্ষ এবং যথাক্রমে $\gamma(l+m)$ ও $\beta_1(l, m)$ চলক হবে।

9. যদি সমতলে একটি যদৃচ্ছ বিন্দুর কার্তীয় স্থানাঙ্কদুটি অনপেক্ষ আদর্শ স্বাভাবিক চলক হয়, তাহলে প্রমাণ করুন যে বিন্দুটির মেরু স্থানাঙ্কদুটিও অনপেক্ষ চলক হবে, এবং তাদের ঘনত্ব অপেক্ষক নির্ণয় করুন।

10. দুটি সংখ্যা X, Y যদৃচ্ছভাবে ও অনপেক্ষভাবে $(0, 1)$ অন্তরে নির্বাচন করা হলে নিম্নলিখিত চলকের ঘনত্ব অপেক্ষক নির্ণয় করুন : (i) $X + Y$ (ii) XY।

11. অনুচ্ছেদ 10.5-এর উদাহরণ 1-এ প্রদত্ত নিবেশনের জন্য $X + Y$ চলকের নিবেশন নির্ণয় করুন।

12. X, Y যথাক্রমে পোয়াসঁ-μ_1 ও পোয়াসঁ-μ_2 চলক এবং তারা অনপেক্ষ। দেখান যে $X + Y$ একটি পোয়াসঁ $(\mu_1 + \mu_2)$ চলক।

13. X, Y দুটি অনপেক্ষ কোশি চলক যাদের প্রচল যথাক্রমে (λ_1, μ_1) ও (λ_1, μ_2)। তাহলে দেখান যে $X + Y$ একটি কোশি চলক যার প্রচল $(\lambda_1 + \lambda_2, \mu_1 + \mu_2)$। এর সাহায্যে প্রমাণ করুন যে $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nটি পরস্পর অনপেক্ষ চলক যার প্রত্যেকটির নিবেশন কোশি (λ, μ) হলে তাদের গড় $\overline{X} = (X_1, X_2 \ldots + X_n)/n$-ও একটি কোশি (λ, μ) চলক হবে।

10.9 উত্তরমালা

1. (i) উক্ত প্রশ্নের উত্তর ব্যবহার করে পাই

$$f_{i|1} = f_{i|}/f_{y|} = \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \qquad (i = 0, 1)$$

$$4\sigma_u^2\sigma_v^2 = \left(\sigma_u^2+\sigma_v^2\right)^2 - \left(\sigma_u^2-\sigma_v^2\right)^2 = 4\sigma_x^2\sigma_y^2 - \left(\sigma_x^2+\sigma_v^2\right)^2 \tan^2 2\alpha$$

$$= 4(1-\rho^2)\sigma_x^2\sigma_v^2$$

বা

$$= \sigma_u\sigma_v = \sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}$$

এখন $= \dfrac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - 2\rho\dfrac{(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \dfrac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2} = (1-\rho^2)\left(\dfrac{u^2}{\sigma_u^2}+\dfrac{v^2}{\sigma_v^2}\right)$

(10.4.1) দ্বারা

$$f_{u,\,v}(u,\,v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_u}e^{-u^2/2\sigma_u^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v}e^{-x^2/2\sigma_v^2}$$

যা প্রমাণ করে যে U, V অনপেক্ষ এবং যথাক্রমে স্বাভাবিক $(0, \sigma_u)$ ও স্বাভাবিক $(0, \sigma_v)$।

8. $u = x + y,\ v = x/(x+y);\ x = uv,\ y = u(1-v);\ \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -u$

$$f_{u,\,v}(u,\,v) = \frac{e^{-x}x^{l-1}}{\Gamma(l)}\cdot\frac{e^{-y}y^{m-1}}{\Gamma(m)}\cdot u$$

$$= \frac{e^{-u}u^{l+m-1}}{\Gamma(l+m)}\cdot\frac{v^{l-1}(1-y)^{m-1}}{B(l,m)}$$

9. $X = U\cos V,\ Y = U\sin V;\ x = u\cos v,\ y = u\sin v;\ \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = u$

$$dF = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2dxdy=\frac{1}{2\pi}e^{-u^2/2}}dudv$$

$$= ue^{-u^2/2}du\cdot\frac{1}{2\pi}dv$$

$f_u(u) = ue^{-u^{2/2}}\ (0<u<\infty),\ f_v(v) = 1/2\pi(0<v<2\pi)$ এবং U, V অনপেক্ষ।

10. $(X, Y)\,R : 0 < x < 1,\ 0 < y < 1$ এই বর্গক্ষেত্র সম-নিবেশিত।

(i) $U = X + Y$ ধরলে (10.5.2) দ্বারা

$$f_u(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_u(v)f_v(u-v)dv$$

$$f_{uk} = \sum_{i+j=k} \frac{e^{-\mu_1}\mu_1^i}{i!} \frac{e^{-\mu_2}\mu_2^j}{j!}$$

13. (10.5.2) দ্বারা

$$f_u(u) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{\{(v-\mu_1)^2+\lambda_1^2\}\{(u-v-\mu_2)^2+\lambda_2^2\}} \qquad (-\infty < u < \infty)$$

$$= \frac{\lambda_1\lambda_2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\{(t^2+\lambda_1^2)\}\{(t-\alpha)^2+\lambda_2^2\}} \qquad [\alpha = u-\mu_1-\mu_2]$$

লিখুন
$$\frac{1}{\{(t^2+\lambda_1^2)\}\{(t-\alpha)^2+\lambda_2^2\}} = \frac{At+B}{t^2+\lambda_1^2} - \frac{A(t-\alpha)+C}{(t-\alpha)^2+\lambda_2^2}$$

তাহলে $\alpha A - B + C = 0, A(\alpha^2 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2) - 2\alpha B = 0, \alpha\lambda_1^2 A + B(\alpha^2 + \lambda_1^2) - \lambda_1^2 C = 1$

যার থেকে পাই

$$A(\alpha^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2) + 2\alpha C = 0, A\left[\alpha^4 + 2\alpha^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2\right] = 2\alpha$$

বা $A\left[\alpha^4 + (\lambda_1+\lambda_2)^2\right]\left[\alpha^2 + (\lambda_1 - \lambda_2)^2\right] = 2\alpha$। তাই

$$f_u(u) = \frac{A\lambda_1\lambda_2}{2\pi^2}\left[\log\frac{t^2+\lambda_1^2}{(t-\alpha)^2+\lambda_2^2}\right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{\pi}(\lambda_2 B - \lambda_1 C)$$

প্রথম পদটি শূন্য, এবং তাই

$$f_u(u) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda_1+\lambda_2}{\pi(u-\mu_1-\mu_2)^2 + (\lambda_1+\lambda_2)^2} \qquad (-\infty < u < \infty)$$

যা প্রমাণ করে যে U কোশি $(\lambda_1+\lambda_2,\ \mu_1+\mu_2)$ চলক।

দ্বিতীয় অংশে $X_1 + X_2$ কোশি $(2\lambda, 2\mu)$। $X_1 + X_2$ ও X_3 অনপেক্ষ, তাই $X_1 + X_2 + X_3$ কোশি $(3\lambda, 3\mu)$ ইত্যাদি। সাধারণভাবে $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ কোশি $(n\lambda, n\mu)$। $\bar{X} = X/n,\ \bar{x} = x/n$ লিখলে

$$f_{\bar{x}}(\bar{x}) = f_x(x)\left|\frac{dx}{dx}\right| = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi^2\lambda}{(n\bar{x}-n\mu)^2 + n^2\lambda^2}$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{(\bar{x}-\mu)^2+\lambda^2} \qquad (-\infty < \bar{x} < \infty)$$

অর্থাৎ $\bar{X}$ কোশি (λ, μ) নিবেশিত।

একক 11 ❐ দ্বিমাত্রিক নিবেশনের প্রত্যাশা ও বৈশিষ্ট্যসমূহ (Expection and characteristics of two-dimensional distributions)

গঠন

11.1 প্রস্তাবনা

এই এককে আমরা দুটি চলক বা দ্বিমাত্রিক চলকের ক্ষেত্রে গাণিতিক প্রত্যাশার সংজ্ঞা ও তার সহজ ধর্মের কথা বলব। তারপর আসবে দ্বিমাত্রিক নিবেশনের ভ্রামকসমূহের ধারণা যা প্রত্যাশা হিসেবে সংজ্ঞায়িত।

চলকদুটির পারস্পরিক সম্বন্ধ প্রকাশকারী প্রধান ভ্রামক হল সহভেদমান (covariance) এবং এর শূন্যমাত্রিক রূপ হল অনুবন্ধ সহগাঙ্ক (correlation coefficient) যার গুরুত্ব অপরিসীম। ভ্রামক উৎপাদনকারী বৈশিষ্ট্য অপেক্ষকের কথাও স্বাভাবিকভাবেই আসবে।

শেষে কয়েকটি ফলের বহুচলকের ক্ষেত্রে সম্প্রসারণ করা হবে।

11.2 উদ্দেশ্য

এই একক পড়লে আপনারা জানতে পারবেন

- দ্বিচলক নিবেশনের প্রত্যাশা ও তার সহজ ধর্ম

- দ্বিচলক নিবেশনের ভ্রামকসমূহের সংজ্ঞা
- সহভেদমান ও অনুবন্ধ সহগাঙ্কের সংজ্ঞা ও তাদের ধর্ম
- দ্বিচলক বৈশিষ্ট্য অপেক্ষকের কথা
- উপরোক্ত কয়েকটি ধারণার বহুমাত্রিক সম্প্রসারণের কথা

11.3 দ্বিচলক নিবেশনের প্রত্যাশা

দুটি চলক X, Y-এর যুগ্ম নিবেশনের কথা চিন্তা করুন। X, Y-এর একটি সন্তত অপেক্ষক $g(X, Y)$-এর **গাণিতিক প্রত্যাশা** বা **গড়মানের** সংজ্ঞা হল

$$E\{g(X,Y)\} = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty} g(x_i, y_i)\, f_{ij} \quad \text{বিচ্ছিন্ন ক্ষেত্রে} \tag{11.3.1}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\, f(x,y)\, dx\, dy \quad \text{অবিচ্ছিন্ন ক্ষেত্রে}$$

যদি উপরের অসীম শ্রেণি বা সমাকল পরমভাবে অভিসারী হয়।

এবার লক্ষ্য করুন শুধু X-এর একটি অপেক্ষক g (X)-এর প্রত্যাশা দুভাবে কষতে পারি—X-এর নিবেশনের সাপেক্ষে এবং X ও Y-এর যুগ্ম নিবেশনের সাপেক্ষে এবং এই দুটি মানই সমান হওয়া আবশ্যিক। এই উক্তি প্রমাণ সাপেক্ষ।

প্রমাণ। বিচ্ছিন্ন নিবেশন :

$$E\{g(\mathrm{x})\} = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty} g(x_1)\, f_{ij} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} g(x_i) \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_{ij}$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} g(x_i) f_i = \sum_{i=\infty}^{\infty} g(x_i)\, f_{xi}$$

অবিচ্ছিন্ন নিবেশন : এক্ষেত্রে

$$E\{g(X)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x,y) dx dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_x(x) dx$$

সুতরাং আমাদের উক্তি সত্যি।

উপরোক্ত মন্তব্য থেকে এটা পরিষ্কার যে X, Y চলকের নিজ নিজ বৈশিষ্ট্যগুলি যেমন গড়মান, ভেদমান ইত্যাদির মান অনন্য, তারা নিজস্ব নিবেশনের সাপেক্ষে নিরূপিত অথবা তাদের যুগ্ম নিবেশনের সাপেক্ষে নিরূপিত, যেভাবেই হোক না কেন।

লক্ষ্য করুন, (m_x, m_y) বিন্দুটি সমতলে সম্ভাবনা ভর বিভাজনের ভরকেন্দ্র নির্দেশ করে এবং σ_x^2, σ_y^2 যথাক্রমে $x = m_x$ ও $y = m_y$ সরলরেখার সাপেক্ষে ভর বিভাজনের জাড্য-ভ্রামক এবং তাই ঐ রেখার সাপেক্ষে বিস্তৃতির মাপক।

প্রত্যাশার একটি সহজ ধর্ম হল

$$E\{g_1(X, Y) + g_2(X, Y) + \ldots + g_n(X, Y)\}$$
$$= E[g_1(X, Y)\} + E\{g_2(X, Y)\} + \ldots + E\{g_n(X, Y)\} \qquad (11.3.2)$$

বিশেষভাবে আমরা পাই

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \qquad (11.3.3)$$

যা **গড়মানের যোগনিয়ম।**

উদাহরণ

1. অনুচ্ছেদ 9.4-এর উদাহরণ 1-এর জন্যে $E(|X - Y|)$ নির্ণয় করুন।

এখানে $(x_i, y_j) = (i, j)\ (i = 0, 1, 2\ ; j = 0, 1, 2, 3)$

$f_{13} = f_{22} = f_{23} = 0$, আর সব $f_{ij} = 1/9$

$$E(|X - Y|) = \sum_{j=0}^{3}\sum_{i=0}^{3}|i - j| f_{ij}$$

$$= \frac{1}{9}\ (|0-0| + |0-1| + |0-2| + |0-3| + |1-0| + |1-1| + |1-2| + |2-0| + |2-1|)$$

$$= 11/9$$

2. যদি X, Y দুটি অনপেক্ষ আদর্শ স্বাভাবিক চলক হয়, তাহলে X^2Y^2-এর গড়মান বের করুন। এখানে

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2} \qquad (-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty)$$

$$E(X^2Y^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 y^2 e^{-(x^2+y^2)/2}\, dx\, dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^{2/2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-y^{2/2} dy}$$

$$= E(X^2)\, E(Y^2) = \alpha_{x^2}\alpha_{y^2} = (\sigma_x^2 + m_x^2)(\sigma_y^2 + m_y^2) = 1$$

যেহেতু $m_x = m_y = 0,\ \sigma_y = \sigma y = 1$।

11.4 ভ্রামকসমূহ

X, Y-এর যুগ্ম নিবেশনের (মূলবিন্দুর সাপেক্ষে) ভ্রামক α_{kl}-এর সংজ্ঞা হল

$$\alpha_{kl} = E(X^k Y^l)$$

যেখানে k, l অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা ; α_{kl}-কে $k + l$ বর্গের ভ্রামক বলা হয়।

আমরা দেখি

$$\alpha_{k0} = \alpha_{xk},\ \alpha_{0l} = = \alpha_{yl}$$

বিশেষভাবে

$$\alpha_{00} = 1, \alpha_{10} = m_x, \alpha_{01} = m_y$$

কেন্দ্রীয় ভ্রামকগুলি হল

$$\mu_{kl} = E\{(X - m_x)^k (Y - m_y)^l\} \tag{11.4.2}$$

তাই

$$\mu_{k0} = \mu_{xk}, \mu_{0l} = \mu_{yl}$$

$$\mu_{00} = 1, \mu_{10} = \mu_{01} = 0, \mu_{20} = \sigma_x^2, \mu_{02} = \sigma_y^2$$

11.5 সহভেদমান, অনুবন্ধ সহগাঙ্ক

μ_{11} এই মিশ্র কেন্দ্রীয় ভ্রামকটি চলকদুটির পারস্পরিক সম্বন্ধ বিচারে বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ এবং একে বলা হয় X ও Y-এর **সহভেদমান** (covariance) যার চিহ্ন হল $\text{cov}(X, Y)$ অর্থাৎ

$$\text{cov}(X, Y) = \mu_{11} = E\{(X - m_x)(Y - m_y)\} \tag{11.5.1}$$

যদি আমরা সহভেদমান নিবেশনের যে ধর্ম পরিমাপ করে সেই ধর্মের একটি শূন্যমাত্রিক মাপকাঙ্ক চাই, তাহলে X, Y-এর বদলে আদর্শীকৃত চলক X^*, Y^* নিয়ে $\text{cov}(X^*, Y^*)$-কে বাঞ্ছিত মাপকাঙ্ক হিসেবে নিতে পারি। $\text{cov}(X^*, Y^*)$-কে X, Y চলকের **অনুবন্ধ সহগাঙ্ক** (correlation coefficient) বলা হবে এবং $\rho(X, Y)$ দ্বারা চিহ্নিত হবে, অর্থাৎ

$$\rho(X, Y) = \text{cov}(X^*, Y^*) = E(X^* Y^*)$$

$$= \frac{E\{(X - m_x)(Y - m_y)\}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y} \tag{11.5.2}$$

অনুবন্ধ সহগাঙ্ককে শুধু **সহগাঙ্ক** বলাই প্রচলিত রীতি।

1. যদি $a_1 (\neq 0), a_2 (\neq 0), b_1, b_2$ ধ্রুবক হয়,

$$\rho(a_1 X + b_1, a_2 Y + b_2) = \frac{a_1 a_2}{|a_1||a_2|}\rho(X, Y) \tag{11.5.3}$$

প্রমাণ। $$(a_1X+b_1)^* = \frac{a_1}{|a_1|}X^*, (a_2Y+b_2)^* = \frac{a_2}{|a_2|}Y^*$$

তাই $$\rho(a_1X+b_1, a_2Y+b_2) = E\left(\frac{a_1a_2}{|a_1||a_2|}x^*Y^*\right)$$

$$= \frac{a_1a_2}{|a_1||a_2|}E(X^*Y^*) = \text{ডানপক্ষ}$$

যদি $a_1, a_2 > 0$ হয়, তাহলে

$$\rho(a_1X+b_1, a_2Y+b_2) = \rho(X, Y) \qquad (11.5.4)$$

এর থেকে সিদ্ধান্ত করা যায় যে সহগাঙ্ক চলকগুলির মাপের একক ও মূলবিন্দুর উপর নির্ভর করে না।

2. $$-1 \le \rho(X, Y) \le 1 \qquad (11.5.5)$$

অর্থাৎ সহগাঙ্ক $[-1, 1]$ এই অন্তরে বিচরণশীল।

প্রমাণ। $0 \le (X^* \pm Y^*)^2 = X^{*2} + X^{*2} \pm 2X^*Y^*$

প্রত্যাশা নিলে পাই

$$0 \le E\{(X^* \pm Y^*)^2\} = E(X^{*2}) + E(Y^{*2}) \pm 2E(X^*Y^*)$$
$$= 2\{1 \pm \rho(X, Y)\}$$

যেহেতু $E(X^{*2}) = E(Y^{*2}) = 1$। এটাই (11.5.5) প্রমাণ করে।

যদি $\rho(X, Y) = \pm 1$ হয়, তাহলে $E\{(X^* \pm Y^*)\} = 0$ যা দেখায় যে, $Y^* = \pm X^*$ বা

$$\frac{Y - m_y}{\sigma_y} = \pm\frac{X - m_x}{\sigma_x} \qquad (11.5.6)$$

অতএব যদি $\rho(X, Y) = \pm 1$ হয়, তাহলে আমরা সিদ্ধান্ত করতে পারি যে Y X-এর একটি রৈখিক অপেক্ষক যা (11.5.6) দ্বারা সূচিত।

পক্ষান্তরে, যদি Y, X-এর একটি রৈখিক অপেক্ষক হয়, অর্থাৎ $Y = aX + b$ (a, b ধ্রুবক), তাহলে $\rho(X, Y) = \pm 1$, কেননা

$$\rho(X, aX+b) = \frac{a}{|a|}\rho(X, X) = \pm 1$$

3. যদি $\rho(X, Y) = 0$ হয়, তাহলে আমরা বলি যে, X, Y **অননুবন্ধী** (uncorrelated)। আমাদের মনে হতে পারে যে অননুবন্ধী হলে চলকদুটি অনপেক্ষ—একথা অবশ্য সত্যি নয়। এই বিষয়ের বিশদ আলোচনা এর পরের এককে করা হবে।

4. এবার $X \pm Y$ এই চলকের ভেদমান নির্ণয় করা যাক। জানা আছে $E(X \pm Y) = m_x \pm m_y$, এবং তাই

$$\{(X \pm Y - (m_x \pm m_y)\}^2 = \{(X - m_x) \pm (Y - m_y)\}^2$$
$$= (X - m_x)^2 + (Y - m_y)^2 \pm 2\,(X - m_x)(Y - m_y)$$

দুপক্ষের প্রত্যাশা নিলে পাই

$$\text{var}\,(X \pm Y) = \text{var}\,(X) + \text{var}\,(Y) \pm 2\,\text{cov}\,(X, Y) \tag{11.5.7}$$

একে বলে **ভেদমান সূত্র** (variance formula)। এই সূত্রের অন্য আকার হল

$$\sigma^2\,(X \pm Y) = \sigma^2\,(X) + \sigma^2\,(Y) \neq 2\sigma\,(X)\;\sigma\,(Y)\,\rho\,(X, Y) \tag{11.5.8}$$

যদি X, Y অননুবন্ধী হয়, তাহলে

$$\sigma^2\,(X \pm Y) = \sigma^2\,(X) + \sigma^2\,(Y) \tag{11.5.9}$$

5.
$$\mu_{11} = \alpha_{11} - m_x m_y \tag{11.5.10}$$

প্রমাণ। $(X - m_x)(Y - m_y) = XY - m_y X - m_x Y + m_x m_y$। তাই

$$\mu_{11} = E\,(XY) - m_y E(X) - m_x E(Y) + m_x m_y = \alpha_{11} - m_x m_y$$

এবার আমরা একটি গুরুত্বপূর্ণ উপপাদ্য প্রমাণ করব যা বলে যে যে-কোন দুটি চলককে একটি রৈখিক রূপান্তরের দ্বারা অননুবন্ধী করা যায়।

উপপাদ্য : যে-কোন দুটি চলক X, Y-র জন্যে যদি একটি রৈখিক রূপান্তর $(X, Y) \rightarrow (U, V)$ করা হয় যা অক্ষদ্বয়কে α কোণে ঘূর্ণিত করে পাওয়া যায়, অর্থাৎ

$$U = X\cos\alpha + \text{Y}\sin\alpha,\ \text{V} = -X\sin\alpha + \text{Y}\cos\alpha \tag{11.5.11}$$

