প্রাক্‌কথন

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের স্নাতক শ্রেণির জন্য যে পাঠক্রম প্রবর্তিত হয়েছে, তার লক্ষনীয় বৈশিষ্ট্য হ'ল প্রতিটি শিক্ষার্থীকে তাঁর পছন্দমতো কোনও বিষয়ে সাম্মানিক (honours) স্তরে শিক্ষাগ্রহণের সুযোগ করে দেওয়া। এ-ক্ষেত্রে ব্যক্তিগতভাবে তাঁদের গ্রহণ ক্ষমতা আগে থেকেই অনুমান করে না নিয়ে নিয়ত মূল্যায়নের মধ্য দিয়ে সেটা স্থির করাই যুক্তিযুক্ত। সেই অনুযায়ী একাধিক বিষয়ে সাম্মানিক মানের পাঠ-উপকরণ রচিত হয়েছে ও হচ্ছে—যার মূল কাঠামো স্থিরীকৃত হয়েছে একটি সুচিন্তিত পাঠক্রমের ভিত্তিতে। কেন্দ্র ও রাজ্যের অগ্রগণ্য বিশ্ববিদ্যালয়সমূহের পাঠক্রম অনুসরণ করে তার আদর্শ উপকরণগুলির সমন্বয়ে রচিত হয়েছে এই পাঠক্রম। সেইসঙ্গে যুক্ত হয়েছে অধ্যেতব্য বিষয়ে নতুন তথ্য, মনন ও বিশ্লেষণের সমাবেশ।

দূর-সঞ্চারী শিক্ষাদানের স্বীকৃত পদ্ধতি অনুসরণ করেই এইসব পাঠ-উপকরণ লেখার কাজ চলছে। বিভিন্ন বিষয়ের অভিজ্ঞ পণ্ডিতমণ্ডলীর সাহায্য এ-কাজে অপরিহার্য এবং যাঁদের নিরলস পরিশ্রমে লেখা, সম্পাদনা তথা বিন্যাসকর্ম সুসম্পন্ন হচ্ছে তাঁরা সকলেই ধন্যবাদের পাত্র। আসলে, এঁরা সকলেই অলক্ষ্যে থেকে দূর-সঞ্চারী শিক্ষাদানের কার্যক্রমে অংশ নিচ্ছেন; যখনই কোনো শিক্ষার্থী এই পাঠ্যবস্তুনিচয়ের সাহায্য নেবেন, তখনই তিনি কার্যত একাধিক শিক্ষকমণ্ডলীর পরোক্ষ অধ্যাপনার তাবৎ সুবিধা পেয়ে যাচ্ছেন।

এইসব পাঠ-উপকরণের চর্চা ও অনুশীলনে যতটা মনোনিবেশ করবেন কোনো শিক্ষার্থী, বিষয়ের গভীরে যাওয়া তাঁর পক্ষে ততই সহজ হবে। বিষয়বস্তু যাতে নিজের চেষ্টায় অধিগত হয়, পাঠ-উপকরণের ভাষা ও উপস্থাপনা তার উপযোগী করার দিকে সর্বস্তরে নজর রাখা হয়েছে। এরপর যেখানে যতটুকু অস্পষ্টতা দেখা দেবে, বিশ্ববিদ্যালয়ের বিভিন্ন পাঠকেন্দ্রে নিযুক্ত শিক্ষা-সহায়কগণের পরামর্শে তার নিরসন অবশ্যই হতে পারবে। তার ওপর প্রতি পর্যায়ের শেষে প্রদত্ত অনুশীলনী ও অতিরিক্ত জ্ঞান অর্জনের জন্য গ্রন্থ-নির্দেশ শিক্ষার্থীর গ্রহণ ক্ষমতা ও চিন্তাশীলতা বৃদ্ধির সহায়ক হবে।

এই অভিনব আয়োজনের বেশ কিছু প্রয়াসই এখনও পরীক্ষামূলক—অনেক ক্ষেত্রে একেবারে প্রথম পদক্ষেপ। স্বভাবতই ত্রুটি-বিচ্যুতি কিছু কিছু থাকতে পারে, যা অবশ্যই সংশোধন ও পরিমার্জনার অপেক্ষা রাখে। সাধারণভাবে আশা করা যায়, ব্যাপকতর ব্যবহারের মধ্য দিয়ে পাঠ-উপকরণগুলি সর্বত্র সমাদৃত হবে।

অধ্যাপক (ড.) শুভ শঙ্কর সরকার
উপাচার্য

তৃতীয় পুনর্মুদ্রণ : ফেব্রুয়ারি, 2013

ভারত সরকারের দূরশিক্ষা পর্ষদের বিধি অনুযায়ী এবং অর্থানুকূল্যে মুদ্রিত।
Printed in accordance with the regulations and financial assistance of the Distance Education Council, Government of India.

পরিচিতি

বিষয় ঃ গণিত বিদ্যা

সাম্মানিক স্তর

পাঠক্রম ঃ পর্যায় ঃ EMT. : 01 : 01

	রচনা	সম্পাদনা
একক 1	অধ্যাপক অপূর্ব রায়	ড. শক্তিকান্ত চক্রবর্ত্তী
একক 2	ড. শ্রীপ্রতিরঞ্জন চৌধুরী	ড. শক্তিকান্ত চক্রবর্ত্তী
একক 3	অধ্যাপক প্রণব অধিকারী	ড. শক্তিকান্ত চক্রবর্ত্তী
একক 4	অধ্যাপক প্রণব অধিকারী	ড. শক্তিকান্ত চক্রবর্ত্তী
একক 5	অধ্যাপক অভিজিত চৌধুরী	ড. শক্তিকান্ত চক্রবর্ত্তী
একক 6	ড. শক্তিকান্ত চক্রবর্ত্তী	ডঃ অস্থির দাশগুপ্ত
একক 7	ড. শক্তিকান্ত চক্রবর্ত্তী	ডঃ অস্থির দাশগুপ্ত
একক 8	ড. শ্রীপতি রঞ্জন চৌধুরী	ড. কৃষ্ণা পাল (কুন্ডু)
একক 9	ড. শ্রীপ্রতি রঞ্জন চৌধুরী	ড. কৃষ্ণা পাল (কুন্ডু)
একক 10	ড. শ্রীপ্রতি রঞ্জন চৌধুরী	ড. কৃষ্ণা পাল (কুন্ডু)
একক 11	ড. সব্যসাচী চক্রবর্তী	ড. কৃষ্ণা পাল (কুন্ডু)
একক 12	ড. সব্যসাচী চক্রবর্তী	ড. কৃষ্ণা পাল (কুন্ডু)
একক 13	ড. সব্যসাচী চক্রবর্তী	ড. কৃষ্ণা পাল (কুন্ডু)

পর্যায়
2

জ্যামিতিক প্রয়োগ

একক 1 ❑ বাস্তব সংখ্যা ও বিভিন্ন ধর্ম

গঠন

1.1 প্রস্তাবনা ঃ

গণিতে অন্তরকলনবিদ্যার গুরুত্ব এবং প্রয়োগ অপরিসীম। আর অন্তরকলন গণিতের চর্চার মূল ভিত্তি বাস্তব সংখ্যার সেট্। এই বাস্তব সংখ্যার সেট্ R-এর উপর আলোচনার পূর্বশর্ত সেটের প্রাথমিক জ্ঞান। তাই আমরা 1.3 অনুচ্ছেদে সংক্ষেপে সেটের বিভিন্ন ধারণা আলোচনা করব যা থেকে পাঠক অন্তরকলন গণিতের বিভিন্ন শাখায় যথেষ্ট সাহায্য পাবেন।

বাস্তব সংখ্যার সম্বন্ধে আলোচনা করা হবে 1.4 অনুচ্ছেদে। বাস্তব সংখ্যার আলোচনা আমরা প্রধানতঃ বাস্তব সংখ্যার বিভিন্ন ধর্মের উল্লেখ ও ব্যবহারের মধ্যেই সীমাবদ্ধ রাখব। যদিও তত্ত্বগতভাবে স্বাভাবিক সংখ্যার সেট্ N থেকে বাস্তব সংখ্যার সেট্ R-এ পৌছন যায়, আমরা সেটা না করাই পছন্দ করলাম পাঠকের ব্যবহারিক সুবিধার জন্য, যেহেতু অবকলন গণিতের বর্তমান পাঠক্রমে ঐ সূক্ষ্ম গাণিতিক বিশ্লেষণ প্রয়োজন নেই। 1.4. অনুচ্ছেদে বাস্তব সংখ্যার সেটের ক্ষেত্রে দুটি বিশেষ ধর্ম ফিল্ড্ গঠন ও ক্রম-ধর্ম আলোচনা করব। বাস্তব সংখ্যার পরম মান ও তার বিভিন্ন ধর্ম এবং বাস্তব সংখ্যার কিছু প্রয়োজনীয় সাব্‌সেটের আলোচনাও

করা হবে। 1.4.। অনুচ্ছেদে একটি সেটের বাউনডের বা সীমার ধারণা থেকে কম্‌প্লিট্‌নেস্‌ ধর্মের বিস্তৃত আলোচনা করা হবে।

1.45 অনুচ্ছেদটিতে গুরুত্বপূর্ণ আর্কিমিডীয় ধর্ম এবং এদের বিভিন্ন প্রয়োগের উল্লেখ পাবেন। 1.5 ও 1.6 অনুচ্ছেদ দ্বয়ে বাস্তবসংখ্যার পরম মান (absolute value) ও বাস্তব সংখ্যার সাবসেট সম্বন্ধে আলোচনা করা হয়েছে। জ্যামিতিক রূপায়ণ (1.7 অনুচ্ছেদে) অবকলন গণিতের বিভিন্ন ধারণাকে স্বচ্ছ করতে বিশেষ সহায়ক হবে।

1.2 উদ্দেশ্য ঃ

এটা আপনাদের অন্তরকলন গণিতের প্রথম একক। অবকলন গণিতের প্রাথমিক ধারণা আপনাদের আগের থেকেই কিছুটা আছে। আমরা আপনাদের সুবিধার্থে এই এককে বাস্তব সংখ্যার সেট্‌ R এবং তার কিছু সাবসেটের সংজ্ঞা ও ধর্মের আলোচনা করে পুরনো স্মৃতিকে উজ্জীবিত করতে সাহায্য করব।

এই একক পাঠ করে আপনি —

- সেট্‌ সম্বন্ধে স্বচ্ছ ধারণা করতে পারবেন যা উচ্চতর গণিতে বিশেষ প্রয়োজনীয়।
- বাস্তব সংখ্যার সেটের বিভিন্ন ধর্ম নির্দেশ করতে পারবেন।
- বাস্তব সংখ্যার নির্দ্দিষ্ট কিছু ধর্ম ব্যবহার করে অন্যান্য ধর্ম প্রমাণ করতে সক্ষম হবেন।
- বাস্তব সংখ্যার বিভিন্ন ধর্ম যেমন কম্‌প্লিটনেস্‌ ধর্ম, পরম মান, প্রভৃতি অবকলন গণিতের অন্যান্য শাখায় প্রয়োগের নৈপুণ্য অর্জন করবেন।

1.3 সেট্‌ সম্পর্কিত প্রাথমিক আলোচনা ঃ

সেট্‌ (Set) : যে কোন বৈজ্ঞানিক আলোচনায় সেট্‌ বলতে আমরা ঐ আলোচনার সাথে সম্পর্ক আছে এমন কতকগুলি বস্তুর সংগ্রহ বোঝাব; ঐ সংগ্রহের যে কোন বস্তুকে পদ (element) পদ বলা হবে। সেটের পদগুলি কোন সংখ্যা হতে পারে বা যে কোন সজীব বা নির্জীব পদার্থও হতে পারে। যেমন কলকাতার রেড রোডের লাইটপোষ্টগুলোর সেট্‌ এবং রেড রোডের লাইটপোষ্টের নাম্বারগুলির সেট্‌ দুটি আলাদা সেট।

সেট্‌কে সাধারণত A,B,C,......,X,Y,Z প্রভৃতি দিয়ে নির্দেশ করা হয় এবং সেটের পদকে, a,b,c,.....,x,y,z দিয়ে বোঝান হয়।

একটি সেট্‌কে দুভাবে নির্দেশ করা যায়—

(i) দ্বিতীয় বন্ধনীর মধ্যে সেটের পদগুলির সম্পূর্ণ তালিকা উল্লেখ করে, যেখানে সেটে সীমিত সংখ্যক পদ থাকে।

বা (ii) দ্বিতীয় বন্ধনীর মধ্যে আলোচ্য সেটের পদ সংগ্রহের পদ্ধতি উল্লেখ করে। এই পুস্তকে আমরা উদাহরণস্বরূপ কেবলমাত্র সংখ্যা সমূহের সেট্‌ সম্বন্ধে বলব।

উদাহরণ ঃ একটি লুডোর ছক্কাকে গড়িয়ে দিলে যে সংখ্যাগুলি আসতে পারে তাদের নিয়ে যে সেট্‌ তাহাতে $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ অথবা $A=\{\ x : x$ ছয়ের অনধিক ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা $\}$ এই দুভাবেই নির্দেশ করা যায়।

x, A সেটের একটি পদ বোঝাতে আমরা $x \in A$ প্রতীক ব্যবহার করব এবং x পদটি সেটে নেই বোঝাতে $x \notin A$ লিখব। কয়েকটি প্রয়োজনীয় সেট্ :

N = স্বাভাবিক বা ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার সেট

$= \{1,2,3..............\}$

Z = সমগ্র পূর্ণসংখ্যার সেট

$= \{........, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,......\}$

$Q = \{\frac{p}{q} : p$ এবং q পূর্ণসংখ্যা এবং $q \neq o\}$

R = সব বাস্তব সংখ্যার সেট্ (বাস্তব সংখ্যার পরিচিতি আমরা পরে দেব)

শূন্য সেট্ (Void set বা Empty set) **:** সেট্ আলোচনায় আমরা একটি বিশেষ সেটের সংজ্ঞা দেব — যাকে আমরা শূন্য সেট বলব। শূন্য সেট হল এমন সংগ্রহ যার মধ্যে একটিও পদ নেই। এরূপ সংগ্রহকে আমরা শূন্য সেট (empty set) বলব এবং ϕ দ্বারা নির্দেশিত করব।

যেমন : যে সকল বাস্তব সংখ্যার বর্গ ঋণাত্মক, তাদের সংগ্রহ একটি শূন্য সেট; কারণ এমন কোনও বাস্তব সংখ্যা নেই যার বর্গ ঋণাত্মক। এরূপ অনেক উদাহরণ দেওয়া যায়।

সেটের সম্পর্ক : যে কোন দুটি সেট্ A ও B সমান হবে, যদি তাদের পদগুলি একই হয় অর্থাৎ যদি A বা B-তে এমন কোন পদ না থাকে যা অন্যটিতে নেই, এক্ষেত্রে আমরা A=B বলব।

উদাহরণ 1 **:** ধরা যাক A ও B নীচের দুটি সেট

$A = \{x : (x-2)(x-4)(x-6)=0\}$

B = {x : x হল একটি সাধারণ লুডোর ঘুটিতে যুগ্মসংখ্যা}

দেখা যাচ্ছে দুটি সেটে একই সংখ্যাগুলি অর্থাৎ 2, 4 ও 6 রয়েছে। সুতরাং A=B

উদাহরণ 2 **:** (i) $A = \{2,0,3,1\}$, $B=\{0,1,2,3\}$, $C=\{2,0,3,0,1\}$

সেট্গুলি পরস্পর সমান কারণ সেটের পদগুলির পুনর্বিন্যাস করলে বা সেটের কোন একটি বা একাধিক পদ একাধিকবার নিলে কোন নতুন সেট গঠিত হয় না।

সাবসেট্ (Subset) **:** দুটি সেট A ও B যদি এমন হয় যে, A সেটের প্রতিটি পদই B সেটে আছে, তবে A কে B-এর সাবসেট্ (Subset) বলা হয় এবং $A \subseteq B$ অথবা $A \subset B$ প্রতীক ব্যবহার করা হয়।

উপরের দুটি ক্ষেত্রে যথাক্রমে $B \supseteq A$ এবং $B \supset A$ প্রতীকগুলিও ব্যবহার করা চলে।

অতএব বোঝা যায় যদি $A \supseteq B$ এবং $B \supseteq A$ হয়, তবে A=B হবে।

যে কোন সেট্ A-র জন্য (i) $A \supseteq A$ এবং (ii) $A \supseteq \phi$

ইউনিভার্সাল সেট্ (Universal Set) **:** সেটের আলোচনায় আমরা প্রথমে একটি বিশ্বসেট্ (Universal set) কল্পনা করি যাহা এমন একটি সেট যে ঐ আলোচনায় ব্যবহৃত সমস্ত সেট ঐ বিশ্বসেটের সাবসেট।

বিশ্বসেটকে U দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। যেমন, ধরা যাক সমস্ত র‍্যাশনাল সংখ্যা সমন্বিত সেট একটি বিশ্বসেট্। তাহা হলে উহার অন্তর্গত আমরা যে কোন র‍্যাশনাল সংখ্যার সেট্ নিলে তাহা বিশ্বসেটের অন্তর্ভুক্ত থাকবে। যেমন —

A = {2.4.6......... জোড় পূর্ণসংখ্যা }

B = {1,3,5,7,......... বিজোড় পূর্ণসংখ্যা }

$$C = \left\{ \frac{1}{200}, \frac{2}{200}, \frac{3}{200} \cdots\cdots\cdots \frac{199}{200} \right\}$$

A, B, C প্রত্যেকে ঐ র‍্যাশনাল সংখ্যার বিশ্ব সেটের সাবসেট্।

বিচ্ছিন্ন সেট (Disjoint set) ঃ

যদি A সেটের কোনও পদই B সেটে না থাকে তবে A ও B-কে ডিস্‌জয়েন্ট সেট বা বিচ্ছিন্ন সেট্ বলা হয়। উদাঃ $\{x : x^2 - 4x + 3 = 0\}$ এবং B={x : x হল লুডোর একটি ঘুটির জোড় সংখ্যা} A ও B সেট্ দুটি বিচ্ছিন্ন কিন্তু $C = \{x : 1 \le x \le 6\}$ সেটটি A ও B কোনটির সাথেই বিচ্ছিন্ন নয়।

সেটের পরবর্তী আলোচনায় কিছু প্রতীকের ব্যবহার অপরিহার্য, যার কিছু নীচে আলোচনা করা হল।

প্রতীক	অর্থ	উদাহরণ
$\forall$	প্রত্যেক	'$\forall x \in A$'-অর্থ A সেটের প্রতিটি পদ x-এর জন্য।
$\exists$	বর্তমান বা আছে	'$\exists x \in A$' অর্থ A সেটের এমন একটি পদ x আছে।
$\Rightarrow$	নির্দেশ করে	P ও Q যদি বিবৃতি হয় তবে $P \Rightarrow Q$-এর অর্থ 'P সত্যি হলে Q সত্য হবে।'
$\Leftrightarrow$	উভয়ত নির্দেশ করে	$P \Leftrightarrow Q$-অর্থ 'P সত্যি হলে Q সত্য এবং Q সত্য হলে P সত্য হবে।'
$\vee$	অথবা	$x \vee y$ অর্থ 'x অথবা y'
$\wedge$	এবং	$x \wedge y$ অর্থ 'x এবং y'

সেটের ইউনিয়ন্ বা সংযোগ (Union) **ঃ** দুটি সেট A ও B-এর ইউনিয়ন হল এমন একটি সেট্ C যে $x \in C$ হলে $x \in A$ এবং $x \in B$ এ দুটির অন্তত একটি সত্য হবে।

এক্ষেত্রে আমরা সেট C-এর জন্য $A \cup B$. প্রতীকটি ব্যবহার করব।

সুতরাং $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$

যে কোন সেট্ A -র জন্য $A \cup \phi = A$, $A \cup A = A$, $A \cup U = U$ এবং A ও B-এর জন্য $A \cup B = B \cup A$, $A \subseteq (A \cup B)$, $B \subseteq A \cup B$।

সেটের ছেদ (Intersection) : দুটি সেট্ A ও B এর ছেদ হল একটি সেট্ যার পদগুলি A এবং B-এর দুটিতেই আছে। A ও B-এর ছেদকে $A \cap B$ আকারে লেখা হয়।

$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$

সুতরাং $A \cap \phi = \phi, A \cap A = A$ এবং $A \cap U = A$

$A \cap B \subseteq A$ এবং $A \cap B \subseteq B$

যদি A ও B বিচ্ছিন্ন সেট্ হয় তবে, $A \cap B = \phi$

পূরক সেট্ (Complement of a set) : U যদি বিশ্বসেট্ হয় এবং A যদি ঐ বিশ্বসেটের একটি সাবসেট হয় তবে A সেটের পূরক সেট্ হল বিশ্বসেটের এমন একটি সাবসেট্ (যাকে আমরা A' বা A^c দিয়ে চিহ্নিত করি) $A' = \{x : x \in U; x \notin A\}$

অতএব দেখা গেল যে যদি $x \in U$ হয়, তবে x হয় A -তে থাকবে নতুবা A' সেটে থাকবে। অর্থাৎ $A \cup A' = U$ এবং $A \cap A' =$ শূন্য সেট্ $= \phi$

উদাহরণ ঃ ϕ যদি শূন্য সেট্ ও U বিশ্বসেট হয় তবে দেখান (i) $\phi' = U$ এবং (ii) $U' = \phi$

1.4 বাস্তব সংখ্যা ও বিভিন্ন ধর্ম ঃ

আমাদের আলোচনার এই অধ্যায়ে আমরা প্রধানতঃ বাস্তব সংখ্যার বিভিন্ন ধর্ম ও তার প্রয়োগ নিয়ে আলোকপাত করব। যদিও বাস্তব সংখ্যার উৎপত্তি (স্বাভাবিক সংখ্যার সেট্ N থেকে বা র‍্যাশনাল সংখ্যা সেট্ Q থেকে) সম্বন্ধে আলোচনা গাণিতিক দিক থেকে খুবই গুরুত্বপূর্ণ, এখানে ওই সূক্ষ্ম গাণিতিক তত্ত্বের অবতারণা করা হবে না।

আমরা স্বাভাবিক সংখ্যার সেট্ $N = \{1,2,3..........\}$ -এর সঙ্গে পরিচিত।

আবার পূর্ণসংখ্যার সেট্ $Z = \{.......-3,-2,-1,0,1,2,3........\}$ এর সঙ্গেও পরিচিত। আবার p, q দুটি পূর্ণসংখ্যা হলে এবং $q \neq 0$ হলে, $\frac{p}{q}$ কে একটি র‍্যাশনাল সংখ্যা বলা হয় (Rational number), যেমন $\frac{2}{3}, \frac{5}{9}$ ইত্যাদি। সমস্ত র‍্যাশনাল সংখ্যার সেট্কে Q দ্বারা চিহ্নিত করা যায়।

আবার আমরা একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ আঁকতে পারি যার অতিভুজ-এর দৈর্ঘ্য = m এবং অন্য বাহু দুটি 1, 1 দৈর্ঘ্যের।

তা হলে পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে $m^2 = 1^2 + 1^2 = 2$

অতএব m একটি এমন সংখ্যা যার বর্গ 2.

কিন্তু এমন কোন র‍্যাশনাল সংখ্যা নেই যার বর্গ 2. কারণ $\frac{p}{q}$ একটি র‍্যাশনাল সংখ্যা, যেখানে p, q পূর্ণ সংখ্যা $q \neq 0$ এবং $(p,q)=1$ হলে যদি $\frac{p^2}{q^2} = 2$ ধরি, তা হলে $p^2 = 2q^2$ অর্থাৎ তাহলে p^2 এরএকটি উৎপাদক 2 আছে অর্থাৎ p-এর এবং q-এর উৎপাদক 2 আছে কিন্তু $(p,q)=1$

অতএব (p ও q) এর সাধারণ উৎপাদক 2 থাকতে পারে না। অতএব $\frac{p^2}{q^2} \neq 2$. এরূপ একটি সংখ্যা m কে আমরা ইরাশনাল (irrational) সংখ্যা বলব।

এইরূপ আরও নানাপ্রকার ইরাশনাল সংখ্যা আছে। সেগুলি সম্পর্কে অন্যত্র আলোচনা হবে। র‍্যাশনাল ও ইরাশনাল সমস্ত সংখ্যা একত্রে বলা হয় বাস্তব (Real) সংখ্যা। সমগ্র বাস্তব সংখ্যার সেট্‌কে R দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। আমরা এখানে বাস্তব সংখ্যার বিভিন্ন ধর্ম দ্বারা বাস্তব সংখ্যার সংজ্ঞা দেব।

মন্তব্য ঃ বাস্তব সংখ্যার সংজ্ঞা দশমিকের সাহায্যে দেওয়া যায়। আমরা জানি যে কোন র‍্যাশনাল সংখ্যা $\frac{p}{q}$ (যেখানে p, q পূর্ণসংখ্যা $q \neq 0$)-কে দশমিকে প্রকাশ করলে উহার নির্দিষ্ট কয়েকঘর সংখ্যা থাকবে যেমন $\frac{1}{5} = 0.2, \frac{1}{4} = 0.25,\ \frac{7}{8} = 0.875$ ইত্যাদি অথবা আবৃত্ত দশমিকে পরিণত হবে,

যেমন $\frac{1}{3} = 0.\dot{3},\ \frac{1}{6} = 0.1\dot{6},\ \frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$ ইত্যাদি।

এখন দশমিকে লিখিত কোন সংখ্যাতে দশমিকের পর যদি অসীম সংখ্যক অশূন্য সংখ্যা থাকে ও উহা যদি আবৃত্ত দশমিক না হয়, এরূপ সংখ্যাকে আমরা র‍্যাশনাল সংখ্যা হিসেবে লিখতে পারি না। এরূপ সংখ্যাকে আমরা ইর‍্যাশনাল বলি। যেমন ঃ

$$\sqrt{2} = 1.414\ldots\ldots\ldots$$

$$\pi = 3.14159\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ ইত্যাদি।}$$

উদাহরণ স্বরূপ আমরা যদি সমস্ত স্বাভাবিক সংখ্যাগুলিকে দশমিকের পর লিখে যাই তবে একটি ইর‍্যাশনাল সংখ্যা পাব অর্থাৎ 0.12345678910111213...........

কেননা এখানে আবৃত্ত দশমিক হবে না।

সমস্ত র‍্যাশনাল ও ইর‍্যাশনাল সংখ্যা মিলিয়ে বাস্তব (Real) সংখ্যার সেট্‌ তৈরী হয়।

অতএব দশমিকের সাহায্যে বাস্তব সংখ্যার সংজ্ঞা দেওয়া যায়

সমস্ত দশমিক সংখ্যা, সীমিত অঙ্কবিশিষ্ট, দশমিক অংশে আবৃত্ত ও অনাবৃত্ত অসীম সংখ্যক অঙ্ক (ডিজিট) সহ বাস্তব সংখ্যার সেট্ তৈরী করে।

1.4.1 বাস্তব সংখ্যার বীজগাণিতিক ধর্ম ঃ

বাস্তব সংখ্যার সেট R-এর জন্য দুটি দ্বিপদ-প্রক্রিয়া যোগ এবং গুণের (+ ও.)

$A_1 : \forall a, b \in R, a+b \in R$ [যোগের (+) বদ্ধতা বা ক্লোজার ধর্ম] (closure property)

$A_2 : \forall a, b, c \in R, a+(b+c)=(a+b)+c$ [যোগের সংযোগ ধর্ম] (Associative Property of addition)

A_3 : R সেটে এমন একটি পদ আছে যাকে 'o' প্রতীক দিয়ে নির্দেশ করা হয় এবং

$\forall a \in R, a+o=o+a=a$

'o' কে যোগের সাপেক্ষে R সেটের আইডেন্‌টিটি পদ বলা হবে। (Identity element of addition).

$A_4 : \forall a \in R, \exists (-a) \in R$ যাতে

$a+(-a)=(-a)+a=0$

এক্ষেত্রে $(-a)$-কে a পদটির বিপরীত বা inverse পদ বলা হবে।

(যোগের সাপেক্ষে ইনভার্স পদের অস্তিত্ব ধর্ম)

$A_5 : \forall a, b \in R, a+b=b+a$ [যোগের বিনিময় ধর্ম] Commutative property

$M_1 : \forall\ a, b \in R, a.b \in R$ [গুণের (.) বদ্ধতা বা ক্লোজার ধর্ম]

$M_2 : a, b, c \in R, a.(b.c)=(a.b).c=(a.b.c)$ [গুণের সংযোগ ধর্ম]

M_3 : সেটে এমন একটি পদ আছে যাকে '1' প্রতীক দিয়ে নির্দেশ করা হয় এবং R সেটের যে কোন পদ a-র জন্য $a.1=1.a=a$ হবে।

এক্ষেত্রে '1' -কে গুণের সাপেক্ষে R সেটের আইডেন্‌টিটি পদ বলা হবে। [গুণের সাপেক্ষে আইডেন্‌টিটি পদের অস্তিত্ব ধর্ম]

$M_4 : \forall a \neq 0, \exists a' \in R$ যার জন্য $a.a'=a'.a=1$

এক্ষেত্রে a'-কে a পদের গুণের সাপেক্ষে বিপরীত বা ইন্‌ভার্স পদ বলা হবে এবং a'-কে a^{-1} প্রতীক দিয়ে সূচিত করা হবে। [গুণের সাপেক্ষে ইন্‌ভার্স পদের অস্তিত্ব ধর্ম]

$M_5 : \forall a, b \in R, a.b=b.a$ [গুণের বিনিময় ধর্ম] Commutative property

$D : \forall a, b, c \in R$ (i) $a.(b+c)=a.b+a.c$

(ii) $(a+b).c = a.c + b.c$

[যোগ প্রক্রিয়ার উপর গুণের বণ্টন ধর্ম বা Distributive Property of multiplication over addition]

দেখা যাচ্ছে যে, সেট্ R দুটি দ্বিপদ প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে $A_1 - A_5, M_1 - M_5$ এবং D ধর্মগুলি সিদ্ধ করে এই কারণে (R, + ...,) একটি ফিল্ড তৈরী করে বলা যায়।

1.4.2 বাস্তব সংখ্যার ক্রম (Order) ঃ

বাস্তব সংখ্যার সেটে একটি সম্পর্ক অর্থাৎ a,b দুটি বাস্তব সংখ্যা হলে

O_1 : হয় $a < b$, অথবা $b < a$, অথবা a=b. এই তিনটির একটি এবং কেবলমাত্র একটি সত্য (Rule of Trichotomy)

$O_2 : \forall a, b, c \in R, a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$

$O_3 : \forall a, b, c \in R; a < b \Rightarrow a + c < b + c$

যোগের সাপেক্ষে ক্রম সম্পর্কের কমপ্যাটিবিলিটি সূত্র

(আমরা লক্ষ্য করব যে $a < b$ ও $b > a$ সমার্থক)

$O_4 : \forall a, b , c \in R$ (i) $a > b,\ c > 0 \Rightarrow ac > bc$

(ii) $a > b,\ c < 0 \Rightarrow ac < bc$

(গুণের সাপেক্ষে ক্রম সম্পর্কের কমপ্যাটিবিলিটি সূত্র)

উপপাদ্য 1. বাস্তব সংখ্যার সেট R-এ নিম্নের ধর্মগুলি পাওয়া যায়। (এখানে প্রমাণ দেওয়া হল না)

(i) 0 এবং 1 অনন্য (যোগ ও গুণের সাপেক্ষে আইডেন্টিটি পদ অনন্য)

(ii) $a \in R \Rightarrow (-a)$ অনন্য এবং $a \neq 0$ হলে $\frac{1}{a}$ অনন্য (যোগ ও গুণের সাপেক্ষে ইন্ভার্স পদের অনন্যতা)

(iii) $\forall a, b \in R, a + x = b$ এই সমীকরণের সমাধান $x = b + (-a)$

(iv) $a.x = b$ যেখানে $a \neq o$, এর সমাধান

$$x = \left(\frac{1}{a}\right).b$$

(v) $\forall a, b \in R$ (1) $a.0 = 0$ (2) $(-1).a = -a$

(3) $-(-a) = a$ (4) $(-1).(-1) = 1$

(vi) $\forall a, b, c \in R$ (a) $a \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{a} \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{a}} = a$

(b) $a.b = 0 \Rightarrow$ হয় $a = 0$, বা $b = 0$ (এখানে a, b প্রত্যেকটি শূন্য হতে পারে)

(vii) $\forall\, a, b, c \in R$

(a) $a + b = a + c \Rightarrow b = c$ (যোগের অপসারণ সূত্র)

$b + a = c + a \Rightarrow b = c$

(b) $a \neq o$ এবং $a.b = a.c \Rightarrow b = c$ (গুণের অপসারণ সূত্র)

$b.a = c.a \Rightarrow b = c$

মন্তব্য ঃ বাস্তব সংখ্যার বিয়োগ ও ভাগ। বাস্তব সংখ্যার সেটে আরো দুটি গুরুত্বপূর্ণ দ্বিপদ প্রক্রিয়ার সংজ্ঞা দরকার। এই বহু ব্যবহৃত প্রক্রিয়াদুটি হল বিয়োগ এবং ভাগ।

R সেটের যে কোন দুটি পদ a ও b-এর বিয়োগফলকে $a - b = a + (-b)$. যেহেতু যোগের জন্য প্রয়োজনীয় ধর্মগুলি আগেই উল্লেখ করা হয়েছে বিয়োগের ধর্মের বিস্তৃত আলোচনা নিষ্প্রয়োজন।

R সেটের যে-কোন দুটি পদ a ও b এর জন্য, যেখানে $b \neq 0$, ভাগের সংজ্ঞা বলতে আমরা বুঝব $(a / b) = a(1 / b)$, অর্থাৎ ভাগকেও গুণের সংজ্ঞা থেকেই পাওয়া যাবে। কাজেই ভাগের ধর্মের আলোচনায় যাব না।

1.4.3 ধনাত্মক ও ঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যা

প্রথমে আমরা ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যার ধারণা গড়ে তুলব।

সংজ্ঞা ঃ ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার সেট হল বাস্তব সংখ্যার সেট R-এর একটি অশূন্য সাবসেট্ $\mathbf{R}^+$ যার নিম্নলিখিত ধর্মগুলি থাকবে ঃ

(1) $\forall a, b \in R^+, a + b \in R^+$ and $a.b \in R^+$

(ক্রম সম্পর্কের (+) ও (.)-এর সাপেক্ষে কম্প্যাটিবিলিটি ধর্ম)

(2) $\forall a \in R$, নীচের সম্পর্কগুলির কেবলমাত্র একটিই সিদ্ধ হবে

$a \in R^+$, $a = 0$, $-a \in R^+$ (ট্রাইকোটমি ধর্ম)

উপরের সংজ্ঞা থেকে স্বাভাবিক ভাবেই ঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যার সেটের সংজ্ঞা দেওয়া যেতে পারে,

$R^- = \{-a \in R : a \in R^+\}$

সহজেই বোঝা যাচ্ছে $R^+ \cap R^- = \phi, o \notin R^+, o \notin R^-$

ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা বোঝাতে আমরা $a > 0$ ক্রম সম্পর্ক ব্যবহার করব এবং a ঋণাত্মক হলে আমরা লিখব $a < 0$।

a যদি $R^+ \cup \{0\}$ সেটে থাকে তবে লিখব $a \ge 0$

এবং $a \in R^- \cup \{0\}$ হলে লিখব $a \le 0$

যে কোন দুটি বাস্তব সংখ্যা a ও b-এর জন্য $a - b \in R^+$ হলে আমরা লিখব $a > b$ বা $b < a$ এবং $a \ge b \Rightarrow a - b \in R^+ \cup \{0\}$

সহজেই নিম্নের বিবৃতিগুলির সত্যতা উপলব্ধি হবে ঃ

a,b,c,d বাস্তব সংখ্যার সেট R-এর যে কোন চারটি পদ হলে

(i) $a \ge b \wedge b \ge a \Rightarrow a = b$

(ii) $a \ne 0 \Rightarrow a^2 > 0$

(iii) $a > b \wedge c > d \Rightarrow a + c > b + d$

(iv) $a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$

and $a < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < 0$

(v) $a < b \Rightarrow a < \frac{a+b}{2} < b$

(v)-নং ধর্মটি থেকে বাস্তব সংখ্যার একটি বিশেষ ধর্মের উৎপত্তি — 'ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার অস্তিত্ব নেই'। অর্থাৎ

(vi) $b > 0 \Rightarrow 0 < \frac{b}{2} < b$.