(α ধ্রুবক), তাহলে U, V অননুবন্ধী হবে যদি

$$\tan 2\alpha = \frac{2\rho\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2} \tag{11.5.12}$$

যেখানে $\rho = \rho\,(X, Y)$।

প্রমাণ। $$m_u = m_x\cos\alpha + m_y\sin\alpha,\ m_y = -m_x\sin\alpha + m_y\cos\alpha$$

তাই

$$(U - m_u)(V - m_v) = \{(X - m_x)\cos\alpha + (\text{Y} - m_y)\sin\alpha\}$$
$$\times\{-(X - m_x)\sin\alpha + (Y - m_y)\cos\alpha\}$$
$$= -\frac{1}{2}\{(X - m_x)^2 - (Y - m_y)^2\}\;\sin 2\alpha + (\text{X}-m_x)(Y-m_y)\cos 2\alpha$$

সুতরাং

$$\text{cov}\,(U, V) = -\frac{1}{2}\left(\sigma_x^2 - \sigma_y^2\right)\sin 2\alpha + \rho\sigma_\text{x}\sigma_\text{y}\;\cos 2\alpha$$

যা শূন্য হয় যদি (11.5.12) সিদ্ধ হয়।

উদাহরণ

1. অনুচ্ছেদ 9.4-এর উদাহরণ 1-এ $m_x, m_y, \sigma_x, \sigma_y, \rho$ নির্ণয় করুন।

$$m_x = \sum_{i=0}^{3}\sum_{i=0}^{2} i\, f_{ij} = \frac{7}{9}, \quad \alpha_x^2 = \sum_{i=0}^{3}\sum_{i=0}^{2} i^2 f_{ij} = \frac{11}{9}$$

যার ফলে $\sigma_x^2 = 50/81$। অনুরূপে,

$$m_y = \frac{10}{9}, \ \alpha_{y2} = \frac{20}{9}, \ \sigma_y^2 = \frac{80}{81}$$

$$\alpha_{11} = \sum_{j=0}^{3}\sum_{i=0}^{2} ij\, f_{ij} = \frac{5}{9}$$

(11.5.10) দ্বারা $\quad \mu_{11} = -25/81, \ p = -\sqrt{10}/8$

2. **দ্বিচল স্বাভাবিক নিবেশন :** আমরা জেনেছি যে X, Y-এর (প্রান্তিক) নিবেশনগুলি যথাক্রমে স্বাভাবিক (m_x, σ_x) ও স্বাভাবিক (m_y, σ_y) এবং তাই $m_x, m_y, \sigma_x, \sigma_y$ এই প্রচলনগুলির অর্থও স্বাভাবিক। পঞ্চম প্রচল ρ–এর অর্থ এবার আমরা জানতে পারব।

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{2\pi\sigma y\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\infty}^{\infty} (x-m_x)(y-m_y) e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - 2\rho\frac{(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right\}} dx\, dy$$

$$= \frac{\sigma_x\sigma_y}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, e^{-(x^2-2\rho xy+y^2)}\, dx\, dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y\, e^{-y^2/2} dy \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-(x-\rho y)^2/2(1-\rho^2)} dx \right\}$$

$$= \rho \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-y^2/2} dy = \rho$$

অতএব প্রচল ρ X, Y-এর সহগাঙ্গা নির্দেশ করে।

11.6 বৈশিষ্ট্য অপেক্ষক

X, Y-এর যুগ্ম নিবেশনের বৈশিষ্ট্য অপেক্ষক $\chi(t, u)$ এইভাবে সংজ্ঞায়িত হয় :

$$\chi(t,u) = E\{e^{i(tX+uY)}\} \qquad (11.6.1)$$

আমরা দেখি যে $\chi(t, 0) = \chi_x(t), \chi(0, u) = \chi_y(u)$,

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t \partial u}\Big|_{(0,0)} = i^2 \alpha_{11}$$

ইত্যাদি। অতএব it ও iu-এর ঘাত শ্রেণিতে $\chi(t, u)$-এর প্রসারণ হবে

$$\chi(t, u) = 1 + (\alpha_{x1} it + \alpha_{y1} iu) + \frac{1}{2!}\{\alpha_{x2}(it)^2 + 2\alpha_{11}(it)(iu) + \alpha_{y2}(\text{iii})^2\} + \ldots \quad (11.6.2)$$

11.7 বহুচলক সম্প্রসারণ

মনে করুন $X_1, X_2, \ldots, X_n$ যে-কোনো nটি চলক যাদের গড়মান যথাক্রমে $m_1, m_2, \ldots m_n$ এবং সমক বিচ্যুতি যথাক্রমে $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$। তাহলে এদের যোগফল

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad (11.7.1)$$

-এর গড়মান M_n ও সমক বিচ্যুতি Σ_n যেখানে

$$M_n = m_1 + m_2 + .. + m_n \quad (11.7.2)$$

$$\Sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 + 2\sum_{i<j} \sigma_i \sigma_j \rho(X_i, X_j) \quad (11.7.3)$$

(দ্বিতীয় যোগের বেলায় i, j $1, 2, \ldots, n$ থেকে 2টি নেওয়ার যে-কোনো সমবায়) যা যথাক্রমে (11.3.3) ও (11.5.8) সূত্রগুলির রীতিমাফিক সম্প্রসারণ।

যদি $X_1, X_2, \ldots, X_n$ জোড়াগতভাবে অননুবন্ধী হয়, তাহলে আমরা সহজ ভেদমান সূত্র পাই :

$$\Sigma_n^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2 \quad (11.7.4)$$

একটি রৈখিক সমষ্টি

$$X = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_n X_n \quad (11.7.5)$$

-এর জন্য

$$m_x = a_1 m_1 + a_2 m_2 + \ldots + a_n m_n \quad (11.7.6)$$

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2 + 2\sum_{i<j} a_i a_j \sigma_i \sigma_j \rho(X_i, X_j) \quad (11.7.7)$$

যদি $\rho(X_i, X_j) = 0$ হয় $(i \neq j)$, তাহলে শেষ সূত্রটি দাঁড়াবে

$$\sigma_x^2 = a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2 + \ldots + a_n^2 \sigma_n^2 \quad (11.7.8)$$

উদাহরণ : (ফেরত না দিয়ে টানা) একটি পাত্রে N_1 টি সাদা ও N_2 টি কালো বল আছে যার থেকে nটি বল ফেরত না দিয়ে টানা হল $(n \leq N_1 + N_2)$। প্রাপ্ত সাদা বলের সংখ্যার গড় ও ভেদমান বের করুন।

এখানে এই গড় ও ভেদমান সাদা বলের সংখ্যার একমাত্রিক নিবেশন থেকে সরাসরি নির্ণয় না করে আমরা একটা অন্য পন্ধতি অবলম্বন করব যাতে উপরোক্ত সূত্রগুলির প্রয়োগ দেখা যাবে।

মনে করুন পাত্র থেকে একটি বল টানার পরীক্ষা E। প্রশ্নানুযায়ী E-এর n-সংখ্যক প্রচেষ্টা করা হল

যারা অনপেক্ষ নয়, কেননা টানা বলটি ফেরত দেওয়া হচ্ছে না। এই যৌগিক পরীক্ষার ঘটনাদেশ হচ্ছে S^n যেখানে S E-এর ঘটনাদেশ যার মধ্যে আছে (N_1+N_2) টি ঘটনাবিন্দু। এই ঘটনাদেশ S^n-এর উপর nটি চলক $X_1, X_2, ..., X_n$ সংজ্ঞায়িত করি এভাবে : $X_i = 0$ বা 1 যদি i-তম টানায় কালো বা সাদা বল পাওয়া যায় $(i = 1, 2, ..., n)$। তাহলে $S_n = X_1 + X_2 + .. + X_n$ হচ্ছে উল্লিখিত সাদা বলের সংখ্যা।

অবস্থার প্রতিসাম্য বিচার করলে i-তম টানায় কথা বিবেচনা করার সময় অন্যান্য টানায় ব্যাপার অগ্রাহ্য করা চলে এবং তাই

$$P(X_i = 1) = N_1 1 (N_1 + N_2)$$

এবং

$$m_i = E(X_i) = N_1/(N_1+N_2),\ E(X_i^2) = N_1/(N_1+N_2)$$

সুতরাং (8.6.3) দ্বারা

$$\sigma_i^2 = \frac{N_1N_2}{(N_1+N_2)^2}$$

$$M_n = \frac{nN_1}{N_1+N_2}$$

এবার $(X_i, X_j)\ (i \neq j)$ এই দ্বিমাত্রিক চলকের নিবেশনের কথআ চিন্তা করুন। এর বর্ণালিতে $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ ও $(1, 1)$ এই 4টি বিন্দু আছে এবং $(1, 1)$ বিন্দুতে সম্ভাবনা ভর হল

$$\frac{N_1(N_1-1)}{(N_1+N_2)(N_1+N_2-1)}$$

তাহলে

$$E(X_iX_j) = \frac{N_1(N_1-1)}{(N_1+N_2)(N_1+N_2-1)}$$

এবং (11.5.10) দ্বারা

$$\operatorname{cov}(X_i, X_j) = -\frac{N_1N_2}{(N_1+N_2)(N_1+N_2-1)}$$

(11.7.3) থেকে

$$\Sigma_n^2 = \frac{nN_1N_2}{(N_1+N_2)^2} - 2\binom{n}{2}\frac{N_1N_2}{(N_1+N_2)^2(N_1+N_2-1)}$$

$$\Sigma_n^2 = \frac{nN_1N_2}{(N_1+N_2)^2}\left(1 - \frac{n-1}{N_1+N_2-1}\right) \qquad (11.7.9)$$

মন্তব্য : বল ফেরত সহকারে টানা হলে আমরা জানি যে সাদা বলের সংখ্যার নিবেশন হয় দ্বিপদ $(n, N_1/(N_1+N_2))$। অতএব

$$M_n = \frac{nN_1}{N_1 + N_2}, \quad \Sigma_n^2 = \frac{nN_1N_2}{(N_1 + N_2)^2}$$

এক্ষেত্রে গড়মান একই থাকছে কিন্তু ভেদমান ভিন্ন।

$X_1, X_2, ..., X_n$-এর যুগ্ম বৈশিষ্ট্য অপেক্ষকের সংজ্ঞা হবে

$$\chi(t_1, t_2, ..., t_n) = E\{e^{i(t_1X_1 + t_2X_2 + ..., + t_nX_n)}\} \qquad (11.7.10)$$

11.8 সারাংশ

এই এককে দ্বিচলক নিবেশনের ক্ষেত্রে প্রত্যাশার সংজ্ঞা দেওয়া হল এবং তার সহজ ধর্মগুলি প্রমাণ করা হল যার মধ্যে গড়ের যোগনিয়ম অন্যতম।

সহভেদমান ও তার শূন্যমাত্রিক সংস্করণ অনুবন্ধ সহগাঙ্কের সংজ্ঞা দেওয়া হল, এবং তাদের ধর্ম প্রতিষ্ঠা করা হল। এর মধ্যে ভেদমান সূত্র উল্লেখযোগ্য।

দ্বিমাত্রিক ক্ষেত্রে বৈশিষ্ট্য অপেক্ষকের ধারণা দেওয়া হল, এবং পরিশেষে কয়েকটি প্রয়োজনীয় সূত্রের বহুচলক সম্প্রসারণ করা হল।

11.9 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

1. নিম্নলিখিত প্রশ্নে $E(X^2Y)$-এর মান কত ?

   (i) 9.9 অনুচ্ছেদের প্রশ্ন নং 1(ii)

   (ii) 9.9 অনুচ্ছেদের প্রশ্ন নং 2(ii)

2. (X, Y) $0 < x < 1, 0 < y < 1$ এই বর্গাকার ক্ষেত্রে সম-নিবেশিত হলে $E(|X - Y|)$-এর মান নির্ণয় করুন।

3. 10.5 অনুচ্ছেদের উদাহরণ 1-এ প্রদত্ত নিবেশনের জন্য $E\{(X + Y)^3\}$-এর মান কত ?

4. 9.9 অনুচ্ছেদের 3নং প্রশ্নে চলকদুটির গড়, সমক বিচ্যুতি ও তাদের অনুবন্ধ সহগাঙ্ক নির্ণয় করুন।

5. 9.9 অনুচ্ছেদের 4নং প্রশ্নে চলকদুটির সহভেদমান নির্ণয় করুন, এবং প্রাপ্ত মানের ব্যাখ্যা দিন।

6. 10.5 অনুচ্ছেদের উদাহরণ 1-এ $m_x, m_y, \sigma_x, \sigma_y$ ও ρ বের করুন।

7. 9.9 অনুচ্ছেদের 8নং প্রশ্নে সহগাঙ্ক নির্ণয় করুন।

8. 9.9 অনুচ্ছেদের 7নং প্রশ্নে $m_x, m_y, \sigma_x, \sigma_y, \rho$ বের করুন।

9. a, b, c ধনাত্মক ধ্রুবক হলে দেখান যে $aX + bY$ ও cY এই দুই চলকের সহগাঙ্ক হবে

$$\frac{a\rho\sigma_x + b\sigma_y}{\sqrt{a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2 + 2ab\rho\sigma_x\sigma_y}}$$

10. দুটি চলক X, Y একটি রৈখিক সম্বন্ধ $aX + bY + c = 0$ সিদ্ধ করে। দেখান যে $\rho(X, Y) = -1$ যদি a, b-র একই চিহ্ন হয় এবং $\rho(X, Y) = 1$ যদি a, b-র চিহ্ন বিপরীত হয়।
11. প্রমাণ করুন $\{E(XY)\}^2 \le E(X^2)E(Y^2)$। (একে শোয়ার্ৎসের (Schwartz) অসমতা বলে।)
12. তাসের বিভিন্ন রঙকে যদি এইরকম পয়েন্ট দেওয়া হয় : ইস্কাবন, হরতন, রুইতন, চিড়েতন-কে যথাক্রমে $1, 2, 3, 4$ পয়েন্ট, তাহলে ব্রিজ খেলার একটি হাতে মোট পয়েন্টের প্রত্যাশিত মান কত ?
13. ব্রিজ খেলার একটি হাতে প্রাপ্ত টেক্কা, সাহেব, বিবি ও গোলামের মোটসংখ্যার গড় ও ভেদমান নির্ণয় করুন।

11.10 উত্তরমালা

1. (i) $\frac{3}{4}$, (ii) $\frac{1}{2}$

2. $$E(|X - Y|) = \int_0^1\int_0^1 |x - y|\, dx\, dy = \int_0^1 dy\left\{\int_0^y (y - x)dx + \int_0^1 (x - y)dx\right\} = \frac{1}{3}$$

3. $$E\{(X + Y)^3\} = \int_0^1\int_0^1 (x + y)^4\, dx\, dy = \frac{31}{15}$$

4. $m_x = 4, m_y = \frac{7}{9}$, $\sigma_x = \sqrt{20/3}$, $\sigma_y = \sqrt{50/81}$, $\rho = 17\sqrt{30/100}$

5. $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$, কারণ X, Y অনপেক্ষ।

6. $m_x = m_y = \frac{7}{12}$, $\sigma_x = \sigma_y = \sqrt{11}/12$, $\rho = -1/11$

7. $m_x = \frac{2}{3}$, $m_y = \frac{1}{3}$, $\sigma_x^2 = 1/18$, $\sigma_y^2 = 1/18$, $\rho = \frac{1}{2}$

8. $m_x = \frac{5}{12}$, $m_y = \frac{2}{3}$, $\sigma_x = \sqrt{67/720}$, $\sigma_y = 2\sqrt{1/45}$, $\rho = -15/4\sqrt{67}$

9. $U = aX + bY, V = cY$। (11.7.6) ও (17.7.7) দ্বারা পাই

$m_u = am_x + bm_y, m_y = cm_y$

$\sigma_u^2 = a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2 + 2ab\sigma_x\sigma_y\rho$, $\sigma_y = c\,\sigma_y$ $(c > 0)$

$(U - m_u)(V - m_y) = ac(X - m_x)(Y - m_y) + bc(Y - m_y)^2$

$\mathrm{cov}(U, V) = ac\sigma_x\sigma_y\rho + bc\sigma_y^2$ ইত্যাদি।

10. প্রত্যাশা নিয়ে $am_x + bm_y + c = 0$, তাই $a(X-m_x) + b(Y-m_y) = 0$। অতএব $a(X-m_x)^2 + b(X-m_x)(Y-m_y) = 0$, $a(X-m_x)(Y-m_y) + b(Y-m_y)^2 = 0$ যার থেকে পাই

$$a\sigma_x{}^2 + b\sigma_x\sigma_y\rho = 0,\ a\sigma_x\sigma_y\rho + b\sigma_y{}^2 = 0$$

বা $a\sigma_x + \rho b\sigma_y = 0$, $\rho a\sigma_x + b\sigma_y = 0$। সুতরাং $\rho^2 = 1$, $\rho = \pm 1$। $\rho = -\dfrac{a\sigma_x}{b\sigma_y} < 0$ যদি a, b-র একই চিহ্ন হয় এবং তাই $\rho = -1$। $\rho > 0$ যদি a, b বিপরীত চিহ্নের হয় এবং তাই $\rho = 1$।

11. $0 \le E\{(X-kY)^2\} = E(X^2) - 2kE(XY) + k^2E(Y^2)$ (k ধ্রুবক)। যদি $E(Y^2) \le 0$ হয়, $k = E(XY)/E(Y^2)$ বসালে উক্ত অসমতা পাওয়া যায়। যদি $E(Y^2) = 0$ হয়, তাহলে $Y = 0$ অর্থাৎ Y-এর $y = 0$-তে একবিন্দু নিবেশন আছে যার ফলে $E(XY) = 0$ এবং তাই সমতা সিদ্ধ হয়।

12. এখানে $n = 13$। $X_i - i$-তম টানায় প্রাপ্ত পয়েন্ট $(i = 1, 2, ..., n)$। প্রতিসাম্য থেকে X_i $1, 2, 3$ 4 মান গ্রহণ করে প্রত্যেকটি $\dfrac{1}{4}$ সম্ভাবনার সঙ্গে। তাই $E(X_i) = 5/2$ এবং $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ হচ্ছে মোট পয়েন্ট যার প্রত্যাশা $E(S_n) = E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_n) = n.\dfrac{5}{2} = 13.\dfrac{5}{2} = 65/2$। লক্ষ্য করুন এখানে চলকগুলি অনপেক্ষ নয় যেহেতু তাসগুলি ফেরত না দিয়ে টানা হয়েছে।

13. তাসের একটি পূর্ণগোছায় $N_1 = 16$টি টেক্কা, সাহেব, বিবি ও গোলাম আছে এবং $N_2 = 36$টি অন্যান্য তাস আছে, যার থেকে $n = 13$টি তাস ফেরত না দিয়ে টানা হল। অতএব অনুচ্ছেদ 11.7-এর উদাহরণ দ্বারা $M_n = 4$, $\Sigma_n^2 = 36/17$।

একক 12 ❐ অনপেক্ষ চলকসমূহের প্রত্যাশা ও বৈশিষ্ট্য (Expectation and characteristics for independent ramdom variables)

গঠন

12.1 প্রস্তাবনা

দুটি অনপেক্ষ চলকের জন্য প্রত্যাশার একটি গুণনিয়ম খাটে যা আমরা প্রথমে প্রতিষ্ঠা করব। বহুচলকের ক্ষেত্রে এই গুণনিয়মের বিস্তার সহজ ও রীতিমাফিক।

তারপর দুটি অনপেক্ষ চলকের ভ্রামকসমূহের আলোচনা হবে এবং আমরা দেখব যে অনপেক্ষতা অননুবন্ধতাকে দ্যোতনা করে কিন্তু এর বিপরীত সত্যি নয়।

অনপেক্ষ চলকের বেলায় দেখানো হবে যে তাদের যুগ্ম বৈশিষ্ট্য অপেক্ষক নিজ নিজ বৈশিষ্ট্য অপেক্ষকের গুণফল। প্রমাণ করা যায় এই শর্ত পালিত হলে চলকদুটি অনপেক্ষ। বৈশিষ্ট্য অপেক্ষকের পদ্ধতি প্রয়োগ করে বিভিন্ন নিবেশনের পুনরুৎপাদন ধর্ম সহজেই প্রমাণ করা যাবে।

শেষে বহুচলক তত্ত্ব প্রয়োগ করে বারনুলি প্রচেষ্টার অন্য একটি আলোচনা দেওয়া হবে।

12.2 উদ্দেশ্য

এই একক পাঠ আপনারা জানতে পারবেন

- অনপেক্ষ চলকের জন্য প্রত্যাশার গুণনিয়ম

- অনপেক্ষ চলকের ভ্রামকসমূহের কথা
- অনপেক্ষ চলকের ক্ষেত্রে বৈশিষ্ট্য অপেক্ষকের কথা
- বারনুলি প্রচেষ্টার বহুচলক-তত্ত্বের ভিত্তিতে আলোচনা

12.3 প্রত্যাশার গুণনিয়ম

উপপাদ্য : যদি X, Y অনপেক্ষ চলক হয় $g_1(X), g_2(Y)$ যথাক্রমে X ও Y-এর সন্তত অপেক্ষক যাদের প্রত্যাশা অস্তিত্বমান, তাহলে

$$E\{g_1(X)g_2(Y)\} = E\{g_1(X)\}\,E\{g_2(Y)\} \qquad \ldots\ldots (12.3.1)$$

প্রমাণ। বিচ্ছিন্ন নিবেশন :

$$E\{g_1(X)\} = \sum_i g_1(x_i) f_{xi}\,,\, E\{g_2(Y)\} = \sum_j g_2(y_j) f_{xj}$$

যেহেতু প্রত্যাশাদুটি অস্তিত্বমান, সংজ্ঞাকারী শ্রেণিদুটিও পরমভাবে অভিসারী এবং তাই

$$\left\{\sum_i g_1(x_i) f_{xi}\right\}\left\{\sum_j g_2(y_i) f_{yi}\right\} = \sum_i \sum_j g_1(x_i) g_2(y_j) f_{xi} f_{yj}$$