(vii) $ab > 0 \Rightarrow a > 0 \wedge b > 0$

অথবা, $a < 0 \wedge b < 0$

(viii) $ab < 0 \Rightarrow a > 0 \wedge b < 0$

অথবা $a < 0 \wedge b > 0$

1.4.4 বাস্তব সংখ্যার কম্‌প্লিট্‌নেস্‌ বা সম্পূর্ণতা ধর্ম

এই ধর্মের আলোচনার সহায়ক হিসাবে প্রথমে কয়েকটি সংজ্ঞার প্রয়োজন।

ঊর্ধ্বসীমাযুক্ত সেট (Bounded above set)

S একটি বাস্তব সংখ্যার সেট অর্থাৎ S সমগ্র বাস্তব সংখ্যার সেট R-এর সাবসেট্। S-কে ঊর্ধ্বসীমাযুক্ত বলা হবে যদি এমন একটি বাস্তব সংখ্যা M পাওয়া যায় যে $x \le M, \forall x \in S$

সেক্ষেত্রে M সংখ্যাটিকে S সেটের একটি আপার বাউন্ড বা ঊর্ধ্বসীমা বলা হবে।

S সেটের কোন ঊর্ধ্বসীমা M পাওয়া না গেলে S সেট্‌টিকে ঊর্ধ্বসীমাহীন বা (Unbounded above) বলা হবে।

S সেটের একটি M থাকলে, M-এর চেয়ে বড় সব সংখ্যাই S-এর ঊর্ধ্বসীমা হবে, অর্থাৎ S-এর অসীম সংখ্যক ঊর্ধ্বসীমা থাকবে।

কোন একটি বাস্তব সংখ্যা M_o -কে সেটের ঊর্ধ্বসীমা (Upper bound) বলা যাবে না, যদি S সেটে এমন একটি সংখ্যা y পাওয়া যায়, যার জন্য $M_o < y$,

অধঃসীমাযুক্ত সেট (Set Bounded below)

S যদি বাস্তব সংখ্যার একটি সাব্‌সেট হয় এবং যদি কোন একটি বাস্তব সংখ্যা m-এর জন্য $m \le x$, $\forall x \in S$ সত্য হয় তবে S সেটটিকে অধঃসীমাযুক্ত বলা হবে।

এক্ষেত্রে m হবে S সেটের একটি অধঃসীমা বা লোয়ার বাউন্ড্। যদি এমন কোন m-এর অস্তিত্ব না থাকে, S সেটটিকে অধঃসীমাহীন (unbounded below) বলা হবে।

S-এর কোন একটি অধঃসীমা m -এর থেকে ছোট যে কোন সংখ্যাই S সেটের একটি অধঃসীমা।

কোন একটি বাস্তব সংখ্যা m_o, S সেটের অধঃসীমা হবে না যদি S সেটে এমন একটি সংখ্যা y পাওয়া যায়, যাতে $m_o > y$

সীমাবদ্ধ (Bounded) সেট

বাস্তব সংখ্যার একটি সেট্ S-কে সীমাবদ্ধ বা বাউনডেড্ সেট্ বলা হবে যদি সেটটি ঊর্ধ্বসীমাযুক্ত এবং অধঃসীমাযুক্ত হয়, অর্থাৎ যদি এমন দুটি বাস্তব সংখ্যা m ও M পাওয়া যায় যাতে

$m \le x \le M \; \forall x \in S$

উদাহরণ ঃ 1) স্বাভাবিক সংখ্যার সেট্ N-এর অধঃসীমা 1 কিন্তু ঊর্ধ্বসীমা নেই।

2) Z, Q, এবং R-এর ঊর্ধ্ব বা অধঃসীমা কোনটাই নেই।

3) $\{x : 1 \le x \le 10\}$ এই সেটের ঊর্ধ্ব ও অধঃসীমা উভয়ই বিদ্যমান।

S সেটটিকে সীমাহীন বা unbounded বলা হবে যদি ঊর্ধ্বসীমাযুক্ত না হয় বা নিম্নসীমাযুক্ত না হয়।

উপরের আলোচনা থেকে কয়েকটি নির্দ্দিষ্ট ধারণা করা যেতে পারে ঃ

(1) বাস্তব সংখ্যার কোন সাব্‌সেট S-এর একটি ঊর্ধ্বসীমা থাকলে অসংখ্য ঊর্ধ্বসীমা থাকবে। ঊর্ধ্বসীমাগুলির সেট্‌কে যদি U বলা হয় তবে U সেটটি অধঃসীমাযুক্ত কারণ S সেটের যে-কোন পদ U সেটের অধঃসীমা হবে।

(2) একইভাবে S সেটের অধঃসীমার সেট্‌কে L ধরলে, L সেট্‌টি ঊর্ধ্বসীমাযুক্ত হবে কারণ S-এর প্রতিটি পদ L এর ঊর্ধ্বসীমা।

(3) কোন বাস্তব সংখ্যার সাব্‌সেট্‌ S-এর ঊর্ধ্বসীমা ঐ সেটে থাকতে পারে, নাও থাকতে পারে। যদি একটি ঊর্ধ্বসীমা সেট্‌টিতে থাকে তবে উহা সেটের বৃহত্তম সংখ্যা হবে। অনুরূপভাবে নিম্নসীমা সম্বন্ধে বলা যেতে পারে।

(4) কোন সেটের পদসংখ্যা সসীম হলে ঐ সেটে যেহেতু বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম পদ থাকবে, উহারা যথাক্রমে সেটের ঊর্ধ্ব এবং অধঃসীমা হবে।

বাস্তব সংখ্যার সেটের সুপ্রীমাম্‌ বা লঘিষ্ঠ ঊর্ধ্বসীমা (Supremum)

সংজ্ঞা ঃ একটি ঊর্ধ্বসীমাযুক্ত বাস্তব সংখ্যার সাব্‌সেট্‌ S-এর যদি এমন কোন একটি ঊর্ধ্বসীমা M থাকে যে M থেকে ছোট কোন বাস্তব সংখ্যাই S-এর **ঊর্ধ্বসীমা নয়,** তাহলে M-কে লঘিষ্ঠ ঊর্ধ্বসীমা বা সুপ্রীমাম্‌ বলা হয়। এক্ষেত্রে আমরা লিখি $M = \text{Sup}S$ । যদি M একটি সেট S-এর লঘিষ্ঠ ঊর্ধ্বসীমা হয় তবে যে কোন ধনাত্মক সংখ্যা ε হলে S-এর অন্তত একটি পদ x পাওয়া যাবে যার জন্য $x > M - \varepsilon$ কারণ যদি $M - \varepsilon$ থেকে বড় কোন পদ না থাকে তা হলে $M - \varepsilon$ একটি ঊর্ধ্বসীমা হয় এবং তাহলে M সুপ্রীমাম্‌ হতে পারে না।

উদাহরণ ঃ কোন সেটের সুপ্রীমাম্‌ থাকতে পারে আবার নাও থাকতে পারে। যেমন

1) $S = \{x \in R : x \geq 0\}$ সেট্‌টির সুপ্রীমাম নেই, কিন্তু

$T = \{x \in R : 0 < x \leq 1\}$ সেট্‌টির সুপ্রীমাম 1

2) কোন সেটের সুপ্রীমাম্‌ ঐ সেটের পদ হতে পারে বা ঐ সেটের কোন পদ নাও হতে পারে।

যেমন $T = \left\{1 - \dfrac{1}{n} : n \in N\right\}$ সেটটির সুপ্রীমাম 1, কিন্তু 1, সেটের পদ নয়, কিন্তু আগের T সেট্‌টির সুপ্রীমাম্‌ ঐ সেটেরই একটি পদ।

3) কোন সেটের সুপ্রীমাম যদি থাকে তবে একটি পদই সুপ্রীমাম হবে কারণ যদি ধরি M ও M' দুটি সুপ্রিমাম এবং $M \neq M'$ তাহলে আর্কিমিডিয় ধর্ম অনুসারে $M < M'$ অথবা $M > M'$. কিন্তু কোন ক্ষেত্রেই একটি সুপ্রিমাম থেকে ছোট আর একটি সুপ্রিমাম হতে না পারায় $M \neq M'$ সত্যি নয় অর্থাৎ $M = M'$

M যদি লঘিষ্ঠ ঊর্ধ্বসীমা হয় কোন বাস্তব সংখ্যার সেট্‌ S-এর, তবে (i) $\forall x \in S, x \leq M$ এবং

(i) $\forall \varepsilon \geq 0, \exists y \in S$ যার জন্য $M - \varepsilon < y \leq M$

উপপাদ্য 1 ঃ অধঃসীমাযুক্ত বাস্তবসংখ্যার অশূন্য সেট-এর একটি বৃহত্তম অধঃসীমা বা ইনফিমাম আছে।

যদি একটি বাস্তব সংখ্যার সেট S অধঃসীমাযুক্ত হয় তবে আমরা একটি সেট T-এর সংজ্ঞা নিম্নের মত দিতে পারি ঃ

$T = \{x; -x \in S\}$

এখন যেহেতু S অধঃসীমাযুক্ত, অতএব m_1 যদি একটি অধঃসীমা হয়, তাহলে

$m_1 \leq y, \forall y \in S$

অতএব $-m_1 \geq -y$

কিন্তু $-y \in T$ এবং $-y \leq -m_1$, অতএব $-m_1$ T-এর একটি ঊর্ধ্বসীমা

$\therefore$ বাস্তব সংখ্যার সেটের ধর্ম অনুযায়ী T-এর লঘিষ্ঠ ঊর্ধ্বসীমা আছে। ধরা যাক M হল T-এর লঘিষ্ঠ ঊর্ধ্বসীমা। অতএব

যদি $y \in S$ হয় তা হলে $-y \in T$ এবং $-y \leq M$

এবং $\varepsilon > 0$ একটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হলে, অন্তত একটি পদ $z \in T$ আছে যার জন্য $z > M - \varepsilon$ অতএব $y \geq -M$ এবং $-z < -M + \varepsilon$ $\therefore -M$ হল S সেটের বৃহত্তম নিম্নসীমা বা ইন্‌ফিমাম্।

ইনফিমাম্ বা গরিষ্ঠ অধঃসীমার সংজ্ঞা দেয়া যেতে পারে ঃ

একটি অধঃসীমাযুক্ত বাস্তব সংখ্যার সাবসেট্ S-এর কোন একটি অধঃসীমা m -কে লঘিষ্ঠ অধঃসীমা বলা হবে, যদি m-এর চেয়ে বড় কোন বাস্তব সংখ্যাই S-এর অধঃসীমা না হয়।

এক্ষেত্রে যদি m-এর অস্তিত্ব থাকে, আমরা লিখব $m = \text{Inf}.S$

m বাস্তব সংখ্যাটি কোন সেট S-এর গরিষ্ঠ অধঃসীমা (Infimum) হবে যদি

(i) $\forall x \in S, x \geq m$

এবং (ii) যে কোন $\varepsilon > 0$-এর জন্য যদি S সেটের অন্তত একটি পদ y থাকে যার জন্য $m \leq y < m + \varepsilon$ সত্য হয়।

এছাড়া ইন্‌ফিমাম-এর ক্ষেত্রেও আপনারা সুপ্রীমামের মত ধর্মগুলো লিপিবদ্ধ করতে পারেন।

ঊর্ধ্বসীমাযুক্ত বাস্তব সংখ্যার সুপ্রীমাম প্রকল্প (Hypothesis on existence of supremum) বাস্তব সংখ্যার সাবসেট্ সম্পর্কে নিম্নের ধর্ম আমরা সত্য বলে গ্রহণ করব।

"S যদি বাস্তব সংখ্যার সেট্ R-এর অশূন্য সাবসেট্ হয় এবং উহার যদি ঊর্ধ্বসীমা থাকে তবে S সেটের লঘিষ্ঠ ঊর্ধ্বসীমা বা সুপ্রীমাম থাকবে।"

উদাহরণ ঃ নীচের সেটগুলির সুপ্রিমাম ও ইন্‌ফিমাম নির্ণয় করুন ঃ

(i) $S = \left\{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots\ldots -\frac{1}{n} \ldots\ldots\right\}$

(উত্তর ঃ- 0, −1)

(ii) $S = \left\{\frac{(-1)^n}{n}, n \in N\right\}$ (উত্তর ঃ- $\frac{1}{2}, -1$)

(iii) $S=\left\{1+\frac{(-1)^n}{n};\ n\in N\right\}$

(উত্তর ঃ- $\frac{3}{2}, 0$)

বাস্তব সংখ্যার সুপ্রীমাম ধর্ম ব্যবহার করে R এবং তার বিভিন্ন সাব্‌সেটের বহু গুরুত্বপূর্ণ ধর্ম প্রমাণ করা যায়। আপনারা নীচের কিছু উল্লেখযোগ্য ধর্ম প্রমাণ করুন।

প্রশ্নাবলী ঃ 1) প্রমাণ করুন স্বাভাবিক সংখ্যার সেট N-এর উর্ধ্বসীমা নেই।

2) $A=\{x\in R: x^2<1\}$ সেটটির সুপ্রীমাম এবং ইনফিমাম নির্ণয় করুন।

3) $B=\left\{\frac{1}{n}: n\in N\right\}$ প্রমাণ করুন $\sup B = 1$ এবং $\operatorname{Inf} B = 0$

4) S যদি R-এর অধঃসীমাযুক্ত একটি অশূন্য সাব্‌সেট্ হয় তবে প্রমাণ করুন :

$\operatorname{Inf} S = -\sup\{-x : x\in S\}$

5) $D=\left\{a-\frac{1}{n}: n\in N\right\}$ সেটটির Sup কী D সেটে থাকবে?

1.4.5 বাস্তব সংখ্যার আর্কিমিডিয় ধর্ম ও ঘনত্ব ধর্ম (Archimedean Property)

বাস্তব সংখ্যার কমপ্লিটনেস ধর্মের প্রয়োগে অত্যন্ত প্রয়োজনীয় যে ধর্মটি প্রমাণ করা যায় তা হল আর্কিমিডিয় ধর্ম।

বিবৃতি ঃ যে কোন দুটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা x ও y-এর জন্য সর্বদাই একটি স্বাভাবিক সংখ্যা n পাওয়া যাবে যাতে $n x > y$ হবে।

প্রমাণ ঃ আমরা $A=\{nx : n = 1,2,3,\ldots\ldots\}$

এই সেটটি নিলাম। যদি আর্কিমিডীয় ধর্ম সত্য না হয়, তবে A-এর প্রত্যেকটি পদ y থেকে ক্ষুদ্রতর হবে। কিন্তু সে ক্ষেত্রে y, A সেটের একটি উর্ধ্বসীমা হবে এবং বাস্তব সংখ্যার সুপ্রিমাম ধর্ম অনুসারে A সেটের লঘিষ্ঠ উর্ধ্বসীমা M থাকবে যার জন্য $nx \le M$ প্রতিটি $n = 1, 2, 3\ldots\ldots$ এর জন্য। যেহেতু $x > 0$ অতএব অন্তত একটি পদ mx থাকবে যে $mx > M-x$

অর্থাৎ $(m+1)\,x > M$

কিন্তু $(m+1)\,x$, A সেটের একটি পদ। অতএব ইহা সম্ভব নহে। অতএব আর্কিমিডীয় ধর্ম সত্য।

উপপাদ্য। (i) $\forall y>0,\ \exists n\in N,$ যেখানে $0<\frac{1}{n}<y$

(ii) $\forall a, b \in R$, যদি $a \le b + \frac{1}{n}$ হয় $\forall n \in N$, তবে $a \le b$ হবে

(iii) যে কোন বাস্তব সংখ্যা x-এর জন্য সর্বদাই একটি স্বাভাবিক সংখ্যা m পাওয়া যাবে, যাতে $m-1 \le x < m$ হবে।

[(m–1) পূর্ণসংখ্যাটিকে x বাস্তব সংখ্যাটির পূর্ণাংশ বলা হয় এবং [x] এই প্রতীক দিয়ে সূচিত করা হয়।]

(iv) স্বাভাবিক সংখ্যার সেট্ N উর্ধ্বসীমাহীন।

বাস্তব সংখ্যার নিবিড়তা বা ঘনত্ব (Density) : যদি a ও b দুটি বাস্তব সংখ্যা হয়, তবে $\frac{a+b}{2}$ সংখ্যাটি বাস্তব। যেহেতু $a < b$ অথবা $a=b$ অথবা $b < a$ এদের মধ্যে অন্তত একটি সত্য। ধরিলাম $a < b$ তা হলে $\frac{a+b}{2}$ একটি এমন বাস্তব সংখ্যা যে $a < \frac{a+b}{2} < b$. আবার a এবং $\frac{a+b}{2}$-এর মধ্যে $c = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a+b}{2}\right)$ এই সংখ্যাটি আছে। এভাবে দেখা যায় যে দুটি অসমান বাস্তব সংখ্যার মধ্যে অসংখ্য বাস্তব সংখ্যা আছে। বাস্তব সংখ্যার এই ধর্মকে বলা হয় বাস্তব সংখ্যার নিবিড়তা।

উদাহরণ 1 **ঃ** 1 ও 2-এর মধ্যে 100 টি সংখ্যা নির্ণয় করুন (সংকেত 1.01, 1.02, ...1.99 এবং 1.995 এইরূপ একশটি সংখ্যা)

উদাহরণ 2 **ঃ** 10 ও 11-এর মধ্যে 1000টি সংখ্যা নির্ণয় করুন।

1.5 বাস্তব সংখ্যার পরমমান (absolute value)

যে কোন বাস্তব সংখ্যা a-এর জন্য আমরা ট্রাইকোটেমি সূত্র থেকে জানি যে $a > 0$, $a = 0$ এবং $a < 0$ সম্পর্ক তিনটির মধ্যে একটিই মাত্র সিদ্ধ হয়। $a = 0$ হলে a-এর পরমমান 0। $a \ne 0$ হলে a বা (–a) সংখ্যাদুটির কেবল একটি ধনাত্মক। সেই ধনাত্মক মানটিই হল a বাস্তব সংখ্যাটির পরম মান।

সংজ্ঞা ঃ কোন বাস্তব সংখ্যা a-এর পরম মানকে |a| প্রতীক দিয়ে সূচিত করা হবে, যেখানে

$|a| = a$, যদি $a > 0$

$= 0$, যদি $a = 0$

$= -a$, যদি $a < 0$

অর্থাৎ $|a| = a$, যদি $a \ge 0$ হয়

এবং $|a| = -a$, যদি $a \le 0$ হয়

বাস্তব সংখ্যার পরমমানের বিভিন্ন ধর্ম অবকল গণিতে প্রচুর ব্যবহার হবে। কিছু অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ ধর্ম নীচে দেওয়া হল যার প্রমাণ পরম মানের সংজ্ঞা এবং ক্রম সম্পর্কে বিভিন্ন ধর্ম কাজে লাগিয়ে করা যেতে পারে।

নিম্নের ধর্মগুলি সংজ্ঞা থেকে সহজেই প্রমাণিত হয় ঃ

(i) $\forall a \in R,\ |-a| = |a|$

(ii) $\forall a, b \in R,\ |ab| = |a||b|$

(iii) $c > 0$ এবং $|a| \le c$ হলে $-c \le a \le c$

(iv) $\forall a \in R, -|a| \le a \le |a|$

(v) $\forall a, b \in R,,\ |a+b| \le |a| + |b|$

প্রমাণ ঃ আমরা (v) অসমতা প্রমাণ করব।

a, b ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হওয়ার বিভিন্ন সম্ভাবনার জন্য প্রমাণ করব।

প্রথম ক্ষেত্র ঃ $a \ge 0,\ b \ge 0$; তবে $a + b \ge 0$ এবং $|a+b| = a+b,\ |a| = a, |b| = b$ অতএব $|a+b| = |a| + |b|$

দ্বিতীয় ক্ষেত্র ঃ $a \ge 0,\ b < 0$ এবং $a + b \ge 0$; তবে $|a| = a$ এবং

$b < |b|, |a+b| = a + b < |a| + |b|$

তৃতীয় ক্ষেত্র ঃ $a \ge 0, b < 0$ এবং $a + b < 0$ তাহলে $|b| = -b, |a| = a$ এবং $-a \le |a|$

তবে $|a+b| = -(a+b) = (-a) + (-b) \le |a| + |b|$

চতুর্থ ক্ষেত্র ঃ $a < 0, b < 0$ এখানে $a + b < 0$

$\therefore\ |a+b| = -(a+b) = -a - b = -a + (-b) = |a| + |b|$

অতএব দেখা গেল, সকল ক্ষেত্রেই $|a+b| \le |a| + |b|$

(এখানে $a < 0, b > 0$ করা হল না যেহেতু উহা $a > 0,\ b < 0$ থেকে প্রমাণ হয়ে যাচ্ছে)

(vi) $|a-b| \le |a| + |b|$

এটি (v) থেকে আসছে কেননা $|a-b| = |a| + (-b) \le |a| + |-b| = |a| + |b|$

(vii) $|a-b| \ge ||a| - |b||$

এখানে বামপক্ষ ও দক্ষিণপক্ষ উভয়েই ধনাত্মক। অতএব যদি উহাদের বর্গ $|a-b|^2 \ge (|a| - |b|)^2$ সত্য হয় তবে উপরের অসমতাটি সত্য হবে।

এখন $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2ab$......[A]

কিন্তু $a \le |a|, b \le |b|$ অতএব $ab \le |a||b|$ অতএব, $ab \ge -|a||b|$

অতএব (A) থেকে পাই

$$a^2-2ab+b^2=|a|^2+|b|^2-2ab\geq|a|^2+|b|^2-2|a||b|$$

$$\therefore\ (a-b)^2\geq(|a|-|b|)^2$$

$$\therefore|a-b|^2\geq\big||a|-|b|\big|^2$$

$$\therefore|a-b|\geq\big||a|-|b|\big|$$

1.6 বাস্তব সংখ্যার সাবসেট্

এখন পর্য্যন্ত আমরা বাস্তব সংখ্যার ফিল্ড্ গঠন, ক্রম সম্পর্ক এবং পরম মানের বিভিন্ন ধর্ম নিয়ে আলোচনা করলাম, বাস্তব সংখ্যার আলোচনার পরবর্ত্তী পর্যায়ে যাওয়ার আগে বাস্তব সংখ্যার কিছু গুরুত্বপূর্ণ সাব্‌সেটের ধারণা করে নেওয়া প্রয়োজন।

(1) স্বাভাবিক সংখ্যার সেট (N) ঃ

স্বাভাবিক সংখ্যার সেট্ N হল বাস্তব সংখ্যার সেট্ R-এর একটি সাব্‌সেট্-যার পদগুলি হল শুধু ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা, অর্থাৎ

$N=\{1,2,3,4\ldots\ldots\}$

গণিতের সরল ধারণা থেকে আমরা জানি N সেটের যে কোন দুটি পদের যোগফল বা গুণফল N সেটেরই একটি পদ হয়, অর্থাৎ N সেটের একটি বীজগণিতিক গঠন আছে। কিন্তু N সেটে যোগের সাপেক্ষে কোন আইডেন্‌টিটি পদ নেই এবং কোন পদেরই ইন্‌ভারস্ পদ নেই, যোগ বা গুণের সাপেক্ষে। সুতরাং N সেট্‌টি যোগ বা গুণের সাপেক্ষে ফিল্ড গঠন করে না। কিন্তু সহজেই প্রমাণ করা যায় যে যোগ ও গুণের সাপেক্ষে N ক্রম সম্পর্কযুক্ত। N সেটের যে কোন সংখ্যার পরমমান সেই সংখ্যাটি।

(2) পূর্ণ সংখ্যার সেট্ (Z) ঃ

পূর্ণ সংখ্যার সেট্ Z হল বাস্তব সংখ্যার সেট্ R-এর নিম্নোক্ত সাবসেট্ ঃ

$Z=\{\ldots\ldots\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\ldots\ldots\}$

Z সেটে গুণের সাপেক্ষে 1 ব্যতীত কোন পদের ইনভারস্ পদ নেই। এছাড়া ফিল্ড গঠনের অন্যসব ধর্মগুলি বিদ্যমান। Z সেটটি যোগ ও গুণের সাপেক্ষে ক্রম সম্পর্কযুক্ত

(3) র‍্যাশনাল সংখ্যার সেট্ (Q) ঃ

র‍্যাশনাল বা মূলদ সংখ্যার সেট্ Q হল বাস্তব সংখ্যার সেট্ R-এর একটি সাব্‌সেট যার প্রতিটি পদকে $\frac{p}{q}$ আকারে লেখা যাবে, যেখানে এবং $p,q\in Z$ এবং $q\neq o$।

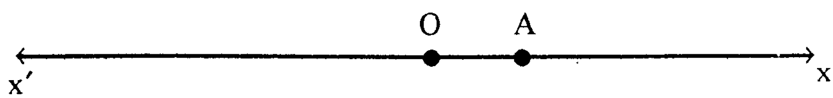
সহজেই বোঝা যায়, $Z\subset Q$।

Q সেট্‌টি একটি অর্ডারড্‌ ফিল্ড গঠন করে, অর্থাৎ Q সেটের পদগুলি যোগ ও গুণের সাপেক্ষে $A_1 - A_5$, $M_1 - M_5$ এবং $O_1 - O_4$ ধর্মগুলি সিদ্ধগুলি সিদ্ধ করে।

1.7 বাস্তব সংখ্যার জ্যামিতিক রূপায়ণ

একটি সুবিধাজনক এবং অত্যন্ত উপযুক্ত ব্যাখ্যা হিসাবে বাস্তব সংখ্যার সেটের যে কোন পদকে একটি সরলরেখার বিন্দু হিসাবে দেখানো যায়। প্রাথমিক ধারণার জন্য এই জ্যামিতিক ব্যাখ্যা খুবই সহায়ক।

ধরুন $X'X$ যে কোন একটি সরলরেখা এবং O এই সরলরেখার যে কোন একটি বিন্দু। O বিন্দুটি $X'X$ সরলরেখাকে দুটি ভাগে বিভক্ত করে। O-বিন্দুর ডানদিকের $X'X$ সরলরেখার অংশকে বলে ধনাত্মক দিক এবং বামদিককে বলে ঋণাত্মক দিক।



একটি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যকে একক নিয়ে স্বাভাবিক সংখ্যাসমূহ ও পূর্ণসংখ্যাসমূহ এবং র‍্যাশনাল সংখ্যার প্রত্যেকটিকে $X'OX$ এই সরলরেখার একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দ্বারা চিহ্নিত করা যায়। তাছাড়া $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ইত্যাদি সার্ড-এর প্রত্যেকটিকে একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দ্বারা রূপায়িত করা যায়। কিন্তু বাস্তব সংখ্যার আরও অন্যান্য সংখ্যা আছে। তাছাড়া সরলরেখার প্রতিটি বিন্দু একটি বাস্তব সংখ্যা নির্দেশ করবে কিনা এ প্রশ্নও আছে। আমরা বাস্তব সংখ্যা ও একটি সরলরেখার বিন্দুগুলির সাপেক্ষে একটি প্রকল্প গ্রহণ করব।

সন্ততি ধর্ম প্রকল্প : (Continuum Hypothesis) প্রকল্পটি হল : প্রতিটি বাস্তব সংখ্যার সাপেক্ষে একটি সরলরেখা XOX'-এর উপর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু আছে, এবং ঐ সরলরেখার উপর যে কোন বিন্দুর সাপেক্ষে একটি এবং কেবলমাত্র একটি বাস্তব সংখ্যা আছে।

উপরের এই প্রকল্প অনুযায়ী আমরা একটি রেখার উপর বিন্দুগুলির সহিত বাস্তব সংখ্যার একটি এক-এক সম্পর্ক স্থাপন করছি।

বাস্তব সংখ্যার সহিত সরলরেখার বিন্দুসমূহের এই সম্পর্ককে বলা যায় রৈখিক সন্ততি (Linear Continuum) এবং Arithmetic Continuum hypothesis বা পাটীগণিতীয় সন্ততি ধর্মের সাম্য (equivalence)।

1.8 অন্তরাল ও সামীপ্য (Interval, Neighbourhood)

গণিতের আলোচনায় বাস্তব সংখ্যার অন্তরাল বা ইন্ট্যার্‌ভ্যালের প্রয়োগ খুবই জরুরী। আমরা বিভিন্ন