এবং ডানদিকের শ্রেণিটিও পরমভাবে অভিসারী হবে।

যেহেতু X, Y অনপেক্ষ $f_{ij} = f_{xi}\, f_{yj}$ সব i, j-র জন্য এবং

$$E\{g_1(X)\}\,E\{g_2(Y)\} = \sum_i \sum_j g_1(x_i) g_2(y_i) f_{ij} = E\{g_1(X), g_2(Y)\}$$

এটা প্রমাণ করে যে ডানদিকের প্রত্যাশা অস্তিত্বমান এবং (12.3.1) সিদ্ধ হয়।

অবিচ্ছিন্ন নিবেশন : এক্ষেত্রে

$$E\{g_1(X)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x) f_x(x)dx,\ E\{g_2(Y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(y) f_y(y)dy$$

যেখানে সমাকলদুটি পরমভাবে অভিসারী। সুতরাং

$$\left\{\int_{-\infty}^{\infty} g_1(x) f_x(x)dx\right\}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} g_2(y) f_y(y)dy\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_1(x) g_2(y) f_x(x) f_y(y)dx\,dy$$

যেখানে দ্বিসমাকলটিও পরমভাবে অভিসারী।

X, Y অনপেক্ষ হওয়ায় $f(x, y) = f_x(x) f_y(y)$ যা উপরের সমীকরণে সন্নিবেশ করলে (12.3.1) মেলে।

(12.3.1)-এর একটি বিশেষ রূপ হল

$$E(XY) = E(X)\,E(Y) \qquad \text{..... (12.3.2)}$$

যাকে **গড়মানের গুণনিয়ম** বলে। এই নিয়ম সিদ্ধ হয় যদি X, Y দুটি অনপেক্ষ চলক হয় যাদের গড়মান বিদ্যমান।

উপরোক্ত ফলাফল সহজেই রীতিমাফিকভাবে বহুচলক ক্ষেত্রে বিস্তার করা যায় :

যদি $X_1, X_2, ..., X_n$ পরস্পর অনপেক্ষ চলক হয়, তাহলে

$$E\{g_1(X_1), g_2(X_2) \ldots g_n(X_n)\} = E\{g_1(X_1)\}\,E\{g_2(X_2)\} \ldots E\{g_n(X_n)\} \qquad \text{..... (12.3.3)}$$

যেখানে $g_i(X_i)$ X_i-এর একটি সন্তত অপেক্ষক $(i = 1, 2, ..., n)$।

12.4 ভ্রামকসমূহ

যদি X, Y অনপেক্ষ হয়, (12.3.1) দ্বারা পাই

$$\alpha_{kl} = E(X^k)\,E(Y^l) = \alpha_{xk}\alpha_{yl} \qquad \text{..... (12.4.1)}$$

এবং অনুরূপে,

$$\mu_{kl} = \mu_{xk}\,\mu_{yl} \qquad \text{..... (12.4.2)}$$

অতএব $\mu_{11} = \mu_{x1}\,\mu_{y1} = 0$ অথবা $\rho(X, Y) = 0$।

তাই যদি X, Y অনপেক্ষ হয়, তাহলে তারা অননুবন্ধী। এর বিপরীত উক্তি কিন্তু অসত্য। অননুবন্ধী হলেও চলকদুটি অনপেক্ষ না হতে পারে যেমন নীচের উদাহরণে।

উদাহরণ : ধরুন X মূলবিন্দুর সাপেক্ষে প্রতিসম যে-কোনো চলক। তাহলে $m_x = E(X) = 0, E(X^3) = 0$। যদি $Y = X^2$ হয়,

$$\operatorname{cov}(X, Y) = E\{X(Y - m_y)\} = E(X^3 - m_y X) = 0$$

অর্থাৎ X, Y অননুবন্ধী অথচ তারা অপেক্ষকভাবে নির্ভরশীল।

মন্তব্য : যদি $X_1, X_2, ..., X_n$ পরস্পর অনপেক্ষ হয়, তাহলে তারা জোড়াগতভাবে অনপেক্ষ এবং তাই জোড়াগতভাবে অননুবন্ধী যার ফলে (11.7.4) ও (11.7.8) এই সরল ভেদমান সূত্রগুলি সিদ্ধ হয়।

12.5 বৈশিষ্ট্য অপেক্ষক

অনপেক্ষ চলক X, Y-এর জন্যে তাদের যুগ্ম বৈশিষ্ট্য অপেক্ষক

$$\chi(t, u) = E(e^{itX} e^{iuY}) = E(e^{itX})\,E(e^{iuY})$$

অথবা

$$\chi(t, u) = \chi_x(t), \chi_y(u) \qquad \text{..... (12.5.1)}$$

পক্ষান্তরে, যদি (12.5.1) সিদ্ধ হয়, তাহলে X, Y অনপেক্ষ। এই উক্তির প্রমাণ একটু কঠিন, তাই এখানে দেওয়া হল না। বহুচালকের ক্ষেত্রে এই ফলাফলের সম্প্রসারিত রূপ হল এইরকম :

উপপাদ্য : $X_1, X_2, \ldots, X_n$ চলকগুলি পরস্পর অনপেক্ষ হওয়ার আবশ্যিক ও পর্যাপ্ত শর্ত হল তাদের যুগ্ম বৈশিষ্ট্য নিবেশন

$$\chi(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \chi_1(t_1), \chi_2(t_2) \ldots \chi_n(t_n)$$

যেখানে $\chi_i(t_i)$ X_i-এর বৈশিষ্ট্য অপেক্ষক $(i = 1, 2, \ldots, n)$।

অনপেক্ষ চলকের যোগফল : মনে করুন $X_1, X_2, \ldots X_n$ nটি পরস্পর অনপেক্ষ চলক যার বৈশিষ্ট্য অপেক্ষক যথাক্রমে $\chi_1(t), \chi_2(t), \ldots, \chi_n(t)$। তাহলে $S_n = X_1 + X_2 + \ldots, X_n$-এর বৈশিষ্ট্য অপেক্ষক,

$$\begin{aligned} K(t) = E(e^{itSn}) &= E\left\{e^{it(X_1+X_2+\ldots+X_n)}\right\} \\ &= E\left(e^{itX_1} e^{itX_2} \ldots e^{itX_n}\right) \\ &= E\left(e^{itX_1}\right) E\left(e^{itX_2}\right) E\left(e^{itX_n}\right) \qquad \text{(12.3.3) দ্বারা} \end{aligned}$$

অথবা
$$K(t) = \chi_1(t), \chi_2(t), \ldots, \chi_n(t) \qquad \ldots\ldots (12.5.2)$$

এই সূত্র বৈশিষ্ট্য অপেক্ষকের একটি গুরুত্বপূর্ণ ধর্ম প্রকাশ করে যা হল পরস্পর অনপেক্ষ চলকের যোগফলের বৈশিষ্ট্য অপেক্ষক তাদের নিজ নিজ বৈশিষ্ট্য অপেক্ষকের গুণফল।

একটি রৈখিক সমষ্টি $X = a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n$-এর জন্য

$$\chi_x(t) = \chi_1(a_1t)\, \chi_2(a_2t) \ldots \chi_n(a_nt) \qquad \ldots\ldots (12.5.3)$$

বিভিন্ন নিবেশনের পুনরুৎপাদন ধর্ম

সূত্র (12.5.2) বা (12.5.3) ব্যবহার করে এবং এই কথা মনে রেখে যে বৈশিষ্ট্য অপেক্ষক অনন্যভাবে নিবেশন অপেক্ষককে নিরূপণ করে, আমরা সহজেই বিভিন্ন নিবেশনের পুনরুৎপাদন ধর্ম প্রমাণ করতে পারি।

দ্বিতীয় নিবেশন : যদি $X_1, X_2, \ldots X_r$ পরস্পর অনপেক্ষ দ্বিপদ চলক হয় যাদের প্রচলগুলি যথাক্রমে $(n_1, P), (n_2, P), \ldots (n_r, P)$ তাহলে তাদের যোগফল S_r হবে দ্বিপদ $(n_1 + n_2 + \ldots + n_r, p)$ চলক।

প্রমাণ। X_k-এর বৈশিষ্ট্য অপেক্ষক $\chi_k(t) = (pe^{it} + q)^{nk}$ $(k = 1, 2, \ldots, r)$। তাহলে S_r-এর বৈশিষ্ট্য অপেক্ষক

$$K(t) = \chi_1(t)\, \chi_2(t) \ldots \chi_r(t) = (pe^{it} + q)^{n_1+n_2+\ldots n_r}$$

যা হচ্ছে দ্বিপদ $(n_1 + n_2 + \ldots + n_r, p)$ নিবেশনের বৈশিষ্ট্য অপেক্ষক। তাই এই সিদ্ধান্ত।

পোয়াসঁ নিবেশন : যদি $X_1, X_2, \ldots, X_n$ পরস্পর অনপেক্ষ পোয়াসঁ চলক হয় যাদের প্রচল যথাক্রমে $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ তাহলে তাদের যোগফল S_n-এর নিবেশন হবে পোয়াসঁ $(\mu_1 + \mu_2 + \ldots \mu_n)$।

প্রমাণ। X_k-র বৈশিষ্ট্য অপেক্ষক $\chi_k(t) = e^{\mu_k(e^{it}-1)}$ $(k = 1, 2, \ldots, r)$। তাহলে S_n-এর বৈশিষ্ট্য অপেক্ষক হবে

$$K(t) = \Pi e^{\mu_k(e^{it}-1)} = e^{(\Sigma\mu_k)(e^{it}-1)}$$

যা উক্তিটি প্রমাণ করে।

স্বাভাবিক নিবেশন : যদি $X_1, X_2, \dots X_n$ পরস্পর অনপেক্ষ স্বাভাবিক চলক হয় যাদের প্রচলগুলি যথাক্রমে $(m_1, \sigma_1), (m_2, \sigma_2), \dots (m_n, \sigma_n)$, তাহলে তাদের একটি রৈখিক সমষ্টি $X = a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n$ হবে স্বাভাবিক চলক যেখানে

$$m_x = a_1m_1 + a_2m_2 + \dots + a_nm_n$$

$$\sigma_x^2 = a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2 + .. + a_n^2\sigma_n^2$$

প্রমাণ। X_k-র বৈশিষ্ট্য অপেক্ষক $\chi_k(t) = e^{im_kt - \frac{1}{2}\sigma_k^2t^2}$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ এবং তাই

$$\chi_k(a_kt) = e^{ia_km_kt - \frac{1}{2}a_k^2\sigma_k^2t^2} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$ (12.5.3) দ্বারা

$$\chi_x(t) = \Pi e^{ia_km_kt - \frac{1}{2}a_k^2\sigma_k^2t^2} = e^{im_xt - \frac{1}{2}\sigma_x^2t^2}$$

যা স্বাভাবিক (m_x, σ_x) নিবেশনের বৈশিষ্ট্য অপেক্ষক। তাই X স্বাভাবিক (m_x, σ_x) চলক।

গামা নিবেশন : যদি $X_1, X_2, \dots, X_n$ পরস্পর অনপেক্ষ গামা চলক হয় যাদের প্রচল যথাক্রমে $l_1, l_2, \dots l_n$, তাহলে তাদের যোগফল S_n একটি $\gamma(l_1 + l_n + \dots + l_n)$ চলক।

প্রমাণ। χ_k-র বৈশিষ্ট্য অপেক্ষক, $\chi_k(i) = (1 - it)^{-l_k}$ $(k = 1, 2, \dots, n)$। তাই S_n-এর বৈশিষ্ট্য অপেক্ষক

$$K(t) = \Pi(1 - it)^{-l_k} = (1 - it)^{-\Sigma l_k}$$

যা $\gamma(l_1 + l_2 + \dots + l_n)$ চলকের বৈশিষ্ট্য অপেক্ষক। অতএব S_n একটি $\gamma(l_1 + l_n + \dots + l_n)$ চলক।

12.6 বারনুলি প্রচেষ্টার অন্য আলোচনা

স্মরণ করা যেতে পারে প্রাথমিক বারনুলি পরীক্ষা E-র ঘটনাদেশ S-এ দুটি ঘটনাবিন্দু আছে—'সাফল্য' (s) ও 'অসাফল্য' (f) অর্থাৎ $S = \{s, f\}$। E পরীক্ষার n-বার অনপেক্ষ প্রচেষ্টাকে যৌগিক পরীক্ষা E_n বললে, E_n-এর ঘটনাদেশ হবে S^n যা $(s, s, f, s, \dots, f)$ এই ধরনের 2^n-সংখ্যক ঘটনাবিন্দুর সমষ্টি। যদি ধরি S দেশে

$$P(s) = p, P(f) = 1 - p = q$$

এবং S^n দেশে nটি চলক $X_1, X_2, \dots, X_n$-এর সংজ্ঞা এইভাবে দিই : $X_i = 0$ বা 1 যদি i-তম প্রচেষ্টায় f বা s ঘটে $(i = 1, 2, \dots, n)$। তাহলে প্রত্যেক X_i হবে দ্বিপদ $(1, p)$।

এবার n-মাত্রিক চলক $(X_1, X_2, \dots X_n)$-এর কথা ভাবুন। এর বর্ণালি হল

$$(i_1, i_2, \dots i_n) \quad (i_1, i_2, \dots, i_n = 0, 1)$$

এই 2^n বিন্দুর সমষ্টি। যেহেতু প্রচেষ্টাগুলি অনপেক্ষ (অনুচ্ছেদ 5.5 দেখুন)

$$P(X_1 = i_1, X_2 = i_2, \dots, X_n = i_n) = P(X_1 = i_1) = P(X_2 = i_2) \dots P(X_n = i_n)$$

যা দেখায় যে $X_1, X_2, \dots X_n$ পরস্পর অনপেক্ষ চলক।

যেহেতু $X_1, X_2, ..., X_n$ পরস্পর অনপেক্ষ চলক যার প্রত্যেকটি দ্বিপদ $(1, p)$ পুনরুৎপাদন ধর্ম থেকে পাওয়া যায় যে $S_n = X_1 + X_2 + ... X_n$ দ্বিপদ (n, p) যা n প্রচেষ্টায় সাফল্যের সংখ্যা নির্দেশ করে।

যদৃচ্ছ হাঁচা সমস্যা : এটি বারনুলি প্রচেষ্টায় সঙ্গো সম্পৃক্ত একটি মজার সমস্যা। মনে করুন একটি কণা x-অক্ষের উপর এমনভাবে বিচরণ করে যে কণাটি একক দূরত্বে লাফিয়ে চলে সামনের দিকে বা পিছনের দিকে যদি প্রচেষ্টায় ফল হয় যথাক্রমে 'সাফল্য' বা 'অসাফল্য'। ধরা যাক কণাটি শুরুতে r বিন্দুতে আছে যেখানে r একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। আমাদের সমস্যা হল nটি বারনুলি প্রচেষ্টায় পর কণাটির স্থানাঙ্কের সম্ভাবনা নিবেশন নির্ধারণ করা।

মনে করুন X_i' হল i-তম প্রচেষ্টায় বা লাফে কণাটির স্থানচ্যুতি $(i = 1, 2, ..., n)$। তাহলে $X_i' - 1$ ও 1 মান গ্রহণ করে যথাক্রমে q ও p সম্ভাবনার সঙ্গো। $X_i = (X_i' + 1)/2$ ধরলে $X_i\, 0$ ও 1 মান গ্রহণ করে যথাক্রমে q ও p সম্ভাবনার সঙ্গো, অর্থাৎ X_i দ্বিপদ $(1, p)$। স্পষ্টতই, n লাফের পর কণাটির স্থানাঙ্ক,

$$X' = r + X_1' + X_2' + ... + X_n' = 2\,S_n + r - n$$

যেখানে $S_n = X_1 + X_2 + ... X_n$ যা দ্বিপদ (n, p) কেননা প্রশ্নানুসারে $X_1', X_2', ..., X_n'$ পরস্পর অনপেক্ষ এবং তাই $X_1, X_2, ..., X_n$ পরস্পর অনপেক্ষ। অতএব X'-এর বর্ণালি হবে

$$X_i' = 2i + r - n \qquad (i = 0, 1, 2, ..., n)$$

এবং
$$P(X' = x_i') = P(S_n = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \qquad ......(12.6.1)$$

12.7 সারাংশ

এই এককে অনপেক্ষ চলকের জন্য প্রত্যাশার গুণনিয়ম প্রতিষ্ঠা করা হল। অনপেক্ষ চলকের জন্য ভ্রামকসমূহ কী সরল রূপ নেয় তা দেখা হল। জানা গেল যে চলকদুটি অনপেক্ষ হলে তাদের সহভেদমান বা সহগাঙ্ক শূন্য হয়, কিন্তু এর বিপরীত উক্তি সত্য নয়। এও জানা গেল যে পরস্পর অনপেক্ষ চলকের যোগফলের বৈশিষ্ট্য অপেক্ষক চলকগুলির নিজ নিজ বৈশিষ্ট্য অপেক্ষকের গুণফল। বৈশিষ্ট্য অপেক্ষকের এই ধর্ম কাজে লাগিয়ে বিভিন্ন নিবেশনের পুনরুৎপাদন ধর্ম সহজেই প্রমাণ করা গেল। পরিশেষে অনপেক্ষ বহুচলক ব্যবহার করে বারনুলি প্রচেষ্টায় একটা নতুন আলোচনা করা হল।

12.8 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

1. X, Y দুটি অনপেক্ষ গামা চলক যার প্রচল যথাক্রমে l ও m। $E\{(X + Y)^2\}$-এর মান কত ?

2. X, Y দুটি অনপেক্ষ দ্বিপদ চলক যার প্রচলগুলি যথাক্রমে (m_1, p_1) ও (n_2, p_2)। $E(x^2Y)$-এর মান কত ?

3. একটি বর্গের দুটি সন্নিহিত বাহুর উপর দুটি বিন্দু যদৃচ্ছভাবে ও স্বাধীনভাবে নেওয়া হলে বিন্দুদুটির সংযোগকারী রেখা ও বর্গের বাহুর দ্বারা যে ত্রিভুজ তৈরি হয় তার ক্ষেত্রফলের গড়মান নির্ণয় করুন। ধরুন বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য a।

4. যদি X, Y অনপেক্ষ হয়, তাহলে a_1X+b_1Y ও a_2X+b_2Y এই দুটি চলকের সহগাঙ্ক নির্ণয় করুন।

5. যদি $X_1, X_2, ..., X_n$ পরস্পর অনপেক্ষ চলক হয় যাদের নিবেশন অভিন্ন এবং যদি তাদের যোগফল $X_1+X_2+...+X_n$-এর নিবেশন স্বাভাবিক হয়, তাহলে দেখান যে প্রত্যেকটি চলকের নিবেশনও স্বাভাবিক।

12.9 উত্তরমালা

1. $E\{(X+Y)^2\}=E(X^2)+E(Y^2)+2E(X)E(Y)=l(l+1)+m(m+1)+2lm=(l+m)(l+m+1)$

2. $E(X^2Y)=E(X^2)\,E(Y)=(n_1p_1q_1+n_1{}^2p_1{}^2)n_2p_2=(q_1+np_1)$

3. বর্গের সন্নিহিত বাহুদুটিকে অক্ষ ধরুন। মনে করুন x-অক্ষের উপর নেওয়া যদৃচ্ছ বিন্দুটির x-স্থানাঙ্ক X ও y-অক্ষের উপর বিন্দুটির y-স্থানাঙ্ক Y। প্রশ্নানুযায়ী X, Y অনপেক্ষ চলক যারা প্রত্যেকে $(0, a)$ অন্তরে সম-নিবেশিত। নির্ণেয় গড়মান $E\left(\frac{1}{2}XY\right)=\frac{1}{2}E(X)E(Y)=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}a.\frac{1}{2}a=\frac{1}{8}a^2$।

4. $U=a_1X+b_1Y,\ V=a_1X+b_2Y;\ m_u=a_1m_x+b_1m_y,\ m_y=a_2m_x+b_2m_y$

$$\sigma_u^2=a_1^2\sigma_x^2+b_1^2\sigma_v^2, \sigma_v^2=a_2^2\sigma_x^2+b_2^2\sigma_y^2$$

$$U=m_u=a_1(X-m_x)+b_1(Y-m_y),\ V-m_v=a_2(X-m_x)+b_2(Y-m_y)$$

$$\text{cov}\,(U, V)=a_1a_2\sigma_x^2+b_1b_2\sigma_y^2$$

$$\rho(U,V)=\frac{a_1a_2\sigma_x^2+b_1b_2\sigma_y^2}{\sqrt{\left(a_1^2\sigma_x^2+b_1^2\sigma_x^2\right)\left(a_2^2\sigma_x^2+b_2^2\sigma_y^2\right)}}$$

5. মনে করুন প্রত্যেকটি চলকের বৈশিষ্ট্য অপেক্ষক $\chi(t)$। (12.5.2) দ্বারা

$$\{\chi(t)\}^n=e^{imt-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$$

যদি $X_1+X_2+...+X_n$ স্বাভাবিক (m, σ) হয়। তাহলে $\chi(t)=e^{i\frac{m}{n}t-\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{n}t^2}$ যা দেখায় যে প্রত্যেক চলক স্বাভাবিক $(m/n, \sigma/\sqrt{n})$।

একক 13 ❐ শর্তাধীন প্রত্যাশা ও নির্ভরণ (Conditional expectation and regression)

গঠন

13.1 প্রস্তাবনা

এই এককে প্রথমে শর্তাধীন প্রত্যাশার ধারণা দেওয়া হবে। শর্তাধীন গড়-এর লেখ রূপায়ণকে নির্ভরণ বক্ররেখা বলা হয়। দেখা যাবে যে এই নির্ভরণ বক্ররেখার একটি অবম ধর্ম আছে।