ধরনের ইন্ট্যারভ্যালের জ্যামিতিক ধারণা গড়ে তুলব যা অবকল গণিতের পরবর্ত্তী অধ্যায়গুলিতে আলোচনায় বিশেষ সহায়ক হবে।

প্রথমে আমরা বাস্তব সংখ্যার দুই ধরনের অন্তরাল যে সেট্গুলি নির্দেশ করে তাদের প্রতীক এবং জ্যামিতিক ক্ষেত্র লিপিবদ্ধ করব।

(i) মুক্ত অন্তরাল (open interval) $]a,b[$ বা $(a,b) = \{x \in R : a < x < b\}$

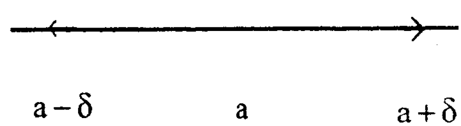
(ii) বদ্ধ অন্তরাল (closed interval) $[a,b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$

উপরের অন্তরালগুলির প্রত্যেকটিতেই a ও b হল প্রান্তবিন্দু। (*i*) নং সেট্টিতে প্রান্তবিন্দু দুটি সেটের মধ্যে নেই। তাই বাস্তব অক্ষে বোঝানোর সুবিধার জন্য প্রথম বন্ধনী ব্যবহার করা হয়েছে। (*ii*) নং সেটে প্রান্তবিন্দু দুটি আছে সেখানে তৃতীয় বন্ধনী ব্যবহার করা হয়েছে। প্রতিটি ইন্ট্যারভ্যালেই a ও b-এর অন্তর্বর্ত্তী সব বাস্তব সংখ্যাই রয়েছে, শুধু প্রান্তবিন্দুগুলি থাকা বা না থাকার উপর নির্ভর করেছে ইন্ট্যারভ্যালগুলির প্রতীক।

প্রথমটিকে **মুক্ত অন্তরাল** (Open interval) বলা হবে। দ্বিতীয়টিকে **বদ্ধ অন্তরাল** (Closed interval) বলা হয়।

সামীপ্য :— (Neighbourhood of a point)

$S_1 = \{x : |x - a| < \delta,\ \delta > 0\}$ সেট্টি একটি মুক্ত অন্তরাল। বাস্তব অক্ষে $a - \delta$ থেকে $a + \delta$-এর মধ্যবর্ত্তী সব বাস্তব সংখ্যার সেট্ হিসেবে নীচে দেখানো হল।



এই S_1 সেট্টিকে a বিন্দুর δ সামীপ্য (δ-neighbourhood) বলা হবে এবং $N_\delta(a)$ প্রতীক দিয়ে সূচিত করা হবে। এটি একটি মুক্ত অন্তরাল।

$S_2 = \{x : 0 < |x - a| < \delta\}$ সেট্টিতে S_1-এর সব পদই আছে শুধু a বিন্দুটি ছাড়া। এখানে $o < x - a < \delta$ এবং $-\delta < x - a < o$ বাস্তবসংখ্যাগুলির এই দুটি সাবসেটের সমস্ত বিন্দু S_2 সেটের পদ। S_2 সেটকে আমরা a বিন্দুর একটি বর্জিত সামীপ্য (deleted neighbourhood) বলব।

1.9 সারাংশ

এই এককে আমরা বাস্তব সংখ্যা সম্বন্ধে বিস্তৃত আলোচনা করেছি। এই উদ্দেশ্যে প্রথমে সেটের আলোচনা সংক্ষিপ্তভাবে করেছি। স্বাভাবিক সংখ্যা, পূর্ণসংখ্যা, র‍্যাশনাল সংখ্যা, ইর‍্যাশনাল সংখ্যা, ইত্যাদি সম্বন্ধে বলা হয়েছে। বাস্তব সংখ্যার সংজ্ঞা হিসাবে বাস্তব সংখ্যার বিভিন্ন ধর্ম বিবৃত করা হয়েছে। বাস্তব সংখ্যার বীজগাণিতিক ধর্ম, ক্রম ধর্ম, আর্কিমেডীয় ধর্ম, নিবিড়তা ধর্ম এই সম্বন্ধে বলা হয়েছে। তা ছাড়া কোন বাস্তব সংখ্যার সেটের সীমা, ঊর্ধ্বসীমা, নিম্নসীমা ক্ষুদ্রতম ঊর্ধ্বসীমা ও বৃহত্তম নিম্নসীমা ইত্যাদির অস্তিত্ব সম্বন্ধে আলোচনা করা হয়েছে।

বাস্তব সংখ্যার পরম মান এবং তাহার প্রয়োগ করে বিভিন্ন অসমতা আলোচনা করা হয়েছে।

1.10 উত্তরমালা

1.4.4 এর প্রশ্নাবলী সম্পর্কিত

1. N এর ঊর্ধ্বসীমা যদি মনে করি আছে, ধরা যাক উহা M. এখন M একটি বাস্তব সংখ্যা। ঊর্ধ্বসীমার সংজ্ঞানুযায়ী তা হলে M অপেক্ষা বড় স্বাভাবিক সংখ্যা নেই। এখন a একটি স্বাভাবিক সংখ্যা হলে আর্কিমেডীয় ধর্ম থেকে এমন একটি স্বাভাবিক সংখ্যা n পাব যার জন্য $na > M$ হবে। কিন্তু na একটি স্বাভাবিক সংখ্যা। অতএব N-এর ঊর্ধ্বসীমা নেই।

2. $A = \{x(-R; x^2 < 1\}$. এই সেটে যে সকল বাস্তব সংখ্যা x আছে তাদের জন্য $-1 < x < 1$ এটি সত্য। অতএব -1 হল সেটটির ইন্‌ফিমাম ও 1 হল সুপ্রিমাম্। কারণ এই দুটি সংখ্যা সংজ্ঞার শর্তপূরণ করে। অর্থাৎ -1 থেকে ছোট কোন পদ নেই এবং যে কোন $\varepsilon > 0$ হলে $-1+\varepsilon$ থেকে ছোট সংখ্যা $-1+\frac{\varepsilon}{2}$ ঐ সেটে আছে যেহেতু $-1 < -1+\frac{\varepsilon}{2}$. অনুরূপভাবে 1 হল সুপ্রিমাম্।

3. $B = \left\{\frac{1}{n}; n \in N\right\}$ অতএব $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\ldots\ldots$ ইত্যাদি পদসমূহ B-তে আছে।

B যেহেতু সীমাবদ্ধ অতএব উহার সুপ্ (Supremum) ও ইন্‌ফ (infimum) আছে। এখানে 1 হল সুপ্ যেহেতু 1 হল বৃহত্তম পদ। 0 হল ইন্‌ফ্ কারণ যে কোন $\varepsilon > 0$ এর জন্য এমন n আছে যে $\frac{1}{n} < 0+\varepsilon$ অর্থাৎ $n > \frac{1}{\varepsilon}$ হলেই $\frac{1}{n} < \varepsilon$ থেকে ছোট হবে।

4. উপ. 1 দ্রষ্টব্য

5. $\left\{a-\frac{1}{n}\right\}$ -এই সেটের সুপ্ হল a. কেননা $a-\frac{1}{n}<a$. এবং যে কোন $\varepsilon>0$ নিলে $a-\frac{1}{n}>a-\varepsilon$ হবে যখন $\frac{1}{n}<\varepsilon$ অর্থাৎ যখন $n>\frac{1}{\varepsilon}$.

1.11 সহায়ক গ্রন্থ

1. Courant, Richard and Robbins, Herbert : What is Mathematics ? Oxford University Press.

একক 2 ❑ একচল ফাংশন, লিমিট ও বিভিন্ন ধর্ম

গঠন

2.1 প্রস্তাবনা ঃ

বর্তমান এককটিতে বাস্তব একচল ফাংশন (বা বাস্তব একচল অপেক্ষক) এবং এরূপ অপেক্ষকের লিমিটের বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে।

বাস্তব সংখ্যাগুলি দ্বারা গঠিত সেটকে আমরা R দ্বারা চিহ্নিত করি। R-এর যে কোন একটি পদ x, R-এর যে কোন উপসেটের উপর সংজ্ঞাত অপেক্ষক দুটি বাস্তব উপসেটের সংখ্যার মধ্যে সম্পর্ক সূচিত করে। অপেক্ষকের সংজ্ঞায় এ ধারণাটি স্পষ্ট হবে।

ফাংশনের লিমিটের ধারণা অন্তরকলন বিদ্যার ভিত্তিভূমি। লিমিটের সংজ্ঞা ও তার বিভিন্ন ধর্মও আমাদের আলোচনার অন্তর্গত।

অন্তরকলন গণিতের প্রধান আলোচ্য বিষয় অপেক্ষক, অপেক্ষকের লিমিটের ধারণা। এদের বিভিন্ন অপেক্ষক ও লিমিট বিষয়ে সম্যক ধারণার মধ্য দিয়েই অন্তরকলনবিদ্যা যথার্থভাবে অনুধাবন করা যাবে।

অপেক্ষক সম্বন্ধে, সাধারণভাবে, পূর্ব প্রচলিত ধারণা এই ছিল যে একটি নির্দিষ্ট সূত্র বা ফরমূলা আছে, যেমন $f(x) = x^3 + 5x^2 - 6$

এবং সেই সূত্র সাহায্যে x-এর যেকোন বাস্তব মানে আমরা f(x) একটি বাস্তব মান পাব। গণিতের অগ্রগতির সাথে সাথে গণিতবিদ্‌রা বুঝেছেন অপেক্ষকের ধারণাকে 'একটি নির্দিষ্ট ফরমূলা' দ্বারা সীমায়িত করা যাবে না। আধুনিককালে গণিতবিদ্‌রা কিভাবে অপেক্ষকের সংজ্ঞা দিচ্ছেন তা আমরা জানব। কোন্‌টি অপেক্ষক, অপেক্ষকের সংজ্ঞাক্ষেত্র কোন্‌টি এবং অপেক্ষকের মানগুলি কি? এসকল বিষয়ে স্পষ্ট ধারণা থাকা প্রয়োজন। সেটের ধারণাকে ভিত্তি করেই অপেক্ষক বা ফাংশনের সংজ্ঞা দেওয়া হবে। অপেক্ষকের সংজ্ঞাকে ভিত্তি করেই কি কি প্রকৃতির অপেক্ষক সৃষ্টি হচ্ছে সে সম্বন্ধে বিস্তারিত আলোচনায় আমরা প্রবেশ করব। দুটি অপেক্ষক থেকে একটি সংযোজক অপেক্ষক উৎপন্ন হতে পারে। সংযোজক অপেক্ষকের সংজ্ঞা এবং তার ধর্মাবলীর আলোচনা যথাস্থানে সংযুক্ত আছে।

অপেক্ষকের লিমিটের সংজ্ঞা বিভিন্ন ক্ষেত্রে (যেমন $x \to a$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$) সন্নিবেশিত আছে। এই সংজ্ঞাগুলিকে কাজে লাগিয়ে আমরা লিমিটের ধর্মাবলীর প্রমাণ দেব। অন্তরকলনবিদ্যা অধ্যয়নে এ বিষয়গুলির জ্ঞান একান্ত প্রয়োজন। প্রতিক্ষেত্রে, ধারণাকে স্পষ্ট করার জন্য, যথেষ্ট উদাহরণ ও প্রশ্ন দেওয়া হবে।

2.2 উদ্দেশ্য ঃ

এই একক পাঠ করে আপনি —

- বাস্তব একচল ফাংশনের সংজ্ঞা নির্দেশ করতে পারবেন। উদাহরণ সহযোগে সংজ্ঞাঞ্চল বা সংজ্ঞাক্ষেত্র ও বিম্বাঞ্চল সম্বন্ধে স্পষ্ট ধারণা করতে পারবেন।
- অপেক্ষকের বিভিন্ন প্রকৃতি ও ধর্মের আলোচনা করতে পারবেন।
- দুটি অপেক্ষক থেকে সংযোজক অপেক্ষকের উৎপত্তি এবং তার বিভিন্ন ধর্ম বুঝিয়ে দিতে পারবেন।

● বিপরীত অপেক্ষক, ক্রমান্বয়ী অপেক্ষক ও পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক সম্বন্ধে ধারণা করতে পারবেন।

● প্রচলিত বিভিন্ন প্রকারের অপেক্ষকের বর্ণনা করতে পারবেন।

● প্রচলিত কিছু কিছু অপেক্ষকের লেখচিত্র প্রস্তুত করতে পারবেন।

● অপেক্ষকের লিমিটের সংজ্ঞা নির্দেশ এবং প্রমাণ সহযোগে লিমিটের বিভিন্ন ধর্মাবলীর আলোচনা করতে পারবেন।

2.3 একচল বাস্তব ফাংশন বা অপেক্ষক বা ম্যাপিং (A real function of single variable)

মনে করি R হচ্ছে বাস্তব সংখ্যার সেট। A এবং B দুটি অশূন্য সেট এমন যে $A \subseteq R$ এবং $B \subseteq R$। যদি A-র একটি পদ x হয়, অর্থাৎ $x \in A$ হয় এবং প্রতিটি x-এর সাপেক্ষে B সেটে একটি নির্দিষ্ট পদ y থাকে, তবে A সেটের পদের সঙ্গে B সেটের পদের একটি সুনির্দিষ্ট সম্পর্ক আছে বুঝতে হবে এবং এই সম্পর্কটিকে ম্যাপিং (mapping) বা অপেক্ষক বা ফাংশন (function) **f** বলা হয়। অপেক্ষক বোঝাতে নিম্নলিখিত প্রতীক ব্যবহার করা হয় ঃ

$f: A \to B$ এবং $f(x) = y$, যেক্ষেত্রে $x \in A$, $y \in B$

অথবা

$x \in A \Rightarrow y \in B$

অথবা সংক্ষিপ্তাকারে

$f: A \to B.$

ফাংশন f সাহায্যে A সেটের প্রতিটি পদের সঙ্গে B-এর একটি পদের সংযোগ হয়ে থাকে। A-কে আমরা বলব f-এর সংজ্ঞাঞ্চল বা সংজ্ঞাক্ষেত্র (domain) এবং B-কে বলব f-এর সহ সংজ্ঞাঞ্চল বা সহ সংজ্ঞাক্ষেত্র (co-domain)। B-এর যে সকল পদ f মাধ্যমে A-এর পদের সঙ্গে যুক্ত, তাদের সেটকে বলা হয় f-এর বিম্বাঞ্চল (range)। f এর বিম্বাঞ্চল f (A) দ্বারা সূচিত হয়। অতএব $f(A) \subseteq B$.

মন্তব্য ঃ (1) একটি $x \in A$-এর জন্য কেবলমাত্র একটি $y \in B$ থাকবে যে $y = f(x)$ হবে।

(2) কোন একটি পদ $z \in B$ এমন হতে পারে যে A সেটে এমন কোন পদ x নেই যার জন্য $f(x) = z$.

(3) $x_1 \in A, x_2 \in A$ এবং $x_1 \neq x_2$ হলে $y_1 = f(x_1)$ এবং $y_2 = f(x_2)$ এমন হতে পারে যে $y_1 = y_2$ (অর্থাৎ দুটি অসমান x-র ক্ষেত্রে প্রতিবিম্বদ্বয় ভিন্ন বা অভিন্ন দুই হতে পারে।

(4) x এবং y-এর সম্পর্ক কোন সুনির্দিষ্ট ফরমূলা দ্বারা সীমায়িত হতেও পারে, আবার তেমন কোন সুনির্দিষ্ট ফরমূলা নাও থাকতে পারে।

(5) $A=\{a \le x \le b | x \in R\}$ বা $A=\{a < x < b | x \in R\}$ হলে প্রথম ক্ষেত্রে সংজ্ঞাক্ষেত্রকে বদ্ধ অন্তরাল (closed interval) এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে মুক্ত অন্তরাল (open interval) বলব।

(6) সংজ্ঞাক্ষেত্রের প্রতিটি x-র ক্ষেত্রে y অবশ্যই সসীম হবে।

(7) (x, f(x)) জাতীয় পদগুলি যে সেট উৎপন্ন করছে সেটাই f।

উদাহরণ ঃ

(1) ধরা যাক্ $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{7, 9, 0, 5, 6\}$ এবং f এমন ফাংশন যে

$$\begin{array}{l} 1 \rightarrow 7 \\ 2 \rightarrow 0 \\ 3 \rightarrow 5 \\ 4 \rightarrow 9 \end{array}$$

এখানে দেখা যাচ্ছে A-র প্রতিটি পদ বা বিন্দুর জন্য B-তে একটি পদ বা বিন্দু আছে। অতএব A-হল f-এর সংজ্ঞাক্ষেত্র বা সংজ্ঞাঞ্চল, আর f-এর বিম্বাঞ্চল হল $\{7, 0, 5, 9\}$। B এর 6 বিন্দুর কোন পূর্ব প্রতিবিম্ববিন্দু নেই (অর্থাৎ এমন কোন বিন্দু A-তে নেই যার সঙ্গে B-এর 6 সংযুক্ত)।

(2) ধরা যাক্ $A = \{x; 0 \le x \le 1\}$ এবং $B=\{5\}$ এবং ফাংশন f এমন যে

$$f(x) = 5, 0 \le x \le 1.$$

অতএব এখানে সংজ্ঞাঞ্চল একটি বদ্ধ অন্তরাল ও বিম্বাঞ্চল কেবলমাত্র একটি পদের সেট। এই ধরনের অপেক্ষককে ধ্রুবক অপেক্ষক বা ধ্রুবক ফাংশন (Constant function) বলে।

(3) $A = \{x \in R; x \ge 1\}$, $B = R$

এখন f অপেক্ষক এমন যে $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$।

তাহলে দেখা যাচ্ছে f ফাংশনটি $x = 1$ বিন্দুতে অসংজ্ঞাত। কিন্তু, $x > 1$ এসকল বিন্দুতে $f(x)$ সংজ্ঞাত। অতএব f-এর সংজ্ঞাঞ্চল হলো $\{x \in R; x > 1\}$, অর্থাৎ $A-\{1\}$. এখন আমরা f-এর বিম্বাঞ্চল নির্ণয় করব।

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} = y$ ধরে আমরা পাই $y > 0$ এবং $\dfrac{1}{x-1} = y^2$ বা $x = 1 + \dfrac{1}{y^2}$।

$x > 1$ হওয়ায় x বৃদ্ধি পেলে $\dfrac{1}{y^2}$ বৃদ্ধি পাবে অর্থাৎ y কমবে। আবার x-র মান যত 1-র কাছে হবে, যেমন $x = 1 + .0001$ হলে, $\dfrac{1}{y} = .01$ হবে বা $y = 100$ হবে। অতএব বোঝা যাচ্ছে y যে কোন ধনাত্মক সংখ্যা হতে পারে। অতএব f-এর বিম্বাঞ্চল হলো R^+ (অর্থাৎ ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার সেট)।

(4) x বাস্তব এবং f(x)=sinx এক্ষেত্রে সংজ্ঞাঞ্চল ও বিম্বাঞ্চল নির্ণয় করা যাক্। যেহেতু sinx যে কোন বাস্তব সংখ্যা x-এর জন্য সংজ্ঞাত, অতএব f-এর সংজ্ঞাঞ্চল R। sinx হচ্ছে একটি সমকোণী ত্রিভুজের (x) কোণের (ত্রিকোণমিতির সংজ্ঞানুসারে) বিপরীত বাহু ও অতিভূজের অনুপাত, অতএব sinx এর বৃহত্তম মান 1 এবং ক্ষুদ্রতম মান –1। উপরন্তু বিভিন্ন x এর জন্য sinx এর মান –1 ও 1-এর অন্তর্বর্তী যে কোন বাস্তব সংখ্যা হতে পারে, অতএব sinx-এর বিম্বাঞ্চল হলো [–1,1] এই বদ্ধ অন্তরালটি।

(5) উদাহরণ (4) অনুসরণ করে দেখান

$f(x) = \cos x,\ x \in R$

অপেক্ষকের বিম্বাঞ্চল [–1,1]।

(6) $f(x) = \tan x$ অর্থাৎ $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

ফাংশনের হর (denominator) cos x শূন্য নয়, কেবলমাত্র সেসকল বিন্দুতে tan x সংজ্ঞাত। অতএব ফাংশনটি $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, যেখানে $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\ldots$ এসকল বিন্দুতে সংজ্ঞাত নয়। অতএব আমরা দেখছি যে $\left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ এই মুক্ত অন্তরালে ফাংশনটি সংজ্ঞাত।

(7) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$, যখন $x \neq 2$

$= 0$, যখন $x = 2$

উপরের ফাংশনটির সংজ্ঞা থেকে জানা যাচ্ছে যে ফাংশনটি এরূপ :

$f(x) = x + 2$, যখন $x \neq 2$

$f(2) = 0$

অতএব x যদি [–10, 10] এই বদ্ধ অন্তরালে থাকে, তবে $f(x)$-এর বিম্বাঞ্চল হলো $B = \{y : -8 \le y \le 12\}$

অর্থাৎ B হলো একটি বদ্ধ অন্তরাল।

(8) $N = \{1,2,3,\ldots\ldots\}$ এই স্বাভাবিক সংখ্যার সেটের উপর একটি ফাংশন বা অপেক্ষক সংজ্ঞাত হতে পারে। যেমন $f(n) = n^2$ অর্থাৎ $f(1) = 1, f(2) = 2^2, f(3) = 3^2$ ইত্যাদি। এখানে অপেক্ষকটির বিম্বাঞ্চল হল স্বাভাবিক সংখ্যার একটি উপসেট যার সদস্যগণ প্রত্যেকে একটি বর্গ। এরূপে আমরা নানা রকম $f(n)$-এর সংজ্ঞা দিতে পারি।

2.4.1 এক-এক সম্বন্ধযুক্ত অপেক্ষক বা 1–1 অপেক্ষক (One-one function or injective function)

$f: A \to B$ এবং $y = f(x)$, যেখানে $x \in A$ এবং $y \in B$ অপেক্ষকের ক্ষেত্রে যদি দেখা যায় যেকোন

দুটি অসমান $x_1 \in A$ এবং $x_2 \in A$-এর ক্ষেত্রে যথাক্রমে f প্রতিবিম্ব y_1এবং y_2 পদদুটিও অসমান, তাহলে উল্লেখিত অপেক্ষকটিকে 1–1 অপেক্ষক বলা হবে। 2.3-এ উদাহরণ (1) দেখুন।

2.4.2 সংজ্ঞা ঃ অনটু অপেক্ষক বা সারজেকটিভ (onto function or surjective function)

$f: A \rightarrow B$ এবং $f(x) = y$, যেখানে $x \in A$ এবং $y \in B$ অপেক্ষকটিকে অনটু অপেক্ষক বলা হবে যখন $f(A) = B$.

উদাহরণ ঃ

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ এবং $B = \{a, b, c, d\}$ এবং $f = \{(1, a), (2, b,), (3, c), (4, d)\}$

[অর্থাৎ f ফাংশনটি এমন যে $1 \rightarrow a, 2 \rightarrow b, 3 \rightarrow c, 4 \rightarrow b$]

এই অপেক্ষকটি অনটু অপেক্ষক, কারণ

$f(A) = \{a, b, c, d\} = B$.

2.4.3 সংজ্ঞা ঃ বাইজেক্টিভ্ অপেক্ষক ও ইনটু অপেক্ষক (bijective function and Into function)

$f: A \rightarrow B$ এবং $f(x) = y$, যেখানে $x \in A$এবং $y \in B$ অপেক্ষকটি যদি এমন হয় যে এটি $1-1$অপেক্ষক এবং সেই সঙ্গে অনটু অপেক্ষক, তাহলে এরূপ অপেক্ষককে বাইজেক্টিভ্ অপেক্ষক বলে।

2.4.2 -এ যুক্ত উদাহরণটি বাইজেক্টিভ অপেক্ষক।

ইনটু অপেক্ষক (Into function)

$f: A \rightarrow B$ এবং $f(x) = y$, যেখানে $x \in a$ এবং $y \in B$ অপেক্ষককে ইনটু অপেক্ষক বলা হবে যদি দেখা যায় $f(A) \subset B$. অর্থাৎ f(A) হল B এর যথার্থ উপসেট (proper subset)।

2.4 এর উদাহরণ (1) দেখুন। এখানে $f(A) = \{7, 0, 5, 9\} \subset B$.

2.4.4 সংজ্ঞা ঃ ধ্রুবক অপেক্ষক (Constant function)

$f: A \rightarrow B$ এবং $f(x) = y, x \in A; y \in B$ অপেক্ষকটি এমন যে $f(A)$ কেবলমাত্র একটি পদ সম্বলিত সেট, অর্থাৎ A-এর প্রতিটি পদ প্রতিবিম্বিত হচ্ছে B-এর কেবলমাত্র একটি পদে, সেক্ষেত্রে অপেক্ষকটিকে ধ্রুবক অপেক্ষক বলা হবে। (2.3)-এর উদাহরণ (2) দেখুন।

2.4.5 সংজ্ঞা ঃ অভেদ অপেক্ষক (identity function)

$f: A \rightarrow A, f(x) = y, x \in A; y \in A$অপেক্ষকটিকে A সেটের উপর আইডেন্টিটি অপেক্ষক বলা হবে যদি $y = f(x) = x$হয়, অর্থাৎ এক্ষেত্রে f দ্বারা $x \in A$ এর প্রতিবিম্বপদ x। এ ধরনের অপেক্ষককে I_A দ্বারা সূচিত করা হয়। I_A অবশ্যই বাইজেক্টিভ অপেক্ষক।

2.4.6 দুটি অপেক্ষকের সমতা (Equality of two functions)

$f : A \to B$ এবং $y = f(x)$, যেখানে $x \in A; y \in B$

এবং

$g : A \to C, y = g(x)$, যেখানে $x \in A, y \in C$

অপেক্ষকদুটির ক্ষেত্রে যদি প্রতি $x \in A$ -এর ক্ষেত্রে $f(x) = g(x)$ হয় তাহলে অপেক্ষক দুটির মধ্যে সমতা (equality) বিদ্যমান আছে বলা হবে এবং চিহ্নিত করা হবে $f = g$।

এখানে লক্ষ্য করুন সমতার ক্ষেত্রে উভয় অপেক্ষকের সংক্ষাঞ্চল একই সেট (এখানে A) হতে হবে। সহ সংজ্ঞাঞ্চল দুটির ক্ষেত্রে $B = C$, অথবা $B \subset C$, অথবা $C \subset B$ হতে পারে। যখন উভয় অপেক্ষক অনটু অপেক্ষক সেক্ষেত্রে B=C।

উদাহরণ ঃ $A = \{x \in R, x > o\}$

$f : A \to R, f(x) = 2$ এবং $g : A \to R, g(x) = \frac{|x|}{x} + 1$

অপেক্ষক দুটির মধ্যে সমতা বিদ্যমান, অর্থাৎ $f = g$।

2.5 সংযোজক অপেক্ষক (Composite function)

মনে করুন $f : A \to B$ এবং $g : C \to D$ দুটি অপেক্ষক এবং $f(A) \subset C$ (অর্থাৎ f-এর বিম্বাঞ্চল f(A) অপেক্ষক g-এর সংজ্ঞাঞ্চল C-এর সাবসেট বা উপসেট)। এখন f অপেক্ষক দ্বারা $\forall x \in A$ -এর ক্ষেত্রে $y \in f(A) \subset B$ এবং যেহেতু $f(A) \subset C$, অতএব প্রতিটি y-এর ক্ষেত্রে g অপেক্ষক দ্বারা একটি সুনির্দিষ্ট $z \in D$ পাওয়া যাবে। সুতরাং এক্ষেত্রে প্রতিটি $x \in A$ -এর সঙ্গে কোন একটি নির্দিষ্ট $z \in D$ সম্পর্কযুক্ত। এই অপেক্ষকটিকে f ও g অপেক্ষক দুটির সংযোজক অপেক্ষক বলা হয়, চিহ্নিত হয় $g \circ f$ দ্বারা। অতএব সংযোজক অপেক্ষকের সংজ্ঞা নীচে দেওয়া হল ঃ

$f : A \to B, g : C \to D$ এবং $f(A) \subset C$ ক্ষেত্রে $g \circ f : A \to D$ এবং

$(g \circ f)(x) = g(f(x)), x \in A$

$= z, \ z \in D.$

উপরের সংজ্ঞানুসারে সহজেই বোঝা যাচ্ছে (i) $f : A \to B$ এবং $g : B \to C$ অপেক্ষকদ্বয়ের ক্ষেত্রে $g \circ f : A \to C$ সংজ্ঞাত।

(ii) $f : A \to B$ এবং $g : B \to A$ অপেক্ষকদ্বয়ের ক্ষেত্রে $g \circ f : A \to A$ সংজ্ঞাত।

মন্তব্য ঃ $I_A : A \to A$, $I_B : B \to B$ এবং

$f:A\rightarrow B$ হলে সহজেই দেখা যাচ্ছে

$f\ o\ I_A = f$ এবং $I_B\ o\ f = f$ ।

উদাহরণ ঃ

(1) A = {1,2,3,4}, B={7,9,0,5,6}

C=[8,11,12,13,19,20]

$f:A\rightarrow B$ দ্বারা $1\rightarrow 7, 2\rightarrow 0, 3\rightarrow 5, 4\rightarrow 9$ এবং

$g:B\rightarrow C$ দ্বারা $7\rightarrow 8, 9\rightarrow 11, 0\rightarrow 12, 5\rightarrow 20, 6\rightarrow 13$ ।

এখানে লক্ষ্য করুন g o f সংজ্ঞাত এবং g o f দ্বারা

$1\rightarrow 8, 2\rightarrow 12, 3\rightarrow 20, 4\rightarrow 11$

(2) $f:R\rightarrow R, f(x) = cx+d, c, d\in R$

$g:R\rightarrow R, g(x) = ax+b, a, b\in R$

এক্ষেত্রে f o g এবং g o f উভয় সংযোজক অপেক্ষক সংজ্ঞাত এবং

$$(f\ o\ g)\ (x) = f(ax+b) = c(ax+b)+d$$
$$= cax + cb + d$$
$$(g\ o\ f)\ (x) = g\ (cx+d) = a\ (cx+d) + b$$
$$= acx + ad + b$$

এখানে লক্ষ্য করুন

$(cb+d)\neq(ad+b)\Rightarrow(f\ o\ g)\ (x)\neq(g\ o\ f)\ (x)$

এবং $(cb+d)=(ad+b)\Rightarrow(f\ o\ g)\ (x)=(g\ o\ f)\ (x)$

2.5.1 সংযোজক অপেক্ষকের উপপাদ্য সমূহ

উপপাদ্য 1 ঃ $f:A\rightarrow B$ এবং $g:B\rightarrow C$ অপেক্ষক দুটি 1–1 অপেক্ষক হলে সংযোজক অপেক্ষক g o f হবে 1–1 অপেক্ষক।

প্রমাণ ঃ মনে করি $x_1, x_2 \in A$ এবং $x_1 \neq x_2$

অতএব, $f:A\rightarrow B$ দ্বারা $f(x_1)=y_1, f(x_2)=y_2, y_1, y_2 \in B.$

যেহেতু f একটি 1–1 অপেক্ষক, অতএব $y_1 \neq y_2$

পুনরায় $g: B \rightarrow C$ দ্বারা $g(y_1) = z_1, g(y_2) = z_2,$

$z_1, z_2, \in C$ এবং g একটি 1–1 অপেক্ষক হওয়ায় $z_1 \neq z_2$ অতএব

$(g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(y_1) = z_1,$

$(g \circ f)(x_2) = g(f(x_2)) = g(y_2) = z_2,$

এবং $x_1 \neq x_2 \Rightarrow z_1 \neq z_2$

সুতরাং g o f অপেক্ষকটিও 1–1 অপেক্ষক।

উপপাদ্য 2 : যদি $f: A \rightarrow B$ এবং $g: B \rightarrow C$

অপেক্ষকদুটি এমন হয় যে g o f অপেক্ষকটি 1–1 অপেক্ষক, তাহলে f অপেক্ষকটি 1–1 অপেক্ষক হবে।

প্রমাণ ঃ যদি সম্ভব হয় ধরা যাক্ f একটি 1–1 অপেক্ষক নয়। তাহলে A-এর কমপক্ষে দুটি অসমান পদ x_1, x_2 থাকবে যাদের ক্ষেত্রে $f(x_1) = f(x_2)$। এখন লক্ষ্য করা যাচ্ছে

$(g \circ f)(x_1) = g(f(x_1) = g(f(x_2) = (g \circ f)(x_2)$

কিন্তু এটি সম্ভব নয়, কারণ দেওয়া আছে g o f একটি 1–1 অপেক্ষক। অতএব সিদ্ধান্ত এই যে f অবশ্যই 1–1 অপেক্ষক।

উপপাদ্য 3 : যদি $f: A \rightarrow B$ এবং $g: B \rightarrow C$ উভয়ে অনটু অপেক্ষক হয়, তাহলে g o f অপেক্ষকটিও অনটু অপেক্ষক হবে।

প্রমাণ ঃ যেহেতু $f: A \rightarrow B$ এবং $g: B \rightarrow C$

উভয়ে অনটু অপেক্ষক, অতএব

$f(A) = B$ এবং $g(B) = C$

এবং তার ফলে

$(g \circ f)(A) = g(f(A)) = g(B) = C$

অতএব উপপাদ্যটি প্রমাণিত হল।

উপপাদ্য 4 : $f: A \rightarrow B$ এবং $g: B \rightarrow C$ অপেক্ষক দুটির ক্ষেত্রে $g \circ f: A \rightarrow C$ এই সংযোজক অপেক্ষকটি অনটু অপেক্ষক হলে, g অপেক্ষকটি অনটু অপেক্ষক হবে।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক্ C-এর যেকোন একটি পদ z. এখন g o f একটি অনটু অপেক্ষক হওয়ায় A সেটে অবশ্যই একটি পদ x আছে যার ক্ষেত্রে

$(g \circ f)(x) = z$

বা, $(g)(f(x)) = z$ এবং $f(x) \in B$

সুতরাং C-এর প্রতিটি পদ বা বিন্দুর ক্ষেত্রে পূর্ব-প্রতিবিম্ব পদ বা বিন্দু (pre-image point) B-তে অবস্থিত। অতএব $g : B \rightarrow C$ একটি অনটু অপেক্ষক ।

উপপাদ্য 5 : যদি $f : A \rightarrow B$ এবং $g : B \rightarrow C$ অপেক্ষক দুটি উভয়ে বাইজেক্টিভ অপেক্ষক হয়, তাহলে $gof : A \rightarrow C$ অপেক্ষকটিও বাইজেক্টিভ হবে।

প্রমাণ ঃ উপপাদ্য 1 এবং 3 অনুসারে আমরা এই উপপাদ্যে উপনীত হচ্ছি।

উপপাদ্য 6 : যেকোন তিনটি অপেক্ষক

$f : A \rightarrow B ; g : B \rightarrow C$ এবং $h : C \rightarrow D$-এর ক্ষেত্রে

$h o (gof) = (hog) of.$

প্রমাণ ঃ সংযোজক অপেক্ষকের সংজ্ঞানুসারে $g o f, h o g, h o (g o f)$ এবং $(h o g) o f$ সংজ্ঞাত।

উপরন্তু,

$$[h o (g o f) (x) = h ((g o f)(x))$$
$$= h (g (f (x))$$
$$= h (g (y)), \quad f (x) = y$$
$$= h (z), \quad g (y) = z$$

$= w$, ধরা হলো

এবং,

$$[(hog) o f](x) = (hog)(f(x))$$
$$= (hog)(y)$$
$$= h(g(y))$$
$$= h(z) = w.$$

অতএব অপেক্ষকের সমতার সংজ্ঞানুসারে

$h o(gof) = (hog) of.$

2.6 বিপরীত অপেক্ষক (Inverse function), উপপাদ্য ও উদাহরণ

ধরা যাক্ $f : A \rightarrow B$ একটি 1–1 এবং অনটু অপেক্ষক। অতএব অপেক্ষকের সংজ্ঞানুসারে $\forall x \in A$-এর ক্ষেত্রে $y \in B$ পাওয়া যাবে এবং $y = f(x)$ হবে। যেহেতু f একটি 1–1 এবং অনটু অপেক্ষক, সেহেতু যে কোন $y \in B$-এর ক্ষেত্রে অবশ্যই একটি এবং কেবলমাত্র একটি পূর্ব প্রতিবিম্ব বিন্দু $x \in A$ আছে। তার ফলে বলা যায় B থেকে A-তে একটি অপেক্ষক সংজ্ঞাত হচ্ছে যেখানে প্রতিটি $y \in B$ অবশ্যই A-তে প্রতিবিম্বিত

হবে। এই নতুন অপেক্ষটিকে f -এর বিপরীত অপেক্ষক বলে, সূচিত হয় f^{-1} দ্বারা। অতএব বিপরীত অপেক্ষকের সংজ্ঞা হচ্ছে ঃ

$f: A \rightarrow B$ এবং $f(x) = y$, যেখানে $x \in A, y \in B$, একটি 1–1 এবং অনটু অপেক্ষক হলে f এর বিপরীত অপেক্ষক f^{-1} সংজ্ঞাত হচ্ছে এবং

$f^{-1}: B \rightarrow A$ এবং $f^{-1}(y) = x$ যেখানে $y \in B, x \in A$. এবং $f(x) = y$

মন্তব্য ঃ $(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$

এবং $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$

হওয়ায় $f \circ f^{-1} = I_B$ এবং $f^{-1} \circ f = I_A$

(2.4.5 আইডেন্টিটি অপেক্ষক দেখুন)

উপপাদ্য 7 ঃ $f: A \rightarrow B$ অপেক্ষকটির ক্ষেত্রে f^{-1} স্বীকৃত হলে f^{-1} অপেক্ষকটি এক ও অনন্য (unique)।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক্ $f: A \rightarrow B$ অপেক্ষকটির ক্ষেত্রে দুটি বিপরীত অপেক্ষক f_1^{-1} এবং f_2^{-1}-এর অস্তিত্ব স্বীকৃত হচ্ছে। অতএব

$$f \circ f_1^{-1} = I_B = f \circ f_2^{-1}$$

$$f_1^{-1} \circ f = I_A = f_2^{-1} \circ f$$

এখন উপাপাদ্য 6 অনুসারে আমরা পাই

$$f_1^{-1} \circ (f \circ f_2^{-1}) = (f_1^{-1} \circ f) \circ f_2^{-1}$$

এই সমতা থেকে দেখা যাচ্ছে

$$f_1^{-1} \circ I_B = I_A \circ f_2^{-1}$$

বা, $\quad f_1^{-1} = f_2^{-1}$,

কারণ $\quad f_1^{-1} \circ I_B = f_1^{-1}$ এবং $I_A \circ f_2^{-1} = f_2^{-1}$.

উপপাদ্য 8 ঃ যদি $f: A \rightarrow B$ এবং $g: B \rightarrow C$ অপেক্ষক দুটি উভয়ে 1–1 এবং অনটু অপেক্ষক হয়, তাহলে $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

প্রমাণ ঃ $f: A \rightarrow B$ ক্ষেত্রে $f(x) = y$, যেখানে $x \in A$ এবং $y \in B$

এবং $g: B \to C$ ক্ষেত্রে $g(y) = z$, যেখানে $y \in B$ এবং $z \in C$.

যেহেতু f এবং g উভয়ে 1–1 এবং অনটু অপেক্ষক, সেহেতু f^{-1} এবং g^{-1} সংজ্ঞাত এবং

$g^{-1}: C \to B$ এবং $g^{-1}(z) = y$, যেখানে $z \in C, y \in B$

$f^{-1}: B \to A$ এবং $f^{-1}(y) = x$, যেখানে $y \in B$, $x \in A$

সংযোজক অপেক্ষকের সংজ্ঞানুসারে g o f সংজ্ঞাত এবং উপপাদ্য 1 এবং 3 অনুসারে g o f অপেক্ষকটি 1–1 এবং অনটু, কারণ f ও g উভয়ে 1–1 এবং অনটু দেওয়া আছে। সুতরাং $(g \circ f)^{-1}$ এর অস্তিত্ব স্বীকৃত। তখন আমরা পাচ্ছি

$g \circ f: A \to C, x \in A, z \in C$ এবং

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$

$f^{-1} \circ g^{-1}: C \to A, z \in C, x \in A$ এবং

$(f^{-1} \circ g^{-1})(z) = f^{-1}(g^{-1}(z)) = f^{-1}(y) = x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i)$

অতএব

$(g \circ f)^{-1}: C \to A, z \in C, x \in A$ এবং

$(g \circ f)^{-1}(z) = x = (f^{-1} \circ g^{-1})(z)$ [(i) অনুসারে]

সুতরাং প্রমাণিত হলো

$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

উদাহরণ ঃ

(1) $f: R^+ \to R^+$ এবং $f(x) = x^3 = y$, যেখানে $x \in R^+, y \in R^+$.

[R^+ হচ্ছে ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যাগুলির সেট] এই অপেক্ষকের ক্ষেত্রে দেখান f^{-1}-এর অস্তিত্ব স্বীকৃত হচ্ছে এবং f^{-1} টি নির্ণয় করুন। $f^{-1}(3)$ কত?

সমাধান ঃ $x_1, x_2 \in R^+$ এবং $x_1 \neq x_2$ এখন

$f: R^+ \to R^+$ অনুসারে $f(x_1) = x_1^3,\ f(x_2) = x_2^3$

এবং $f(x_1) \neq f(x_2)$, কারণ $x_1^3 \neq x_3^3,$ যেহেতু $x_1 \neq x_2.$

অতএব $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ সুতরাং সিদ্ধান্ত এই যে f অপেক্ষকটি 1–1 অপেক্ষক।

ধরা হল f-এর বিম্বাঞ্চলে y যে কোন একটি বিন্দু বা পদ। দেখা যাক্ f-এর সাপেক্ষে y-এর পূর্ব-প্রতিবিম্ব বিন্দু (Pre-image point) আছে কিনা। যদি $x \in R^+$ বিন্দুটি পূর্ব-প্রতিবিম্ব বিন্দু হয়, তাহলে

$$f(x) = y$$

বা, $x^3 = y$

বা, $x = \sqrt[3]{y}$

যেহেতু $x \in R^+$ অতএব $x \in R^+$। অতএব y-এর পূর্ব-প্রতিবিম্ব বিন্দুটি $(y)^{\frac{1}{3}}$ যে কোন y-এর ক্ষেত্রে এটি সত্য। অতএব f সাপেক্ষে প্রতিবিম্বাঞ্চলের যে কোন বিন্দুর পূর্ব-প্রতিবিম্ব থাকায় f অপেক্ষকটি অনটু অপেক্ষক।

অতএব f অপেক্ষকটি 1–1 এবং অনটু হওয়ায় f^{-1} অপেক্ষকের অস্তিত্ব স্বীকৃত হচ্ছে এবং

$f^{-1}: R^+ \to R^+$ এবং $f^{-1}(y) = (y)^{\frac{1}{3}},\ y \in R^+, f^{-1}(3) = (3)^{\frac{1}{3}}$.

(2) $f: R \to R$ এবং $f(x) = ax + b$, যেখানে $x \in R$ ($a \neq o$ এবং b উভয়ে ধ্রুবকদুটি $\in R$) এই অপেক্ষকটির ক্ষেত্রে f^{-1}-এর অস্তিত্ব আছে প্রমাণ করুন এবং $f^{-1}(b)$ কত নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ উদাহরণ (1)-এর অনুরূপে $x_1, x_2, \in R, x_1 \neq x_2$

$\Rightarrow f(x_1) = ax_1 + b \neq ax_2 + b = f(x_2)$

অতএব f একটি 1–1 অপেক্ষক।

f-এর সাপেক্ষে প্রতিবিম্বাঞ্চলের যেকোন y-এর ক্ষেত্রে পূর্ব-প্রতিবিম্ব বিন্দু আছে, কারণ

$ax+b = y$

$$\Rightarrow x = \frac{y-b}{a} \in R,$$

অর্থাৎ f অপেক্ষকটি অনটু অপেক্ষক। অতএব f^{-1}-এর অস্তিত্ব আছে প্রমাণিত হল এবং

$$f^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}$$

এবং $f^{-1}(b) = 0$

(3) $f: R \to R$, এবং $f(x) = x + 5, x \in R$

$g: R \to R$ এবং $g(x) = 5x + 7, x \in R$

এই দুটি অপেক্ষকের ক্ষেত্রে দেখান $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

সমাধান

সহজেই দেখা যাচ্ছে

$f^{-1}: R \to R$, এবং $f^{-1}(y) = y - 5, y \in R$

$g^{-1}: R \to R, g^{-1}(y) = \dfrac{y-7}{5}, y \in R$

অতএব $f^{-1} o\, g^{-1}: R \to R$ এবং $(f^{-1} o\, g^{-1})(y) = f^{-1}\left(\dfrac{y-7}{5}\right)$

$$= \frac{y-7}{5} - 5 = \frac{y-32}{5} \quad \text{.................(i)}$$

আবার $(g\, o\, f): R \to R$ এবং $(g\, o\, f)(x) = g(x+5) = 5(x+5) + 7 = 5x + 32.$

এই সংযোজক অপেক্ষকটি 1–1 এবং অনটু এবং তার ফলে

$$(g\, o\, f)^{-1}: R \to R = \frac{y-32}{5} \quad \text{..............(ii)}$$

(i) এবং (ii) থেকে $(g\, o\, f)^{-1} = f^{-1} o\, g^{-1}$.

2.7 ক্রমবর্ধমান অপেক্ষক, ক্রমক্ষীয়মান অপেক্ষক, ক্রমান্বয়ী অপেক্ষক (Monotone increasing function, Monotone decreasing function, Monotonic function)

সংজ্ঞা ঃ $f: A \to B$ এবং $f(x) = y$, যেখানে $x \in A \subset R$, $y \in B \subset R$ একটি অপেক্ষক। ধরা যাব $a, b \in A$ এবং $b > a$ এবার $a \le x \le b$ অন্তরালে যে কোন দুটি বিন্দু x_1 এবং x_2 –এর ক্ষেত্রে যদি

$f(x_2) \ge f(x_1)$, যখন $a \le x_1 < x_2 \le b$,

তাহলে $f(x)$ -কে বলা হবে উক্ত অন্তরালে ক্রমবর্ধমান।

যদি $f(x_2) > f(x_1), a \le x_1 < x_2 \le b$, তখন $f(x)$ কে বলা হবে যথার্থ ক্রমবর্ধমান (Strictly increasing)।

$a \le x_1 < x_2 \le b$ অন্তরালে যদি $f(x_2) \le f(x_1)$ হয়, তখন $f(x)$-কে বলা হবে উক্ত অন্তরালে ক্রমক্ষীয়মান। $f(x_2) < f(x_1)$ ক্ষেত্রে $f(x)$ যথার্থ ক্রমক্ষীয়মান (Strictly decreasing)। একটি অপেক্ষক f(x) কোন একটি অন্তরালে ক্রমবর্ধমান বা ক্রমক্ষীয়মান হলে তাকে ক্রমান্বয়ী অপেক্ষক (monotonic function) বলা হবে।

উদাহরণ ঃ

(1) $f(x)=\sin x$ অপেক্ষকটি $o \le x < \frac{\pi}{2}$ অন্তরালে যথার্থ ক্রমবর্ধমান (অপেক্ষকটির বিস্তারাঞ্চল সম্বন্ধে ধারণার জন্য 2.3-এর উদাহরণ (4) দেখুন। কারণ $\sin x$ ও $\cos x$ উভয় অপেক্ষক $\left(o, \frac{\pi}{2}\right)$ অঞ্চলে ধনাত্মক, এবং

$o \le x_1 < x_2 \le \frac{\pi}{2}$ হলে

$$\sin x_2 - \sin x_1 = 2\cos\frac{x_2+x_1}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2} > o$$

যেহেতু $o < \frac{x_2-x_1}{2} < \frac{\pi}{2}$ এবং $o < \frac{x_2+x_1}{2} < \frac{\pi}{2}$

(2) $f(x) = \frac{1}{x}$ অপেক্ষকটি $1 \le x \le 5$ অন্তরালে যথার্থ ক্রমক্ষীয়মান, কারণ $\forall\, x_1, x_2 \in [1,5]$ ক্ষেত্রে $f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} < o$, যখন $x_2 > x_1$

(3) $f(x)=1, \quad o \le x < 1$

$\quad = 2, \; 1 \le x \le 2$

অপেক্ষকটি [0, 2] অন্তরালে ক্রমবর্ধমান অপেক্ষক। কারণ, $0 \le x \le 1$ অন্তরালে f(x) ধ্রুবক, কিন্তু পরবর্তী $1 \le x \le 2$ অন্তরালে f(x)-এর মান বৃদ্ধি পেয়ে নতুন ধ্রুবক থাকছে।

(4) $f(x) = x^2 + 5$ অপেক্ষকটি [–3, 3] অন্তরালের [–3, 0] অংশে ক্রমক্ষীয়মান এবং [0, 3] অংশে ক্রমবর্ধমান। সুতরাং এটি [–3, 3] অন্তরালে ক্রমান্বয়ী অপেক্ষক নয়।

(5) $f(x) = e^x$, $x \in R$ অপেক্ষকটি যথার্থ ক্রমবর্ধমান অপেক্ষক। কারণ, $x_2 > x_1$ হলে $e^{x_2} > e^{x_1}$

(যেহেতু e = 2.71828..........., অর্থাৎ 2< e < 3।

(6) দেখান $f(x) = \tan x$ অপেক্ষকটি $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ অন্তরালে যথার্থ ক্রমবর্ধমান।

2.8 যুগ্ম ও অযুগ্ম অপেক্ষক (Even and odd functions)

সংজ্ঞা ঃ ধরা যাক্ f (x) অপেক্ষকের সংজ্ঞাঞ্চল $A \subset R$ এবং সংজ্ঞাঞ্চলটি এমন যে $x \in A$ হলে $-x \in A$. এরূপ ক্ষেত্রে যদি f(x)-এর প্রকৃতি এমন হয় যে,

$$f(-x) = f(x) \qquad \forall\, x \in A$$

সেক্ষেত্রে $f(x)$ অপেক্ষকটিকে যুগ্ম অপেক্ষক বলা হয়।

আবার $f(-x)=-f(x)$

হলে অপেক্ষকটিকে অযুগ্ম অপেক্ষক বলা হবে।

উদাহরণস্বরূপ (1) $f(x)=\cos x$ একটি যুগ্ম অপেক্ষক, কারণ

$$f(-x)=\cos(-x)=\cos x=f(x).$$

(2) $f(x)=\sin x$ একটি অযুগ্ম অপেক্ষক;

কারণ $f(-x)=\sin(-x)=-\sin x=-f(x).$

কিন্তু, $f(x)=e^x$ অপেক্ষকটি যুগ্ম বা অযুগ্ম কোনটাই নয়।

2.9 পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক (Periodic function)

সংজ্ঞা : $f(x)$ একটি অপেক্ষক যার সংজ্ঞাঞ্চল $A\subset R$. α একটি ধনাত্মক সংখ্যা এবং সংজ্ঞাঞ্চল A এমন যে $x\in A$ হলে $x+\alpha\in A$ হচ্ছে। এরূপ ক্ষেত্রে যদি দেখা যায়

$$f(x+\alpha)=f(x),\ \forall x\in A$$

তাহলে f(x)-কে বলা হবে পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক, উক্ত সংজ্ঞাঞ্চলে α-কে বলা হয় পর্যায়কাল (Period)।

উদাহরণস্বরূপ (1) $f(x)=\sin x,\ x\in R$ একটি পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক, কারণ, $x\in R\Rightarrow x+2\pi\in R$ এবং

$$\sin(x+2\pi)=\sin x$$

এখানে পর্যায়কাল 2π.

(2) $f(n)=(-1)^n, n=1,2,3,\ldots\ldots\ldots$

অপেক্ষকটি একটি পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক এবং পর্যায়কাল 2. কারণ,

$$f(n+2)=(-1)^{n+2}=(-1)^n(-1)^2=f(n).$$

মন্তব্য : যদি কোন পর্যাবৃত্ত অপেক্ষকের পর্যায়কাল একাধিক ধনাত্মক সংখ্যা হয় যেগুলি একটি সংখ্যার সমস্ত গুণিতক, সেক্ষেত্রে ঐ সংখ্যাগুলির মধ্যে সর্বনিম্ন মানটিকেই পর্যায়কাল ধরা হয়। যেমন (2) নং উদাহরণে 2, 4, 6, ... পর্যায়কাল হতে পারে। এদের মধ্যে সর্বনিম্ন মান 2 হচ্ছে পর্যায়কাল।

2.10 বিভিন্ন প্রকারের ফাংশন বা অপেক্ষক-বহুপদ রাশি, র‍্যাশনাল অপেক্ষক ও অতিক্রমী অপেক্ষক

(1) **বহুপদ রাশি অপেক্ষক** (Polynomial)

যদি $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots\ldots a_n$ কতকগুলি বাস্তব সংখ্যা হয়, তাহলে

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots\ldots\ldots+a_n$$

এই বীজগাণিতিক রাশিকে x-এর বহুপদরাশির অপেক্ষক (Polynomial) বলা হয়। $a_0 \neq 0$ হলে ঐ বহুপদরাশিকে n মাত্রার (degree n) x-এর বহুপদরাশি বলে।

$2x+3, 5x^2+7x+9, -6x^3-3x^2+4x-6$ যথাক্রমে একমাত্রা, দুইমাত্রা ও তিনমাত্রার $x-$এর বহুপদরাশি। বহুপদরাশি $x \in R$-এর যে কোন সসীম মানের জন্য সংজ্ঞাত।

(2) **র‍্যাশনাল অপেক্ষক** (Rational Function) ঃ

P এবং Q দুটি বহুপদরাশি হলে $\frac{P}{Q}$ -কে র‍্যাশনাল অপেক্ষক বলা হয়। সুতরাং Q যে সকল বিন্দুতে শূন্য, সেগুলি ছাড়া অন্যান্য x-এর জন্য $\frac{P}{Q}$ সংজ্ঞাত।

$\frac{2x^3+3x+1}{x-2}$ এই র‍্যাশনাল ফাংশনটি $x \neq 2$-এর জন্য সংজ্ঞাত।

(3) **অতিক্রমী অপেক্ষক** (Transcendental function) ঃ

বহুপদ রাশি ও র‍্যাশনাল ফাংশন ব্যাতীত অন্যান্য সমস্ত ফাংশনকে অতিক্রমী অপেক্ষক বলা হয়ে থাকে। ত্রিকোণমিতিক, লগারিদিমিক, এক্সপোনেল্শিয়াল প্রভৃতি অতিক্রমী ফাংশন হিসাবে ব্যবহৃত হয়।

ত্রিকোণমিতিতে $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \sec x, \operatorname{cosec} x$ এদের সংজ্ঞা দেওয়া আছে। মনে রাখা প্রয়োজন যে $\sin x, \cos x$ অপেক্ষকদুটি x-এর যে কোন বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞাত। কিন্তু $\tan x$, $x = \pm\frac{\pi}{2}$ -এর জন্য সংজ্ঞাত নয়।

2.11 পরিচিত কিছু ফাংশন ও লেখচিত্র

$f : A \to B$ এবং $f(x) = y$ যেখানে $x \in A, y \in B$ অপেক্ষকের ক্ষেত্রে (x, f(x)) জাতীয় পদগুলি দ্বারাই f সেটটি সংগঠিত। x-অক্ষ এবং y-অক্ষ পরস্পর লম্ব দুটি অক্ষের সাপেক্ষে (x, f (x)) জাতীয় বিন্দুগুলি প্রতিস্থাপন দ্বারাই f -এর লেখচিত্র উৎপন্ন হয়। f -এর পূর্ব আলোচিত প্রকৃতিসমূহ, যথা ক্রমবর্ধমান বা ক্রমক্ষীয়মান, পর্যায়বৃত্ত, যুগ্ম বা অযুগ্ম ইত্যাদি লেখচিত্র অংকনে সহায়তা করে।

(1) **বৃহত্তম পূর্ণসংখ্যা ফাংশন** [x] (Greatest Integer function)

f(x) একটি বিশেষ ফাংশন যার মান সর্বদা একটি পূর্ণসংখ্যা, অর্থাৎ f-এর সংজ্ঞাঞ্চল হলো R [বাস্তব সংখ্যার সেট] এবং বিস্বাঞ্চল হলো পূর্ণসংখ্যার সেট।

ধরা যাক্ $x \in R$, তাহলে আমরা x-কে দুটি পরপর পূর্ণসংখ্যার অন্তরালে আছে বলতে পারি। অর্থাৎ এমন একটি পূর্ণসংখ্যা m পাব যেক্ষেত্রে

$m \leq x < m+1$

অর্থাৎ x বাস্তব মানটি একটি পূর্ণসংখ্যা m-এর সমান হতে পারে অথবা m ও m+1-এর অন্তর্বর্তী হতে পারে। অতএব m হচ্ছে সবচেয়ে বড় পূর্ণসংখ্যা যা x থেকে ছোট অথবা x-এর সমান। এক্ষেত্রে বৃহত্তম পূর্ণসংখ্যা ফাংশন f(x)-এর মান হল m. এই অপেক্ষকের প্রতীক [x]। অতএব

$[x] = m,$ যখন $x = m$ (একটি পূর্ণসংখ্যা)

$= m,$ যখন $m < x < m+1.$

সুতরাং $[x] = 0$ যখন $0 \le x < 1$

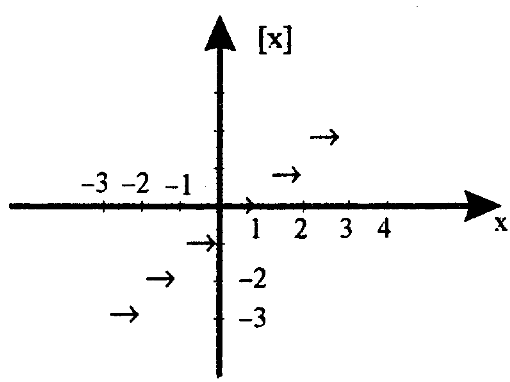
$= 1$ যখন $1 \le x < 2$

$= 2$ যখন $2 \le x < 3$

$= -1$ যখন $-1 \le x < 0$

$= -2$ যখন $-2 \le x < -1$

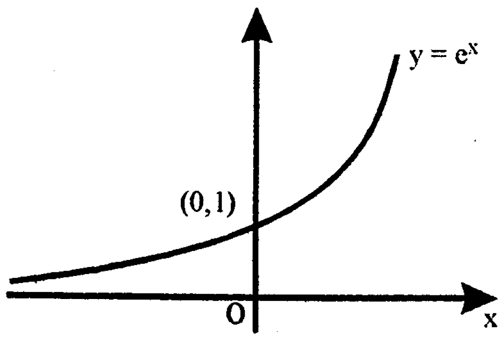
[x]-এর লেখচিত্র নিম্নরূপ



চিত্র 2.1

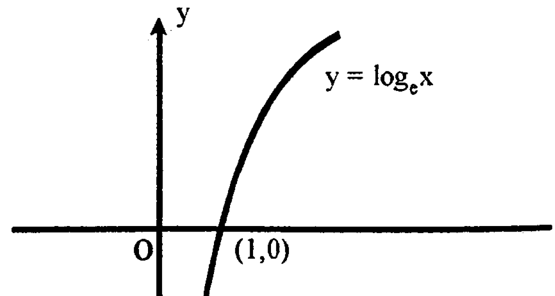
(2) $y = e^x$ অপেক্ষকটি যথার্থ ক্রমবর্ধমান এবং বিম্বাঞ্চল $0 < y < \infty$ [(2.7) এর (5) দেখুন]। এর সংজ্ঞাঞ্চল $R = \{-\infty < x < \infty,\ x$ বাস্তব$\}$ এটি (0,1) বিন্দুগামী। অপেক্ষকটি 1–1 এবং অনটু হওয়ায় এর বিপরীত অপেক্ষক $x = \log_e y$. বিপরীত অপেক্ষকটি (1,0) বিন্দুগামী। সংজ্ঞাঞ্চল y -এর যেকোন ধনাত্মক মান। উভয়ের লেখচিত্র দেওয়া হল।

$y = e^x$ -এর লেখচিত্র



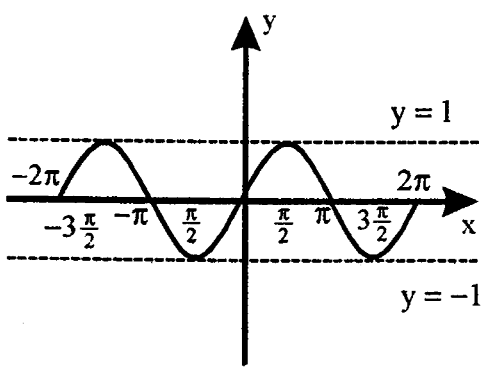
চিত্র 2.2

(3) $y = \sin x$ এবং এর বিপরীত অপেক্ষক $x = \sin^{-1} y$ -এর লেখচিত্র দেওয়া হল।



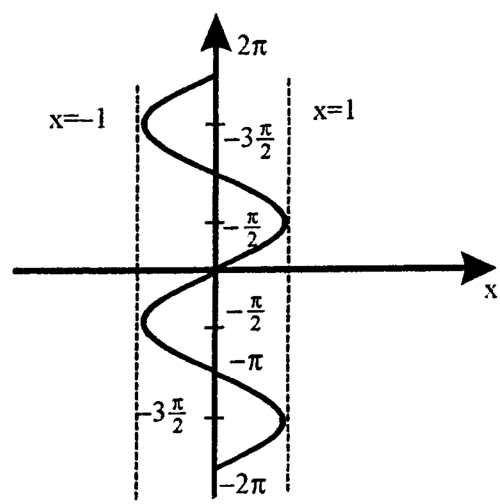
[$y = e^x$ -এর বিপরীত অপেক্ষক $x = \log_e y$ -কে $y = \log_e x$ আকারে লেখা হয়েছে]

চিত্র 2.3



$y = \sin x$ -এর লেখচিত্র

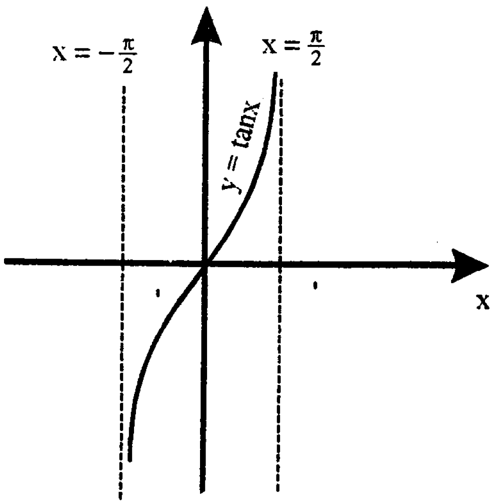
চিত্র 2.4



$y = \sin x$ -এর বিপরীত অপেক্ষক $x = \sin^{-1} y$ কে $y = \sin^{-1} x$ আকারে লিখে লেখচিত্র অংকন করা হয়েছে

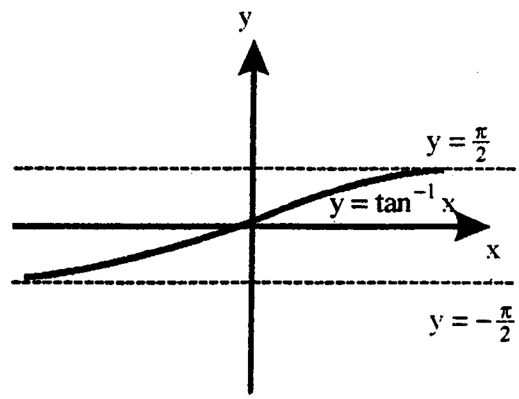
চিত্র 2.5

(4) $y = \tan x$ এবং এর বিপরীত অপেক্ষক $x = \tan^{-1} y$ কে $y = \tan^{-1} x$ আকারে লিখে লেখচিত্র দেওয়া হল।



y= tanx -এর লেখচিত্র

চিত্র 2.6



$y = \tan x$ -এর বিপরীত অপেক্ষক $x = \tan^{-1} y$-কে $y = \tan^{-1} x$ আকারে লিখে লেখচিত্র অংকন করা হয়েছে

চিত্র 2.7

মন্তব্য 1 : এক্সপোনেন্শিয়াল ফাংশন $f(x) = e^x$-এর কতগুলি ধর্ম যেমন

$$f(x_1)\, f(x_2) = f(x_1 + x_2)$$

অর্থাৎ $e^{x_1} e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}$

$$e^{x_1} / e^{x_2} = e^{x_1 - x_2}$$

$\therefore$ $f(x)$, x বৃদ্ধির সঙ্গে বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হয়, যেহেতু $e > 1$.