একটি প্রদত্ত বক্ররেখার পরিবারে এই অবম ধর্ম প্রয়োগ করার পদ্ধতিকে লঘিষ্ঠ বর্গ পদ্ধতি (least square method) বলা হয়, এবং পরিবারের অবম ধর্মযুক্ত বক্ররেখাটিকে বলা হবে এই পরিবারভুক্ত লঘিষ্ঠ বর্গ নির্ভরণ বা সাযুজ্য বক্ররেখা। তারপর নির্ণয় করা হবে লঘিষ্ঠ বর্গ নির্ভরণ সরলরেখা ও শেষে অধিবৃত্তীয় সাযুজ্যরেখা নিরূপণের পদ্ধতি আলোচনা করা হবে।

13.2 উদ্দেশ্য

এই একক পড়লে আপনারা জানতে পারবেন

- শর্তাধীন প্রত্যাশার ধারণা
- নির্ভরণ বক্ররেখার কথা
- লঘিষ্ঠ বর্গনীতি এবং তার প্রয়োগে একটি প্রদত্ত পরিবারভুক্ত নির্ভরণ বক্ররেখার ধারণা

- নির্ভরণ সরলরেখা নিরূপণের বিষয়
- অধিবৃত্তীয় নির্ভরণ রেখা নির্ণয়ের পদ্ধতি

13.3 শর্তাধীন প্রত্যাশা

বিচ্ছিন্ন নিবেশন : X, Y চালকের একটি সন্তত অপেক্ষক $g(X, Y)$-এর $Y = y_j$ এই অনুমানের ভিত্তিতে **শর্তাধীন প্রত্যাশা** বা **গড়মানের** সংজ্ঞা হল

$$E\{g(X, Y)|\, Y = y_j\} = \sum_i g(x_i, y_j) f_{i|j} = \frac{\sum_i g(x_i, y_j) f_{ij}}{f.j} \qquad \text{..... (13.3.1)}$$

লক্ষ্য করুন, এই শর্তাধীন প্রত্যাশা হল X-এর অপেক্ষক $g(X, y_j)$-এর $Y = y_j$ অনুমানের ভিত্তিতে X-এর শর্তাধীন নিবেশনের সাপেক্ষে প্রত্যাশা।

X-এর শর্তাধীন গড়, $Y = y_j$ অনুমানের ভিত্তিতে, হল

$$m_{x|j} = E(X|Y_j) = \frac{\sum_i x_i f_{ij}}{f.j} \qquad \text{..... (13.3.2)}$$

যা $y = y_j$ রেখার উপরে অবস্থিত সম্ভাবনা ভরবিন্দুগুলির ভরকেন্দ্র।

$Y = y_j$ অনুমানের ভিত্তিতে X-এর শর্তাধীন ভেদমান হল

$$\sigma^2_{x|j} = \text{var}(X|Y = y_j) = E\left\{\left(X - m_{x|j}\right)^2 \middle| Y = y_j\right\} \qquad \text{..... (13.3.3)}$$

$Y = y_j$ অনুমানের ভিত্তিতে X-এর শর্তাধীন নিবেশনের অন্যান্য বৈশিষ্ট্যগুলির সংজ্ঞা অনুরূপে দেওয়া যায়। $X = x_i$ অনুমানের ভিত্তিতে Y-এর শর্তাধীন নিবেশনের বৈশিষ্ট্যগুলিও একইভাবে সংজ্ঞায়িত হয়।

যদি X, Y অনপেক্ষ হয়,

$$f_{i|j} = f_{xi}, f_{j|i} = f_{yj}$$

এবং তাই

$$E\{g(X)\,|\,Y = y_i\} = E\{g(X)\}, E\{h(Y)\,|\,X = x_i\} = E\{h(Y)\} \qquad \text{..... (13.3.4)}$$

বিশেষভাবে

$$m_{x|j} = m_x, m_{y|i} = m_y, \sigma_{x|j} = \sigma_x, \sigma_{y|i} = \sigma_y \qquad \text{..... (13.3.5)}$$

অবিচ্ছিন্ন নিবেশন : $Y = y$ এই অনুমানের ভিত্তিতে $g(X, Y)$-এর শর্তাধীন প্রত্যাশার সংজ্ঞা হবে

$$E\{g(X, Y)|\ Y = y\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_x(x|y) dx$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_x(x, y) dx}{f_y(y)} \qquad \text{..... (13.3.6)}$$

$Y = y$ অনুমানের ভিত্তিতে X-এর শর্তাধীন গড়, যা y-এর একটি অপেক্ষক, $m_x(y)$ দ্বারা চিহ্নিত হবে, এবং এর সংজ্ঞা হবে

$$m_x(y) = E(X|Y = y) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} xf(x, y)dx}{f_y(y)} \qquad \text{..... (13.3.7)}$$

অনুরূপে

$$m_y(x) = E(Y|X = x) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} yf(x, y)dy}{f_x(x)} \qquad \text{..... (13.3.8)}$$

শর্তাধীন ভেদমান $\sigma_x^2(y)$ ও $\sigma_y^2(x)$-এর সংজ্ঞা হবে

$$\sigma_y^2(y) = \text{var}(X|Y = y) = E\left\{(X - m_x(y))^2 | Y = y\right\} \qquad \text{..... (13.3.9)}$$

$$\sigma_y^2(x) = \text{var}(Y|X = x) = E\left\{(Y - m_y(x))^2 | X = x\right\} \qquad \text{..... (13.3.10)}$$

যদি X, Y অনপেক্ষ হয়, তাহলে

$$f_x(x|y) = f_x(x), f_x(y|x) = f_y(y)$$

যার ফলে

$$m_x(y) = m_x, m_y(x) = m_y, = \sigma_x^2(y) = \sigma_x^2, \sigma_y^2(x) = \sigma_y^2 \qquad \text{..... (13.3.11)}$$

13.4 নির্ভরণ বক্ররেখা

শর্তাধীন গড় $m_y(x)$-কে X-এর উপর Y-এর নির্ভরণ অপেক্ষকও বলা হয়, এবং

$$y = m_y(x) \qquad \text{..... (13.4.1)}$$

বক্ররেখাকে **X-এর উপর Y-এর নির্ভরণ বক্ররেখা বা Y-এর গড়ের জন্য নির্ভরণ বক্ররেখা** বলা হয়।

যেহেতু $m_y(x)\ x$ ও $x + dx$ দ্বারা বদ্ধ অসীম উল্লম্ব ফালিতে অবস্থিত সম্ভাবনা ভরের ভরকেন্দ্রের y- স্থানাঙ্ক, নির্ভরণ রেখা (13.4.1) হচ্ছে এই ভরকেন্দ্রের সঞ্চারপথ যখন x চলমান হয়।

অনুরূপে, Y-এর উপর X-এর নির্ভরণ বক্ররেখা বা X-এর গড়ের জন্য নির্ভরণ বক্ররেখা হল

$$x = m_x(y) \qquad \text{..... (13.4.2)}$$

(13.4.1) ও (13.4.2) হচ্ছে একটি অবিচ্ছিন্ন সম্ভাবনা নিবেশনের দুটি নির্ভরণ বক্ররেখার সমীকরণ।

যদি একটি নির্ভরণ রেখা সরলরেখা হয়, তাহলে আমরা বলি সংশ্লিষ্ট নির্ভরণটি রৈখিক। যদি একটি নির্ভরণ রৈখিক হয়, তাহলে অন্যটিও যে রৈখিক হবে তা বলা যায় না।

1. X-এর অপেক্ষক $m_y(X)$-এর প্রত্যাশা

$$E\{m_y(X)\} = \int_{-\infty}^{\infty} m_y(x) f_x(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yf(x, y)dxdy$$

অথবা

$$E\{m_y(X)\} = m_y \qquad .....(13.4.3)$$

এবং তাই

$$\sigma^2\{m_y(X)\} = E\{(m_y(X) - m_y)\} \qquad .....(13.4.4)$$

2. এবার আমরা দেখি $E\{\sigma_y^2(X)\}$-এর মান σ_y^2 হয় কিনা।

$$E\{\sigma_y^2(X)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_y^2(x) f_x(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\{y - m_y(x)\}^2 f(x,y)dxdy$$

অথবা

$$E\{\sigma_y^2(X)\} = E\{(Y - m_y(X))^2\} \qquad .....(13.4.5)$$

যা সাধারণভাবে σ_y^2 নয়। বস্তুত, ডানপক্ষ নির্ভরণ রেখা $y = m_y(x)$-এর সাপেক্ষে দ্বিমাত্রিক সম্ভাবনা ভর বিভাজনের বিস্তৃতির মাপক, এবং তাই একে X-এর উপর Y-এর নির্ভরণ অপেক্ষকের সাপেক্ষে Y-এর ভেদমান বলা হবে এবং চিহ্নিত হবে σ_{yx}^2 দ্বারা, অর্থাৎ

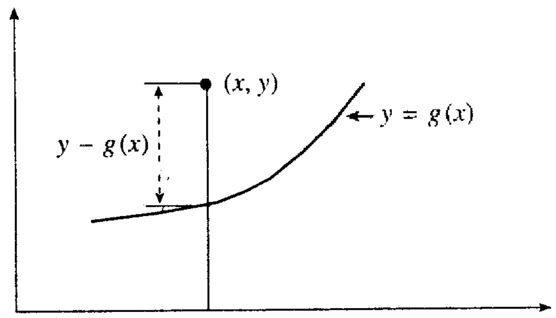
$$\sigma_{yx}^2 = E\{(Y - m_y(X))^2\} \qquad .....(13.4.6)$$

σ_{yx}^2-এর সংজ্ঞাও অনুরূপ হবে।

3. অবম ধর্ম : যে-কোনো সন্তত বাস্তব অপেক্ষক $g(x)$-এর জন্য $E\{(Y - g(X))^2\}$-এর মান অবম হয় যখন $g(x) = m_y(x)$।

$$E\{(Y - g(X))^2\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(y - g(x))^2 f(x,y)dxdy$$

সমাকলন চিহ্নের ভিতরে যে প্রত্যাশা আছে তা হল $X = x$ অনুমানের ভিত্তিতে Y-এর শর্তাধীন নিবেশনের $g(x)$ বিন্দুর সাপেক্ষে দ্বিতীয় ভ্রামক যা আমরা জানি অবম হয় যখন $g(x) =$ সংশ্লিষ্ট নিবেশনের গড়মান $= m_y(x)$। অতএব উপরোক্ত ফল প্রমাণিত হল।



এই উপপাদ্যের জ্যামিতিক অর্থ হল এইরকম : $y = g(x) xy$-তলে যে-কোনো বক্ররেখা এবং $E\{(Y - g(X))^2\}$ হচ্ছে নিবেশনের $y = g(x)$ বক্ররেখার থেকে, y-অক্ষের দিকে মাপা, দূরত্বের বর্গের গড়মান এবং তাই $y = g(x)$ বক্ররেখার সাপেক্ষে নিবেশনের বিস্তৃতির মাপক। ওপরের উপপাদ্য বলে যেসব বক্ররেখার মধ্যে এই বিস্তৃতির মাপক অবম মান নেয় যখন বক্ররেখাটি হয় নির্ভরণ বক্ররেখা $y = m_y(x)$।

4. যদি X, Y অনপেক্ষ হয়, তাহলে (13.3.11) দ্বারা পাই যে নির্ভরণ বক্ররেখাদুটি হবে $y = m_y$ ও $x = m_x$। তাই দুটি নির্ভরণই এক্ষেত্রে রৈখিক।

উদাহরণ

1. অনুচ্ছেদ 9.5-এর উদাহরণে গড়ের জন্য নির্ভরণ বক্ররেখাদুটি নিরূপণ করুন।

$$\int_{-\infty}^{\infty} y f(x, y) dy = \int_{0}^{1-x} y(1 - x - y) dy = (1 - x)^2$$

তাই

$$m_y(x) = \frac{1}{3}(1 - x) \qquad (0 < x < 1)$$

এবং Y-এর গড়ের জন্য নির্ভরণ বক্ররেখা হল

$$y = \frac{1}{3}(1 - x) \qquad (0 < x < 1)$$

অনুরূপে X-এর গড়ের জন্য নির্ভরণ বক্ররেখা

$$x = \frac{1}{3}(1 - y) \qquad (0 < y < 1)$$

2. দ্বিচালক স্বাভাবিক নিবেশন : অনুচ্ছেদ 10.3-এর উদাহরণ 3 থেকে পাই

$$m_y(x) = m_y + \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - m_x)$$

তাই X-এর উপর Y-এর নির্ভরণ বক্ররেখা হল

$$y = m_y + \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - m_x)$$

বা

$$\frac{y - m_y}{\sigma_y} = \rho \frac{x - m_x}{\sigma_x}$$

অনুরূপে, Y-এর উপর X-এর নির্ভরণ বক্ররেখা হল

$$\frac{y - m_y}{\sigma_y} = \frac{1}{\rho} \frac{x - m_x}{\sigma_x}$$

অতএব এক্ষেত্রে দুটি নির্ভরণই রৈখিক।

13.5 লঘিষ্ঠ বর্গ নির্ভরণ বক্ররেখা

গড়ের জন্য নির্ভরণ বক্ররেখার অবম ধর্ম হল সব বক্ররেখার মধ্যে প্রতিযোগিতায় নির্ভরণ বক্ররেখার জন্যেই উল্লিখিত বিস্তৃতির মাপক লঘিষ্ঠ হয়। এবার যদি এই প্রতিযোগিতা একটি বিশেষ বক্ররেখার øëüûìíëë âíÓÖ¼ãìûº ¢Çìíô•ç ìðíÜ Ì ìâëì Í ôãã ãüíÐ» Ì ûâ ÓâÞøìÈ öìíô ûíÜ **লঘিষ্ঠ বর্গ নীতি বা পদ্ধতি**।

মনে করুন

$$y = g(x\,;C_0, C_1, \ldots) \qquad \ldots..(13.5.1)$$

একটি বিশেষ বক্ররেখার পরিবার যেখানে $C_0, C_1, \ldots$ ঐ পরিবারের প্রচল। লঘিষ্ঠ বর্গ নীতি হল প্রচলগুলির এমন মান নির্ণয় করতে হবে যার জন্যে S লঘিষ্ঠ হয়, যেখানে

$$S = E\{(Y - g\,(X : C_0, C_1, \ldots))^2\} \qquad \ldots..(13.5.2)$$

যা $C_0, C_1, \ldots$-এর একটি অপেক্ষক এবং যা $y = (x\,;C_0, C_1, \ldots)$ বক্ররেখার সাপেক্ষে দ্বিমাত্রিক নিবেশনের বিস্তৃতির মাপক। যদি $C_0 = C^*_0, C_1, = C^*_1, \ldots$-এর জন্যে S লঘিষ্ঠ হয়, তাহলে

$$y = g(x\,;C^*_0, C^*_1, \ldots) \qquad \ldots..(13.5.3)$$

বক্ররেখাকে প্রদত্ত পরিবারভুক্ত **X-এর উপর Y-এর লঘিষ্ঠ বর্গ সাযুজ্য বা নির্ভরণ বক্ররেখা** বলা হবে। $g(x\;:C^*_0, C^*_1, \ldots)$ এই অপেক্ষককে X-এর উপর Y-এর লঘিষ্ঠ বর্গ নির্ভরণ অপেক্ষক, এবং এর প্রতিষঙ্গী যদৃচ্ছ চল

$$U_y = g\,(X\,;C^*_0, C^*_1, \ldots)$$

-কে বলা হবে $g\,(X\,;C^*_0, C^*_1, \ldots)$ এই পরিবারভুক্ত X-এর অপেক্ষক যা লঘিষ্ঠ বর্গ নীতি অনুসারে Y-এর সর্বোত্তম রূপায়ণ।

Y থেকে তার সর্বোত্তম রূপায়ণ U_y বাদ দিলে পাওয়া যায়

$$V_y = Y - U_y$$

যাকে Y-এর **অবশেষ** (residual) বলা হবে। আমরা দেখি

$$S_{\min} = E\{(Y - g\,(X\,;C^*_0, C^*_1, \ldots))^2\} = E(V_y{}^2) \qquad \ldots..(13.5.4)$$

যা নির্ভরণ বক্ররেখা $y = g\,(X\,;C^*_0, C^*_1, \ldots)$-এর সাপেক্ষে নিবেশনের একটি বিস্তৃতির মাপক এবং তাই নির্ভরণ বক্ররেখাটির নিবেশনের প্রতি সাযুজ্যের উৎকর্ষের বিপরীত মাপক (inverse measure of goodness of fit)।

S-কে অবমকরণের সমীকরণগুলি হল

$$\frac{\partial S}{\partial C_0} = 0, \frac{\partial S}{\partial C_1} = 0, \ldots \qquad \ldots..(13.5.5)$$

যাকে **মৌল সমীকরণসমূহ** (normal equations) বলে। এগুলিকে সমাধান করে পাওয়া যায় প্রচলগুলির লঘিষ্ঠ বর্গ মান $C^*_0, C^*_1, \ldots$।

অনুরূপভাবে পাওয়া যায় X-এর উপর Y-এর একটি বিশেষ পরিবারভুক্ত লঘিষ্ঠ বর্গ নির্ভরণ বক্ররেখা।

লঘিষ্ঠ বর্গ নির্ভরণ বক্ররেখাসমূহের মধ্যে সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ হল নির্ভরণ সরলরেখাগুলি, যদিও অন্য ধরনের বক্ররেখাও অনেক সময় ব্যবহৃত হয়। সুবিধের জন্য এর পর থেকে 'লঘিষ্ঠ বর্গ নির্ভরণ' এই কথার বদলে শুধু 'নির্ভরণ' ব্যবহার করা হবে।

13.6 নির্ভরণ রেখা

এক্ষেত্রে আমরা বিবেচনা করব সরলরেখার পরিবার

$$y = C_0 + C_1 x \qquad \text{..... (13.6.1)}$$

যার জন্যে

$$S = E\{(Y - C_0 - C_1 X)^2\} \qquad \text{..... (13.6.2)}$$

মৌল সমীকরণসমূহ হল

$$\frac{\partial S}{\partial C_0} = 0, \frac{\partial S}{\partial C_1} = 0$$

যাতে $C_0 = C*_0, C_1 = C*_1$ বসালে পাই

$$E(Y - C*_0 - C*_1 X) = 0 \qquad \text{..... (13.6.3)}$$

$$E\{X(Y - C*_0 - C*_1 X)\} = 0 \qquad \text{..... (13.6.4)}$$

অথবা

$$C_0^* + C_1^* m_x = m_y$$

$$C_0^* m_x + C_1^* \alpha_{x^2} = \alpha_{11}$$

এগুলি সমাধান করে পাই

$$C_0^* = m_y - \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x} m_x = C_1^* = \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x} \qquad \text{..... (13.6.5)}$$

অতএব X-এর উপর Y-এর নির্ভরণ রেখা হবে

$$y = C_0^* + C_1^* x = m_y + \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - m_x) \qquad \text{..... (13.6.6)}$$

x-এর সহগ, $C_0^* = \rho\sigma_y / \sigma_x$-কে বলা হবে X-এর উপর Y-এর **নির্ভরণ সহগ** (regission co-efficient) এবং চিহ্নিত হবে β_{yx} দিয়ে, অর্থাৎ

$$\beta_{yx} = \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x} \qquad \text{..... (13.5.7)}$$

(13.6.6)-কে এইভাবে লেখা যায়

$$\frac{y - m_y}{\sigma_y} = \rho\frac{x - m_x}{\sigma_x} \qquad \text{..... (13.5.8)}$$

আমরা দেখি

$$\left(Y - C_0^* - C_1^* X\right)^2 = \left\{Y - m_y - \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - m_x)\right\}^2$$

$$= \left(Y - m_y\right)^2 + \rho^2\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}(X - m_x)^2 - 2\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - m_x)\left(Y - m_y\right)$$

তাই

$$E\left\{\left(Y - C_0^* - C_1^* X\right)^2\right\} = \sigma_y^2 + \rho^2\sigma_y^2 - 2\rho^2\sigma_y^2$$

বা

$$E\left\{(Y - C_0^* - C_1^* X)^2\right\} = \sigma_y^2(1 - \rho^2) \qquad \text{..... (13.6.9)}$$

অনুরূপে, Y-এর উপর X-এর নির্ভরণ রেখা হবে

$$x = d_0^* + d_1^* y$$

যেখানে

$$d_0^* = m_x - \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}m_y,\ d_1^* = \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y} \qquad \text{..... (13.6.10)}$$

অথবা

$$\frac{y - m_y}{\sigma_y} = \frac{1}{\rho}\frac{x - m_x}{\sigma_x} \qquad \text{..... (13.6.11)}$$

Y-এর উপর X-এর নির্ভরণ সহগ

$$\beta_{xy} = \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_x} \qquad \text{..... (13.6.12)}$$

এবং

$$E\left\{\left(X - d_0^* - d_1^* Y\right)^2\right\} = \sigma_x^2(1 - \rho^2) \qquad \text{..... (13.6.13)}$$

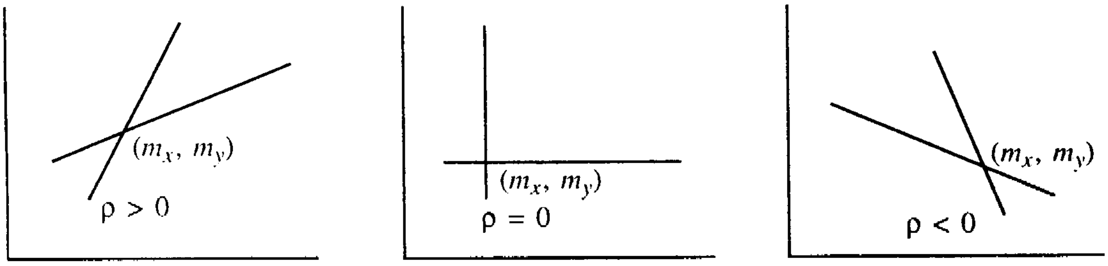
1. ρ-এর তাৎপর্য : আমরা আগেই মন্তব্য করেছি যে যদি $\rho = 0$ হয়, তাহলে X, Y আবশ্যিকভাবে অনপেক্ষ নয়, কিন্তু যদি $\rho = \pm 1$ হয়, তাহলে $Y X$-এর একটি রৈখিক অপেক্ষক। পরের ফলটি (13.6.9) বা (13.6.13) থেকেও স্পষ্ট বোঝা যায়। যদি $\rho = \pm 1$ হয়, তাহলে দুটি নির্ভরণ রেখা এক হয়ে যায় এবং

$$Y = C_0^* + C_1^* X = m_y \pm \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - m_x)$$