$f(1) = e$ যেখানে e হচ্ছে একটি অতিক্রমী সংখ্যা যার আসন্ন মান 2.718 (তিন দশমিক পর্যন্ত)

মন্তব্য 2 : লগারিদিমিক ফাংশন $\log_e x$ -এর সংজ্ঞা হল

$x > 0$ এবং $\log_e x = y$ যেখানে $e^y = x$.

অর্থাৎ লগারিদিমিক অপেক্ষক হল এক্সপোনেন্শিয়াল অপেক্ষকের বিপরীত অপেক্ষক।

2.12 ফাংশনের বা অপেক্ষকের লিমিট (limit of a function)

$f: A \to B$ এবং $f(x) = y$, যেখানে $x \in A \subseteq R$, $y \in B \subseteq R$ একটি একচল অপেক্ষক (function of one variable)। x-কে অনধীন (independent) চলরাশি এবং y-কে অধীন (dependent) চলরাশি বলা হয়।

সংজ্ঞা ঃ $a \in R$-এর বর্জিত ε- সামীপ্য (deleted ε-neighbourhood of a)

ε একটি ধনাত্মক, পূর্ব নির্দিষ্ট সংখ্যা যা যথেচ্ছ নির্বাচিত এবং যথাসম্ভব ক্ষুদ্র হতে পারে। তখন

$\{x \in R, a - \varepsilon < x < a + \varepsilon, \ x \neq a\}$ এই সেটটিকে, অর্থাৎ a বর্জিত $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ অন্তরালটিকে a-এর বর্জিত ε-সামীপ্য বলে। অর্থাৎ a-এর বর্জিত ε-সামীপ্যে

$$|x - a| < \varepsilon, \ x \neq a.$$

এক্ষেত্রে আমরা $x \to a$ এই প্রতীকও ব্যবহার করে থাকি।

a-কে বর্জন না করে $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ অন্তরালকে a-এর ε-সামীপ্য বলে।

2.12. 1 সংজ্ঞা ঃ ফাংশনের লিমিট $f: A \to B$ এবং $f(x) = y$, যেখানে $x \in A, y \in B$ এবং A ও B উভয়ে R-এর সাবসেট বা উপসেট (subset)। a একটি বাস্তব সংখ্যা এমন যে a-এর একটি বর্জিত সামীপ্য A-তে আছে। এখন যদি এমন একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা ℓ থাকে এবং $\varepsilon > 0$ একটি যথেচ্ছ ধনাত্মক সংখ্যার জন্য একটি সংখ্যা $\delta > 0$ পাওয়া যায় যে $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$ হবে যখন

$$a - \delta < x < a + \delta, \ x \neq a, \ x \in A$$

বা, $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ হবে, যখন $0 < |x - a| < \delta$, তখন বলা হবে $f(x)$-এর a-তে লিমিট আছে এবং ঐ লিমিটের মান ℓ. নিম্নলিখিত আকারে এই লিমিট প্রকাশ করা হয় :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell, \quad \text{অথবা } f(x) \to \ell \text{ যখন } x \to a.$$

মন্তব্য ঃ (1) a বিন্দুটি A সেটে নাও থাকতে পারে। লিমিটের অস্তিত্বের জন্য a-এর A সেটে থাকার প্রয়োজন নেই।

(2) সংজ্ঞায় ℓ-এর প্রদত্ত যে কোন ε-সামীপ্যে, ε একটি যথেচ্ছ প্রদত্ত ধনাত্মক সংখ্যা,

(3) সংজ্ঞানুসারে $\delta > 0$ এবং δ-এর মান ε-এর উপর নির্ভরশীল।

একটি উদাহরণ সহযোগে লিমিটের ধারণাকে পরিষ্কার করে দেওয়া যাক্। আমরা দেখাব

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - 4) = 0$$

এবং $\varepsilon - \delta$ সম্পর্কটিও নির্ণয় করব।

উক্ত লিমিটটি প্রতিপন্ন করার জন্য আমাদের দেখাতে হবে যে প্রদত্ত ε-এর জন্য এমন একটি δ পাওয়া যাবে যে

$|(x^2-4)-0|<\varepsilon$ হবে, যখন $0<|x-2|<\delta$

এখন, $|x^2-4|$

$= |x-2||x+2|$

কিন্তু $|x+2|=|x-2+4|\leq|x-2|+4$

$\therefore |x^2-4|=|x-2||x+2|\leq|x-2(|x-2|+4)=|x-2|^2+4|x-2|$........(i)

এখন $\delta>0$ যদি একটি এমন সংখ্যা হয় যে $0<\delta<1$ এবং $|x-2|<\delta$ হয় তাহলে (i) থেকে পাই

$|x^2-4|<\delta^2+4\delta<5\delta$ (যেহেতু $\delta^2<\delta$) .... (ii)

এখন যদি $\varepsilon>0$ যে কোন যথেচ্ছ ধনাত্মক সংখ্যা হয়,

তবে $\delta<\frac{\varepsilon}{5}$ নিলে আমরা (ii) থেকে পাই

$|x^2-4|<5\delta<\varepsilon$

অতএব প্রমাণিত হল $\lim_{x\to 2}(x^2-4)=0$

সংজ্ঞা ঃ দক্ষিণপক্ষীয় লিমিট এবং বামপক্ষীয় লিমিট (Righthand limit and Lefthand limit)

$x\to a$-এর ক্ষেত্রে $x\neq a$ এবং $a-\delta<x<a+\delta$ অতএব a-এর বাম ও ডানদিকে যথাক্রমে $a-\delta<x<a$ এবং $a<x<a+\delta$ দুটি অন্তরাল আমরা পাচ্ছি। $x\to a-0$ এবং $x\to a+0$ দ্বারা যথাক্রমে $a-\delta<x<a$ এবং $a<x<a+\delta$ অন্তরাল দুটিকে উল্লেখ করা হয়। এখন a-তে f(x)-এর দক্ষিণপক্ষীয় সীমা l_1 অর্থাৎ

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = l_1$$

দ্বারা এটাই বোঝায় যে

$|f(x)-l_1|<\varepsilon$, যখন $a<x<a+\delta$,

যেখানে ε হচ্ছে ধনাত্মক পূর্বনির্দিষ্ট যথাসম্ভব একটি ক্ষুদ্রসংখ্যা এবং $\delta(>0)$ সংখ্যাটি ε-এর নির্ভরশীল।

a-তে f(x)-এর বামপক্ষীয় সীমা l_2 অর্থাৎ $\lim_{x\to a-0} f(x)=l_2$ দ্বারা এটাই বোঝায় যে

$|f(x)-l_2|<\varepsilon$, যখন $a-\delta<x<a$, একটি প্রদত্ত ধনাত্মক সংখ্যা $\delta=\delta(\varepsilon)$

যখন $l_1 = l_2 = l$, তখন এবং কেবলমাত্র তখনই

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

মন্তব্য 1 ঃ যখন $l_1 \neq l_2$, সেক্ষেত্রে $\lim_{x \to a} f(x)$-এর অস্তিত্ব থাকে না।

মন্তব্য 2 ঃ একটি ফাংশন $y = f(x)$ যদি বদ্ধ অন্তরাল $[a, b]$-তে সংজ্ঞাত হয়, সেক্ষেত্রে প্রান্তবিন্দুদ্বয় a ও b-তে f(x)-এর লিমিট বলতে যথাক্রমে $\lim_{x \to a+0}$ এবং $\lim_{x \to b-0} f(x)$-কে বোঝায়।

মন্তব্য 3 ঃ দক্ষিণ পক্ষের লিমিটকে $\lim_{x \to a+0} f(x)$ অথবা $\lim_{x \to a+} f(x)$ অথবা $f(a + 0)$ দ্বারা সূচিত করা হয়; বামপক্ষের লিমিটকে $\lim_{x \to a-0} f(x)$ অথবা $\lim_{x \to a-} f(x)$ অথবা $f(a - 0)$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

2.12. 2 লিমিট করতে গিয়ে আমরা ∞ (অসীম) এই প্রতীকটি ব্যবহার করব। মনে রাখতে হবে ∞ কোন নির্দিষ্ট সংখ্যা নয়। নীচের সংজ্ঞা থেকে আমরা উহার অর্থ বুঝতে পারব।

সংজ্ঞা ঃ (1) $A \subseteq R$ এবং $f : A \to R$ একটি অপেক্ষক।

a একটি বাস্তব সংখ্যা এমন যে a-এর একটি বর্জিত সামীপ্য A-তে আছে। এখন আমরা

$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ অথবা, $f(x) \to \infty$, যখন $x \to a$

দ্বারা এটাই বোঝাব যে কোন প্রদত্ত বাস্তব ধনাত্মক সংখ্যা M-এর জন্য এমন একটি ধনাত্মক সংখ্যা δ পাওয়া যাবে যে

$f(x) > M$ যখন $o < |x - a| < \delta$, এবং $x \in A$;

M হচ্ছে যে কোন প্রদত্ত বাস্তব ধনাত্মক সংখ্যা এবং δ অপর একটি ধনাত্মক সংখ্যা যা M-এর উপর নির্ভরশীল।

(2) $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ অথবা $f(x) \to -\infty$, যখন $x \to a$ দ্বারা এটাই বোঝায় যে যেকোন প্রদত্ত ধনাত্মক সংখ্যা M-এর জন্য একটি $\delta > 0$ পাওয়া যাবে যাতে

$-f(x) > M$ যখন $0 < |x - a| < \delta$

এখন M হচ্ছে যেকোন প্রদত্ত বাস্তব ধনাত্মক সংখ্যা এবং δ অপর একটি ধনাত্মক সংখ্যা যা M-এর উপর নির্ভরশীল।

সংজ্ঞা ঃ $A \subseteq R$ এবং $f : A \to R$ একটি অপেক্ষক

(1) ধরা যাক্ $A = \{x \in R ; x > a\}$, a একটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা। এখন $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l (l \in R)$ অথবা $f(x) \to l$ যখন $x \to -\infty$ দ্বারা এটাই বোঝায় যে,

$|f(x) - l| < \varepsilon$ যখন $x > M$

এখানে ε হচ্ছে যথেচ্ছ প্রদত্ত ধনাত্মক সংখ্যা এবং M হচ্ছে a থেকে বড় একটি বাস্তব সংখ্যা যা অবশ্যই প্রদত্ত ε-এর উপর নির্ভরশীল।

(2) ধরা যাক্ $A = \{x \in R, x < -b\}$, b একটি বাস্তব ধনাত্মক সংখ্যা। এখন $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l \ (l \in R)$ অথবা $f(x) \to l$ যখন $x \to -\infty$ দ্বারা এটাই বোঝায় যে

$|f(x) - l| < \varepsilon$ যখন $-x > M > b$

যেখানে ε হচ্ছে ধনাত্মক সংখ্যা এবং M হচ্ছে b থেকে বড় একটি বাস্তব সংখ্যা যা অবশ্যই ε-এর উপর নির্ভরশীল।

(3) ধরা যাক্, $A = \{x \in R; x > a\}$ a একটি বাস্তব সংখ্যা। এখন $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ অথবা $f(x) \to \infty$, যখন $x \to \infty$ দ্বারা এটাই বোঝায় যে, যে কোন ধনাত্মক সংখ্যা N-এর জন্য একটি ধনাত্মক সংখ্যা M পাওয়া যায় যার জন্য

$f(x) > N$ যখন $x > M > a$

N হচ্ছে যথেচ্ছ একটি ধনাত্মক সংখ্যা এবং M হচ্ছে a থেকে বড় একটি বাস্তব সংখ্যা যা অবশ্যই প্রদত্ত N-এর উপর নির্ভরশীল।

(4) অনুরূপভাবে $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ অথবা $f(x) \to -\infty$ যখন $x \to +\infty$ দ্বারা এটাই বোঝায় যে,

$-f(x) > N$ যখন $x > M > a$

N হচ্ছে যথেচ্ছ প্রদত্ত ধনাত্মক সংখ্যা এবং M, N-এর উপর নির্ভর করে।

(5) আবার $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ দ্বারা এটাই বোঝায় যে

$f(x) > N$ যখন $(-x) > M > b$

যেখানে N হচ্ছে একটি প্রদত্ত যথেচ্ছ ধনাত্মক সংখ্যা এবং M, N-এর উপর নির্ভরশীল।

(6) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ দ্বারা এটাই বোঝায় যে

$-f(x) > N$, যখন $-x > M > b$

N হচ্ছে একটি যথেচ্ছ প্রদত্ত ধনাত্মক সংখ্যা এবং M-এর মান নির্ভর করে N-এর উপর।

(7) স্বাভাবিক সংখ্যা n-এর অপেক্ষক f(n)-এর লিমিট (যখন n স্বাভাবিক সংখ্যার মধ্য দিয়ে ক্রমাগত বাড়তে থাকে) আমরা $\lim\limits_{n \to \infty} f(n) = l$-এর এরূপ সংজ্ঞা দিই—

$\varepsilon > 0$ যে কোন ধনাত্মক সংখ্যা প্রদত্ত হলে যদি এমন একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা N পাওয়া যায় যার জন্য $|f(n) - l| < \varepsilon$ যখন $n > N$ হয় তাহলে আমরা বলব $\lim\limits_{n \to \infty} f(n) = l$

উদা. 1. $f(n) = \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots$

এখানে $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$

কারণ $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ যদি $n > \frac{1}{\varepsilon}$

অতএব N একটি পূর্ণসংখ্যা নিতে পারি, যেটি $\frac{1}{\varepsilon}$-এর অপেক্ষা বড় যার জন্য $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ যখন $n > N$.

2.12.3 উদাহরণমালা ঃ

1. সংজ্ঞা থেকে প্রমাণ করুন

$$\lim_{x\to a} x^2 = a^2$$

সমাধান ঃ

মনে করি $f(x) = x^2,\ x \in R$

উক্ত লিমিটটি প্রতিপন্ন করার জন্য যে কোন প্রদত্ত $\varepsilon\ (>o)$-এর জন্য এমন একটি $\delta(>o)$ নির্ণয় করতে হবে যে,

$|x^2 - a^2| < \varepsilon$ হবে, যখন $o < |x - a| < \delta$

এখন $|x^2 - a^2| = |x - a||x + a| = |x - a||x - a + 2a| \le |x - a|(|x - a| + 2|a|)$ .... (i)

মনে করি $\delta > o$ একটি এমন সংখ্যা যে $\delta < 1$.

এখন $|x - a| < \delta$ হলে $|x - a|^2 < \delta^2 < \delta$ .... (ii)

অতএব (i) ও (ii) থেকে আমরা পাই

$|x^2 - a^2| < \delta + 2|a|\delta$ যখন $o < |x - a| < \delta < 1$

$= (1 + 2|a|)\delta$ .... (iii)

এখন প্রদত্ত $\varepsilon > o$-এর জন্য আমরা $\delta > o$ এমনভাবে যদি নিই যে $\delta(1 + 2|a|) < \varepsilon$ হয়

অর্থাৎ $\delta < \frac{\varepsilon}{1+2|a|}$ হয়

তাহলে (iii) থেকে পাচ্ছি

$|x^2 - a^2| < \varepsilon$ যখন $o < |x - a| < \delta$ .... (iv)

$$\left(\text{এখানে } \delta < 1, \text{ এবং } \delta < \frac{\varepsilon}{1+2|a|}\right)$$

অতএব (iv) থেকে দেখা গেল যে

$f(x) = x^2$ হলে এবং $x \to a$ হলে, নির্দিষ্ট সংখ্যা $l = a^2$ আছে যার জন্য লিমিটের সংজ্ঞা সিদ্ধ হয়—অর্থাৎ যে কোন $\varepsilon > o$-এর জন্য একটি $\delta > o$ পাওয়া যাচ্ছে এবং (iv) সত্য হচ্ছে। অতএব প্রমাণিত হল

$$\lim_{x \to a} x^2 = a^2$$

2. আপনারা দেখান

$f(x) = b,\ x \in R$ হলে

(i) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ (ধ্রুবক) (ii) $\lim\limits_{x \to a} x = a$

3. প্রমাণ করুন

$$\lim_{x \to 4} \frac{1}{x} = \frac{1}{4}$$

সমাধান ঃ

$\varepsilon - \delta$ সংজ্ঞানুসারে $\lim\limits_{x \to 4} \frac{1}{x} = \frac{1}{4}$ হবে যদি প্রদত্ত $\varepsilon > o$ এর ক্ষেত্রে একটি $\delta > 0$ পাওয়া যাবে যার ফলে

$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{4}\right| < \varepsilon$ হবে, যখন $o < |x - 4| < \delta$ .... (i)

এখন $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{4}\right| = \left|\frac{4-x}{4x}\right| = \frac{|4-x|}{4|x|}$ .... (ii)

আমরা এক বর্জিত সামীপ্য নিলাম অর্থাৎ $o < |x - 4| < \delta < 1$ যেখানে δ একটি ধনাত্মক সংখ্যা। অতএব ঐ সামীপ্যে

$$|x| = |x - 4 + 4| \geq |4| - |x - 4|$$

$\left(|a+b| \geq |a| - |b|\right.$ এই অসমতা থেকে $\left.\right)$

$$> 4 - \delta > 3$$

অতএব $\frac{1}{|x|} < \frac{1}{3}$ .... (iii)

অতএব (i), (ii), (iii) থেকে

$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{4}\right| < \frac{\delta}{4.3} = \frac{\delta}{12}$ .... (iii) যখন $o < |x - 4| < \delta\ (<1)$

এখন যদি $\varepsilon > o$ একটি যথেচ্ছ সংখ্যা প্রদত্ত হয় তবে (iii) থেকে পাই

$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{4}\right| < \varepsilon$ যদি $\delta < 12\varepsilon$ হয় অর্থাৎ যদি $o < |x - a| < \delta$ যেখানে $o < \delta < 1$ এবং $\delta < 12\varepsilon$

অতএব প্রমাণিত হল $\lim\limits_{x\to 4} \frac{1}{x} = \frac{1}{4}$

4. দেখান $\lim\limits_{x\to o+o} \frac{1}{x} = \infty$

সমাধান ঃ অপেক্ষকটি $x = o$ ব্যতীত সকল বিন্দুতে সংজ্ঞাত। সংজ্ঞা অনুসারে লিমিটটি প্রতিপন্ন হবে যদি যে কোন প্রদত্ত ধনাত্মক সংখ্যা M-এর জন্য আমরা একটি $\delta\,(> o)$ পাচ্ছি যার ফলে

$\frac{1}{x} > M$ হবে, যখন $o < x < o + \delta$ ..... (i)

অর্থাৎ $x < \frac{1}{M}$ হবে, যখন $o < x < \delta$

অতএব $\delta = \frac{1}{M}$ হলে, (i) সিদ্ধ হচ্ছে। সুতরাং $\lim\limits_{x\to o+o} \frac{1}{x} = \infty$

5. দেখান $\lim\limits_{x\to o-o} \frac{1}{x} = -\infty$

সমাধান ঃ সংজ্ঞা অনুসরণক্রমে লিমিটটি প্রতিপন্ন হবে যদি প্রদত্ত ধনাত্মক M-এর ক্ষেত্রে একটি $\delta > o$ এমন যে $\left(-\frac{1}{x}\right) > M$ হবে, যখন $o - \delta < x < o$ .... (i)

অর্থাৎ $x > -\frac{1}{M}$ হবে, যখন $x > -\delta$

অতএব $\delta = \frac{1}{M}$ হলে, (i) সিদ্ধ হচ্ছে। সুতরাং $\lim\limits_{x\to o-o} \frac{1}{x} = -\infty$

(6) দেখান $\lim\limits_{x\to o} \frac{1}{x}$ এই লিমিটের কোন অস্তিত্ব নেই।

সমাধান ঃ উদা (4) এবং (5) অনুসারে $\lim\limits_{x\to o+o} \frac{1}{x} \neq \lim\limits_{x\to o-o} \frac{1}{x}$ অতএব $\lim\limits_{x\to o} \frac{1}{x}$ এর অস্তিত্ব নেই।

মন্তব্য ঃ অনুরূপে দেখানো যাবে $\lim\limits_{x\to o} \frac{1}{x^3}$, $\lim\limits_{x\to o} \frac{1}{x^5}$ ইত্যাদির অস্তিত্ব নেই।

7. দেখান $\lim\limits_{x\to o} \frac{1}{x^2} = \infty$

সমাধান ঃ সংজ্ঞা অনুসারে উক্ত লিমিটটি প্রতিপন্ন হবে যদি প্রদত্ত $M(>0)$-এর ক্ষেত্রে এমন একটি $\delta(>0)$ পাওয়া যায় যে

$\frac{1}{x^2} > M$ হবে, যখন $o - \delta < x < o + \delta$ এবং $x \neq o$ .... (i)

অর্থাৎ $x^2 < \frac{1}{M}$ হবে, যখন $-\delta < x < \delta$ এবং $x \neq o$

অর্থাৎ, $-\frac{1}{\sqrt{M}} < x < \frac{1}{\sqrt{M}}$ হবে, যখন $-\delta < x < \delta$

অতএব $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$ হলে (i) সিদ্ধ হচ্ছে, সুতরাং $\lim\limits_{x \to o} \frac{1}{x^2} = \infty$

মন্তব্য ঃ অনুরূপে $\lim\limits_{x \to o} \frac{1}{x^4} = \infty$, $\lim\limits_{x \to o} \frac{1}{x^6} = \infty$ ...... ইত্যাদি।

8. প্রমাণ করুন $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - x + 1}{x + 1} = \frac{1}{2}$

সমাধান ঃ লিমিটটি প্রতিপন্ন করার জন্য আমাদের দেখাতে হবে প্রদত্ত $\varepsilon(>o)$-এর জন্য একটি $\delta(>o)$ পাওয়া যাবে এবং

$\left|\frac{x^2 - x + 1}{x + 1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$ হবে, যখন $o < |x - 1| < \delta$ . ... (i)

লক্ষ্য করুন, $\left|\frac{x^2 - x + 1}{x + 1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2x^2 - 3x + 1}{2(x + 1)}\right|$

$$= \left|\frac{(x-1)(2x-1)}{2(x+1)}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{x-1}{x+1}\right||2x-1|$$

$$\therefore \quad \left|\frac{x^2 - x + 1}{x + 1} - \frac{1}{2}\right| = \frac{|x-1||2x-1|}{2|x+1|} \quad \text{......... (ii)}$$

এখন যদি $o < |x - 1| < \delta$ যেখানে $\delta > o$ একটি ধনাত্মক সংখ্যা, তা হলে

$|x + 1| = |x - 1 + 2| \geq 2 - |x - 1|$; $|2x - 1| = |2(x - 1) + 1| \leq 2\,|x - 1| + 1 < 2\delta + 1$ ...... (i)

অতএব যদি $o < \delta < 1$ হয়, তা হ'লে $|x + 1| \geq 2 - |x - 1| > 2 - \delta > 1$ ...... (ii) (কেননা $\delta < 1$)

অতএব (i) ও (ii) থেকে পাই,

$$\left|f(x)-\frac{1}{2}\right| < \frac{\delta(2\delta+1)}{2.1} = \frac{2\delta^2+\delta}{2} < \frac{2\delta+\delta}{2} = \frac{3\delta}{2} \qquad \text{.........} \ (iii)$$

অতএব যে কোন $\varepsilon > o$-এর জন্য আমরা একটি $\delta < \frac{2}{3}\varepsilon$ পাচ্ছি

যখন ((iii) থেকে)

$$\left|f(x)-\frac{1}{2}\right| < \varepsilon \qquad \text{যখন } o < |x-1| < \delta \text{ যেখানে } \delta < 1$$

$$\text{এবং } \delta < \frac{2}{3}\varepsilon$$

2.13. লিমিটের বিভিন্ন ধর্ম ও লিমিটের বীজগণিত

উপপাদ্য 9. (লিমিটের বা সীমার অনন্যতা (uniqueness) সংক্রান্ত)

$f : A \to B$ $(A \subseteq R,\ B \subseteq R)$ অপেক্ষকের a বিন্দুতে লিমিটের অস্তিত্ব স্বীকৃত হলে লিমিটের মান কেবলমাত্র একটি সংখ্যাই হবে।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক্, যদি সম্ভব হয়, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$-এর দুটি মান l এবং l' আছে। অতএব লিমিটের সংজ্ঞানুসারে প্রদত্ত $\varepsilon > o$ এর জন্য আমরা দুটি $\delta_1(> o)$ এবং $\delta_2(> o)$ পাব যার জন্য

$$|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ হবে, যখন } o < |x-a| < \delta_1$$

এবং $$|f(x) - l'| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ হবে, যখন } o < |x-a| < \delta_2$$

অতএব $$|l - l'| = |l - f(x) + f(x) - l'| \leq |l - f(x)| + |f(x) - l'|$$

$$= |f(x) - l| + |f(x) - l'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\text{যখন } o<|x-a| < \min(\delta_1, \delta_2).$$

কিন্তু ε একটি ধনাত্মক সংখ্যা যা যথেচ্ছ ক্ষুদ্র হতে পারে। অতএব $l - l' = o$ বা $l = l'$. অতএব একাধিক লিমিট থাকতে পারে না।

উপপাদ্য 10. সামীপ্য ধর্ম (neighbourhood property) সংক্রান্ত

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l\ (\neq 0)$ হলে a-র বর্জিত সামীপ্যে f(x)-এর মান l-এর সমচিহ্ন যুক্ত।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক্, $l > o$, অতএব লিমিটের সংজ্ঞানুসারে

$$|f(x) - l| < \varepsilon, \text{ যখন } 0 < |x - a| < \delta \qquad \ldots\ldots \text{(i)}$$

এখানে ε হচ্ছে যথেচ্ছ প্রদত্ত একটি ধনাত্মক সংখ্যা এবং $\delta\ (> 0)$ অপর একটি সংখ্যা যা ε-এর উপর নির্ভরশীল।

মনে করি $\varepsilon = \frac{l}{2}\ (l > 0)$; তাহলে (i) থেকে আমরা পাচ্ছি,

$$l - \frac{l}{2} < f(x) < l + \frac{l}{2} \text{ যখন } a - \delta < x < a + \varepsilon,\ x \neq a$$

বা, $$\frac{l}{2} < f(x) < \frac{3l}{2}, \text{ যখন } a - \delta < x < a + \delta,\ x \neq a$$

অতএব a-বর্জিত $(a - \delta, a + \delta)$ অন্তরালে অর্থাৎ a-এর বর্জিত δ-সামীপ্যে f(x)-এর মান ধনাত্মক, কারণ $l > 0$ হওয়ায় $\frac{l}{2}$ ও $\frac{3l}{2}$ উভয়ে ধনাত্মক। এতএব $l > 0$ ক্ষেত্রে উপপাদ্যটি প্রমাণিত হল।

অনুরূপে $l < 0$ ক্ষেত্রে $\varepsilon = -\frac{l}{2}$ ধরে প্রমাণ করা যাবে a-এর একটি বর্জিত-সামীপ্যে f(x) ঋণাত্মক।

সুতরাং উপপাদ্যটি প্রমাণিত হল।

উপপাদ্য 11.

যদি $\lim_{x\to a} f(x) = l$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = m$ হয় এবং যদি $f(x) < g(x)$ এই অসমতাটি $x = a$ বিন্দুর বর্জিত সামীপ্যে সত্য হয়, তবে $l \leq m$.

প্রমাণ ঃ যদি সম্ভব হয় ধরা যাক $l \leq m$ হয়, তবে $l > m$ হবে। তাহলে $l - m$ একটি ধনাত্মক সংখ্যা। এখন, লিমিটের সংজ্ঞানুসারে, আমরা δ_1 এবং δ_2 দুটি ধনাত্মক সংখ্যা পাব যার জন্য

$$|f(x) - l| < \frac{l-m}{2} \qquad \text{যখন } 0 < |x - a| < \delta_1 \left[\because \lim_{x\to a} f(x) = l\right]$$

এবং $$|g(x) - m| < \frac{l-m}{2} \qquad \text{যখন } 0 < |x - a| < \delta_2 \left[\because \lim_{x\to a} g(x) = m\right]$$

অতএব $\delta =$ অবম (δ_1, δ_2) ধরে আমরা পাই

$$l - \frac{l-m}{2} < f(x) < \frac{l-m}{2} + l \text{ যখন } 0 < |x - a| < \delta$$

$$m - \frac{l-m}{2} < g(x) < \frac{l-m}{2} + m \text{ যখন } 0 < |x - a| < \delta$$

এখন লক্ষ্য করুন,

$$g(x) - f(x) < \frac{l+m}{2} - \frac{l+m}{2} = 0,\ 0 < |x - a| < \delta$$

অতএব a-এর δ–সামীপ্যে $g(x) < f(x)$ কিন্তু প্রদত্ত শর্তানুসারে $g(x) > f(x)$ একটি বর্জিত সামীপ্যে সত্য।

অতএব $l > m$ হতে পারে না। সুতরাং সিদ্ধান্ত $l \le m$.

উদাহরণ ঃ $f(x) = 1 + x^2$, $g(x) = 1 + x^2 + (x-1)^2$ অপেক্ষকদুটির ক্ষেত্রে $f(x) < g(x)$ যখন $x \ne 1$.
কিন্তু $\lim_{x\to 1} f(x) = 2 = \lim_{x\to 1} g(x)$

উপপাদ্য 12. (Sandwich theorem) ঃ যদি a-র δ_1–সামীপ্যে, অর্থাৎ $(a - \delta_1, a + \delta_1)$ অন্তরালে

$$f(x) \le g(x) \le h(x) \text{ হয় এবং}$$

যদি $\lim_{x\to a} f(x) = l = \lim_{x\to a} h(x)$ হয়, তাহলে $\lim_{x\to a} g(x)$-এর অস্তিত্ব আছে ও তার মান হল l.