যা X-এর একটি রৈখিক অপেক্ষক, অর্থাৎ সব সম্ভাবনা ভর একীভূত নির্ভরণ রেখার উপর অবস্থিত।

এবার আমরা দেখাব যে $|\rho|$ X ও Y-এর রৈখিক নির্ভরতার মাপক। (13.6.9) বা (13.6.13) থেকে পাই $0 \le |\rho| \le 1$ এবং সূত্রগুলির বাঁপক্ষ, যা যথাক্রমে নির্ভরণ রেখাদুটির সাপেক্ষে নিবেশনের বিস্তৃতির

মাপক, $(1-\rho)^2$-এর সমানুপাতিক। এটা দেখায় যে $|\rho|$ নির্ভরণ রেখাদুটি যারা কিনা নিবেশনের সর্বোত্তম সাযুজ্যবিশিষ্ট সরলরেখা, তাদের সাপেক্ষে সম্ভাবনা ভরের ঘনত্বের পরিমাপ, অর্থাৎ X ও Y-এর রৈখিক নির্ভরতার মাপক। আমরা এও বলতে পারি যে $|\rho|$ নির্ভরণ রেখাদুটির নিবেশনের প্রতি সাযুজ্যের উৎকর্ষের মাপক। অধিকন্তু এটা খুব সন্তোষজনক মাপক কেননা এটা শূন্যমাত্রিক এবং চলকগুলির মাপের একক ও মূলবিন্দুর উপর নির্ভরশীল নয়।



2. $\rho > 0$ হলে নির্ভরণ রেখাগুলির নতি ধনাত্মক ও $\rho < 0$ হলে এদের নতি ঋণাত্মক হয়। $\rho = 0$ হলে নির্ভরণ রেখাদুটি হবে $y = m_y$ ও $x = m_x$।

3. Y-এর সর্বোত্তম রূপায়ণ,

$$U_y = C_0^* + C_1^* X = m_y + \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - m_x) \qquad .....(13.6.14)$$

তাই

$$E(U_y) = m_y, \sigma(U_y) = |\rho|\sigma_y \qquad .....(13.6.15)$$

এবং

$$\rho\,(U_y, Y) = |\rho| \geq 0 \qquad .....(13.6.16)$$

অতএব আমরা বলতে পারি যে Y এবং তার সর্বোত্তম রূপায়ণের মধ্যে অনুবন্ধ সহগাঙ্ক নির্ভরণ রেখাদুটির নিবেশনের প্রতি সাযুজ্যের উৎকর্ষের মাপক।

4. Y-এর অবশেষ

$$V_y = Y - U_y = Y - C_0^* - C_1^* X \qquad .....(13.6.17)$$

এখন স্বাভাবিক সমীকরণসমূহ বলে যে

$$E(V_y) = 0, E(XV_y) = 0 \qquad .....(13.6.18)$$

(13.6.9) দ্বারা

$$\sigma^2(V_y) = E(V_y^2) = \sigma_y^2\,(1-\rho^2) \qquad .....(13.6.19)$$

অথবা (13.6.15)-এর সাহায্যে

$$\sigma^2(V_s) = \sigma_y^2 - \sigma^2(U_y) \qquad .....(13.6.20)$$

এই সূত্রটি বলে যে Y-এর অবশেষে ভেদমান হল Y-এর ভেদমান থেকে Y-এর সর্বোত্তম রূপায়ণের ভেদমান বাদ দিলে যা থেকে তাই। এই অর্থে $\sigma^2(V_y)$ কে Y-র **অবশিষ্ট ভেদমান** (residual variance)

বলা হয়। থেকে এটা স্পষ্ট যে অবশিষ্ট ভেদমান $\sigma^2(V_y)$ X-এর উপর Y-এর নির্ভরণ রেখার সাপেক্ষে বিস্তৃতির মাপক।

(13.16.18) থেকে পাই $\operatorname{cov}(X, V_y) = E\{(X - m_x)V_y\} = 0$। তাই

$$\rho(X, V_y) = 0 \qquad \text{..... (13.6.21)}$$

এবং

$$\rho(U_y, V_y) = 0 \qquad \text{..... (13.6.22)}$$

5. যদি y-এর গড়ের নির্ভরণ বক্ররেখা $y = m_y(x)$ একটি সরলরেখা হয়, তাহলে সব বক্ররেখার মধ্যে প্রতিযোগিতায় $y = m_y(x)$ অবম ধর্মযুক্ত এবং যেহেতু কেবল সরলরেখার পরিবারের মধ্যে প্রতিযোগিতায় তা অবশ্যই অবম ধর্মযুক্ত হবে, অর্থাৎ $y = m_y(x)$-ই হবে X-এর উপর Y-এর লঘিষ্ঠ বর্গ নির্ভরণ সরলরেখা।

উদাহরণ

1. অনুচ্ছেদ 9.4-এর উদাহরণ 1-এ নির্ভরণ রেখাদুটি বের করুন।

অনুচ্ছেদ 11.5-এর উদাহরণ 1 থেকে পাই

$$\beta_{yx} = \mu_{11} / \sigma_x^2 = \frac{1}{2}, \beta_{xy} = \mu_{11} / \sigma_y^2 = -\frac{5}{16}$$

অতএব নির্ভরণ রেখাদুটি হল

$$y - \frac{10}{9} = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{7}{9}\right) \qquad (X\text{-এর উপর } Y)$$

$$x - \frac{7}{9} = -\frac{5}{16}\left(y - \frac{10}{9}\right) \qquad (Y\text{-এর উপর } X)$$

2. অনুচ্ছেদ 9.5-এর উদাহরণে নির্ভরণ রেখাদুটি বের করুন।

এখানে

$$m_x = m_y = \frac{1}{4}, \sigma_x^2 = \frac{3}{80}, = \rho - \frac{1}{3}$$

যার ফলে $\beta_{yx} = \beta_{xy} = -\frac{1}{3}$। তাই X-এর উপর Y-এর এবং X-এর উপর X-এর নির্ভরণ রেখা হবে যথাক্রমে

$$y - \frac{1}{4} = \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{4}\right),\ x - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}\left(y - \frac{1}{4}\right)$$

অথবা

$$y = \frac{1}{3}(1 - x).\, x = \frac{1}{3}(1 - y)$$

অনুচ্ছেদ 13.4-এর উদাহরণ 1-এ দেখুন যে এরাই হল যথাক্রমে Y-এর গড়ের ও X-এর গড়ের নির্ভরণ বক্ররেখা। যেহেতু গড়ের নির্ভরণ বক্ররেখাদুটি এক্ষেত্রে সরলরেখা, আবশ্যিকভাবে এরাই হবে লঘিষ্ঠ বর্গ নির্ভরণ রেখা।

13.7 অধিবৃত্তীয় সাযুজ্যরেখা নিরূপণ

X-এর উপর Y-এর নির্ভরণ প্রসঙ্গো k-ঘাতবিশিষ্ট অধিবৃত্ত

$$y = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \ldots C_kx^k \qquad \text{..... (13.7.1)}$$

এই পরিবারের কথা ভাবুন যেখানে $C_0, C_1, \ldots C_k$ পরিবারের $(k+1)$-টি প্রচল।

ধরুন

$$S = E\{(Y - C_0 - C_1X - \ldots - C_kX^k)^2\} \qquad \text{..... (13.7.2)}$$

মৌল সমীকরণসমূহ হল

$$\frac{\partial S}{\partial C_0} = 0, \frac{\partial S}{\partial C_1} = 0, \ldots, \frac{\partial S}{\partial C_k} = 0$$

যাতে $C_0 = C^*_0 \cdot C^*_1 = C^*_1, \ldots, C_k = C^*_k$ বসিয়ে পাই

$$E\left\{\left(Y - C_0^* - C_1^*X - \ldots - C_k^*X^k\right)\right\} = 0$$

$$E\left\{X\left(Y - C_0^* - C_1^*X - \ldots - C_k^*X^k\right)\right\} = 0 \qquad \text{..... (13.7.3)}$$

$$E\left\{X^k\left(Y - C_0^* - C_1^*X - \ldots - C_kX^k\right)\right\} = 0$$

অথবা α_{kl} ভ্রামক ব্যবহার করে পাই

$$C_0^*\alpha_{00} + C_1^*\alpha_{10} + C_2^*\alpha_{20} + \ldots + C_k^*\alpha_{k0} = \alpha_{01}$$

$$C_0^*\alpha_{10} + C_1^*\alpha_{20} + C_2^*\alpha_{30} + \ldots + C_k^*\alpha_{k+1,0} = \alpha_{11} \qquad \text{..... (13.7.4)}$$

$$C_0^*\alpha_{00} + C_1^*\alpha_{k+1,0} + C_2^*\alpha_{k+2,0} + \ldots + C_k^*\alpha_{2k,0} = \alpha_{k1}$$

এই সমীকরণগুলি $C^*_0, C^*_1, \ldots, C^*_k$ নির্ণয় করে। তাহলে নিবেশনের সর্বোত্তম সাযুজ্যবিশিষ্ট k-ঘাত অধিবৃত্ত হবে

$$y = C_0^* + C_1^*x + \ldots + C_k^*x^k \qquad \text{..... (13.7.5)}$$

এবং X-এর একটি k-ঘাত বহুপদের দ্বারা Y-এর সর্বোত্তম রূপায়ণ হল

$$U_y = C_0^* + C_1^*x + \ldots + C_k^*X^k \qquad \text{..... (13.7.6)}$$

ও তার অবশেষ

$$U_y = Y - U_y = Y - C_0^* - C_1^*X - \ldots - C_k^*X^k \qquad \text{..... (13.7.7)}$$

প্রথম মৌল সমীকরণ বলে

$$E(V_y) = 0 \qquad \text{..... (13.7.8)}$$

অতএব

$$\sigma^2(V_s) = E(V_y^2) = S_{\min} \qquad ..... (13.7.9)$$

মৌল সমীকরণসমূহ ব্যবহার করে আমরা সহজে $S_{\min}$-এর মান নির্ণয় করতে পারি। লিখুন

$$S = E\left\{(\kappa Y - C_0 - C_1 X - \ldots - C_k X^k)^2\right\}$$

যেখানে κ একটি নতুন প্রচল যার মান 1। এর ফলে $S\,\kappa, C_0, C_1, \ldots C_k$ চলের একটি সমঘাত অপেক্ষক যার ঘাত 2। অতএব

$$2S = \kappa + \frac{\partial S}{\partial \kappa} + C_0 \frac{\partial S}{\partial C_0} + C_1 \frac{\partial S}{\partial C_1} + \ldots + C_k \frac{\partial S}{\partial C_k}$$

এবং তাই

$$2S_{\min} = \left[\kappa + \frac{\partial S}{\partial \kappa} + C_0 \frac{\partial S}{\partial C_0} + C_1 \frac{\partial S}{\partial C_1} + \ldots + C_k \frac{\partial S}{\partial C_k}\right]_{\kappa=1, C_0=C_0^*, \ldots C_k=C_k^*}$$

$$= \frac{\partial S}{\partial \kappa}_{\kappa=1, C_0=C_0^*, \ldots C_k=C_k^*}$$

$$= 2E\left\{Y(Y - C_0^* - C_1^* X - \ldots - C_k^* X^k)\right\}$$

অথবা

$$S_{\min} = \alpha_{12} - C_0^* \alpha_{01} - C_1^* \alpha_{11} - \ldots - C_k^* \alpha_{k1} \qquad ..... (13.7.10)$$

আমরা জানি যে $S_{\min}$ নির্ভরণ অধিবৃত্ত (13.7.5)-এর নিবেশনের প্রতি সাযুজ্যের উৎকর্ষের বিপরীত মাপক। কিন্তু এই মাপকের প্রধান ত্রুটি হল এটা শূন্যমাত্রিক নয়। $k = 1$-এর ক্ষেত্রে অর্থাৎ নির্ভরণ রেখার ক্ষেত্রে দেখেছি যে $|\rho|$ একটি শূন্যমাত্রিক সাযুজ্যের উৎকর্ষের মাপক। অধিবৃত্তীয় নির্ভরণের বেলায়ও এহেন সন্তোষজনক মাপক পেতে হলে U_y ও Y-এর যুগ্ম নিবেশনের কথা চিন্তা করুন। U_y-এর উপর Y-এর নির্ভরণ রেখা নির্ণয় করতে হলে (U_y, y)-তলে

$$y = a + bu_y$$

এই সরলরেখার পরিবারের কথা বিবেচনা করতে হবে এবং

$$E\left\{\left(Y - a - bU_y\right)^2\right\} = E\left\{\left(Y - (a + bC_0^*) - bc_1^* X - \ldots - bC_k^* X^k\right)^2\right\}$$

এই প্রত্যাশাকে অবম করতে হবে প্রচল a, b-র সাপেক্ষে। যেহেতু ডানপক্ষ (13.7.2) আকারের, স্পষ্টতই প্রত্যাশাটি অবম যখন $a = 0, b = 1$ এবং তাই U_y-এর উপর Y-এর নির্ভরণ রেখা হল $y = u_y$।

U_y-এর একটি রৈখিক অপেক্ষকের দ্বারা Y-এর সর্বোত্তম রূপায়ণ হবে U_y এবং Y-এর অবশেষ হবে $Y - U_y = V_y$।

(13.6.16) থেকে পাই $\rho(U_y, Y) \geq 0$ এবং তাই

$$0 \leq \rho(U_y, Y) \leq 1 \qquad ..... (13.7.11)$$

(13.6.19) দ্বারা পাই

$$\sigma^2(V_y) = \sigma_y^2\left\{1-\rho^2(U_y, Y)\right\} \qquad \text{..... (13.7.12)}$$

যা দেখায় যে $R_y = \rho(U_y, Y)$ হল X-এর উপর Y-এর নির্ভরণ অধিবৃত্তের নিবেশনের প্রতি সাযুজ্যের উৎকর্ষের শূন্যমাত্রিক মাপক যার পাল্লা 0 থেকে 1। আমরা লিখতে পারি

$$R_y = \rho(U_y, Y) = \sqrt{1-\frac{S_{\min}}{\sigma_y^2}} \qquad \text{..... (13.7.13)}$$

যেখানে $S_{\min}$(13.7.10) দ্বারা সংজ্ঞায়িত।

উদাহরণ : দ্বিমাত্রিক চলক (X, Y) $(0,1), (1,3), (-1,-1), (2,4), (-2,-4)$ মানগুলি সম সম্ভাবনায় গ্রহণ করে। লঘিষ্ঠ বর্গ নীতিমাফিক নিবেশনের নীচের পরিবারভুক্ত সাযুজ্যের নিরূপণ করুন (i) $y = C_0 + C_1x$, (ii) $y = C_0 + C_1x + C_2x^2$

বর্ণালি : (x_i, y_i) $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ লিখলে

$$\sum x_i = 0,\ \sum x_i^2 = 10,\ \sum x_i^3 = 0,\ \sum x_i^4 = 34,\ \sum y_i = 3,\ \sum y_i^2 = 43$$

$$\sum x_i y_i = 20,\ \sum x_i^2 y_i = 2,\ 5\sigma_y^2 = 206/5$$

(i) মৌল সমীকরণগুলি হল : $5C_0^* = 3,\ 10C_1^* = 20,\ C_0^* = \dfrac{3}{5},\ C_1^* = 2$; তাই সাযুজ্যরেখা হবে $y = \dfrac{3}{5} + 2x$। (13.7.10) দ্বারা

$$5\,S_{\min} = \sum y_i^2 - C_o^*\sum y_i - C_1^*\sum x_i y_i = \frac{6}{5}$$

এবং (13.7.13) দ্বারা $R_y = 0.985$।

(ii) মৌল সমীকরণসমূহ ঃ $5C_0^* + 10C_2^* = 3,\ 10C_1^* = 20,\ 10C_1^* + 34C_2^* = 2;\ C_0^* = 41/35,\ C_1^* = 2,\ C_2^* = 2/7;\ y = \dfrac{41}{35} + 2x - \dfrac{2}{7}x^2$। (13.7.10) দ্বারা

$$5\,S_{\min} = \sum y_i^2 - C_o^*\sum y_i - C_1^*\sum x_i y_i - C_2^*\sum x_i^2 y_i = \frac{2}{35}$$

এবং (13.7.13) দ্বারা $R_y = 0.999$।

13.8 সারাংশ

এই এককে শর্তাধীন প্রত্যাশার অবতারণা করা হল। অবিচ্ছিন্ন নিবেশনের ক্ষেত্রে নির্ভরণ বক্ররেখার সংজ্ঞা এবং তার অবম ধর্ম প্রতিষ্ঠা করা হল। এই ধরনের অবম ধর্মই লঘিষ্ঠ বর্গ নীতির ভিত্তি। লঘিষ্ঠ বর্গ নীতির দ্বারা কীভাবে একটি প্রদত্ত বক্ররেখার পরিবারভুক্ত নির্ভরণ বা সাযুজ্যরেখা নির্ণয় করা যায় তা সাধারণভাবে আলোচনা করা হল। পরে বিশেষভাবে সাযুজ্য সরলরেখা ও অধিবৃত্তীয় বক্ররেখা নিরূপণের কথা আলোচনা করা হল।

13.9 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

1. (i) 9.9 অনুচ্ছেদের 1(ii)নং প্রশ্নে $E(X \mid Y = 1)$ ও $E(X + Y \mid Y = 1)$-এর মান নির্ণয় করুন।

(ii) 9.9 অনুচ্ছেদের 2(ii)নং প্রশ্নে $E(Y \mid X = 1)$-এর মান নির্ণয় করুন।

2. 9.9 অনুচ্ছেদের 3নং প্রশ্নে টানা বলের রঙ সাদা এই অনুমানের ভিত্তিতে বলের নম্বরের গড়মান নির্ণয় করুন।

3. 9.9 অনুচ্ছেদের 7নং প্রশ্নে গড়ের জন্য নির্ভরণ রেখাদুটি নির্ণয় করুন।

4. 9.9 অনুচ্ছেদের 8নং প্রশ্নে গড়ের জন্য নির্ভরণ রেখাদুটি নির্ণয় করুন।

5. 9.9 অনুচ্ছেদের 9নং প্রশ্নে Y-গড়ের জন্য নির্ভরণ রেখা নির্ণয় করুন।

6. 9.9 অনুচ্ছেদের 3 নং প্রশ্নে লঘিষ্ঠ বর্গ সাযুজ্য সরলরেখাদুটি নির্ণয় করুন। এদের সাযুজ্যের উৎকর্ষের মাপক বের করুন।

7. 10.5 অনুচ্ছেদের উদাহরণ 1-এ সাযুজ্য সরলরেখাগুলি ও তাদের সাযুজ্যের মাপক নিরূপণ করুন। X-এর উপর Y-এর নির্ভরণ বক্ররেখাটি নির্ণয় করুন।

8. 9.9 অনুচ্ছেদের 8নং প্রশ্নে সাযুজ্য সরলরেখাগুলি নির্ণয় করুন।

9. দেখান যে লঘিষ্ঠ বর্গ সরলরেখাদুটির মধ্যে সূক্ষ্ম কোণ θ হলে

$$\tan\theta = \frac{1-\rho^2}{\rho}\frac{\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2\sigma_y^2}$$

$\rho = 0$ এবং $\rho = \pm 1$ হলে θ-র মান ও তার ব্যাখ্যা কী?