প্রমাণ ঃ যেহেতু $\lim_{x\to a} f(x) = l = \lim_{x\to a} h(x)$ অতএব প্রদত্ত $\varepsilon > 0$

এর জন্য আমরা দুটি $\delta_2 > 0$ এবং $\delta_3 > 0$ পাব যার জন্য

$$|f(x) - l| < \varepsilon \qquad \text{যখন } 0 < |x-a| < \delta_2 \qquad \ldots\ldots\ldots\text{(i)}$$

এবং $$|h(x) - l| < \varepsilon \qquad \text{যখন } 0 < |x-a| < \delta_2 \qquad \ldots\ldots\ldots\text{(ii)}$$

প্রদত্ত আছে

$$f(x) \le g(x) \le h(x) \qquad \text{যখন } 0 < |x-a| < \delta_1 \qquad \ldots\ldots\text{(iii)}$$

এখন δ = অবম $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ হলে (i), (ii) এবং (iii) থেকে আমরা পাই

$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon,\ l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon$$

এবং $\quad f(x) \le g(x) \le h(x), \quad$ যখন $0<|x-a|<\delta$

অতএব $\quad l - \varepsilon < f(x) \le g(x) \le h(x) < l + \varepsilon \quad$ যখন $0 < |x-a| < \delta$

বা, $\quad l - \varepsilon < g(x) < l + \varepsilon \quad$ যখন $0 < |x-a| < \delta$

সুতরাং $\lim_{x\to a} g(x) = l$ অতএব উপপাদ্যটি প্রমাণিত হল।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ যদি $|f(x)| < |g(x)|$ হয় এবং $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ হয়, তাহলে $\lim_{x\to a} f(x) = 0$

কারণ, $|f(x)| < |g(x)|$ থেকে আমরা পাই $-|g(x)| < f(x) < |g(x)|$ এবং

যেহেতু $\quad g(x) = 0$, অতএব লিমিটের সংজ্ঞানুসারে $\quad |g(x)| = 0$ এবং তার ফলে উপপাদ্য 12 অনুসারে $\quad f(x)$ আছে ও উহা শূন্য।

2.13.1 উপপাদ্য (লিমিটের বীজগণিত) 13 :

যদি $\lim_{x\to a} f(x) = l$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = m$ হয়, তাহলে

I. $\lim_{x\to a} \left(f(x \pm g(x)\right) = l \pm m$

II. $\lim_{x\to a} \left(f(x)\,g(x)\right) = lm$

III. $m \neq 0$ হলে $\lim_{x\to a} (f(x) / g(x)) = \dfrac{l}{m}$

প্রমাণ ঃ I. $\lim_{x\to a} f(x) = l$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = m$ হওয়ায়, লিমিটের সংজ্ঞানুসারে পূর্বনির্দিষ্ট একটি সংখ্যা $\varepsilon(> 0)$-এর সাপেক্ষে আমরা $\delta_1(> 0)$ এবং $\delta_2(> 0)$ এমন দুটি সংখ্যা পাব যার জন্য

$|f(x) - l| <$ যখন $0 < |x - a| < \delta_1$ .... (i)

$|g(x) - m| <$ যখন $0 < |x - a| < \delta_2$ .... (ii)

$\delta =$ অবম (δ_1, δ_2) ধরে আমরা পাচ্ছি

$|f(x) - l| <$ এবং $|g(x) - m| <$ যখন $0 < |x - a| < \delta$ .... (iii)

এখন আমরা লক্ষ্য করছি

$$\leq |f(x) - l| + |g(x) - m|$$

যখন $0 < |x - a| < \delta$ ((iii) অনুসারে)

অতএব

II. যেহেতু $f(x) = l$ এবং $g(x) = m$, অতএব সংজ্ঞানুসারে আমরা পাই,

$|f(x) - l| < \varepsilon'$ এবং $|g(x) - m| < \varepsilon'$ যখন $0 < |x - a| < \delta$ ..... (i)

[I-এর প্রমাণে (ii) দেখুন, ε' প্রদত্ত ধনাত্মক সংখ্যা এবং $\delta = \delta(\varepsilon')$]

এবার

$$|f(x)g(x)-lm| = |(f(x)-l)g(x)+l(g(x)-m)|$$

$$\le |f(x) - l|\ |g(x)| + |l|\ |g(x) - m|$$

$$[\because |a \pm b| \le |a|+|b| \qquad |ab|=|a||b|]$$

$< \varepsilon' \{|g(x)| + |l|\}$, $o < |x - a| < \delta$ ((i) অনুসারে) ...... (ii)

পুনরায় (i) হতে আমরা পাচ্ছি

$$|g(x)| = |g(x) - m + m|$$

$$\le |g(x) - m| + |m|$$

$$< \varepsilon' + |m|$$

অর্থাৎ $|g(x)| < |m| + \varepsilon'$, $o < |x - a| < \delta$ .... (iii)

এখন (ii) এবং (iii)-এর সাহায্যে আমরা পাচ্ছি

$|f(x)g(x) - lm| < \varepsilon' \{|m| + |l| + \varepsilon'\}$ .... (iv)

এখানে ε' সংখ্যাটি যথেচ্ছ ধনাত্মক সংখ্যা নিতে পারি।

অতএব যদি $\varepsilon > o$ প্রদত্ত একটি ধনাত্মক সংখ্যা হয়, আমরা (i)-এ

$\varepsilon' < \dfrac{\varepsilon}{|m|+|l|+1}$ এবং $\varepsilon' < 1$ নিলে (iv) থেকে পাই $|f(x)\ g(x) - lm| < \varepsilon$

যখন $o < |x - a| < \delta$

অতএব $\lim\limits_{x \to a} f(x)\ g(x) = lm$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ $\lim\limits_{x \to a} (\alpha f(x)) = \alpha \lim\limits_{x \to a} f(x)$ [α একটি ধ্রুবক]

III. যেহেতু $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ এবং $\lim\limits_{x \to a} g(x) = m\ (\neq o)$

অতএব সংজ্ঞানুসারে,

$|f(x) - l| < \varepsilon'$ এবং $|g(x) - m| < \varepsilon'$ যখন $o < |x - a| < \delta_1$ .... (i)

এখানে ε' একটি যথেচ্ছ ধনাত্মক সংখ্যা।

এবার লক্ষ্য করুন

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{l}{m}\right| = \left|\frac{f(x)m-lg(x)}{g(x)m}\right|$$

$$= \left|\frac{f((x)-l)m-l(g(x)-m)}{mg(x)}\right|$$

$$\le \frac{|f(x)-l||m|+|l||g(x)-m|}{|m||g(x)|}$$

$$\left[\because \quad |a\pm b|\le|a|+|b|, |ab|=|a||b| \qquad \left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}\right]$$

$$< \frac{\varepsilon'\{|m|+|l|\}}{|m||g(x)|} \text{ যখন } 0<|x-a|<\delta_1 \quad \text{.... (ii)}$$

[(i) অনুসারে]

পুনরায় $\lim_{x\to a} g(x) = m \ (\neq 0)$ হওয়ায় $\frac{|m|}{2}$ সংখ্যাটি ধনাত্মক এবং এর সাপেক্ষে এমন একটি সংখ্যা $\delta_2\ (>0)$ পাব যে

$$|g(x)-m|<\frac{|m|}{2} \text{ যখন } 0<|x-a|<\delta_2$$

বা, $|g(x)| = |g(x)-m+m| \ge |m| - |g(x)-m| \ge |m| - \frac{|m|}{2}$ এবং

বা, $\frac{1}{|g(x)|}\le\frac{2}{|m|}$ যখন $0<|x-a|<\delta_2$ ...... (iii)

ধরা যাক্ δ = অবম (δ_1, δ_2) তাহলে (ii) এবং (iii) উভয় অসমতাই সত্য হচ্ছে যখন $0<|x-a|<\delta$ এখন (ii) এবং (iii) সাহায্যে আমরা পাচ্ছি

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{l}{m}\right|\le\varepsilon'\frac{2\{|l|+|m|\}}{|m|^2},\ 0<|x-a|<\delta \quad \text{..... (iv)}$$

এখন যদি $\varepsilon>0$ একটি যথেচ্ছ সংখ্যা প্রদত্ত থাকে, তবে ε' এমন নেওয়া হল যে

$$0<\varepsilon'<\frac{\varepsilon|m|^2}{2\{|l|+|m|\}} \quad \text{..... (v)}$$

এখন (iv) এবং (v) অনুসারে আমরা পাচ্ছি

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{l}{m}\right|<\varepsilon \text{ যখন } o<|x-a|<\delta$$

এবং তার ফলে লিমিটের সংজ্ঞানুসারে $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{l}{m}(m\neq o)$

অনুসিদ্ধান্ত 1 ঃ $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{m}\ (m\neq o)$

অনুসিদ্ধান্ত 2 ঃ যদি $f_1(x), f_2(x)$ .... $f_k(x)$, k সংখ্যক ফাংশন x = a বিন্দুর বর্জিত সামীপ্যে সংজ্ঞাত থাকে আর $\lim\limits_{x\to a} f_r(x) = l_r$ (r = 1, 2, ... k) থাকে, তাহলে

$$\lim_{x\to a}\ (f_1(x)+f_2(x).....+f_k(x))$$

$$=\lim_{x\to a} f_1(x)+\lim_{x\to a} f_2(x)+\cdots+\lim_{x\to a} f_k(x)$$

$$= l_1 + l_2 + ... + l_k$$

প্রমাণ ঃ k = 2-এর জন্য এটি সত্য (উপপাদ্য 13. I থেকে)। যদি k = m-এর জন্য সত্য ধরা হয় অর্থাৎ $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_m(x))=l_1+l_2+\cdots+l_m$ হয়, তবে $F(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_m(x)$ এই ফাংশনটির জন্য $\lim\limits_{x\to a} F(x) = l_1 + l_2 + ... + l_m$

অতএব $\lim\limits_{x\to a}\left(f_1(x)+\cdots+f_m(x)+f_{m+1}(x)\right)$

$$=\lim_{x\to a}\left(F(x)+f_{m+1}(x)\right)$$

$$=\lim_{x\to a} F(x)+\lim_{x\to a} f_{m+1}(x) \text{ [উপ 13.I থেকে]}$$

$$= l_1 + l_2 + ... + l_m + l_{m+1}$$

অতএব k = m + 1-এর জন্য উপপাদ্যটি সত্য। আরোহ প্রণালী থেকে উপপাদ্যটি k = 1, 2, 3, ... সমস্ত পূর্ণসংখ্যার জন্য সত্য।

অনুসিদ্ধান্ত 3 ঃ যদি $\lim\limits_{x\to a} f_r(x) = l_r$ হয় (r = 1, 2, ... k)

তবে $\lim_{x\to a} f_1(x) f_2(x) \ldots f_k(x) = l_1 \cdot l_2 \cdots l_k$

প্রমাণ ঃ আরোহ প্রণালী প্রয়োগ করে করুন।

উপপাদ্য 14 ঃ

$f : A \to B$ যেখানে $y = f(x)$, $x \in A$, $y \in B$ এবং $g : B \to C$, যেখানে $z = g(y)$, $y \in B$, $Z \in C$ দুটি অপেক্ষক। এখন যদি $\lim_{x\to a} f(x) = b$ এবং $\lim_{y\to b} g(y) = g(b)$ হয় তাহলে

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)$$

প্রমাণ ঃ প্রদত্ত f(x) এবং g(y)-এর ক্ষেত্রে g(f(x)) সংজ্ঞাত। (2.5 দেখুন)

$\lim_{y\to b} g(y) = g(b)$ হওয়ায় আমরা পাই

$|g(y) - g(b)| < \varepsilon$, যখন $o < |y - b| < \delta_1$, ... (i)

ε হচ্ছে পূর্বনির্দিষ্ট একটি ধনাত্মক সংখ্যা এবং $\delta_1 (> o)$ অপর একটি সংখ্যা যা ε-এর উপর নির্ভরশীল।

পুনরায় $\lim_{x\to a} f(x) = b$ হওয়ায় আমরা লিখতে পারি

$|f(x) - b| < \delta_1$ যখন $o < |x - a| < \delta_2$

বা, $|y - b| < \delta_1$ যখন $o < |x - a| < \delta_2$ ..... (ii)

প্রদত্ত পূর্বনির্দিষ্ট সংখ্যাটি এখানে δ_1 ধরা হয়েছে, এবং $\delta_2 > o$ নির্ভর করছে δ_1-এর উপর।

এখন (i) এবং (ii) অনুসারে

$|g(f(x)) - g(b)| = |g(y) - g(b)| < \varepsilon$, যখন $o < |x - a| < \delta_2$.

যেখানে δ_2 নির্ভর কর δ_1-এর উপর, আর δ_1 নির্ভর করে ε-এর উপর। সংজ্ঞানুসারে অতএব δ_2 নির্ভর করছে ε-এর উপর।

$$\therefore \quad \lim_{x\to a} g(f(x)) = g(b) = g\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)$$

অর্থাৎ উপপাদ্যটি প্রমাণিত হলো।

2.14 লিমিটের বীজগণিত-ধর্মের প্রয়োগ ঃ

আমরা লিমিটের সংজ্ঞা থেকে পাই ঃ

(1) $f(x) = x$ হলে $(x \in R)$

এবং a যে-কোন একটি বাস্তব সংখ্যা হলে $\lim_{x \to a} f(x)$-এর অস্তিত্ব আছে এবং তাহা a-এর সমান। কারণ $\varepsilon > o$ যে কোন সংখ্যা প্রদত্ত হলে $\delta = \varepsilon$ নিয়ে আমরা পাই $|f(x) - a| = |x - a| < \varepsilon$ যখন $o < |x - a| < \delta = \varepsilon$ অতএব প্রমাণিত হল $\lim_{x \to a} x = a$

(2) $\lim_{x \to a} x^n = a^n$ (যেখানে n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা)। আমরা আরোহ প্রণালী (Method of Induction) প্রয়োগ করে প্রমাণ করব। আমরা জানি n = 1 হলে $\lim_{x \to a} x = a$. এখন ধরা যাক n = m একটি নির্দিষ্ট পূর্ণসংখ্যার জন্য $\lim_{x \to a} x^m = a^m$ এটি সত্য। এখন দেখুন

$\lim_{x \to a} x^{m+1} = \lim_{x \to a} x^m . x = \lim_{x \to a} x^m \lim_{x \to a} x$ (বীজগাণিতিক ধর্মের প্রয়োগ করে) $= a^m . a = a^{m+1}$

অতএব আমরা প্রমাণ করলাম যে $\lim_{x \to a} x^{m+1} = a^{m+1}$

অতএব আরোহ প্রণালী প্রয়োগ করে আমরা পাচ্ছি যে

$\lim_{x \to a} x^n = a^n$ এটি $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ সমগ্র পূর্ণসংখ্যার জন্য সত্য।

(3) $\lim_{x \to a} P_n(x) = P_n(a)$

যেখানে $P_n(x)$ হল একটি বহুপদরাশি (polynomial) অপেক্ষক যার রূপ হল ঃ

$P_n(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1} x + a_n$

যেখানে $a_o, a_1, \ldots\ldots a_n$ বাস্তব সংখ্যা, n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। এখন লিমিটের উপ. 13.1-এর অনুসিদ্ধান্ত (2) থেকে পাই,

$$\lim_{x \to a} P_n(x) = \lim_{x \to a} a_o x^n + \lim_{x \to a} a_1 x^{n-1} + \ldots + \lim_{x \to a} a_{n-1} x + \lim_{x \to a} a_n$$
$$= a_o a^n + a_1 a^{n-1} + \ldots + a_{n-1} a + a_n$$
$$= P_n(a)$$

(4) $\lim_{x \to a} \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = \frac{P_n(a)}{Q_n(a)}$ যেখানে $P_n(x)$ ও $Q_n(x)$ দুটি বহুপদ রাশির অপেক্ষক এবং $Q_n(a) \neq 0$

উদাহরণ ঃ

(1)
$$\begin{aligned} f(x) &= o, x = o \\ &= 1 - x, o < x < 1 \\ &= 1, x = 1 \\ &= 2 - x, 1 < x < 2 \\ &= 2, x = 2 \end{aligned}$$

এই অপেক্ষকের ক্ষেত্রে $\lim_{x\to 1} f(x)$ এবং $\lim_{x\to 3/2} f(x)$ নির্ণয় করুন

সমাধান ঃ প্রথম ক্ষেত্রে দক্ষিণসীমা ও বামসীমা আলাদা করে নির্ণয় করতে হবে, কারণ $x = 1$ বামে ও দক্ষিণে f(x)-এর আকৃতির ভিন্ন ভিন্ন রূপ দেখা যাচ্ছে।

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0}(2-x) = \lim_{x\to 1+0} 2 - \lim_{x\to 1+0} x$$

(লিমিট বীজগণিত অনুসারে)

$$= 2 - 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0}(1-x) = \lim_{x\to 1-0} 1 - \lim_{x\to 1-0} x = 1 - 1 = 0$$

$\therefore \lim_{x\to 1+0} f(x) \neq \lim_{x\to 1-0} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x)$-এর অস্তিত্ব নেই।

কিন্তু, $\lim_{x\to 3/2} f(x) = \lim_{x\to 3/2}(2-x) = 2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$

2.15. বিভিন্ন উদাহরণ ঃ

(1) দেখান $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$ এবং $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$

সমাধান ঃ আমরা ত্রিকোণমিতি থেকে জানি

$\sin x < x < \tan x$, যখন $o < x < \pi/2$ (যেখানে x হল কোণের রেডিয়ান মাপ)

এখন দেখা যাচ্ছে,

$$|\sin x - o| = |\sin x| = \sin x < x. \quad [\because \sin x > o \text{ যখন } o < x < \pi/2]$$

অতএব $|\sin x - o| < \varepsilon$ যখন $o < x < \delta = \varepsilon$

সুতরাং লিমিটের দক্ষিণ সীমার সংজ্ঞানুসারে $\lim_{x\to o+o} \sin x = 0$

ধরা যাক্ $-\pi/2 < x < o$ এক্ষেত্রে $x = -z$ ধরে আমরা পাই,

$$\lim_{x\to o-o} \sin x = \lim_{x\to o-o} \sin(-z) = -\lim_{z\to o+o} \sin z = 0 \text{ [পূর্বসিদ্ধান্ত অনুসারে]}$$

অতএব $\lim_{x\to o+o} \sin x = \lim_{x\to o-o} \sin x = o \Rightarrow \lim_{x\to o} \sin x = o$

অনুরূপে আপনারা দ্বিতীয় লিমিটটি প্রতিপন্ন করুন।

যেহেতু $\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$

(2) দেখান $\lim_{x \to o} \frac{\sin x}{x} = 1$

সমাধান ঃ ধরা যাক্ $o < x < \pi/2$. অতএব ত্রিকোণমিতি থেকে

$$\sin x < x < \tan x$$

বা, $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ .... (i)

এখন লক্ষ্য করুন $\lim_{x \to o+o} 1 = 1$

এবং $\lim_{x \to o+o} \frac{1}{\cos x} = 1$ (উপরের উদাঃ (2) এবং লিমিট বীজগণিত III এর অনুসিদ্ধান্ত দেখুন।)

এখন স্যাণ্ডউইচ্ উপপাদ্য অনুসারে, (i) থেকে আমরা পাই,

$$\lim_{x \to o+o} \frac{x}{\sin x} = 1$$

বা, $\lim_{x \to o+o} \frac{\sin x}{x} = 1$ .... (ii)

ধরা যাক্ $-\pi/2 < x < o$, এক্ষেত্রে $x = -z$ $(z > o)$ ধরে

$$\lim_{x \to o-o} \frac{\sin x}{x} = \lim_{z \to o+o} \frac{\sin(-z)}{-z} = \lim_{z \to o+o} \frac{\sin z}{z} = 1 \quad \text{...... (iii)}$$

(দক্ষিণ সীমার মান অনুসারে)

এখন (iii) এবং (ii) থেকে আমরা পাই,

$$\lim_{x \to o} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(3) প্রমাণ করুন $\lim_{x \to \infty} \frac{\cos x}{x} = o$

সমাধান ঃ

$$\left|\frac{\cos x}{x} - o\right| = \left|\frac{\cos x}{x}\right| \le \frac{1}{|x|} \qquad [\because -1 \le \cos x \le 1 \quad |\cos x| \le 1]$$

বা, $-\frac{1}{|x|} \le \frac{\cos x}{x} \le \frac{1}{|x|}$

কিন্তু $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{|x|} = o$ হওয়ায় স্যাণ্ডউইচ্ উপপাদ্য 12 অনুসারে

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x} = o$$

[*আমরা সহজেই প্রমাণ করতে পারি $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = o$ কারণ

$$\left|\frac{1}{x} - o\right|$$

$= \frac{1}{x}$, যখন $x > o$.

অতএব $\varepsilon > o$ দেওয়া থাকলে $\left|\frac{1}{x} - o\right| < \varepsilon$ যখন $x > \frac{1}{\varepsilon}$ অর্থাৎ M যদি এমন একটি ধনাত্মক সংখ্যা হয় যে $M = \frac{1}{\varepsilon}$, তাহলে $\left|\frac{1}{x} - o\right| < \varepsilon$ যখন $x > M$ হবে]

[4] দেখান $\lim\limits_{x\to o} \sin\frac{1}{x}$ এই লিমিটের অস্তিত্ব নেই।

সমাধান : এখানে $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, অতএব $x = \frac{1}{K\pi}$, K একটি পূর্ণসংখ্যা হলে, $f\left(\frac{1}{K\pi}\right) = \sin K\pi = o$, $K = \pm1, \pm2, \pm3$ .... আবার $f\left(\frac{1}{(4K+1)\pi/2}\right) = \sin(4K+1)\pi/2 = \sin\left(2K\pi + \pi/2\right)$

$= 1, K = \pm1, \pm2, \pm3$ ....

ধরা যাক্ $\lim\limits_{x\to o} f(x)$-এর অস্তিত্ব আছে এবং লিমিটের মান $= l$

তাহলে $\varepsilon > o$ একটি সংখ্যা হলে এমন একটি $\delta > o$ আছে যে

$$\left|\sin\frac{1}{x} - l\right| < \varepsilon \text{ যখন } o < |x| < \delta$$

এখন K-কে যথেষ্ট বড় ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা নিলে

$\frac{1}{K\pi}$ এবং $\frac{1}{(4K+1)\pi/2}$ বিন্দু দুটি $o<|x|<\delta$

এর মধ্যে থাকবে। তাহলে,

$|\sin K\pi - l| < \varepsilon$ এবং $|\sin (4K + 1) \pi/2) - l| < \varepsilon$

অর্থাৎ $|l| < \varepsilon$ এবং $|1 - l| < \varepsilon$

এখন যেহেতু ε একটি যথেচ্ছ ধনাত্মক সংখ্যা উপরের অসমতা দুটি যে কোন ε-এর জন্য সত্য হয় না যেমন $\varepsilon = \frac{1}{4}$ হলে উপরের অসমতা দুটি সত্য হতে পারে না।*

অতএব সিদ্ধান্ত এই $\lim_{x\to o} \sin\frac{1}{x}$ এর অস্তিত্ব নেই।

[* প্রথম অসমতা $\Rightarrow -\frac{1}{4}<l<\frac{1}{4}$ এবং দ্বিতীয়, অসমতা $\Rightarrow$

$\frac{3}{4}< l < 5/4$ এর পক্ষে এই অসমতা দুটি সত্য হতে পারে না।]

(5) দেখান (i) $\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-5x+6}{x+2}=1$ (ii) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5x+6}{x^2+x+1}=1$

(iii) $\lim_{h\to o}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ যেখানে $x > o$

সমাধান ঃ লিমিটের বীজগণিত (উপঃ 13) অনুসারে

$$\text{(i)}\quad \lim_{x\to 2}\frac{2x^2-5x+6}{x+2} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(2x^2-5x+6)}{\lim\limits_{x\to 2}(x+2)} \qquad \left[\because \lim_{x\to 2}(x+2)=2+2=4\neq 0\right]$$

$$= \frac{2\lim\limits_{x\to 2}x^2-5\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}6}{\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}2}$$

$$= \frac{8-10+6}{4} = 1$$

$$\text{(ii)}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5x+6}{x^2+x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{5}{6x}+\frac{6}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{1+\frac{5}{6}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+6\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}{1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}} = \frac{1+\frac{5}{6}.o+6.o}{1+o+o} = 1$$

[উদা (4)-এর শেষে দেখানো আছে $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=o$]

(iii) $$\lim_{h\to o}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to o}\frac{(x+h)-(x)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$$

$$=\lim_{h\to o}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\quad [\because h\to o \text{ কিন্তু } h\neq o]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2.16. কিছু গুরুত্বপূর্ণ লিমিট বা সীমা (Some standard limits)

(A) (i) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ (ii) $\lim_{y\to o}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e$

(iii) $\lim_{x\to o}\frac{a^x-1}{x}=\log_e a\,(a>o)$ (iv) $\lim_{x\to o}\frac{e^x-1}{x}=1$ [$2<e<3$]

(v) $\lim_{x\to o}\frac{\sin x}{x}=1$

(i) এর প্রমাণ এই এককের অন্তর্গত নয়।

(ii) এর প্রমাণ (i)-এর সাহায্যে এবং $y=\frac{1}{x}$ ধরে করা যাবে।

(iii) এর প্রমাণ সংক্ষেপে নীচে দেওয়া হলো।

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_e(y+1)}\log_e a$$

[$a^x-1=y$ ধরে
$x=\log_e(y+1)/\log_e a$]

$$=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\log_e(y+1)^{\frac{1}{y}}}\log_e a$$

$$=\frac{1}{\log_e\left[\lim_{y\to 0}\left\{(1+y)^{\frac{1}{y}}\right\}\right]}\log_e a\quad [\text{ উপপাদ্য 14 অনুসারে }]$$

$$=\frac{1}{\log_e e}\log_e a=\log_e a\quad [\because \log_e e=1]$$

(iv) -এর প্রমাণ (iii)-এর সাহায্যে $a = e$ ধরে। (v)-এর প্রমাণ আপনারা 2.15 উদা. 3-এ পেয়েছেন।

(B) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$, $a > 0$ এবং n একটি র‍্যাশনাল সংখ্যা।

প্রমাণ ঃ প্রথমে ধরা যাক n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

অতএব $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^n - a^n}{x - a} = \lim\limits_{x\to a} [x^{n-1} + ax^{n-2} + \ldots\ldots + a^{n-1}] = na^{n-1}$

[লিমিটের বীজগণিত সাহায্য]

ধরা যাক্ n একটি ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

অতএব $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^n - a^n}{x - a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^{-m} - a^{-m}}{x - a}$ $\quad [n = -m,\ m > 0]$

$$= \lim_{x\to a} -\frac{x^m - a^m}{(x-a)x^m a^m} = -ma^{m-1}\frac{1}{a^m a^m}$$

[$\because$ m একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা]

$$= -ma^{-m-1} = na^{n-1}.$$

এবার ধরা যাক্ $n = \dfrac{p}{q}$, q ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা এবং p হচ্ছে যেকোন পূর্ণসংখ্যা (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক)

অতএব, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^n - a^n}{x - a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^{\frac{p}{q}} - a^{\frac{p}{q}}}{x - a} = \lim\limits_{y\to b} \dfrac{y^p - b^p}{y^q - b^q}$ $\quad [x^{\frac{1}{q}} = y,\ a^{\frac{1}{q}} = b$ ধরে]

$$= \lim_{y\to b}\left(\frac{y^p - b^p}{y - b}\right)\Big/\left(\frac{y^q - b^q}{y - b}\right)$$

$$= \frac{pb^{p-1}}{qb^{q-1}} = \frac{p}{q}(b)^{p-q}$$

(পূর্ব সিদ্ধান্ত অনুসারে)

$$= \frac{p}{q}\, a^{\frac{p}{q}-1} = na^{n-1}$$

মন্তব্য ঃ অনুসন্ধিৎসুর কাছে স্বাভাবিক প্রশ্ন হতে পারে যদি n একটি ইর‍্যাশনাল সংখ্যা হয় তাহলে কি হবে? এক্ষেত্রেও উপরের লিমিটটি সত্য, তবে প্রমাণ বিশ্লেষণ-বিদ্যায় দ্রষ্টব্য।

(C) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^n - 1}{x} = n$

প্রমাণ ঃ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^n - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{y}{\log(1+y)} \dfrac{\log(1+y)}{x}$ $\quad$ [$(1+x)^n - 1 = y$ ধরে

[বা, $y \to 0$] $\quad$ $n\log(1+x) = \log(y+1)$]

$= \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{1}{\log(1+y)^{\frac{1}{y}}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{n\log(1+x)}{x}$ $\quad$ [লিমিট বীজগণিতউপা. (II) অনুসারে]

$= \dfrac{1}{\log e} n\log e = n$ $\quad$ [লিমিট 2.16 A (ii) অনুসারে]

আমরা এখন কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ লিমিটের কথা শুধু বিবৃত করছি ঃ

(D) $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ যখন $-1 < x < 1$ এবং n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

(E) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$, যখন n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

(F) $\lim\limits_{n\to\infty} x^{\frac{1}{n}} = 1$, যখন $x > 0$ এবং n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

(G) $\lim\limits_{n\to\infty} nx^n = 0$, যখন $-1 < x < 1$ এবং n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

(H) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{n} = 0$, যখন $-1 < x < 1$.

$= \infty$, যখন $x > 1$.

(I) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{\underline{|n}} = 0$, যখন n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

(J) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{m(m-1)(m-2).......(m-n+1)}{\underline{|n}} x^n = 0$, যখন $|x| < 1$

[(D) থেকে (J) লিমিটগুলির প্রমাণ এই এককের অন্তর্গত নয়]

2.17 আরও কিছু উদাহরণ

(1) প্রমাণ করুন $\lim_{x\to 0}(1+bx)^{\frac{kx+d}{kx}} = e^{\frac{db}{k}}$, $b, k, d \in R$ এবং $b, k \neq 0$

সমাধান ঃ

$$\lim_{x\to 0}(1+bx)^{\frac{kx+d}{kx}} = \lim_{x\to 0}(1+bx)^{1+\frac{d}{kx}}$$

$$= \lim_{x\to 0}(1+bx)\left\{(1+bx)^{\frac{1}{bx}}\right\}^{\frac{db}{k}}$$

$$= \lim_{x\to 0}(1+bx)\left\{\lim_{bx\to 0}(1+bx)^{\frac{1}{bx}}\right\}^{\frac{db}{k}}$$ [লিমিটের বীজগণিত অনুসারে]

$= 1.e^{\frac{db}{k}} = e^{\frac{db}{k}}$ [$\because (1+x)^{\frac{1}{x}} \to e$, যখন $x \to 0$, 2.15 A(ii) দেখুন।

(2) দেখান, $\lim_{x\to 0}(1-x^2)^{\frac{1}{x}} = 1$

সমাধান ঃ

$$\lim_{x\to 0}(1-x^2)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}(1-x)^{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\left\{(1-x)^{-\frac{1}{x}}\right\}^{-1}$$

$$= e.e^{-1} = 1$$

(3) যদি $f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^{2n}}$ হয়, তবে দেখান

$f(x) =$ 1, যখন $|x| < 1$

$\frac{1}{2}$, যখন $|x| = 1$ [n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা)

0, যখন $|x| > 1$.

সমাধান ঃ

যেহেতু $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$, যখন $|x|<1$ [2.15 (D) অনুসারে]

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(1+x^{2n}\right)=1+\lim_{x\to\infty}\left(x^n\right)^2=1+0=1 \text{ যখন } |x|<1.$$

$$|x|=1 \Rightarrow 1+x^{2n}=2$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(1+x^{2n})=2, \text{ যখন } |x|=1$$

আবার $|x|>1$ ক্ষেত্রে $\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n}=\infty$ বা $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x^{2n}}=0$

[সংজ্ঞা অনুসারে $\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n} = \infty$ যদি $|x|>1$]

অতএব, $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x^{2n}}}{\frac{1}{x^{2n}}+1}=\frac{0}{0+1}=0 \text{ যদি } |x|>1$$

অতএব, $$f(x)=\begin{cases}1, \text{ যখন } |x|<1\\ \frac{1}{2}, \text{ যখন } |x|=1\\ 0, \text{ যখন } |x|>1.\end{cases}$$

2.18 সারাংশ

এই এককের উদ্দেশ্য ও প্রস্তাবনার পরেই আছে একচল ফাংশন বা অপেক্ষকের সংজ্ঞা (2.3) । অপেক্ষক, অপেক্ষকের সংজ্ঞাঞ্চল এবং অপেক্ষকের বিম্বাঞ্চলের ধারণা স্পষ্ট করা হয়েছে বিভিন্ন উদাহরণ সহযোগে। পরবর্তী আলোচনায় অপেক্ষকের বিভিন্ন প্রকৃতি যথা 1–1, অনটু, ইনটু অপেক্ষক, আইডেন্‌টিটি অপেক্ষকের ধারণা দেওয়া হয়েছে। এর পর আছে সংযোজক অপেক্ষক এবং সেই সংক্রান্ত বিভিন্ন উপপাদ্য। পরবর্তী অংশে বিপরীত অপেক্ষক সম্বন্ধীয় আলোচনা করা হয়েছে (উদাহরণ সহযোগে)। ক্রমবর্ধমান, ক্রমক্ষীয়মান, যুগ্ম ও অযুগ্ম, পর্যাবৃত্ত অপেক্ষকের

আলোচনা সংযুক্ত হয়েছে। প্রচলিত বিভিন্ন প্রকার অপেক্ষক যথা বহুপদ রাশি, র‍্যাশনাল ও অতিক্রমী অপেক্ষকেরও আলোচনা আছে। কিছু কিছু পরিচিত অপেক্ষকের লেখচিত্র দ্বারা অপেক্ষকের আলোচনার ইতি।

লিমিট বিষয়ক আলোচনার (2.12 — 2.16) প্রথমে আছে লিমিটের সংজ্ঞা, বিভিন্ন ক্ষেত্রে এবং বিভিন্ন উদাহরণ দ্বারা ধারণাকে স্পষ্ট করা হয়েছে। লিমিটের অনন্যতা, সামীপ্য, স্যান্ডউইচ্ উপপাদ্য, লিমিটের বীজগণিত, সংযোজক অপেক্ষকের লিমিট ইত্যাদি বিষয়ে বিভিন্ন উপপাদ্য (প্রমাণ সহযোগে) যুক্ত আছে। কিছু গুরুত্বপূর্ণ লিমিট দেওয়া হয়েছে এবং তার প্রয়োগ আছে 2.17 অংশে। সবশেষে আছে প্রশ্নমালা (উত্তর বা সংকেত সহযোগে)।

2.19 প্রশ্নাবলী / (উত্তরসংকেত সহ)

(A)

1. (i) $f: A \to B$ এবং $y = +\sqrt{1-x^2}$, $x \in A, y \in B$, $A, B \subset R$ অপেক্ষকটির সংজ্ঞাঞ্চল ও বিম্বাঞ্চল নির্ণয় করুন।

সংকেত ঃ লক্ষ্য করুন $-1 \le x \le 1$ মানে y-এর বাস্তবমান পাওয়া যাচ্ছে এবং y-এর মান $0 \le y \le 1$. অতএব $A = \{x \in R: -1 \le x \le 1\}$ এবং বিম্বাঞ্চল $f(A) = \{y \in R: 0 \le y \le 1\}$.

(ii) $f: R^+ \to R^+$ এবং $y = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}, x \in R^+, y \in R^+$ অপেক্ষকটির বিম্বাঞ্চল নির্ণয় করুন।

[উঃ $f(R^+) = \{y \in R,\ 0 < y < 1\}$

(iii) $f: A \to B$ এবং $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ অপেক্ষকটির সংজ্ঞাঞ্চল ও বিম্বাঞ্চল নির্ণয় করুন।

[উঃ $A = \{x \in R: x < 1, x > 3\}$, $f(A) = R^+$]

(iv) $f: A \to B$ এবং $y = \sin^{-1}(ax - b), a, b > 0$ এই অপেক্ষকের সংজ্ঞাঞ্চল ও বিম্বাঞ্চল কত?

[উঃ $A = \left\{x \in R: \dfrac{b-1}{a} \le x \le \dfrac{b+1}{a}\right\}$, $f(A) = \left\{y \in R: -\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}\right\}$

(v) $y=\log(ax-b)$ কোন্ ক্ষেত্রে সংজ্ঞাত এবং $f(x)=\dfrac{1}{\sin x-\cos x}$ কোন্ কোন্ মানে অসংজ্ঞাত তা নির্ণয় করুন।

[উঃ $x>\dfrac{b}{a}$, $\sin x=\cos x$ এর সাধারণ সমাধান]

2. (i) $A=R, B\{y\in R:\ -1<y<1\}$ দেখান $f: A\to B$ এবং $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ অপেক্ষকটি 1–1 এবং অনটু।

উপরন্তু দেখুন $\left(f^{-1}of\right)(x)=x$ এবং $(f\,o\,f^{-1})(y)=y$

সংকেত ঃ 2.6 (1) উদাহরণ অনুসরণ করুন। $f^{-1}(y)=\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$

অতএব, $\left(f^{-1}of\right)(x)=f^{-1}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\dfrac{x/\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{1+x^2}}}=x$

অনুরূপে $(f\,o\,f^{-1})(y)=y$

(ii) এমন একটি 1–1 এবং অনটু অপেক্ষকের উদাহরণ দিন, যেখানে $f: A\to B$, $A\{x\in R: a<x<b\}$ এবং $B\{y\in R: 0<y<1\}$

[উঃ $f(x)=\dfrac{x-a}{b-a}$ একটি রৈখিক অপেক্ষক]

3. (i) $S=\{x\in R:\ 1\le x<2\}$ হলে $f: S\to R, f(x)=[x]-x$ এবং $g: S\to R, g(x)=1-x$. এই দুটি অপেক্ষকের ক্ষেত্রে দেখান $f=g$.

সংকেত ঃ 2.11 (1)-এ বৃহত্তম সংখ্যার অপেক্ষক [x] –এর সংজ্ঞা এবং 2.4.6 –এ দুটি অপেক্ষকের সমতার সংজ্ঞা দেখুন।

(ii) $f: R\to R$ এবং $f(x)=2x-1$ এবং $g: R\to R$ এবং $g(x)=\dfrac{x+1}{2}$ এই দুটি অপেক্ষকের ক্ষেত্রে দেখান $gof=fog$. এর ফলে কি সিদ্ধান্ত আপনি নেবেন। [উঃ $g=f^{-1}$]

(iii) $f: R \to R$ এবং $f(x) = ax$ এবং $g: R^+ \to R^+$ এবং $g(x) = x^2$ এই দুটি অপেক্ষকের ক্ষেত্রে দেখান $f \circ g$ সংজ্ঞাত [সংজ্ঞা দেখুন]

(iv) $f = \{(1,2), (3,5), (4,1)\}$, $g = \{(2,3), (5,1), (1,3)\}$ এই দুটি অপেক্ষকের ক্ষেত্রে $f \circ g$ এবং $g \circ f$ নির্ণয় করে পরীক্ষা করুন এই দুটি সংযোজক অপেক্ষকের সমতা।

[**সংকেত ঃ** f-এর ক্ষেত্রে, $1 \to 2$, $3 \to 5$, $4 \to 1$ এবং g-এর ক্ষেত্রে $2 \to 3$, $5 \to 1$, $1 \to 3$]

(v) $f: R \to R$ এবং $f(x) = \tan x$; $g: R \to R$ এবং $g(x) = x^5$. এই দুটি অপেক্ষকের ক্ষেত্রে দেখান $f \circ g \neq g \circ f$.

(vi) প্রত্যক্ষ করুন $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ যখন $f(x) = ax + b$, $g(x) = cx + d$, $x \in R$, a, b, c, d ধনাত্মক বাস্তব।

4. (i) দেখান $f(x) = \dfrac{x-1}{x}, x > 0$ ক্রমবর্ধমান অপেক্ষক এবং $g(x) = \dfrac{1-x}{x}$, $x > 0$ ক্রমক্ষীয়মান অপেক্ষক।

[**সংকেত ঃ** প্রথম ক্ষেত্রে $f(x_2) - f(x_1) = \dfrac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} > 0$ যখন $x_2 > x_1$]

(ii) $f(x) = \tan^{-1} x$, $g(x) = \log_e x$ অপেক্ষক দুটি তাদের সংজ্ঞাঞ্চলে যথার্থ ক্রমবর্ধমান কিনা দেখুন। [অপেক্ষকদ্বয়ের-এর চিত্রগুলি দেখুন]

5. $f(x) = 5\cos^2 x + 10\sec x - x^4$ এবং $g(x) = 5\sin x + 10\operatorname{cosec} x - x^5$ যথাক্রমে যুগ্ম ও অযুগ্ম অপেক্ষক তা দেখান।

6. $f(x) = \sin(ax + b)$ অপেক্ষকটি যে পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক তা দেখান এবং পর্যায়কাল নির্ণয় করুন [সংকেত ঃ সংজ্ঞা দেখুন] ।

(B)

1. $\varepsilon - \delta$ সংজ্ঞানুসারে দেখান (i) $\lim\limits_{x \to 0} x \sin\dfrac{1}{x} = 0$, (ii) $\lim\limits_{x \to 0} x \cos\dfrac{1}{x} = 0$,

(iii) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 4}{x^2 + 1} = \dfrac{4}{5}$

[**সংকেত ঃ** (i) $\left|x\sin\frac{1}{x}-0\right|=|x|\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le|x|<\varepsilon$ যখন $|x-0|<\delta=\varepsilon$

(iii) $\left|\frac{x^3-4}{x^2+1}-\frac{4}{5}\right|=\left|\frac{5x^2+6x+12}{5(x^2+1)}\right||x-2|.$

এখন $1<x<3$ অন্তরালে $5x^2+6x+12<5.3^2+6.3+12=75$ এবং $5(x^2+1)>5(1+1)=10$. অতএব

$$\left|\frac{x^3-4}{x^2+1}-\frac{4}{5}\right|<\frac{75}{10}|x-2|<\varepsilon,\text{ যখন } |x-2|<\frac{2}{15}\varepsilon$$

যেহেতু $1<x<3$ অন্তরালে $|x-2|<1$, অতএব $\delta=$ অবম $\left(1,\frac{2}{15}\varepsilon\right)$]

2. দেখান (i) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+e^{\frac{1}{x}}}$ এই লিমিটের অস্তিত্ব নেই (ii) $\lim_{x\to 0}\frac{xe^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$

[**সংকেত ঃ** (i) দক্ষিণসীমা ও বামসীমা যথাক্রমে 0 এবং $\frac{1}{2}$]

3. প্রমাণ করুন $\lim_{x\to a}f(x)=l \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}f(x+a)=l$

4. (i) সিগ্‌নাম অপেক্ষক (Signum function) নিম্নআকারের

$$\begin{aligned}\text{Sgn}(x)&=1 \text{ যখন } x>0\\ &=0 \text{ যখন } x=0\\ &=-1 \text{ যখন } x<0.\end{aligned}$$

দেখান $\lim_{x\to 0}\text{Sgn}(x)$ লিমিটের অস্তিত্ব নেই।

(ii) $f(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\tan^{-1}nx\right)$ হলে, প্রমাণ করুন $f(x)=\text{Sgn}(x)$.

5. প্রমাণ করুন (i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\dfrac{1}{2}$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1+3x}}{x+2x^2}=-\dfrac{1}{2}$

[**সংকেতঃ** উদাঃ 2.15 (5) দেখুন]

6. $f(x)=0$, যখন $x^2>1$

$=1$, যখন $x^2<1$

$=\dfrac{1}{2}$, যখন $x=1$

$\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)$ এবং $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)$ এই উভয় লিমিটের অস্তিত্ব পরীক্ষা করুন

7. দেখান $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}=\dfrac{1}{e}$

[সংকেত ঃ $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}=\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{-\frac{1}{y}}=\lim\limits_{y\to 0}\left\{(1+y)^{\frac{1}{y}}\right\}^{-1}=e^{-1}$.]

8. প্রমাণ করুন (i) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{cosec}x-\cot x)=0$ (ii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(1-x)}{1-x^2}=\dfrac{1}{2}$

(iii) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x+\cos x}=0$

9. সংজ্ঞানুসারে দেখান (i) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{[x]}{x}=1$.

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-[x]}{x}=0$ [সংকেত $\left|[x]-x\right|<1$, কারণ, $[x]-x$ সর্বদা $x>0$ ক্ষেত্রে 0 এবং -1-এর মধ্যবর্তী থাকে]

2.20 সহায়ক গ্রন্থ ঃ

(1) Introduction to Real Analysis – Robert G. Bartle and Donald R. Sherbert. (John Wiley & sons, INC).

(2) Differential Calculus (An Introduction to analysis) – K.C. Maity & R.K.Ghosh (New Central Book Agency)

(3) Modern Differential Calculus – S. C. Mitra. The Indian Press (Pubs.) Private Ltd. Allahabad.

(4) Higher Algebra (Abstract and Linear) S. K. Mapa, Asoke Prakasani.

একক 3 ❑ একচল ফাংশনের একটি বিন্দুতে সন্ততি

গঠন

3.1 প্রস্তাবনা

সন্তত কথাটির অর্থ অবিচ্ছিন্ন, অর্থাৎ কোন বিচ্ছিন্নতা বা ছেদ নাই। অবিচ্ছিন্নতা কথাটি বাস্তবে অনেক ক্ষেত্রেই ব্যবহার করা হয়। দেখুন, আমরা অনেক সময় বলি, "তিনি কনটিনিউয়াসলি (Continuously) কথা বলে চলেছেন।" অর্থাৎ, তাঁর কথা বলার মধ্যে কোন ফাঁক বা ছেদ নাই। ধরুন সড়ক পথে শহর A এবং শহর B-এর মধ্যে একটি নদী আছে। এখন যদি নদীর উপর সেতু না থাকে তাহলে দেখুন শহর দু'টি সড়ক পথে বিচ্ছিন্ন। কিন্তু ঐ নদীতে একটি সেতু তৈরী হলেই সড়ক পথের বিচ্ছিন্নতা দূর হয়। জল সরবরাহ লাইন, বিদ্যুৎ লাইন ইত্যাদি অনেক সময়ই বিচ্ছিন্ন হয়ে পড়ে।

এখন সড়ক পথ, জল সরবরাহ লাইন, বিদ্যুৎ লাইন প্রভৃতিকে সমতলে রেখার দ্বারা সূচিত করা যায়। জ্যামিতির সরলরেখা, বৃত্ত, অধিবৃত্ত, উপবৃত্ত লক্ষ্য করুন, ঐ রেখাগুলি অবিচ্ছিন্ন। লেখচিত্রের অবিচ্ছিন্নতা জ্যামিতিক ভাষায় প্রকাশ করা হয়। কিন্তু কখন কখন জ্যামিতিক ভাষায় প্রকাশ করতে ভ্রম সৃষ্টি হতে পারে বলে লেখচিত্রের অনুরূপ ফাংশন-এর অবিচ্ছিন্নতা দেখা যায় গাণিতিক ভাষায়। তাই, এখানে গাণিতিক দিক থেকে ফাংশনের সন্ততির আলোচনা করা হচ্ছে।

3.2 উদ্দেশ্য ঃ

সন্ততি বিষয়ক এই এককটি পাঠ করে আপনি—

- সংজ্ঞার অঞ্চলের প্রতিটি বিন্দু এবং যে কোন দুটি বিন্দুর মধ্যে ফাংশনের গঠন বুঝিয়ে দিতে পারবেন।
- সন্ততি সম্পর্কিত জ্ঞানের দ্বারা সন্তত ফাংশনের একটি বিন্দুর সামীপ্যে ফাংশনের রূপ নির্ধারণ করতে পারবেন।
- কোন বদ্ধ অন্তরালে (closed interval) ফাংশন সন্তত হলে ঐ অন্তরালে তার মান সম্বন্ধে সঠিক ধারণা করতে সক্ষম হবেন।

সন্ততি পাঠ থেকে সংজ্ঞার অঞ্চলের প্রতিটি বিন্দু এবং যে কোন দু'টি বিন্দুর মধ্যে ফাংশনের গঠন সম্পর্কে জানা যাবে। ফাংশনের সন্ততি সম্বন্ধে জানা থাকলে সন্তত ফাংশনের একটি বিন্দুর সামীপ্যে ফাংশনটির রূপ সম্বন্ধে একটি ধারণা করা যায়। আর কোনও বদ্ধ অন্তরালে (closed interval) ফাংশন সন্তত হলে ঐ অন্তরালে তার মান সম্বন্ধে সঠিক ধারণা করা সম্ভব।

3.3.1 একটি বিন্দুতে সন্ততি ঃ

ধরা যাক $f(x)$ একটি ফাংশন যার সংজ্ঞাঞ্চলে $x = a$ বিন্দু আছে। $f(x)$ ফাংশন $x = a$ -তে সন্তত হবে যদি

(i) $f(a)$ -এর একটি নির্দিষ্ট বাস্তব মান থাকে

এবং (ii) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ হয়।

অর্থাৎ, f (x) ফাংশন $x = a$ -তে সন্তত হবে যদি যে কোন সংখ্যা $\varepsilon > 0$ -এর জন্য এমন একটি সংখ্যা $\delta > 0$ পাওয়া যায় যে, $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ হয়, যখন $|x - a| < \delta$; (এখানে δ -এর মান a এবং ε -এর উপর নির্ভরশীল।)

মন্তব্য ঃ উপরের সংজ্ঞা থেকে বুঝতে পারা যাচ্ছে যে, a বিন্দুর একটি সামীপ্যে (neighbour hood) f (x) এর অস্তিত্ব আছে।

উদাহরণ 1 ঃ

$f(x) = 5$, x- এর সকল মানের জন্য সন্তত। এখানে $x = a$ একটি বিন্দু নিলে $f(a) = 5$. যদি $\varepsilon > 0$ দেওয়া থাকে তবে $|f(x) - f(a)| = |5 - 5| = 0$ অতএব যে কোন $\delta > 0$-এর জন্য $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ যখন $|x - a| < \delta$. অতএব $f(x)$, $x = a$ বিন্দুতে সন্তত।

উদাহরণ 2 ঃ $f(x) = x$, $x = a$ বিন্দুতে সন্তত।

প্রমাণ ঃ যদি $\varepsilon > 0$ দেওয়া থাকে,

তাহলে $|f(x) - f(a)| = |x - a| < \varepsilon$ হবে, যদি $|x - a| < \delta = \varepsilon$ হয়।

অতএব $\delta = \varepsilon$ নিলে দেখা যাচ্ছে।

অতএব f (x) $x = a$ বিন্দুতে সন্তত।

$\therefore$ $f(x) = x$ ফাংশন $x = a$-তে সন্তত।

উদাহরণ 3 ঃ

$f(x) = 3x + 1$, $x = 1$-তে সন্তত।

সমাধান ঃ

ধরুন, $\varepsilon > 0$

$f(1) = 4$

$|f(x) - f(1)| = |3x + 1 - 4| = 3|x - 1|$

$\therefore$ $|f(x) - f(1)| < \varepsilon$ যদি $3|x - 1| < \varepsilon$.

অর্থাৎ $|f(x) - f(1)| < \varepsilon$

যদি $|x - 1| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

এখানে, $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$ ধরুন, এবং দেখুন,

$|f(x) - f(1)| < \varepsilon$ তখন $|x - 1| < \delta$.

$\therefore$ $f(x) = 3x + 1$, $x = 1$-তে সন্তত।

মন্তব্য 1 ঃ

একটি ফাংশন f(x)-এর একটি বিন্দু $x = a$ তে সন্তত হওয়ার জন্য প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত হল যে (i) f (a)-এর মান নির্দিষ্ট থাকতে হবে (ii) a বিন্দুর একটি সামীপ্যে f(x)-কে সংজ্ঞাত হতে হবে। (iii) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ -এর অস্তিত্ব চাই এবং লিমিটের মান f(a)-এর সমান হতে হবে।

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ থাকার অর্থ বামহাতের লিমিট $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ এবং ডানহাতের লিমিট $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ এদের মান থাকতে হবে এবং ঐ দুটি সমান হতে হবে এবং f (a)-এর সমান হতে হবে।

মন্তব্য 2 ঃ

অসন্ততি (Discontinuity at a point) **ঃ**

সংজ্ঞা : একটি ফাংশন f (x)-কে $x = a$ বিন্দুতে **অসন্তত** বলা হবে যদি f(x) ঐ বিন্দুতে সন্তত না হয়। অতএব অসন্তত হওয়ার জন্য প্রয়োজন সন্ততির যে কোন একটি শর্ত পালিত না হওয়া। অতএব f(x) একটি বিন্দু $x = a$-তে অসন্তত হবে যদি নীচের একটি বা একাধিক সত্য হয় ঃ—

(1) f (x), $x = a$ বিন্দুতে সংজ্ঞাত নয়।

(2) $x = a$ বিন্দুর এমন কোন সামীপ্য নেই যেখানে f (x) সংজ্ঞাত।

(3) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$-এর অস্তিত্ব নেই।

(4) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$-এর মান f (a) এর সমান নয়।

(5) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a-0} f(x)$

(6) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a-0} f(x) \neq f(a)$

মন্তব্য 3 :

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(a+h)$ (যদি লিমিট থাকে)

প্রমাণ ঃ আমরা একটি রূপান্তর নিচ্ছি। অর্থাৎ x চল থেকে h চলে যাচ্ছি। যদি $h = x - a$ এই রূপান্তর নিই, তবে h-এর কোন মানের জন্য x-এর একটি নির্দিষ্ট মান আছে। $f(a+h)$ এর ও একটি নির্দিষ্ট মান আছে। অধিকন্তু $x \to a$ হলে, $x - a \to 0$ যাবে। অতএব $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(a+h)$.

উদাহরণ ঃ 4. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, $x = 0$-তে সন্তত।

সমাধান ঃ ধরুন, $\varepsilon > 0$

$$|f(x)-f(0)| = \left|\frac{1}{x^2+1}-1\right| = \frac{|x|^2}{|x^2+1|} < x^2$$

অতএব, $|f(x)-f(0)| < x^2 < \varepsilon$ যখন, $|x| < \sqrt{\varepsilon}$

$\therefore$ যে কোন $\varepsilon > 0$-এর জন্য একটি $\delta > 0$ (এখানে, $\delta = \sqrt{\varepsilon}$) পাওয়া গেল যাতে,

$|f(x)-f(0)| < \varepsilon$ যখন $|x| < \delta$

$\therefore$ $f(x)$ ফাংশনটি $x = 0$-তে সন্তত।

উদাহরণ ঃ 5 দেখুন $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x = 0$ -তে সন্তত নহে।

সমাধান ঃ যেহেতু $f(0)$ অসংজ্ঞাত, সুতরাং $f(x)$ ফাংশন $x = 0$ -তে সন্তত নহে।

আবার $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1}{x} = \infty$ এবং $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{1}{x} = -\infty$

অতএব $x = 0$ বিন্দুতে বাম ও দক্ষিণ লিমিটদ্বয় অসীম। অতএব $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$ -এর অস্তিত্ব নেই। অতএব এই দুটি কারণে $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ফাংশনটি $x = 0$ বিন্দুতে সন্তত নহে।

উদাহরণ ঃ 6

দেখুন, $f(x) = [x]$, x -এর কোন পূর্ণমানে সন্তত নহে।

সমাধান ঃ সংজ্ঞানুসারে $[x] = x$ থেকে ছোট বা সমান বৃহত্তম পূর্ণসংখ্যা।

ধরুন a একটি পূর্ণসংখ্যা।

$\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \lim\limits_{x\to a-} [x] = \lim\limits_{x\to a-} (a-1) = a-1$ (যেহেতু x, a-এর থেকে সামান্য ছোট অতএব $[x] = a-1$)

এবং $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} [x] = a$ (যেহেতু এখানে x, a থেকে সামান্য বড়, অতএব $[x] = a$)

এখানে, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ -এর অস্তিত্ব নাই।

$\therefore$ $f(x) = [x]$, x -এর কোন পূর্ণমানে সন্তত নহে।

উদাহরণ 7 :

$$f(x) = ax^2 + 5, \quad x \neq 3$$
$$= 50 \quad , \; x = 3$$

a -এর কোন্ মানের জন্য f(x) ফাংশনটি x = 3 -তে সন্তত হবে?

সমাধান : $f(3) = 50$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} (ax^2 + 5) = 9a + 5 \cdot$$

f(x) ফাংশন x = 3 -তে সন্তত হতে হলে $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$

অর্থাৎ যখন, $9a + 5 = 50$

বা, $a = 5$

উদাহরণ 8 :

$f(x) = e^x$ ফাংশন x -এর যে কোন বাস্তব মানে সন্তত।

সমাধান :

ধরা যাক, $x = a$, যেখানে a একটি বাস্তব সংখ্যা $f(a) = e^a$

যেহেতু $\lim_{x\to a}\left(e^x - e^a\right)$

$$= e^a \lim_{x\to a} \frac{e^{x-a} - 1}{x - a} \; \lim_{x\to a}(x - a)$$

$$= e^a . 1 . 0 = 0$$

$$\therefore \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} e^x = e^a = f(a)$$

$\therefore f(x) = e^x$, $x = a$ -এ সন্তত।

যেহেতু a যে কোন বাস্তব সংখ্যা, সুতরাং $f(x) = e^x$, x -এর প্রতিটি বাস্তব মানে সন্তত।

উদাহরণ 9 :

$f(x) = \log_e x, x > 0$, হলে দেখান যে $f(x)$ x -এর যে কোন মানে সন্তত।

সমাধান :

ধরুন x -এর যে কোন মান $a > 0$.

$$\lim_{h\to 0}\left[\log_e(a+h)-\log_e a\right]=\lim_{h\to 0}\log_e\left(1+\frac{h}{a}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{\log_e\left(1+\frac{h}{a}\right)}{\frac{h}{a}}\times\frac{h}{a}$$

যেহেতু $h\to 0$, অতএব $h\neq 0$.

$$=\frac{1}{a}\lim_{h\to 0}\left\{h.\frac{\log_e\left(1+\frac{h}{a}\right)}{\frac{h}{a}}\right\}$$

$\left(\because h\to 0, \quad \therefore \frac{h}{a}\to 0\right)$

$$=\frac{1}{a}\lim_{h\to 0}h\lim_{h\to 0}\frac{\log_e\left(1+\frac{h}{a}\right)}{\frac{h}{a}}=\frac{1}{a}\times 0\times 1=0$$

($\because$ প্রত্যেকটি লিমিটের আলাদাভাবে অস্তিত্ব আছে)

অতএব $\lim_{x\to a}\log_e x$-এর অস্তিত্ব আছে এবং লিমিটের মান $=\log_e a=f(a)$.

উদাহরণ 10 ঃ
$$
\begin{aligned}
f(x) &= 3+2x \;; & -\frac{3}{2}\le x<0\\
&= 3-2x \;; & 0\le x<\frac{3}{2}\\
&= -3-2x \;; & x\ge\frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

$f(x)$ ফাংশন $x=0$-তে সন্তত কিন্তু $x=\frac{3}{2}$-তে সন্তত নহে।

সমাধান ঃ $f(0)=3-0=3$

$$\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0-}(3+2x)=3$$

$$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}(3-2x)=3$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0+}f(x)=3=\lim_{x\to 0+}f(x)=3=f(0)$$

$\lim_{x\to 0+}f(x)$ এর অস্তিত্ব আছে এবং মান $f(0)$ এর সমান।   ন।

এবং $f(x)$ সন্তত।

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = -3 - 2.\frac{3}{2} = -6$$

$$\lim_{x \to \frac{3}{2}-} f(x) = \lim_{x \to \frac{3}{2}-} (3 - 2x) = 3 - 2.\frac{3}{2} = 0$$

$$\lim_{x \to \frac{3}{2}+} f(x) = \lim_{x \to \frac{3}{2}+} (-3 - 2x) = -3 - 2.\frac{3}{2} = -6$$

$$\therefore \lim_{x \to \frac{3}{2}-0} f(x) \neq \lim_{x \to \frac{3}{2}+0} f(x)$$

$\therefore \lim_{x \to \frac{3}{2}} f(x)$ -এর অস্তিত্ব নেই।

$\therefore$ $f(x)$ ফাংশন $x = \frac{3}{2}$-তে সন্তত নয়।

উদাহরণ 11 ঃ

$$f(x) = \frac{|x|}{x}, \quad x \neq 0$$

$$= 0 \quad , \quad x = 0$$

$f(x)$ ফাংশনটি $x = 0$ -তে সন্তত হবে কিনা দেখুন।

সমাধান ঃ এখানে $|x| = x$, যখন $x > 0$

$= 0$, যখন $x = 0$

$= -x$,যখন $x < 0$.

$$\therefore \quad \lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0-} \frac{(-x)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0-} (-1) = -1$$

($\because x \neq 0$ অতএব লব ও হর থেকে x উৎপাদক অপসারণযোগ্য।

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{x}{x} = 1.$$

$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ -এর অস্তিত্ব নেই।

$\therefore$ $f(x)$ ফাংশন $x = 0$-তে সন্তত নয়।

উদাহরণ 12 ঃ

দেখান যে $y = \sin x$ ফাংশনটি x-এর প্রতিটি বিন্দুতে সন্তত।

আমরা প্রথমে দেখাব যে $x = 0$ বিন্দুতে ফাংশনটি সন্তত।

কারণ $\lim_{x\to 0} \sin x = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}.x$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} . \lim_{x\to 0} x$ [লিমিটের উপপাদ্য অনুসারে যেহেতু প্রতিটি লিমিটের অস্তিত্ব আছে]

$= 1.\ 0 = 0$

$\therefore \lim_{x\to 0} \sin x = 0 = \sin 0$

$\therefore$ $x = 0$ বিন্দুতে $\sin x$ সন্তত।

এবার যে কোন একটি বিন্দু $x = a$ ধরা যাক, আমরা $x = a + h$ বসিয়ে পাই

$\sin x = \sin(a+h) = \sin a \cos h + \cos a \sin h$

$\therefore \lim_{x\to a} \sin x = \lim_{h\to 0} \sin\ (a+h)$

$= \lim_{h\to 0} (\sin a \cos h + \cos a \sin h)$

$= \lim_{h\to 0} (\sin a \cos h) + \lim_{h\to 0} (\cos a \sin h)$

(যেহেতু দুইটি লিমিটের অস্তিত্ব আছে অতএব লিমিটের মৌলিক উপপাদ্য অনুসারে)

$= \sin a \lim_{h\to 0} \cos\ h + \cos a \lim_{h\to 0} \sin h \cdot$

$= \sin a \lim_{h\to 0} \left(1 - 2\sin^2 \frac{h}{2}\right) + \cos a \lim_{h\to 0} \sin h$

$= \sin a\ .(1 - 2\times 0) + \cos a.0$

$= \sin a \cdot$

অতএব প্রমাণিত হল $\lim_{x\to a} \sin x = \sin a$. অতএব $x = a$ বিন্দুতে $\sin x$ ফাংশনটি সন্তত। অতএব $\sin x$ ফাংশনটি সমস্ত x বিন্দুতে সন্তত।

উদাহরণ 13 ঃ দেখান যে $f(x)=x\sin\frac{1}{x},\ x\neq 0$

$$=0, \quad x=0$$

$x=0$ বিন্দুতে সন্তত।

(সংকেত $\left|x\sin\frac{1}{x}-0\right|=|x|\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leq|x|<\varepsilon$ যখন $|x|<\delta=\varepsilon$ যেহেতু $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leq 1$ সর্বদা।)

অনুশীলনী

1. দেখান যে, $f(x)=x, \quad 0<x<1$

$$=2-x \quad x\geq 1$$

ফাংশনটি $x=1$-তে সন্তত।

2. দেখান যে, $f(x)=(1+2x)^{\frac{1}{x}},\ x\neq 0$

$$=e^2, \quad x=0$$

ফাংশনটি $x=0$-তে সন্তত।

[**সংকেত ঃ** $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\log_e(1+2x)}=\lim_{x\to 0} e^{\frac{2.\log_e(1+2x)}{2x}}$

$=\lim_{2x\to 0} e^{\frac{2.\log_e(1+2x)}{2x}}=e^2, \quad (\because \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1)$]

3. দেখান যে, $f(x)=[x]$ ফাংশন $x=2$-তে সন্তত নহে।

[**সংকেত ঃ** উদাহরণ (6) দেখুন।]

4. দেখান যে, $f(x)=\cos x$, x-এর সকল বাস্তব মানে সন্তত। [**সংকেত ঃ** উদাহরণ (12) দেখুন।]

5. দেখান যে, $f(x)=x\cos\left(\frac{1}{x}\right),\ x\neq 0$

$$=0, \quad x=0$$

$x=0$ তে সন্তত।

[**সংকেত ঃ** উদাহরণ (13) দেখুন]

3.3.2 বিন্দুর বাম অথবা ডান দিক থেকে সন্ততি ঃ

যদি $f(x)$ ফাংশনটি $x = a$-এর ডানদিকে সংজ্ঞাত হয় এবং যদি $\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$; তা হলে $f(x)$ ফাংশনটি $x = a$ বিন্দুতে ডান দিক থেকে সন্তত বলা হবে। (Right hand Continuous)

যদি $f(x)$ ফাংশনটি $x = a$ -এর বামদিকে সংজ্ঞাত হয় এবং $\lim_{x \to a-} f(x) = f(a)$ হয় ; তা হলে $f(x)$ ফাংশনটি $x = a$ বিন্দুতে বাম দিক থেকে সন্তত বলা হবে। (Left hand Continuous)

যদি $f(x)$ ফাংশনটি $x = a$ বিন্দুতে বাম এবং ডান দিক থেকে সন্তত হয়, তাহলে $f(x)$ ফাংশনটি $x = a$ -তে সন্তত কারণ $\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a) = \lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$

উদাহরণ 1 ঃ
$$f(x) = \begin{cases} (x^2 - 1)/(x-1) & , \quad x < 1 \\ 2 & , \quad x = 1 \\ x + 2 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

দেখুন $f(x)$ ফাংশনটি $x = 1$ -এর বামদিক থেকে সন্তত কিন্তু ডানদিক থেকে সন্তত নহে।

সমাধান ঃ $f(1) = 2$

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} \frac{(x^2 - 1)}{(x-1)} = \lim_{x \to 1-} (x+1) = 2 \qquad (\because x \neq 1)$$

$\therefore$ $f(x)$ ফাংশনটি $x = 1$ -এর বামদিক থেকে সন্তত।

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} (x+2) = 3 \neq f(1)$$

$\therefore$ $f(x)$ ফাংশনটি $x = 1$ বিন্দুর ডানদিক থেকে সন্তত নহে।

$\therefore$ $f(x)$ ফাংশনটি $x = 1$ -তে সন্তত নহে।

উদাহরণ 2 ঃ
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , \quad x \neq 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

$f(x)$ ফাংশনটি $x = 1$ বিন্দুতে (i) বামদিক থেকে সন্তত কিনা,

(ii) ডানদিক থেকে সন্তত কিনা,

এবং (iii) সন্তত কিনা।

দেখুন।

সমাধান ঃ $f(0)=1$

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0-} \frac{1}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0$$

$$(\because x \to 0- \quad \therefore \frac{1}{x^2} \to \propto)$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0$$ **(এক্স্‌পোনেনশিয়াল ফাংশনের ধর্ম অনুসারে)**

এখানে, (i) $\lim_{x\to 0-} f(x) \neq f(0)$

$\therefore$ f(x) ফাংশনটি x = 0-তে বামদিক থেকে সন্তত নহে।

(ii) $\lim_{x\to 0+} f(x) \neq f(0)$

$\therefore$ f(x) ফাংশনটি x = 0-তে ডানদিক থেকে সন্তত নহে।

(iii) $\lim_{x\to 0-} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0+} f(x)$

$$\therefore \lim_{x\to 0} f(x) = 0 \neq f(0)$$

$\therefore$ f(x) ফাংশনটি x = 0 তে সন্তত নহে।

মন্তব্য ঃ এখানে $f(x)$ ফাংশনটি $x=0$ বিন্দুর বাম এবং ডান উভয় দিকেই সংজ্ঞাত। এবং ফাংশনটির $x=0$ বিন্দুতে মান পরিবর্তন করে $f(0)=0$ করলে ফাংশনটি সন্তত হবে।

3.3.3 মুক্ত অন্তরালে সন্ততি (Continuity in an open internal)

f(x) ফাংশনকে (a,b) মুক্ত অন্তরাল বা (a,b) ওপেন্‌ ইন্‌টারভেলে সন্তত বলা হবে যদি f(x) প্রতিটি x, $a<x<b$ -তে সন্তত হয়।

উদাহরণ ঃ $f(x)=\frac{1}{x}$ ফাংশনটি (0, 1) এ সন্তত।

3.3.4 বদ্ধ অন্তরালে সন্ততি (Continuity in closed interval)

f(x) ফাংশন-কেবদ্ধ অন্তরাল [a, b]-তে সন্তত বলা হবে, যদি নিচের শর্তগুলি একসাথে পূরণ হয় ঃ

(i) f (x) প্রতিটি x, $a<x<b$-তে সন্তত হয়।

(ii) f (x), $x=a$ -তে ডানদিক থেকে সন্তত হয়।

এবং (iii) f (x), $x=b$ -তে বামদিক থেকে সন্তত হয়।

উদাহরণ ঃ $f(x)=\frac{1}{x}$ ফাংশনটি $[1, 2]$-তে সন্তত।

মন্তব্য ঃ $\frac{1}{x}$ ফাংশনটি $(0,1)$ মুক্ত অন্তরালে সন্তত কিন্তু বদ্ধ অন্তরাল $[0,1]$ -এ সন্তত নহে—কারণ ফাংশনটি $x=0$ বিন্দুতে ডানদিক থেকে সন্তত নয়।

3.4 একটি বিন্দুতে সন্তত ফাংশনের ধর্ম

3.4.1 একটি ফাংশনের একটি বিন্দুতে সন্তিতির ব্যাখ্যা ঃ

সংজ্ঞানুসারে, $f(x)$-কে $x=a$ বিন্দুতে সন্তত বলা হবে যদি যে কোন $\varepsilon>0$ দেওয়া থাকলে, এমন একটি সংখ্যা $\delta>0$ নির্ণয় করা সম্ভব যে,

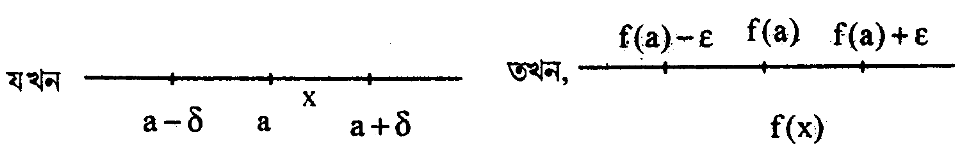
$|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ যখন $|x-a|<\delta$.