10. নির্ভরণ সরলরেখাদুটি $x + 6y = 6, 3x + 2y = 10$ হলে গড়গুলি ও সহগাঙ্ক নির্ণয় করুন।

11. একটি দ্বিমাত্রিক নিবেশনের বর্ণালি : $(-1, 0), (1, -2), (-2, 2), (2, -2)$ যার প্রত্যেকটিতে সম্ভাবনা ভর 1/4 $y = C_0 + C_1x$ ও $y = C_0 + C_1x + C_2x^2$ ধরনের লঘিষ্ঠ বর্গ সাযুজ্যরেখা নির্ণয় করুন।

13.10 উত্তরমালা

1. (i) $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ (ii) 1

2. $\frac{3}{2}$

3. $y = \frac{9x^2 - 16x + 9}{6(3x^2 - 4x + 2)}, x = \frac{36y^2 - 32y + 9}{12(6y^2 - 4y + 1)}$

4. $y = \frac{1}{2}x, \quad x = \frac{1}{2}(1 + y)$

5. $y = \frac{1}{2}(1 - x)$

6. $y = \frac{7}{9} = \frac{17}{60}(x-4), y = \frac{7}{9} = \frac{50}{153}(x-4)$

7. $y - \frac{7}{12} = -\frac{1}{11}\left(x - \frac{7}{12}\right), y - \frac{7}{12} = -11\left(x - \frac{7}{12}\right)$; সাযুজ্যতার মাপক $= |\rho| = 1/11$

8. $f_x(x) = x + \frac{1}{2}\ (0 < x < 1)$

$$m_y(x) = \int_0^1 \frac{x+y}{x+\frac{1}{2}}\, y dy = \frac{3x+2}{3(2x+1)}$$

$$y = \frac{3x+2}{3(2x+1)}$$

9. $\rho = 0$ হলে $\theta = \frac{1}{2}\pi$; নির্ভরণ রেখা : $x = m_y, x = m_x$ । $\rho = \pm 1$ হলে $\theta = 0$, নির্ভরণ রেখাদুটি অভিন্ন।

10. যেহেতু রেখাদুটির ছেদবিন্দু $\left(3, \frac{1}{2}\right)$, $m_x = 3, m_y = \frac{1}{2}$ । $\rho\sigma_y/\sigma_x = -1/6, \rho\sigma_x/\sigma_y = -2/3$ যার থেকে $\rho^2 = 1/9$, তাই $\rho = -1/3$ যেহেতু $\rho < 0$ ।

11. বর্ণালি $(x_i, y_i) = (i = 1, 2, 3, 4)$ লিখলে

$$\sum x_i = 0,\ \sum x_i^2 = 10, \sum x_i^3 = 0, \sum x_i^4 = 34, \sum y_i = -2, \sum y_i^2 = 12$$

$$\sum x_i y_i = -10,\ \sum x_i^2 y_i = -2, \sum 4\sigma_y^2 = 11$$

(i) মৌলি সমীকরণ ঃ $4C_0^* = -2, 10C_1^* = -10; C_0^* = -\frac{1}{2}, C_1^* = -1$

$y = -\frac{1}{2} - x$ । (13.7.10) ও (13.7.13) দ্বারা

$4\,S_{\min} = 1, R_y = 0.953$

(ii) মৌল সমীকরণ : $4C_0^* + 10C_2^* = -2, 10C_1^* = -10; 10C_0^* + 34C_2^* = -2$

$C_0^* = -\frac{4}{3}, C_1^* = -1, C_2^* = \frac{1}{3};\ y = -\frac{4}{3} - x + \frac{1}{3}x^2$ । (13.7.10) ও (13.7.13) দ্বারা

$$4\,S_{\min} = 0, R_y = 1$$

যা এই সূচিত করে যে বর্ণালির বিন্দুগুলি সব $y = -\frac{4}{3} - x + \frac{1}{3}x^2$ অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত যা সত্যি।

একক 14 ❒ কয়েকটি বিশেষ নিবেশন

গঠন

14.1 প্রস্তাবনা

এই এককে আমরা তিনটি বিশেষ অবিচ্ছিন্ন নিবেশনের কথা আলোচনা করব যা প্রয়োগের ক্ষেত্রে খুব গুরুত্বপূর্ণ। এগুলি হল χ^2, t ও F নিবেশন। এখানে আমরা প্রয়োগের ক্ষেত্রে প্রচলিত রীতি মেনে সংশ্লিষ্ট চলক ও তার প্রতিযঙ্গী বাস্তব চলকে χ^2, t, F এই অক্ষরগুলির দ্বারাই চিহ্নিত করব। এই নিবেশনগুলি মূলত বহু সংখ্যক অনপেক্ষ আদর্শ স্বাভাবিক চলকের অপেক্ষকের নিবেশন হিসেবে পাওয়া যায়।

14.2 উদ্দেশ্য

এই একক পড়লে আপনারা জানতে পারবেন

- χ^2-নিবেশনের সংজ্ঞা ও উৎপত্তির কথা এবং তার বৈশিষ্ট্য
- t-নিবেশনের কথা
- F-নিবেশনের কথা

14.3 χ^2-নিবেশন

এই নিবেশনের বর্ণালি হচ্ছে বাস্তব অক্ষের ধনাত্মক অর্ধ এবং ঘনত্ব অপেক্ষক হল

$$f(\chi\text{-}^{2}) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\chi^2}\left(\frac{1}{2}\chi^2\right)^{u/2-1}}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)} \qquad \text{যখন } \chi^2 > 0 \qquad \text{.....} (14.3.1)$$

$$= 0 \qquad \text{যখন } \chi^2 < 0)$$

যেখানে একমাত্র প্রচল হল n যা একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং যাকে **স্বাতন্ত্র্যের মাত্রা** (degrees of freedom) বলা হয়।

উপরোক্ত ঘনত্ব অপেক্ষকের আকার গামা নিবেশনের কথা মনে করিয়ে দেয়। বস্তুত এই দুটি নিবেশনের মধ্যে সম্পর্ক নীচের উপপাদ্যে নিহিত আছে।

উপপাদ্য I : যদি X একটি $\gamma\left(\frac{1}{2}n\right)$ চলক হয়, তাহলে $Y = 2X$ একটি χ^2-চলক যার স্বাতন্ত্র্যের মাত্রা n। বিপরীতক্রমে, যদি Y একটি $\chi^2(n)$ চলক হয়, তাহলে X একটি $\gamma\left(\frac{1}{2}n\right)$ চলক হবে।

প্রমাণ। $y = 2x$ লিখলে সম্ভাবনা অন্তরক

$$dF = \frac{e^{-x}x^{n/2-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}dx = \frac{e^{-y/2}\left(\frac{1}{2}y\right)^{n/2-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}d\left(\frac{1}{2}y\right) = \frac{e^{-y/2}\left(\frac{1}{2}y\right)^{n/2-1}}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)} \qquad (0 < y < \infty)$$

যা প্রথম উক্তি প্রমাণ করে এবং উপরের সমীকরণ বিপরীতক্রমে পড়লে বিপরীত উক্তিটি প্রমাণ করে।

χ^2-নিবেশন কীভাবে n-সংখ্যক অনপেক্ষ আদর্শ স্বাভাবিক চলকের থেকে উৎপন্ন হয়, তা নিচের উপপাদ্যে বর্ণিত হচ্ছে।

উপপাদ্য II : যদি $X_1, X_2, \ldots, X_n$ পরস্পর অনপেক্ষ nটি আদর্শ স্বাভাবিক চলক হয়, তাহলে তাদের বর্গসমষ্টি $X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$ একটি χ^2 চলক যার স্বাতন্ত্র্যের মাত্রা n।

প্রমাণ। যেহেতু প্রত্যেক X_i স্বাভাবিক (0, 1), $\frac{1}{2}X_i^2$ একটি $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ চলক। (অনুচ্ছেদ 7.3-এর উদাহরণ 3)। এবার $\frac{1}{2}X_1^2, \frac{1}{2}X_2^2, \ldots, \frac{1}{2}X_n^2$ পরস্পর অনপেক্ষ γ-চলক যার প্রত্যেকের প্রচল $\frac{1}{2}$। অতএব γ–নিবেশনের পুনরুৎপাদন ধর্মের দ্বারা পাই যে তাদের যোগফল $\frac{1}{2}\left(X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2\right)$ একটি $\gamma\left(\frac{1}{2}n\right)$ চলক, যার থেকে উপপাদ্য 1 প্রমাণ করে যে $X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$ একটি $\chi^2(n)$ চলক।

উপপাদ্য III : যদি $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nটি পরস্পর অনপেক্ষ আদর্শ স্বাভাবিক চলক হয় এবং যদি

$$\begin{aligned} &a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n \\ &a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n \\ &a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots + a_nX_n \end{aligned} \qquad \ldots\ldots (14.3.2)$$

mটি $(m < n)$ রৈখিক সমষ্টি হয় এমন যে তাদের সহগগুলি নিম্নলিখিত লম্ব সম্বন্ধ সিদ্ধ করে

$$\sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha}a_{j\alpha} = \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, m) \qquad \ldots\ldots (14.3.3)$$

যেখানে δ_{ij}-র সংজ্ঞা হল

$$\delta_{ij} = 1, \quad i = j$$
$$\qquad 0 \quad i \neq j$$

তাহলে

$$Q = Q(X_1, X_2, ..., X_n) = \sum_{\alpha=1}^{n} X_\alpha^2 - \sum_{\beta=1}^{m}\left(a_{\beta 1}X_1 + a\beta_2 X_2 + \ldots + a_{\beta n}X_n\right)^2 \quad .... (14.3.4)$$

এই দ্বিঘাত আকারের নিবেশন হবে χ^2 যার স্বাতন্ত্র্যের মাত্রা $n-m$, এবং Q উপরোক্ত রৈখিক সমষ্টিগুলির অনপেক্ষ হবে।

প্রথমে আমরা নিম্নলিখিত সহায়ক উপপাদ্য প্রমাণ করব।

সহায়ক উপপাদ্য : যদি $X_1, X_2, \ldots X_n$ পরস্পর অনপেক্ষ আদর্শ স্বাভাবিক চলক হয় এবং $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$ নিম্নলিখিত লম্ব রূপান্তর করে পাওয়া যায়

$$Y_i = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha} X_\alpha \qquad (i = 1, 2, ..., n) \quad .....(14.3.5)$$

যেখানে

$$\sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha} X_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{\alpha i} X_{\alpha j} = \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, ..., n) .....(14.3.6)$$

তাহলে $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ পরস্পর অনপেক্ষ আদর্শ স্বাভাবিক চলক হবে।

প্রমাণ। লিখুন

$$Y_i = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha} X_\alpha \qquad (i = 1, 2, ..., n)$$

লম্ব সম্বন্ধসমূহের থেকে পাই

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \quad \left|\frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, y_2 \ldots, y_n)}\right| = 1$$

যেহেতু $X_1, X_2, \ldots X_n$ পরস্পর অনপেক্ষ আদর্শ স্বাভাবিক চলক, সম্ভাবনা অন্তরক,

$$\begin{aligned}
dF &= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} e^{-\frac{1}{2}\sum x_i^2} dx_1 dx_2 \ldots dx_n \\
&= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} e^{-\frac{1}{2}\sum y_i^2} \left|\frac{\partial(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial(y_1, y_2, ..., y_n)}\right| dy_1 dy_2 \ldots dy_n \\
&= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} e^{-\frac{1}{2}\sum y_i^2} dy_1 dy_2 \ldots dy_n \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y_i^2} dy_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y_2^2} dy_2 \ldots \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y_n^2} dy_n
\end{aligned}$$

সম্ভাবনা অন্তরকের এই আকারই সহায়ক উপপাদ্যটি প্রমাণ করে।

উপপাদ্যের প্রমাণ। ম্যাট্রিক তত্ত্ব থেকে আমরা জানি যে $a_{ij}(i=1, 2, \ldots, m; j=1, 2, \ldots, n)$ এই mn-সংখ্যক সংখ্যা প্রদত্ত থাকলে যা (14.3.3) লম্ব সম্বন্ধ সিদ্ধ করে, $a_{ij}(i, j=1, 2, \ldots, n)$ এই n^2-টি সংখ্যার বাকিগুলি এমনভাবে নির্বাচন করা যায় যে লম্ব সম্বন্ধ (14.3.6) সিদ্ধ হয়। লক্ষ্যণীয় যে এই Y_i-গুলির মধ্যে $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$ হচ্ছে (14.3.2)-এ প্রদত্ত রৈখিক সমষ্টিগুলি। এখন

$$\sum_{\alpha=1}^{n} X_\alpha{}^2 = \sum_{\alpha=1}^{n} Y_\alpha{}^2$$

এবং তাই $$Q = \sum_{\alpha=1}^{n} Y_\alpha{}^2 = \sum_{\beta=1}^{m} Y_\beta{}^2 = Y_{m+1}{}^2 + Y_{m+2}{}^2 + \ldots + Y_n{}^2$$

সহায়ক উপপাদ্যের দ্বারা $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ পরস্পর অনপেক্ষ আদর্শ স্বাভাবিক চলক যার ফলে $Y_{m+1} + Y_{m+2} + \ldots + Y_n$ $(n-m)$টি পরস্পর অনপেক্ষ আদর্শ স্বাভাবিক চলক এবং উপপাদ্য II-এর দ্বারা Q একটি χ^2 $(n-m)$ চলক। যেহেতু Q কেবলমাত্র $Y_{m+1}, Y_{m+2}, \ldots, Y_n$-এর অপেক্ষক Y_1, $Y_2, \ldots, Y_m$ ও Q পরস্পর অনপেক্ষ।

উদাহরণ। মনে করুন (X, Y, Z) ত্রিমাত্রিক দেশে একটি যদৃচ্ছ বিন্দুর কার্তীয় স্থানাঙ্ক এবং X, Y, Z পরস্পর অনপেক্ষ আদর্শ স্বাভাবিক চলক। মূলবিন্দু থেকে এই যদৃচ্ছ বিন্দুর দূরত্বের বর্গ, $X^2 + Y^2 + Z^2$ একটি χ^2-চলক যার স্বাতন্ত্র্যের মাত্রা 3 (উপপাদ্য III)। যদি $lx + my + nz = 0$ $(l^2 + m^2 + n^2 = 1)$ মূলবিন্দু গমনকারী একটি সমতল হয়, তাহলে যদৃচ্ছ বিন্দুটি থেকে এই সমতলের উপর লম্বের পাদবিন্দুর মূলবিন্দু থেকে দূরত্বের বর্গ হল

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - (lX + my + nz)^2$$

যা χ^2-নিবেশিত যার স্বাতন্ত্র্যের মাত্রা 2 (উপপাদ্য III)।

χ^2-নিবেশনের বৈশিষ্ট্য

আমরা জানি, যদি X-এর নিবেশন $\gamma\left(\frac{1}{2}n\right)$ হয় $\chi^2 = 2X$-এর নিবেশন হবে $\chi^2(n)$। তাই $\chi^2(n)$ নিবেশনের ভ্রামক

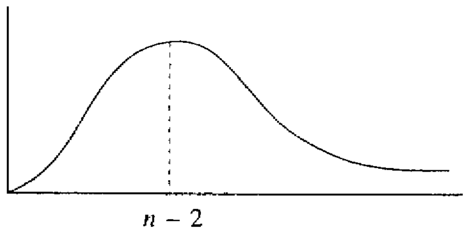
$$\alpha_k = 2^k \alpha_k(X) = 2^k \frac{1}{2}n\left(\frac{1}{2}n+1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}n+k-1\right)$$

বা

$$\alpha_\kappa = n(n+2)(n+4)\ldots(n+2k-2) \qquad \ldots\ldots (14.3.7)$$

অতএব গড় $m = n, \alpha_2 = n(n+2)$ এবং ভেদমান $\sigma^2 = n(n+2) - n^2 = 2n$ ইত্যাদি।

$n \le 2$-এর জন্যে ঘনত্ব অপেক্ষক $f(\chi^2)$ একান্বয়ে হ্রাসমান যার ফলে নিবেশনের কোনো ভূয়িষ্ঠক নেই। কিন্তু $n > 2$ হলে, $f(\chi^2)$-এর একটিমাত্র চরম বিন্দু আছে যা হল $n-2$, অর্থাৎ χ^2-নিবেশনের একটিমাত্র ভূয়িষ্ঠক হল $n-2$।



বৈশিষ্ট্য অপেক্ষক,

$$\chi(t) = \chi(2t) = (1-2it)^{-n/2} \qquad \text{..... (14.3.8)}$$

বৈশিষ্ট্য অপেক্ষকের এই আকৃতি থেকে সহজেই পুনরুৎপাদন ধর্ম প্রমাণ করা যায়। যদি $\chi_1^2, \chi_2^3, \ldots, \chi_k^2$ পরস্পর অনপেক্ষ χ^2 চলক হয় যাদের স্বাতন্ত্র্যের মাত্রা যথাক্রমে $n_1, n_2, \ldots n_k$ তাহলে তাদের যোগফল $\chi_1^2 + \chi_2^2 + \ldots + \chi_n^2$ χ^2 নিবেশিত হবে যার স্বাতন্ত্র্যের মাত্রা $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$।

14.4 *t*-নিবেশন

t-নিবেশন বা **স্টুডেন্টের নিবেশন** (Student's distribution) যাঁর নামাঙ্কিত তিনি হলেন রাশিবিজ্ঞানী গসেট (Gosset)। এর সংজ্ঞা হল

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{n}\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}.\frac{1}{2}n\right)\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{(n+1)/2}} \; (-\infty < t < \infty) \qquad \text{..... (14.4.1)}$$

যেখানে প্রচল n-কে বলা হয় নিবেশনের স্বাতন্ত্র্যের মাত্রা যা একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

χ^2-নিবেশন থেকে এই t-নিবেশনের উৎপত্তির কথা আছে নীচের উপপাদ্যে।

উপপাদ্য : যদি X একটি আদর্শ স্বাভাবিক চমক, χ^2 একটি $\chi^2(n)$ চলক এবং X ও χ^2 অনপেক্ষ হয়, তাহলে

$$Y = \frac{X}{\sqrt{\chi^2/n}} = \frac{\sqrt{n}X}{\sqrt{\chi^2}}$$

একটি t-চলক যার স্বাতন্ত্র্যের মাত্রা n।

প্রমাণ। লিখুন

$$\frac{Y^2}{n} = \frac{\frac{1}{2}X^2}{\frac{1}{2}\chi^2}$$

যেহেতু X ও χ^2 অনপেক্ষ $\frac{1}{2}X^2$ ও $\frac{1}{2}\chi^2$ অনপেক্ষ যার প্রথমটি $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ ও দ্বিতীয়টি $\gamma\left(\frac{1}{2}n\right)$ চলক।

তাই (অনুচ্ছেদ 10.4-এর উদাহরণ 2) Y^2/n একটি $\beta_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}n\right)$ চলক যার ফলে সম্ভাবনা অন্তরক,

$$dF = \frac{\left(y^2/n\right)^{-\frac{1}{2}}}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}n\right)(1+y^2/n)^{(n+1)/2}} d(y^2/n)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{n}B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}n\right)(1+y^2/n)^{(n+1)/2}} dy$$

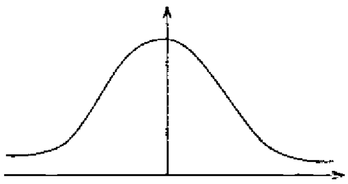
যখন $y - \infty$ থেকে ∞ পর্যন্ত বিচরণ করে $y^2/n(0, \infty)$ অন্তরকে দুবার পরিক্রমা করে। অতবে

$$f_y = \frac{1}{\sqrt{n}B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}n\right)(1+y^2/n)^{(n+1)/2}} dy \quad (-\infty < y < \infty)$$

যা উপপাদ্যের প্রমাণ।

t-নিবেশনের বৈশিষ্ট্য

t-নিবেশন মূলবিন্দুর সাপেক্ষে প্রতিসম। যখন $n = 1, f(t) = 1/\pi\,(1+t^2)$ যা কোশি (λ, μ) নিবেশনের ঘনত্ব অপেক্ষক যেখানে $\lambda = 1,\ \mu = 0$। আমরা জানি এই কোশি নিবেশনের গড় অস্তিত্বহীন। কিন্তু $n >$ 1 হলে t-নিবেশনের গড় অস্তিত্বমান এবং প্রতিসাম্যের দরুন গড়, মধ্যমা ও ভূয়িষ্ঠক সব শূন্য।



14.5 F-নিবেশন

এর ঘনত্ব অপেক্ষক

$$f(F) = \frac{m^{m/2} n^{n/2} F^{m/2-1}}{B\left(\frac{1}{2}m, \frac{1}{2}n\right)(mF+n)^{(m+n)/2}} \qquad \text{যখন } F > 0$$

$$= 0 \qquad \text{যখন } F < 0 \qquad \text{.....}(14.5.1)$$

এই নিবেশনের দুটি প্রচল m, n যারা ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। এই নিবেশনকে $F(m, n)$ নিবেশন বলে অভিহিত করব। লক্ষ্য করুন নিবেশনটি m, n-এর সাপেক্ষে প্রতিসম নয়।

এর উৎপত্তির কথা বলে নীচের উপপাদ্য।

উপপাদ্য : যদি χ_1^2, χ_2^2 দুটি অনপেক্ষ χ^2 চলক হয়, যাদের স্বাতন্ত্র্যের মাত্রা যথাক্রমে m ও n, তাহলে

$$X = \frac{\chi_1^2/m}{\chi_2^2/n} = \frac{n\chi_1^2}{m\chi_2^2}$$

একটি $F(m, n)$ চলক।

প্রমাণ। যদি লিখি

$$\frac{m}{n}X = \frac{\frac{1}{2}\chi_1^2}{\frac{1}{2}\chi_2^2}$$

$\frac{1}{2}\chi_1^2, \frac{1}{2}\chi_2^2$ দুটি অনপেক্ষ $\gamma\left(\frac{1}{2}m\right)$ ও $\gamma\left(\frac{1}{2}n\right)$ চলক, এবং তাই mX/n একটি $\beta_2\left(\frac{1}{2}m, \frac{1}{2}n\right)$ চলক। ফলত সম্ভাবনা অন্তরক,

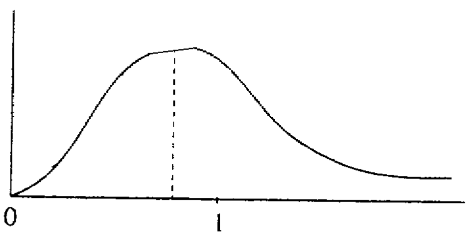
$$\begin{aligned} dF &= \frac{(mx/n)^{m/2-1}}{B\left(\frac{1}{2}m,\frac{1}{2}n\right)(1+mx/n)^{(m+n)/2}}d(mx/n) \\ &= \frac{m^{m/2}n^{n/2}x^{m/2-1}}{B\left(\frac{1}{2}m,\frac{1}{2}n\right)(mx+n)^{(m+n)/2}}d \qquad (0<x<\infty) \end{aligned}$$

যা উপপাদ্যের প্রমাণ।

***F*-নিবেশনের বৈশিষ্ট্য**

সহজেই দেখা যেতে পারে যে কেবলমাত্র $n>2$-এর জন্যে গড় অস্তিত্বমান এবং এর মান $n/(n-2)$ যা অন্য প্রচল m-এর নিরপেক্ষ এবং 1-এর চেয়ে বেশি।

$m>2$ হলে নিবেশনের একটিমাত্র ভূয়িষ্ঠক আছে যা হল



$$\frac{m(m-2)}{m(n+2)} < 1$$

14.6 সারাংশ

এই এককে প্রয়োগের ক্ষেত্রে গুরুত্বপূর্ণ তিনটি অবিচ্ছিন্ন নিবেশনের কথা আলোচিত হয়েছে। এগুলি হল χ^2, t ও F নিবেশন। এদের উৎপত্তি প্রধানত পরস্পর অনপেক্ষ আদর্শ স্বাভাবিক চলকসমূহের থেকে। তাই প্রত্যেক ক্ষেত্রে উৎপত্তি-বিষয়ক উপপাদ্য প্রমাণ করা হয়েছে, এবং বৈশিষ্ট্য যেমন গড়, ভেদমান ইত্যাদি নির্ণয় করা হয়েছে।

14.7 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

1. যদি $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nটি অনপেক্ষ স্বাভাবিক চলক হয় যার প্রত্যেকের গড় 0 ও সমক-বিচ্যুতি σ, তাহলে তাদের বর্গের যোগফলের নিবেশন নির্ণয় করুন।

2. যদি (X, Y)-এর নিবেশন হয় সাধারণ দ্বিচলক স্বাভাবিক নিবেশন, তাহলে দেখান যে

$$\left\{\frac{(X-m_x)^2}{\sigma_x^2} - 2\rho\frac{(X-m_x)(Y-m_x)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(Y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right\} \Big/ (1-\rho^2)$$

এই চলকের নিবেশন হবে $\chi^2(2)$।

3. যদি X, Y অনপেক্ষ চলক হয় যেখানে $X\,\chi^2$-নিবেশিত যার স্বাতন্ত্র্যের মাত্রা m এবং $X+Y\,\chi^2$ নিবেশিত যার স্বাতন্ত্র্যের মাত্রা $m+n$, তাহলে প্রমাণ করুন যে $Y\,\chi^2$-নিবেশিত যার স্বাতন্ত্র্যের মাত্রা n।

4. $t(n)$ নিবেশনের বেলায় দেখান যে ভেদমান কেবলমাত্র $n > 2$-এর জন্যে বিদ্যমান এবং তার মান $n/(n-2)$।

5. যদি t চলকের নিবেশন $t(n)$ হয়, প্রমাণ করুন যে t^2 একটি $F(1, n)$ চলক।

6. যদি F একটি $F(m, n)$ চলক হয়, প্রমাণ করুন যে $1/F$ একটি $F(n, m)$ চলক।

7. যদি χ_1^2, χ_2^2 দুটি অনপেক্ষ χ^2 চলক হয়, যাদের স্বাতন্ত্র্যের মাত্রা যথাক্রমে m ও n তাহলে χ_1^2 / χ_2^2-এর নিবেশন নির্ণয় করুন।

14.8 উত্তরমালা

1. $X_1/\sigma, X_2/\sigma, \ldots, X_n/\sigma$ পরস্পর অনপেক্ষ যার প্রত্যেকে আদর্শ স্বাভাবিক। তাই $(X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2)/\sigma^2$ একটি $\chi^2(n)$ চলক। নির্ণেয় উত্তর

$$f(x) = \frac{e^{-x/2\sigma^2} x^{n/2-1}}{2^{n/2}\sigma^n\Gamma(n/2)} \quad (0 < x < \infty)$$

2. অনুচ্ছেদ 10.4-এর উদাহরণ 1 দেখুন। $U^2 + V^2$-এর নিবেশন চাই।

3. লিখুন $Z = X + Y$। যেহেতু X, Y অনপেক্ষ $\chi_z(t) = \chi_x(t)\,\chi_y(t)$। দেওয়া আছে $\chi_x(t) = (1-2it)^{-m/2}$ এবং $\chi_z(t) = (1-2it)^{-(m+n)/2}$। তাই $\chi_y(t) = (1-2it)^{-n/2}$ ইত্যাদি।

4. $n > 1$ হলে গড় শূন্য এবং তাই

$$\sigma^2 = \frac{1}{\sqrt{n}B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}n\right)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2 dt}{(1+t^2/n)^{(n+1)/2}}$$

$$= \frac{1}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}n\right)} \int_0^\infty \frac{x^{1/2} dx}{(1+x)^{(n+1)/2}}$$

এই অসীম সমাকলটি অভিসারী কেবলমাত্র $n > 2$-এর জন্যে, এবং সেক্ষেত্রে

$$\sigma^2 = nB\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}n - 1\right) \Big/ B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}n\right) = n(n-2)$$

5. লিখুন $x = t^2$। তাহলে $dx = 2t\,dt,$ এবং $t > 0$ হলে

$$dF = f_1(t)dt = \frac{1}{2t} f_1(t)dx = \frac{1}{2\sqrt{x1}} f_1\left(\sqrt{x}\right)dx$$

যখন $t - \infty$ থেকে ∞ বিচরণ করে, $x\,0$ থেকে ∞ দুবার বিচরণ করে। তাই

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} f_t\left(\sqrt{x}\right)$$

6. $x = 1/F$ লিখলে সম্ভাবনা অন্তরক

$$= \frac{m^{m/2} n^{n/2} F^{m/2-1}}{B\left(\frac{1}{2}m, \frac{1}{2}n\right)(mF+n)^{(m+n)/2}} dF$$

$$= \frac{m^{m/2} n^{n/2} F^{m/2-1}}{B\left(\frac{1}{2}m, \frac{1}{2}n\right)(mF+n)^{(m+n)/2}} \left|\frac{dF}{dx}\right| dx$$

$$= \frac{m^{m/2} n^{n/2} F^{m/2-1}}{B\left(\frac{1}{2}m, \frac{1}{2}n\right)(mx+n)^{(m+n)/2}} dx$$

7. লিখুন $\qquad \dfrac{\chi_1^2}{\chi_2^2} = \dfrac{\frac{1}{2}\chi_1^2}{\frac{1}{2}\chi_2^2}$

নির্ণেয় নিবেশন হল $\beta_2\left(\frac{1}{2}m, \frac{1}{2}n\right)$।

একক 15 ❒ 'সম্ভাবনায়' অভিসরণ (Convergence in probability)

গঠন

15.1 প্রস্তাবনা

এই এককে একটি অন্য ধরনের অভিসরণের অবতারণা করা হবে যা হল 'সম্ভাবনায়' অভিসরণ। একটি চলকের ক্রম $\{X_n\}$ যদি এমন হয় যে X_n-এর নিবেশনের সম্ভাবনা ভর n বাড়ার সঙ্গে একটি নির্দিষ্ট বিন্দু a-র কাছাকাছি ক্রমাগত বেশি করে ঘনীভূত হয় এবং a-বিন্দুতে কেন্দ্রীভূত হয় যখন $n \to \infty$, সেক্ষেত্রে 'সম্ভাবনায়' অভিসরণের ধারণার জন্ম হয়।

প্রথমে একটি মৌলিক ফলাফল প্রমাণ করা হবে যার নাম চেবিশেফের অসমতা (Tchebycheff's inequality)। তারপর 'সম্ভাবনায়' অভিসরণের সংজ্ঞা দেওয়া হবে এবং তার সহজ ধর্ম প্রতিষ্ঠা করা হবে।

শেষে বৃহৎ সংখ্যার নিয়ম (Law of large numbers) নামে খ্যাত একটি বিশেষ ফলাফল প্রমাণ করা হবে।

15.2 উদ্দেশ্য

এই একক পাঠ করলে আপনারা জানতে পারবেন

- চেবিশেফের অসমতার কথা
- 'সম্ভাবনায়' অভিসরণের সংজ্ঞা ও সহজ ধর্ম
- বৃহৎ সংখ্যার নিয়মের কথা

15.3 চেবিশেফের অসমতা

যদি X একটি চলক হয় যার গড়মান m ও ভেদমান σ^2 অস্তিত্বমান, তাহলে যে-কোনো $\varepsilon > 0$-র জন্যে

$$P(|X-m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \qquad \text{.....(15.3.1)}$$

প্রমাণ। অবিচ্ছিন্ন চলক : এক্ষেত্রে

$$P(|X-m| \geq \varepsilon) = \int_{|x-m|\geq\varepsilon} f(x)dx$$

এখন সমাকলনের পাল্লায় $1 \leq (x-m)^2 / \varepsilon^2$, এবং তাই

$$\text{ডানপক্ষ} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{|x-m|\geq\varepsilon} (x-m)^2 f(x)dx$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 f(x)dx$$

যেহেতু সমাকল্য অঋণাত্মক। অতএব ডানপক্ষ $\leq \sigma^2 / \varepsilon^2$ যা (15.3.1) প্রমাণ করে।

বিচ্ছিন্ন চলক : এক্ষেত্রে প্রমাণ আগের প্রমাণের অনুরূপ হবে।

$$P(|X-m| \geq \varepsilon) = \sum_{|x_i-m|\geq\varepsilon} f_i$$

যার অর্থ যোগ হবে সব i-এর জন্যে যেখানে $|x_i - m| \geq \varepsilon$। তাই

$$\text{ডানপক্ষ} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{|x_i-m|\geq\varepsilon}^{\infty} (x_i-m)^2 f_i$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{i=-\infty}^{\infty} (x_i-m)^2 f_i = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

অসমতা (15.3.1)-কে এই আকারেও লেখা যায় :

$$P(|X-m| \geq \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \qquad \text{.....(15.3.2)}$$

যেকোনো $\varepsilon > 0$-র জন্যে, অথবা

$$P(|X-m| \geq \tau\sigma) \leq \frac{1}{\tau^2} \qquad \text{.....(15.3.3)}$$

যেকোনো $\tau > 0$-র জন্যে।

মন্তব্য : ভেদমান যে নিবেশনের গড়ের সাপেক্ষে বিস্তৃতির মাপক এই ব্যাপারের কিছুটা পরিমাণগত তাৎপর্য চেবিশেফের অসমতাতে মেলে। এই অসমতা বলে যে-কোনো প্রদত্ত ε-এর জন্যে $(m-\varepsilon$, $m+\varepsilon)$ এই অন্তরের বাইরে অবস্থিত সম্ভাবনা ভর সর্বাধিক σ^2/ε^2 যা কম হয় যদি σ^2 কম হয়।

উদাহরণ : মনে করুন X একটি স্বাভাবিক (m, σ) চলক। (15.3.3) দ্বারা

$$P(|X-m| \geq 2\sigma) \leq \frac{1}{4}$$

যেহেতু $X^* = (X-m)/\sigma$ স্বাভাবিক $(0, 1)$,

$$P(|X-m| \geq 2\sigma) = P(|X^*| \geq 2) = 2P(X^* > 2)$$
$$= 2 \times .0228 = .0456$$

যেখানে $P(X^* > 2)$-এর মান পাওয়া গেছে আদর্শ স্বাভাবিক নিবেশনের তালিকা থেকে (ধরে নিন)। এটা অবশ্য দেখায় যে উল্লিখিত সম্ভাবনার যে উর্ধ্ববন্ধন অসমতাটি দেয় তা যথেষ্ট ভালো নয়।

15.4 'সম্ভাবনায়' অভিসরণ

এবার আমরা অভিসরণের একটি নতুন ধারণার অবতারণা করব—একটি চলকের ক্রমের 'সম্ভাবনায়' অভিসরণ যার সংজ্ঞা নিম্নরূপ :

একটি চলকের ক্রম $\{X_n\}$ একটি ধ্রুবক a-র প্রতি **সম্ভাবনায় অভিসারী** (convergent in probablity) বলব যদি যে-কোনো প্রদত্ত $\varepsilon > 0$-র জন্যে

$$\lim_{n \to \infty} P(|X_n - a| < \varepsilon) = 1 \qquad \text{..... (15.4.1)}$$

অথবা সমতুল্যভাবে

$$\lim_{n \to \infty} P(|X_n - a| \geq \varepsilon) = 0 \qquad \text{..... (15.4.2)}$$

এবং লিখব

$$X_n \xrightarrow[P]{} a \text{ যখন } n \to \infty$$

এই অভিসরণের ব্যবহারিক তাৎপর্য হল, যত n বাড়ে X_n-এর সম্ভাবনার ভর ততই বেশি করে a-বিন্দুর কাছে ঘনীভূত হয়।

সম্ভাবনার অভিসরণের বেলায় নীচের সহজ নিয়মগুলি খাটে।

যদি $X_n \xrightarrow[P]{} a$ যখন $n \to \infty$ এবং c একটি অশূন্য ধ্রুবক হয়, তাহলে

(i) $X_n + c \xrightarrow[P]{} a + c$ যখন $n \to \infty$

(ii) $cX_n \xrightarrow[P]{} ca$ যখন $n \to \infty$

প্রমাণ। প্রদত্ত $\varepsilon > 0$-র জন্যে, যখন $n \to \infty$

$$P(|X_n + c - (a+c)| \geq \varepsilon) = P(|X_n - a)| \geq \varepsilon) \to 0$$

$$P(|cX_n + ca)| \geq \varepsilon) = P(|X_n - a)| \geq \varepsilon / C) \to 0$$

যা ফলদুটি প্রমাণ করে।

বারনুলির উপপাদ্য : যদি X_n দ্বিপদ (n, p) চলক হয়, তাহলে

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow[P]{} p \text{ যখন } n \to \infty$$

প্রমাণ। যেহেতু X_n দ্বিপদ (n, p),

$$E(X_n) = np, \sigma^2(X_n) = npq$$

অতএব

$$E\left(\frac{X_n}{n}\right) = p, \sigma^2\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{npq}{n^2} = \frac{pq}{n}$$

চেবিশেফের অমসতার দ্বারা, প্রদত্ত, $\varepsilon > 0$-র জন্যে

$$E\left(\left|\left(\frac{X_n}{n} - p\right) \geq \varepsilon\right|\right) \leq \frac{pq}{n\varepsilon^2} \to 0 \text{ যখন } n \to \infty$$

যা প্রমাণ করে যে

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow[P]{} p \text{ যখন } n \to \infty$$

এবার বারনুলি উপপাদ্যের তাৎপর্য আলোচনা করব। যদি X_n n-সংখ্যক বারনুলি প্রচেষ্টার সাফল্যের সংখ্যা হয় যেখানে সাফল্যের সম্ভাবনা p, তাহলে X_n দ্বিপদ (n, p) চলক এবং $f_n = X_n/n$ হবে n প্রচেষ্টার সাফল্যের পরিসংখ্যা অনুপাত। অতএব উপরোক্ত সীমা উপপাদ্য বলে যে

$$f_n \xrightarrow[P]{} p \text{ যখন } n \to \infty$$

অর্থাৎ সাফল্যের পরিসংখ্যা অনুপাত সাফল্যের সম্ভাবনার প্রতি সম্ভাবনার অভিসারী।

এবার মনে করুন E যে-কোনো একটি যদৃচ্ছ পরীক্ষা। যদি E অনপেক্ষভাবে n-বার পুনরাবৃত্তি করা হয়, তাহলে সংশ্লিষ্ট যে-কোনো ঘটনা A, যার সম্ভাবনা $P(A)$, যদি $X_n(A)$ বার ঘটে, অর্থাৎ যদি $f_n(A)$ A ঘটনার পরিসংখ্যা অনুপাত হয়, তাহলে $f_n(A) = X_n(A)/n$। যেহেতু $X_n(A)$ দ্বিপদ $(n, P(A))$, তাই বারনুলি উপপাদ্য দ্বারা

$$f_n(A) \xrightarrow[P]{} P(A) \text{ যখন } n \to \infty$$

এই প্রসঙ্গে স্মরণ করুন $P(A)$-র পরিসংখ্যা ব্যাখ্যা যা বলে যখন n যথেষ্ট বড় হয়, তখন পরিসংখ্যা অনুপাত $f_n(A) \simeq P(A)$। বস্তুত বারনুলি উপপাদ্য থেকে এই ব্যবহারিক উক্তির একটা গাণিতিক রূপ পাওয়া যায়।

15.5 বৃহৎ সংখ্যার নিয়ম

উপপাদ্য (বৃহৎ সংখ্যার নিয়ম) : মনে করুন $\{X_n\}$ একটি চলকের ক্রম এমন যে $S_n = X_1 + X_2 +$

$\ldots + X_n$ চলকের গড় M_n ও সমক-বিচ্যুতি $\sum_n$ সব n-এর জন্যে অস্তিত্বমান। যদি $\sum_n/n \to 0$ যখন $n \to \infty$, তাহলে

$$\frac{S_n - M_n}{n} \xrightarrow[P]{} 0 \text{ যখন } n \to \infty \qquad ..... (15.5.1)$$

প্রমাণ। যেহেতু

$$E\left(\frac{S_n - M_n}{n}\right) = 0, \sigma\left(\frac{S_n - M_n}{n}\right) = \frac{\Sigma_n}{n}$$

চেবিশেফের অসমতার দ্বারা, প্রদত্ত $\varepsilon > 0$-র জন্যে

$$E\left(\left|\left(\frac{S_n - M_n}{n}\right) \geq \varepsilon\right|\right) \leq \frac{\Sigma_n^2}{n^2\varepsilon^2} \to 0 \text{ যখন } n \to \infty$$

কেননা প্রদত্ত শর্তানুযায়ী $\sum_n/n \to 0$ যখন $n \to \infty$। অতএব উপপাদ্যটি প্রমাণিত হল।

উপরের উপপাদ্যে যদি লিখি

$$\overline{X} = (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)/n = S_n / n$$
$$\overline{m} = (m_1 + m_2 + \ldots + m_n)/n = M_n / n$$

তাহলে (15.5.1)-এর অন্য চেহারা হবে

$$\overline{X} - \overline{m} \xrightarrow[P]{} 0 \text{ যখন } n \to \infty \qquad ..... (15.5.2)$$

সমান অংশের ক্ষেত্র : যদি $X_1, X_2, \ldots$ চলকগুলির একই নিবেশন হয় যার গড় m ও সমক-বিচ্যুতি σ অস্তিত্বমান এবং প্রত্যেক n-এর জন্যে $X_1, X_2, \ldots, X_n$ পরস্পর অনপেক্ষ, তাহলে

$$\overline{X} \xrightarrow[P]{} m \text{ যখন } n \to \infty \qquad ..... (15.5.3)$$

প্রমাণ। শর্তানুসারে $M_n = nm, \sum_n = \sqrt{n}\,\sigma$ যার ফলে $\sum_n/n = \sigma/\sqrt{n} \to 0$ যখন $n \to \infty$। তাই (15.5.1) দ্বারা

$$\overline{X} - \overline{m} \xrightarrow[P]{} 0 \text{ যখন } n \to \infty$$

যার থেকে (15.5.3) মেলে।

15.6 সারাংশ

এই এককে আমরা চেবিশেফের অসমতা বলে খ্যাত একটি গুরুত্বপূর্ণ অসমতা প্রতিষ্ঠা করেছি। তারপর 'সম্ভাবনায়' অভিসরণের সংজ্ঞা ও তাৎপর্য দেওয়া হয়েছে। এই প্রসঙ্গে প্রমাণিত হয়েছে বারনুলি উপপাদ্য নামে একটি গুরুত্বপূর্ণ ফলাফল যার থেকে সম্ভাবনার পরিসংখ্যা ব্যাখ্যার একটা গাণিতিক রূপ পাওয়া যায়। শেষে বৃহৎ সংখ্যার নিয়মের আলোচনা করা হয়েছে।

15.7 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

1. চেবিশেফের অসমতার দ্বারা দেখান যে একটি মুদ্রা 2000-বার ছুড়লে 'মাথা' পড়ার সংখ্যা 900 ও 1100-এর মধ্যে থাকার সম্ভাবনা অন্ততপক্ষে $19/20 = 0.95$।

2. একটি বিচ্ছিন্ন চলক X-এর নিবেশনে

$$P(X=-1)=P\,(X=1)=\frac{1}{8}, P(X=0)=\frac{3}{4}$$

এই নিবেশনের জন্য চেবিশেফের অসমতা যাচাই করুন।

3. একটি অবিচ্ছিন্ন চলক X-এর সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক

$$f(x)=12x^2(1-x) \qquad (0<x<1)$$

$P(|X-m|\geq 2\sigma)=$ নির্ণয় করুন এবং এর মান চেবিশেফের অসমতার দ্বারা প্রদত্ত বন্ধনের সঙ্গে তুলনা করুন।

4. যদি X একটি $\gamma(n)$ চলক হয়, দেখান যে

$$P(0<X<2n)\geq(n-1)/n$$

5. মনে করুন $X_1, X_2, \ldots$ একটি জোড়াগতভাবে অননুবন্ধী চলকের ক্রম যাদের গড়মান যথাক্রমে m_1, $m_2 \ldots$ এবং সমক-বিচ্যুতি যথাক্রমে $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$। প্রমাণ করুন যে এই চলকক্রমের জন্য বৃহৎ সংখ্যার নিয়ম খাটে যদি $\{\sigma_n\}$ ক্রমটি বন্ধ হয়।

6. প্রমাণ করুন যে বারনুলির উপপাদ্য সমান অংশের জন্য বৃহৎ নিয়মের বিশেষ ফল।

15.8 উত্তরমালা

1. 'মাথা' পড়ার সংখ্যার হল দ্বিপদ $\left(2000, \frac{1}{2}\right)$ যার ফলে $m=1000, \sigma^2=500$। (15.3.1)-এ $\varepsilon=100$ নিন।

2. এখানে $m=0, \sigma=1/2$ । $0<\varepsilon\leq 1$ নিলে

$P(|X| \geq \varepsilon)=P(X=-1)+P(X=1)=1/4\leq 1\ 1/4\,\varepsilon^2=\sigma^2/\varepsilon^2$

3. 17/625, 1/4

4. (15.3.1)-এ $\varepsilon=n$ ধরুন।

5. এখানে $\Sigma_n^2=\sigma_1^2+\sigma_2^2+\ldots+\sigma_n^2\leq nA^2$ যেখানে $|\sigma_n|\leq A$ সব n-এর জন্য। সুতরাং $\Sigma_n / n\leq A\sqrt{n}\to 0$ যখন $n\to\infty$।

6. ধরুন $X_1, X_2, \ldots, X_n$ পরস্পর অনপেক্ষ যার প্রত্যেক দ্বিপদ $(1, p)$।

একক 16 ❐ সীমা উপপাদ্যসমূহ

গঠন

16.1 প্রস্তাবনা

এই এককে একটি অপেক্ষকের ক্রম বা একটি নিবেশন অপেক্ষকের ক্রমের সীমার (সাধারণ অর্থে) কথা আলোচিত হবে। আমরা অনুচ্ছেদ 6.7-এ দেখেছি যে একটি দ্বিপদ (n, p) নিবেশন পোয়াসঁ-μ নিবেশনের প্রতি আসন্ন হয় যখন n খুব বড় এবং p খুব ছোট এমন যে $\mu = np$ মাঝারি মানের হয়। কিন্তু যখন n বড় হয় কিন্তু p ছোট না হয় বা স্থির থাকে, তাহলে দ্বিপদ (n, p) নিবেশন আসন্ন হয় স্বাভাবিক নিবেশনের—এই বিষয়ে প্রথমে আলোচনা হবে।

শুধু দ্বিপদ নিবেশনই নয়, অন্যান্য নিবেশনের ক্ষেত্রেও দেখা যায় যে পরস্পর অনপেক্ষ অনেকগুলি চলকের যোগফল প্রায় স্বাভাবিক চলক হয়। এই সাধারণ ফলাফলকে কেন্দ্রীয় সীমা উপপাদ্য (central limit theorem) বলে। এই উপপাদ্যটি আমরা প্রমাণ ছাড়া উল্লেখ করব, কারণ এর প্রমাণ আমাদের অধিগম্য নয়।

বৈশিষ্ট্য অপেক্ষকের ক্রমের জন্যও একটি মৌলিক উপপাদ্য আছে যার আমরা উল্লেখ করব এবং প্রয়োগ করব।

16.2 উদ্দেশ্য

এই একক পাঠে আপনারা জানতে পারবেন :

- দ্বিপদ নিবেশনের সীমা হিসেবে কীভাবে স্বাভাবিক নিবেশনের পাওয়া যায়
- কেন্দ্রীয় সীমা উপপাদ্যের বিষয়
- বৈশিষ্ট্য অপেক্ষকের সীমা উপপাদ্য ও তার প্রয়োগ

16.3 দ্বিপদ নিবেশনের স্বাভাবিক নিবেশন সীমা

দ্য মোয়াভর-লাপ্লাস সীমা উপপাদ্য (DeMoivre Laplace limit theorem) ঃ মনে করুন X_n একটি (n, p) চলক $(0 < p < 1)$ এবং তার প্রতিযঙ্গী আদর্শ চলক হল

$$X_n^* = \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} \quad (q = 1 - p)$$

তাহলে যে-কোনো স্থির সংখ্যা a, b-র জন্যে $(a < b)$,

$$\lim_{n\to\infty} P(a < X_n^* \le b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx \qquad \text{..... (16.3.1)}$$

প্রমাণ। যদিও এই প্রমাণ আমাদের অধীত বিদ্যার আওতার মধ্যে পড়ে, প্রমাণটি দীর্ঘ ও কিছুটা জটিল। তাই প্রমাণ বিস্তারিতভাবে না লিখে এর মুখ্য যুক্তিগুলি সংক্ষেপে উল্লেখ করব যা এই সীমা প্রক্রিয়া বুঝতে সাহায্য করবে।

আমরা জানি X_n-এর বর্ণালি হল $i \, (i = 0, 1, 2, ..., n)$ এবং

$$f_i = P(X_n = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \quad (i = 0, 1, 2, ..., n)$$

তাই X_i^*-এর বর্ণালি হবে

$$X_i^* = \frac{i - np}{\sqrt{npq}} \quad (i = 0, 1, 2, ..., n)$$

এবং

$$P\left(X_n^* = x_i^*\right) = P(X_n = i) = f_i$$

প্রথমে লক্ষ্য করুন

$$\Delta x_i^* = x_{i+1}^* - x_i^* = \frac{1}{\sqrt{npq}}$$

যার ফলে $\Delta x_i^* \to 0$ যখন $n \to \infty$, অর্থাৎ, $n \to \infty$ হলে X_n^*-এর বর্ণালি অবিচ্ছিন্ন বাস্তব অক্ষে পরিণত হয় যা স্বাভাবিক নিবেশনের বর্ণালি। এবার

$$P\left(a < X_n^* \le b\right) = \sum_{a < x_i^* \le b} f_i$$

এবং $a < x_i^* \le b$ হলে যেখানে a, b স্থির, দেখানো যায় যে

$$f_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-x_i^2/2} + \frac{R}{n}$$

যেখানে $R = R(n, x_i^*)$ এমন যে $|R| \le B$ ধ্রুবক। অতএব

$$P\left(a < X_n^* \le b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{a < x_i^* \le b} e^{-x_i^{*2}/2} \Delta x_i^* + \frac{1}{n} \sum_{a < x_i^* \le b} R$$

যেহেতু $\Delta x_i^* = 1/\sqrt{npq}$ যোগে পদের সংখ্যা $\le (b-q)\sqrt{npq} + 1$। তাই,

$$\left|\frac{1}{n}\sum R\right| \le \frac{R}{n}\{(b-a)\sqrt{npq}+1\} \to 0 \text{ যখন } n \to \infty$$

যার ফলে

$$\frac{1}{n}\sum R \to 0 \text{ যখন } n \to \infty$$

এবং

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} P(a < X_n^* \le b) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n\to\infty} \sum_{a < x_i^2 \le b} e^{-x_i^{*2}/2} \Delta x_i^* \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx\end{aligned}$$

এতেই প্রমাণের সমাপ্তি।

(6.9.5)-এ সংজ্ঞায়িত $\phi(x)$ ও $\Phi(x)$ যথাক্রমে আদর্শ স্বাভাবিক নিবেশনের ঘনত্ব অপেক্ষক ও নিবেশন অপেক্ষক নির্দেশ করে। এদের ব্যবহার করে (16.3.1)-কে লেখা যায় :

$$\lim_{n\to\infty} P(a < X_n^* \le b) = \int_a^b \phi(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a) \qquad \text{..... (16.3.2)}$$

যদি $F_n(x)X_n$-এর এবং $F_n^*(x)X_n^*$-এর নিবেশন অপেক্ষক হয়, তাহলে (16.3.2)-তে $a \to -\infty$ করে ও b-র বদলে x লিখে পাই

$$\lim_{n\to\infty} F_n^*(x) = \Phi(x) \qquad \text{..... (16.3.3)}$$

যেহেতু (16.3.3) (16.3.2)-কে দ্যোতনা করে, (16.3.3) উপপাদ্যটির একটি সমতুল্য বিবৃতি বলা যায়। আবার (16.3.2)-এর অন্য একটি আকার হল

$$\lim_{n\to\infty} P\left(np + a\sqrt{npq} < X_n \le np + b\sqrt{npq}\right) = \int_a^b \phi(x)dx \qquad \text{..... (16.3.4)}$$

যার ব্যবহারিক আকার হবে যদি n খুব বড় কিন্তু p মাঝারি মানের হয়, তাহলে

$$P\left(np + a\sqrt{npq} < X_n \le np + b\sqrt{npq}\right) = \int_a^b \phi(x)dx \qquad \text{..... (16.3.5)}$$

উদাহরণ : একটি ছক্কা 1800 বার ছোড়া হলে 'তিনের গুণিতক' এই ঘটনা ঘটার সংখ্যা 600 ± 50-এর মধ্যে থাকার সম্ভাবনা কত ?

এখানে উল্লিখিত ঘটনা ঘটার সংখ্যা একটি দ্বিপদ (n, p) চলক যেখানে $n = 1800, p = 1/3$। যেহেতু n যথেষ্ট বড় এবং p খুব ছোট নয়, এখানে উপরের স্বাভাবিক আসন্নতা খাটবে। তাই যেহেতু

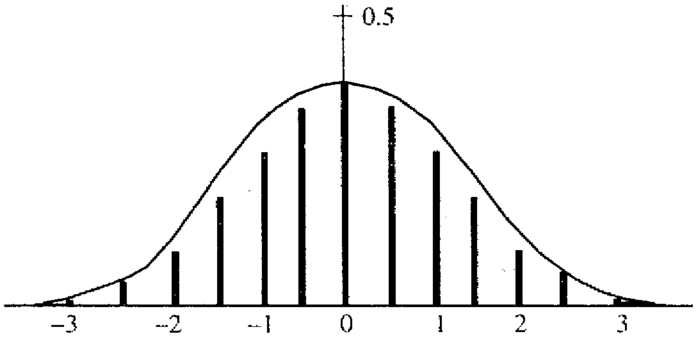
$$np = 600, \sqrt{npq} = 20$$

(16.3.5)-এ $a=-2.5, b=2.5$ বসিয়ে পাই নির্ণেয় সম্ভাবনা

$$\simeq \int_{-2.5}^{2.5} \phi(x)dx = 0.988$$

এই মান আদর্শ স্বাভাবিক নিবেশনের তালিকা থেকে প্রাপ্ত।

এই আসন্নতার লেখ রূপায়ণের জন্যে আমরা খেয়াল করি যে সম্ভাবনা অন্তরক $\phi(x)dx$-এর প্রতিষঙ্গী হল f_i যার ফলে $\phi(x)$-এর প্রতিষঙ্গী হবে $f_i / \Delta x_i^* = f_i\sqrt{npq}$ । তাই সম্ভাবনা চিত্র f_i-এর বদলে $f_i\sqrt{npq}$ নিলে এই পরিবর্তিত সম্ভাবনা চিত্রের কোটিগুলির উপরের প্রান্তবিন্দুর আদর্শ স্বাভাবিক ঘনত্ব বক্ররেখার কাছাকাছি থাকবে। $n=16, p=1/_2$-এর বেলায় এই পরিবর্তিত সম্ভাবনা চিত্র ও আদর্শ স্বাভাবিক ঘনত্ব বক্ররেখার লেখচিত্র নীচে দেওয়া হল :



16.4 কেন্দ্রীয় সীমা উপপাদ্য

ক্রমাসন্নভাবে স্বাভাবিক (asymptotically normal) : যদি $\{X_n\}$ একটি চলকের ক্রম ও $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ দুটি সংখ্যার ক্রম এমন হয় যে $\{X_n - \alpha_n\}/\beta_n$ চলকের নিবেশন অপেক্ষক $\Phi(x)$-এর প্রতি অভিসারী হয় যখন $n \to \infty$, যেখানে $\Phi(x)$ আদর্শ স্বাভাবিক নিবেশন অপেক্ষক, তবে আমরা বলি যে X_n **ক্রমাসন্নভাবে স্বাভাবিক** (α_n, β_n)। মনে রাখুন α_n, β_n যথাক্রমে X_n-এর গড় ও সমক-বিচ্যুতি, তা এখানে ধরা হচ্ছে না।

কেন্দ্রীয় সীমা উপপাদ্য (central limit theorem) : মনে করুন $\{X_n\}$ একটি চলকের ক্রম এমন যে প্রত্যেক n-এর জন্য X_n-এর সসীম ভেদমান আছে এবং $X_1, X_2, \ldots, X_n$ পরস্পর অনপেক্ষ চলক যার ফলে এদের যোগফল

$$S_n = X_1 + X_2 + .. + X_n$$

-এর সসীম গড় M_n ও সমক-বিচ্যুতি Σ_n আছে। S_n-ক্রমাসন্নভাবে স্বাভাবিক হওয়ার আবশ্যিক ও পর্যাপ্ত শর্ত হল, যে-কোনো $\tau > 0$-র জন্য

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\Sigma_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x-m_k|\geq\tau\Sigma_n} (x-m_k)^2 f_k(x)dx = 0 \qquad \ldots..(16.4.1)$$

অবিচ্ছন্ন চলকের ক্ষেত্রে, অথবা

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\Sigma_n^2}\sum_{k=1}^{n} x \sum_{|x_i^{(k)}-m_k|\ge\tau\Sigma_n}\left\{x_i^{(k)}-m_k\right\}^2 f_i^{(k)}=0 \qquad .....(16.4.2)$$

বিচ্ছিন্ন চলেকর ক্ষেত্রে, যেখানে X_k-র গড়, $f_k(x)$ X_k-র ঘনত্ব অপেক্ষক অবিচ্ছিন্ন ক্ষেত্রে এবং $x_i^{(k)}(=0, \pm 1, \pm 2, ...)X_k$-র বর্ণালির বিন্দু যাতে সম্ভাবনা ভর হচ্ছে $f_i^{(k)}$ বিচ্ছিন্ন ক্ষেত্রে।

উপরোক্ত শর্তকে **লিন্ডেবার্গের শর্ত** (Lindeberg's condition) বলা হয়।

এই মৌলিক উপপাদ্যের শুধু বিবৃতি দেওয়া হল, প্রমাণ নয়। কারণ এর প্রমাণ দুরূহ এবং আমাদের অধীত বিদ্যার বাইরে।

সমান অংশের ক্ষেত্র : যদি $X_1, X_2, ..., X_n$ সকলের একই নিবেশন হয় যার গড় m ও σ, সমক-বিচ্যুতি σ, তাহলে লিন্ডেবার্গের শর্ত পালিত হয় যার ফলে $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ ক্রমাসন্নভাবে স্বাভাবিক হয়, কেননা এক্ষেত্রে $M_n = nm$, $\Sigma_n = \sqrt{n}\sigma$।

প্রমাণ। অবিচ্ছিন্ন ক্ষেত্রে প্রমাণ লেখা যাক। (16.4.1)-এর বাঁপক্ষ দাঁড়াবে

$$\frac{1}{\sigma^2}\lim_{n\to\infty}\int_{|x-m|\ge\tau\sqrt{n}\sigma}(x-m)^2 f(x)dx=0$$

যে-কোনো স্থির $\tau > 0$-র জন্য, কেননা

$$\sigma^2=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2 f(x)dx$$

এই অসীম সমাকলটি অভিসারী।

আমরা দেখি যে

$$\frac{S_n-nm}{\sqrt{n}\sigma}=\frac{\overline{X}-m}{\sigma/\sqrt{n}}$$

যেখানে $\overline{X}=(X_1+X_2+...+X_n)/x$। তাই সমান অংশের ক্ষেত্রে কেন্দ্রীয় সীমা উপপাদ্যের বিবৃতি এরকম হতে পারে : $\overline{X}$ ক্রমাসন্নভাবে স্বাভাবিক $\left(m, \sigma/\sqrt{n}\right)$।

মন্তব্য : অনুচ্ছেদ 10.8-এর 13নং প্রশ্নে আমরা দেখি কোশি নিবেশনের বেলায় সমান অংশের কেন্দ্রীয় সীমা উপপাদ্য খাটছে না, কেননা এক্ষেত্রে $\overline{X}$-এর একই কোশি নিবেশন থাকে যা প্রত্যেক চলকের নিবেশন। এর কারণ হল কোশি নিবেশনের গড় ও ভেদমান অস্তিত্বহীন।

16.5 বৈশিষ্ট্য অপেক্ষকের সীমা উপপাদ্য

বৈশিষ্ট্য অপেক্ষকের জন্য একটি মৌলিক উপপাদ্যের শুধু বিবৃতি নীচে দেওয়া হল :

বৈশিষ্ট্য অপেক্ষকের সীমা উপপাদ্য : মনে করুন $\{X_n\}$ একটি চলকের ক্রম এবং X_n-এর নিবেশন অপেক্ষক ও বৈশিষ্ট্য অপেক্ষক যথাক্রমে $F_n(x)$ ও $\chi_n(t)\,(n=1,2,\ldots)$। যদি যখন $n\to\infty, F_n(x)\to F(x)$, একটি সম্ভাব্য নিবেশন অপেক্ষক যার বৈশিষ্ট্য অপেক্ষক হল $\chi(t)$, তাহলে $\chi_n(t)\to\chi(t)$ যখন $n\to\infty$। পক্ষান্তরে, যদি যখন $n\to\infty\,\chi_n(t)\to\chi_n(t)$, একটি সম্ভাব্য বৈশিষ্ট্য অপেক্ষক এবং $F(x)\,\chi(t)$-র প্রতিযঙ্গী নিবেশন অপেক্ষক হয়, তাহলে $F_n(x)\to F(x)$ যখন $n\to\infty$।

এই মৌলিক উপপাদ্যটি প্রয়োগ করে অনেক সীমা উপপাদ্য সহজেই প্রমাণ করা যায়।

দ্বিপদ নিবেশনের পোয়াসঁ সীমা : দ্বিপদ (n, p) নিবেশনের বৈশিষ্ট্য অপেক্ষক

$$\chi_n(t)=(pe^{it}+q)^n=\left\{1+p(e^{it}-1)\right\}^n$$

$p=\mu/n,$ যেখানে μ একটি ধনাত্মক ধ্রুবক, লিখলে যখন $n\to\infty$

$$\chi_n(t)=\left\{1+\frac{\mu}{n}(e^{it}-1)\right\}^n\to e^{\mu(e^{it-1})}$$

যা পোয়াসঁ-μ নিবেশনের বৈশিষ্ট্য অপেক্ষক। অতএব দ্বিপদ $(n\,,\,\mu/n)$ নিবেশন পোয়াসঁ-μ-এর প্রতি অভিসারী হয় যখন $n\to\infty$।

দ্যমোয়াভর-লাপ্লাস সীমা উপপাদ্য : X_n^*-এর বৈশিষ্ট্য অপেক্ষক

$$\begin{aligned}\chi_n^*(t) &= e^{-inpt/\sqrt{npq}}\left(pe^{it/\sqrt{npq}}+q\right)^n\\ &=\left(pe^{iqt/\sqrt{npq}}+qe^{-ipt/\sqrt{npq}}\right)^n\end{aligned}$$

আমরা জানি যে-কোনো বাস্তব x-এর জন্যে

$$e^{ix}=1+ix-\frac{\chi^2}{2!}+\theta\frac{x^3}{3!}$$

যেখানে θ একটি জটিল রাশি এমন যে $|\theta|<1$। তাই

$$\begin{aligned}e^{iqt/\sqrt{npq}} &=1+\frac{iqt}{\sqrt{npq}}-\frac{q^2t^2}{2npq}+\theta_1\frac{q^3t^3}{6(npq)^{3/2}}\\ e^{-ipt/\sqrt{npq}} &=1-\frac{iqt}{\sqrt{npq}}-\frac{q^2t^2}{2npq}+\theta_2\frac{p^3t^3}{6(npq)^{3/2}}\left(|\theta_1|,|\theta_2|<1\right)\end{aligned}$$

যার ফলে

$$=pe^{iqt/\sqrt{npq}}+qe^{-ipt/\sqrt{npq}}=1-\frac{t^2}{2n}+\theta\frac{t^3}{(npq)^{3/2}}\;(|\theta|<1)$$

$$\chi_n^*(t)=\left\{1-\frac{t^2}{2n}+\theta\frac{t^3}{(npq)^{3/2}}\right\}^n\to e^{t^2/2}\text{ যখন } n\to\infty$$

যেহেতু $e^{-r^2/2}$ আদর্শ স্বাভাবিক নিবেশনের বৈশিষ্ট্য অপেক্ষক উপপাদ্যটি প্রমাণিত হল।

16.6 সারাংশ

এই এককে আমরা জানলাম কীভাবে দ্বিপদ নিবেশনের সীমা হিসেবে স্বাভাবিক নিবেশন পাওয়া যায়। অনুরূপ একটি সাধারণ ফলাফল যা কেন্দ্রীয় সীমা উপপাদ্য নামে খ্যাত তার বিষয়ে আলোচনা করা হল। শেযে বৈশিষ্ট্য অপেক্ষক-বিষয়ক একটি মৌলিক সীমা উপপাদ্যের বিবৃতি জানা গেল এর তার প্রয়োগে বিভিন্ন সীমা উপপাদ্য প্রমাণ করা হল।

16.7 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

1. একটি মুদ্রা 2000 বার ছোড়া হলে, স্বাভাবিক আসন্নতা ব্যবহার করে, 'মাথা' পড়ার সংখ্যা 950 ও 1150-র মধ্যে থাকার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন। ধরুন $\Phi(\sqrt{5}) = 0.9873$।

2. একটি ছক্কা কতবার ছুড়লে 'ছয়' পড়ার পরিসংখ্যা অনুপাত ও 1/6-এর মধ্যে অন্তর .01-এর চেয়ে কম হওয়ার সম্ভাবনা .99 ? ধরুন $\Phi(2.58) = 0.995$।

3. বৈশিষ্ট্য অপেক্ষকের সীমা উপপাদ্য ব্যবহার করে দেখান যে একটি পোয়াসঁ-n নিবেশন ক্রমাসন্নভাবে স্বাভাবিক $\left(n, \sqrt{n}\right)$ যেখানে n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

16.8 উত্তরমালা

1. 'মাথা' পড়ার সংখ্যা দ্বিপদ $(n = 2000, p = 1/2)$ চলক। $np = 1000$, $\sqrt{npq} = 10\sqrt{5}$। (16.3.5)-এ $a = -\sqrt{5}, b = \sqrt{5}$ ধরলে নির্ণেয় সম্ভাবনা $\simeq 2\Phi\left(\sqrt{5}\right) - 1 = 0.9746$।

2. যদি ছক্কাটি n-বার ছোড়া হয়, 'ছয়' পড়ার পরিসংখ্যা অনুপাত হবে দ্বিপদ $(n, 1/6)$। প্রশ্নানুসারে .99 $= P\left(\left|X_n - \frac{1}{6}\right| < .01\right) = P\left(\left|\frac{X_n - 1/6}{\sqrt{5n}/6}\right| < .012\sqrt{5n}\right) \simeq 2\Phi(012\sqrt{5n}) - 1$ বা $\Phi(.012\sqrt{5n}) \simeq .995$।

অতএব $.012\sqrt{5n} \simeq 2.58$ যার থেকে $n = 9245$।

3. আদর্শীকৃত পোয়াসঁ-n চলক হল $X_n^* = (X_n - n)/\sqrt{n}$ যার বৈশিষ্ট্য অপেক্ষক

$$\chi_n^*(t) = e^{it/\sqrt{n}} e^{n(e^{it/\sqrt{n}-1})} = e^{n(e^{it/\sqrt{n}} - 1 - it/\sqrt{n})}(t)$$

এখন
$$e^{it/\sqrt{n}} = 1 + \frac{it}{\sqrt{n}} + \frac{t^2}{2n} + \theta \frac{t^3}{6n^{3/2}}$$

যেখানে θ একটি জটিল রাশি এমন যে $|\theta| < 1$। তাই

$$n\left(e^{it/\sqrt{n}} - e - it/\sqrt{n}\right) = t^2/2 + \theta t^3/6\sqrt{n} \to -t^2/2$$

যখন $n \to \infty$। তাই $\chi_n^*(t) \to e^{-t^2/2}$।