বিশদভাবে

$-\varepsilon<f(x)-f(a)<\varepsilon$ যখন $-\delta<x-a<\delta$.

অর্থাৎ $f(a)-\varepsilon<f(x)<f(a)+\varepsilon$ যখন $a-\delta<x<a+\delta$

উপরের অসমতা থেকে আমরা পাই যে,

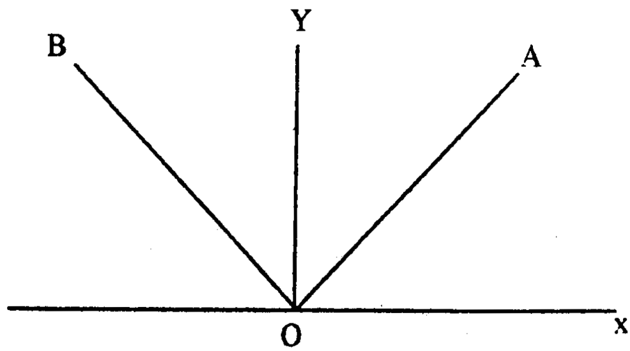


x যদি $(a-\delta, a+\delta)$ এই অঞ্চলের যে কোন বিন্দু হয় তবে $f(x)$ তখন $(f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$ এই অন্তরালের একটি বিন্দু হবে। অতএব $f(x), x=a$ বিন্দুতে সন্তত হলে, যে কোন $\varepsilon>0$ এর জন্য a বিন্দুর একটি সামীপ্য আছে $(a-\delta<x<a+\delta)$ যার প্রতিটি বিন্দু x এর জন্য

$f(a)-\varepsilon<f(x)<f(a)+\varepsilon$ হবে অর্থাৎ $f(a)$-এর ε-সামীপ্যে $f(x)$ থাকবে।

উদাহরণ ঃ

$f(x)=|x|$, $x=0$ বিন্দুতে সন্তত।

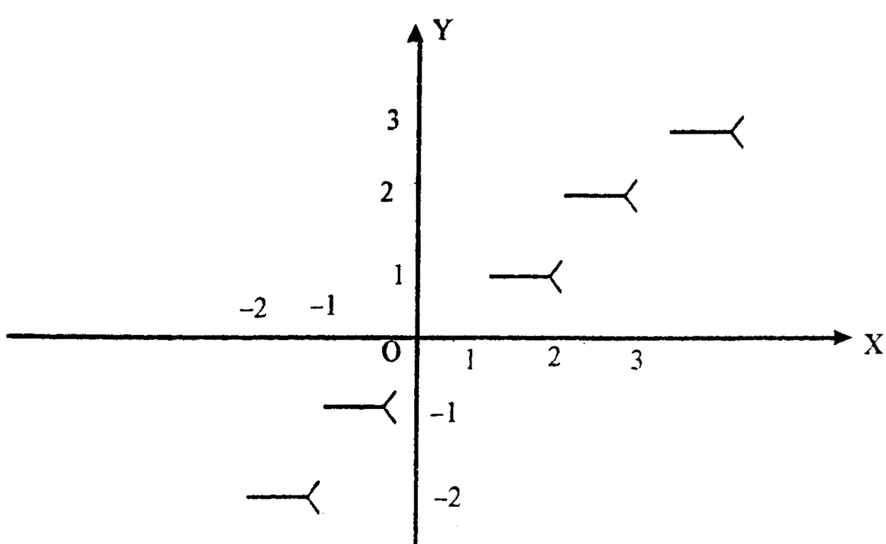


$f(x)=x,\ x\geq 0 \qquad \lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+} x=0$

$\quad =-x,\ x<0. \qquad \lim\limits_{x\to 0-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-} (-x)=0$

চিত্রে দেখুন $x=0$-এর বামদিকে B বিন্দু থেকে রেখা বরাবর ঐ বিন্দুর ডানদিকে A বিন্দুতে যেতে রেখার উপর কোন ছেদ নেই। $\therefore f(x)=|x|$, $x=0$ বিন্দুতে সন্তত।

2) দেখুন $f(x)=[x]$, x-এর কোন পূর্ণমানে সন্তত নয়।



চিত্রে দেখুন $f(x)$ ফাংশনটি x -এর যে কোন পূর্ণমানে ডানদিক থেকে সন্তত। বামদিক থেকে সন্তত হচ্ছে

$\therefore f(x)=[x]$, x -এর কোন পূর্ণমানে সন্তত নয়।

আবার দেখুন পাশাপাশি দুটি পূর্ণমানের মাঝে $f(x)$ ধ্রুবক।

$\therefore f(x)=[x]$, পাশাপাশি দুটি পূর্ণমানের মাঝের যে কোন বিন্দুতে সন্তত।

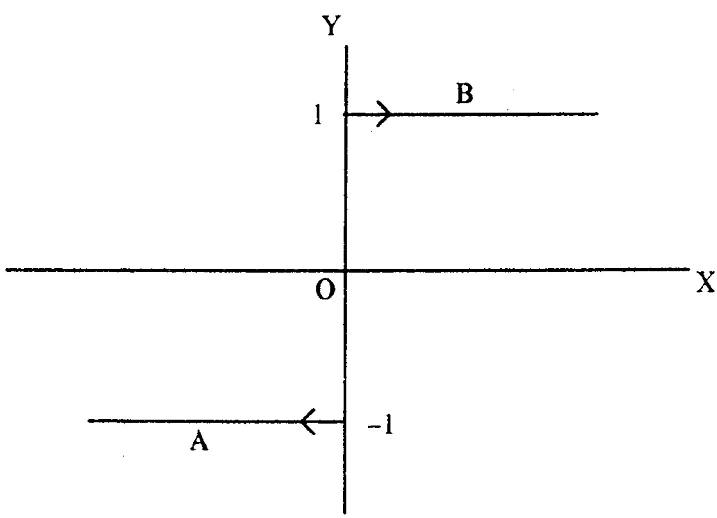
3) দেখুন $f(x)=x$, যখন, $0 \le x < \frac{1}{2}$

$=1$, যখন, $x=\frac{1}{2}$

$=1-x$, যখন, $\frac{1}{2} < x < 1$

$x=\frac{1}{2}$ বিন্দুতে সন্তত নয়।

4) $f(x)=\frac{|x|}{x}$, যখন $x \ne 0$, $f(0)=1$, $x=0$ বিন্দুতে সন্তত কিনা পরীক্ষা করুন।



ফাংশনের রেখা বরাবর A বিন্দু হইতে B বিন্দু যাওয়া সম্ভব নয়, কারণ $x=0$ বিন্দুতে রেখায় ছেদ আছে।

$\lim_{x\to 0-} f(x)=-1$ এবং $x>0$ -এর জন্য $\lim_{x\to 0+} f(x)=1$.

$\therefore$ $f(x)$ ফাংশন $x=0$-তে সন্তত নয়।

অনুশীলনী ঃ $f(x) = 0 \;,\; x^2 > 1$
$= 1 \;,\; x^2 < 1$
$= \frac{1}{2} \;,\; x^2 = 1$

ফাংশনের চিত্র অঙ্কন করুন। লিমিট নিয়ে দেখান যে, $x = 1$ -তে ফাংশনটি সন্তত নয়।

3.4.2 একটি বিন্দুতে সন্তত ফাংশনের বীজগাণিতিক ধর্ম

উপপাদ্য 1. $f(x)$, $g(x)$ ফাংশনদ্বয় $x = a$-তে সন্তত হলে $f(x) + g(x)$ ফাংশনটি $x = a$-তে সন্তত হবে।

প্রমাণ ঃ যেহেতু $f(x)$ ও $g(x)$ ফাংশনদ্বয় $x = a$ বিন্দুতে সন্তত অতএব $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$.

অতএব লিমিটের বীজগণিত (আগের একক দেখুন) অনুসারে $\lim\limits_{x\to a} [f(x) + g(x)] = f(a) + g(a)$.

অতএব দেখা গেল যে, $f(x) + g(x)$ এই ফাংশনের $x = a$ বিন্দুতে লিমিট আছে এবং সেই লিমিট ফাংশনটির $x = a$ বিন্দুতে মানের সমান। অতএব $x = a$ বিন্দুতে $f(x) + g(x)$ ফাংশনটি সন্তত।

উপপাদ্য 2 . $f(x), g(x)$ ফাংশনদ্বয় $x = a$ বিন্দুতে সন্তত হলে $f(x) - g(x)$ ফাংশনটি $x = a$ -তে সন্তত হবে।

প্রমাণ ঃ এখানে $F(x) = f(x) - g(x)$ এই ফাংশনটির লিমিট নির্ণয় করতে হবে।

যেহেতু $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ এবং $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ এই লিমিট দুটি বর্তমান, অতএব $F(x)$ -এর লিমিট আছে এবং $\lim\limits_{x\to a} F(x) = f(a) - g(a) = F(a)$

$\therefore$ $F(x)$ ফাংশন $x = a$ বিন্দুতে সন্তত।

উপপাদ্য 3. $f(x)$ ও $g(x)$ ফাংশন দুটি $x = a$ বিন্দুতে সন্তত হলে $f(x)\,g(x)$ এই ফাংশনটি ঐ বিন্দুতে সন্তত।

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে যে $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

এবং $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$

অতএব লিমিট সম্পর্কিত উপপাদ্য থেকে পাই,

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x) = f(a)g(a)$$

$\therefore$ $f(x)g(x)$ এই ফাংশনটি $x = a$ বিন্দুতে সন্তত।

উপপাদ্য 4. $f(x)$ ও $g(x)$ ফাংশন দুটি $x=a$ বিন্দুতে সন্তত হলে এবং $g(a)\neq 0$ হলে $\frac{f(x)}{g(x)}$ এই ফাংশন $x=a$ বিন্দুতে সন্তত।

কারণ, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ এবং $\lim\limits_{x\to a} g(x)=g(a)$

দেওয়া আছে যে $g(a)\neq 0$.

অতএব লিমিটের উপপাদ্য অনুসারে

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\frac{f(a)}{g(a)}$$

$\therefore \frac{f(x)}{g(x)}$ ফাংশনটি $x=a$ বিন্দুতে সন্তত।

উপপাদ্য 5.

$y=f(x)$ ফাংশনটি $x=a$-তে সন্তত এবং $z=g(y)$ ফাংশনটি $y=b$ তে সন্তত। $b=f(a)$ হলে, $z=g\{f(x)\}$ ফাংশনটি $x=a$-তে সন্তত হবে।

প্রমাণ ঃ

$z=g(y), y=b$-তে সন্তত।

যে কোন $\varepsilon>0$-এর জন্য একটি $\delta'>0$ আছে যাতে

$$|g(y)-g(b)|<\varepsilon,\ \text{যখন},\ |y-b|<\delta' \qquad \text{.......}\ (1)$$

আবার $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)=b$,

$\varepsilon=\delta'$ ধরলে একটি $\delta''>0$ পাবেন যার জন্য

$$|f(x)-b|<\delta'\ \text{যখন}\ |x-a|<\delta''$$

অর্থাৎ, $$|y-b|<\delta'\ \text{যখন}\ |x-a|<\delta'' \qquad \text{.......}\ (2)$$

অতএব (1) এবং (2) হতে.

$$|g(y)-g(b)|<\varepsilon\ \text{যখন},\ |x-a|<\delta''$$

বা, $$|g(f(x))-g(f(a))|<\varepsilon\ \text{যখন},\ |x-a|<\delta''$$

অতএব, প্রমাণিত হল যে,

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(f(a)).$$

অর্থাৎ, $z = g\{f(x)\}$ ফাংশন $x = a$-তে সন্তত।

উদাহরণ ঃ $y = f(x) = \sin x,\ z = g(y) = e^y$

$y = \sin x$, যে কোন বাস্তব x-এ সন্তত।

ধরুন, $x = a$

$$\therefore \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \sin x = \sin a.$$

আবার, $g(y)$ যে কোন বাস্তব x-এ সন্তত।

$$\therefore \lim_{y\to \sin a} g(y) = \lim_{y\to \sin a} e^y = e^{\sin a}$$

$$\lim_{x\to a} g\{f(x)\} = \lim_{x\to a} e^{f(x)} = \lim_{x\to a} e^{\sin x} = e^{\sin a}.$$

উপপাদ্য 6.

যদি ফাংশন $f(x)$, c বিন্দুতে সন্তত হয় এবং $f(c) \neq 0$ তাহলে একটি $\delta > 0$ পাওয়া যাবে, যার জন্য c-এর একটি সামীপ্য $(c-\delta,\ c+\delta)$ আছে যার সকল x-এর জন্য $f(x)$ ও $f(c)$-এর চিহ্ন (sign) একই হবে। (অর্থাৎ $f(c) > 0$ হলে, $f(x) > 0$ এবং $f(c) < 0$ হলে, $f(x) < 0$ হবে।)

প্রমাণ ঃ $f(x)$ ফাংশনটি c বিন্দুতে সন্তত।

যে কোন বাস্তব $\varepsilon > 0$ এর জন্য একটি $\delta > 0$ পাবেন যাতে $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ যখন $|x - c| < \delta$

বা, $f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon$.

যখন, $c - \delta < x < c + \delta$ .... (i)

$\because f(c) \neq 0$, সুতরাং $f(c)$ হয় ধনাত্মক নতুবা ঋণাত্মক।

ধরুন, $f(c) > 0$

$\varepsilon = \frac{1}{2} f(c)$ নিলে একটি $\delta_1 > 0$ পাবেন যাতে, (i) থেকে

$\frac{1}{2} f(c) < f(x) < \frac{3}{2} f(c)$ যখন, $c - \delta_1 < x < c + \delta_1$ (1) থেকে

$\because f(c) > 0;\ \therefore (c-\delta_1, c+\delta_1)$ এর মধ্যবর্তী সকল x-এর জন্য $f(x) > 0$

আবার যদি, $f(c) < 0$.

$\therefore\ \varepsilon = \frac{1}{2}(-f(c))$ নিলে একটি $\delta_2 > 0$ পাওয়া যাবে যার জন্য $\frac{3}{2}f(c) < f(x) < \frac{1}{2}f(c)$ যখন, $c-\delta_2 < x < c+\delta_2$ ((i) হতে)

কিন্তু $f(c) < 0$, $(c-\delta_2, c+\delta_2)$ এর মধ্যবর্তী সকল x-এর জন্য $f(x) <$

অতএব প্রমাণিত হল।

উদাহরণ ঃ $f(x) = \sin x$, $x = \frac{1}{2}\pi$ -তে সন্তত এবং $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 > 0$.

$\delta = \frac{\pi}{4}$ ধরিলে দেখুন, $\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$-এর মধ্যবর্তী সকল x -এর জন্য $\sin x > 0$.

মন্তব্য ঃ $f(c) = 0$ হলে এবং $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(c) = 0$ হলে তখন c-এর কোন সামীপ্য নিলে f(x) এর সম্বন্ধে কিছু বলা যায় না। যেমন $f(x) = \sin x$ হলে $f(0) = 0$. $x = 0$-এর যে কোন সামীপ্য $(-\delta, \delta)$, (যেখানে $\delta > 0$), নিলে এমন বিন্দু আছে যেখানে $f(x) < 0$ এবং আবার এমন বিন্দু আছে যেখানে $f(x) > 0$.

উপপাদ্য 7.

$f(x)$ ফাংশন $x = a$ বিন্দুতে সন্তত হলে, $|f(x)|$ ফাংশন $x = a$ বিন্দুতে সন্তত হবে।

প্রমাণ ঃ ধরুন, $\varepsilon > 0$ যে কোন বাস্তব সংখ্যা। $\because \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

$\therefore$ একটি $\delta > 0$ একটি পাবেন যাতে,

$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ যখন $|x - a| < \delta$.

$\therefore$ যদি $f(a) = 0$ হয় তবে $f(x)$, $x = a$ বিন্দুতে সন্তত।

উপপাদ্য 6 থেকে $f(x) > 0$ যদি $f(a) > 0$, $f(x) < 0$ যদি $f(a) < 0$, একটি সামীপ্যে। অতএব ঐ সামীপ্যে অর্থাৎ $|x - a| < \delta_1$ $\big||f(x)| - |f(a)|\big| = |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ যখন $|x - a| <$ অবম (δ, δ_1)

$\therefore \lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |f(a)|$

$\therefore$ $|f(x)|$ ফাংশন $x = a$ -তে সন্তত।

মন্তব্যঃ উপপাদ্য 5-এর বিপরীত সত্য নহে। আমরা একটি উদাহরণ নিয়ে বিষয়টি দেখাব।

উদাহরণ ঃ $f(x) \ = \ 1 \ , \ x \geq 0$

$\qquad\qquad = \ -1 \ , \ x < 0$

এখানে, $f(x)$ ফাংশনটি $x = 0$-তে সন্তত নয় কিন্তু $|f(x)|$ ফাংশনটি $x = 0$ -তে সন্তত। অতএব দেখা গেল $|f(x)|$ কোন বিন্দুতে সন্তত হলে $f(x)$ ঐ বিন্দুতে সন্তত না হতে পারে। অতএব উপ: 5-এর বিপরীত সত্য নয়।

সমাধান ঃ $f(0)=1$

$\lim_{x\to 0+} f(x)=1$ কিন্তু $\lim_{x\to 0-} f(x)=-1$.

$\therefore \lim_{x\to 0} f(x)$ -এর অস্তিত্ব নাই।

$\therefore f(x)$ ফাংশনটি $x=$ তে সন্তত নয়।

$$\begin{aligned} |f(x)| &= 1 \quad, \quad x\geq 0 \\ &= 1 \quad, \quad x<0 \end{aligned}$$

$|f(0)|=1$

$\lim_{x\to 0+} |f(x)|=1$ এবং $\lim_{x\to 0-} |f(x)|=1$

$\therefore \lim_{x\to 0} |f(x)|=1=|f(0)|$

$\therefore f(x)$ ফাংশনটি $x=0$-তে সন্তত।

3.5 বদ্ধ অন্তরালে সন্তত ফাংশনের ধর্ম

প্রথমে আমরা কয়েকটি ধারণা ব্যাখ্যা করে পরে সন্তত অপেক্ষকের ধর্ম বিবৃত করব।

3.5.1 সীমা (Bound)

সংজ্ঞা ঃ একটি ফাংশন $f(x)$ একটি বদ্ধ অন্তরালে $[a, b]$ -তে সংজ্ঞাত আছে। এরূপ ফাংশনকে ঐ অন্তরালে সীমা যুক্ত (bounded) বলা হবে যদি এমন দুটি বাস্তবসংখ্যা k ও K পাওয়া যায় যে যখন $x\in[a,b]$ থাকবে তখন

$$k\leq f(x)\leq K$$

এই অসমতা x- এর ঐ অন্তরালে প্রত্যেকটি মানের জন্য সত্য হবে। অর্থাৎ $f(x)$-এর মান k ও K -এর মধ্যে থাকবে। k ও K-কে যথাক্রমে $f(x)$-এর ঐ অন্তরালে একটি নিম্ন ও উচ্চ সীমা বলা হয়।

মন্তব্য ঃ এই সংজ্ঞা থেকে স্পষ্ট যে যদি k, K দুটি ঐরূপ সংখ্যা থাকে, তবে অসংখ্য ঐরূপ সংখ্যা থাকবে যেমন $k-1$, $K+1$ অর্থাৎ $k-\alpha$, $K+\beta$ যেখানে $\alpha>0$, $\beta>0$ যে কোন দুটি বাস্তব সংখ্যা।

মন্তব্য ঃ অনেক সময় একটি অন্তরালে $f(x)$ সংজ্ঞাত হলে $f(x)$ সীমাযুক্ত নাও হতে পারে। যেমন— $f(x)=\frac{-1}{x}$, $x\in(0,\ 1)$ $f(x)$ মুক্ত অন্তরালে $(0, 1)$-এ সন্তত। এখানে $f(x)<2$ যখন $x\in(0,\ 1)$

কিন্তু যে কোন সংখ্যা $k < 0$ এর জন্য x যদি $0 < x < 1$ ও $x < -\frac{1}{k}$ হয়।

$$f(x) = -\frac{1}{x} < k$$

অতএব নিম্ন সীমা নেই।

আবার এমনও হতে পারে নিম্ন সীমা আছে কিন্তু উচ্চ সীমা নেই। কিম্বা নিম্ন বা উচ্চ কোন সীমাই নেই।

ফাংশনের ক্ষুদ্রতম ঊর্ধ্ব সীমা (least upper bound)

কোন অন্তরালে (a, b) -তেএকটি ফাংশন সংজ্ঞাত হলে এবং ফাংশনটির ঊর্ধ্ব সীমা থাকলে, তবে উহার এমন একটি ঊর্ধ্ব সীমা M থাকবে যে

(i) M অপেক্ষা ছোট কোন ঊর্ধ্বসীমা নেই।

(ii) যে কোন ধনাত্মক সংখ্যা ε-এর জন্য, অন্তত একটি $x \in [a, b]$ থাকবে যার জন্য $f(x) > M - \varepsilon$.

এরূপ ঊর্ধ্ব সীমাকে ফাংশনের ঐ অন্তরালে ক্ষুদ্রতম ঊর্ধ্বসীমা বলা হয়। (প্রথম এককে দেখুন)

অনুরূপভাবে একটি ফাংশন কোনও অন্তরাল [a, b] -তে সংজ্ঞাত হলে এবং উহার একটি নিম্ন সীমা থাকলে দেখানো যায় যে উহার একটিবৃহত্তম নিম্ন সীমা m (greatest lower bound) আছে যাহা নিম্নের শর্ত দুটি পালন করে ঃ

(i) m অপেক্ষা বড় কোন নিম্নসীমা নেই—

(ii) যে কোন ধনাত্মক সংখ্যা ε-এর জন্য, অন্তত একটি $x \in [a, b]$ থাকিবে যার জন্য

$$f(x) < m + \varepsilon$$

উদাহরণস্বরূপ :

(i) $f(x) = \sin x, \quad \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$-তে সংজ্ঞাত ও বদ্ধ কেন না

$$-1 \le \sin x \le 1, \quad x \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

এখানে ক্ষুদ্রতম উচ্চসীমা = 1, বৃহত্তম নিম্নসীমা = −1

$$(2)\ f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 2 \\ -1, & x = 2 \\ x+1, & 2 < x \le 3 \end{cases}$$

এখানে [0, 3] অন্তরালে ক্ষুদ্রতম ঊর্ধ্বসীমা = 4 এবং বৃহত্তম নিম্নসীমা = −1

3.5.2 বদ্ধ অন্তরাল (closed interval)

সন্তত ফাংশনের কিছু ধর্ম ঃ

নিচের উপপাদ্যগুলির প্রমাণ পরে (বৈশ্লেষিক গাণিতিক বিদ্যায়) পড়বেন।

উপপাদ্য 8 ঃ বোলজানোর (Bolzano's) উপপাদ্য ঃ

বিবৃতি ঃ যদি f (x) ফাংশন [a, b] -তে সন্তত এবং $f(a).f(b) < 0$ হয় তবে অন্তত একটি বিন্দু ξ, $a < \xi < b$ পাওয়া যায় যেখানে, $f(\xi) = 0$.

উদাহরণ 1 ঃ $f(x) = \sin x$ ফাংশন $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$-তে সন্তত।

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ এবং $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

এখন, $-\frac{\pi}{2} < 0 < \frac{\pi}{2}$ এবং $\sin 0 = 0$.

উদাহরণ 2. $f(x) = x^2 + x - 6$ ফাংশনটি [0, 3] এই অন্তরালে সন্তত এবং $f(0)f(3) < 0$. এখানে $\xi = 2$ এমন যে $f(\xi) = 0$.

উপপাদ্য 9. f(x) ফাংশন [a, b] -তে সন্তত হলে f(x) ফাংশনটি সীমাবদ্ধ হবে এবং সন্ততি অঞ্চলে ফাংশনটি উহার ক্ষু ঃ উঃ সীমা এবং বৃঃ নিঃ সীমার মান ধারণ করিবে।

উদাহরণ ঃ $f(x) = |x|$ ফাংশন [−1, 1] তে সন্তত।

আবার, [−1, 1] তে সমস্ত x-এর জন্য $0 \le |x| \le 1$.

এখানে $f(x)$ -এর বৃহত্তম নিম্নসীমা এবং ক্ষুদ্রতম ঊর্দ্ধসীমা হল যথাক্রমে 0 এবং 1. এবং $f(0) = 0, f(1) = 1 = f(-1)$.

3.5.3 অন্তর্বর্তীমান বিষয়ক (Intermediate value property)

উপপাদ্য 10.

বিবৃতি ঃ যদি f(x) ফাংশন [a, b]-তে সন্তত এবং $f(a) \neq f(b)$ হলে $f(a)$ এবং $f(b)$ -এর অন্তর্বর্তী প্রত্যেকটি সংখ্যার জন্য অন্ততঃ একটি c, $a < c < b$ পাওয়া যাবে যেখানে $f(c)$-এর মান সেই সংখ্যার সমান।

উদাহরণ 1. $f(x) = x^2$

এই ফাংশনটি (1, 2) বদ্ধ অন্তরালে সন্তত।

$f(1)=1$, $f(2)=4$. এখন একটি সংখ্যা k এমন হয় যে, $1 < k < 4$, তাহলে $1 < \sqrt{k} < 2$ এবং $f(\sqrt{k}) = (\sqrt{k})^2 = k$. অতএব এই ফাংশনটির জন্য অন্তর্বর্তীমান উপপাদ্য সত্য।

3.6 অসন্ততি (Discontinuity)

3.6.1 এখানে আমরা উদাহরণ সহযোগে বিভিন্ন ধরণের অসন্ততির ব্যাখ্যা করব।

প্রথম শ্রেণীর অসন্ততি (Discontinuity of first kind)

$x = a$-কে $f(x)$ ফাংশনের প্রথম শ্রেণীর অসন্তত বিন্দু বলা হয় যদি $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$ এবং $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ উভয়ের অস্তিত্ব থাকে কিন্তু সমান না হয়। এক্ষেত্রে $f(a)$ সংজ্ঞাত হতে পারে বা সংজ্ঞাত নাও হতে পারে।

উদাহরণ ঃ 1.
$$\begin{aligned} f(x) &= x \quad , \quad x < 0 \\ &= 2+x \quad , \quad x > 0 \\ &= 0 \quad , \quad x = 0 \end{aligned}$$

দেখুন, $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+} (2+x) = 2$

$\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-} x = 0$

$f(0) = 0$

এখানে $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 2 \neq 0 = \lim\limits_{x \to 0+} f(x)$.

$x = 0$ কে $f(x)$– এর প্রথম শ্রেণীর অসন্তত বিন্দু বলা হবে।

উদাহরণ 2 ঃ $f(x) = [x]$

এখন, $f(0) = 0$

কিন্তু, $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = -1$ এবং $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 0$

$\therefore \lim\limits_{x \to 0-} f(x)$ এবং $\lim\limits_{x \to 0+} f(x)$ উভয়েই বিদ্যমান কিন্তু সমান নয়।

$\therefore$ $x = 0, f(x)$–এর প্রথম শ্রেণীর অসন্তত বিন্দু।

3.6.2 অপসারণযোগ্য অসন্ততি ঃ (Removable Discontinuity)

$x = a$-কে $f(x)$ ফাংশনের অপসারণযোগ্য অসন্তত বিন্দু বলা হবে, যদি $\lim\limits_{x\to a} f(x)$-এর সুনির্দিষ্ট অস্তিত্ব থাকে কিন্তু উহা $f(a)$-এর সমান নয়।

এই অসন্ততিকে অপসারণযোগ্য বলা হয় কারণ $f(a)$-কে $\lim\limits_{x\to a} f(x)$-এর মানের সমান পুনঃসংজ্ঞায়িত করলে, $x = a$-তে $f(x)$-এর অসন্ততি দূরীভূত হয়।

উদাহরণ 3

$$f(x) = \frac{x^2}{x};\ x \neq 0$$
$$= 1\ ;\ x = 0$$

এখানে, $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0+} x \qquad (\because x \neq 0)$

$$= 0$$

$$\lim_{x\to 0-} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0-} x \qquad (\because x \neq 0)$$

$$= 0$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^2}{x} = 0 = \lim_{x\to 0-} \frac{x^2}{x}.$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0$$

কিন্তু, $f(0) = 1 \ \therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$

$\therefore\ x = 0, f(x)$-এর অপসারণযোগ্য অসন্তত বিন্দু।

এখন দেখুন, $f(x)$-কে $x = 0$ বিন্দুতে পুনঃ সংজ্ঞায়িত করা হ'ল।

$$f(x) = \frac{x^2}{x}\ , \quad x \neq 0$$
$$= 0\ , \quad x = 0$$

$f(x)$-এর এই সংজ্ঞানুযায়ী,

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$.

$\therefore$ নবসংজ্ঞাত ফাংশনটি, $x = 0$ বিন্দুতে সন্তত।

উদাহরণ 4 .

$$f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}, \quad x \neq 0$$
$$= 1, \quad x = 0$$

দেখুন, $x = 0$ বিন্দুটি $f(x)$ -এর অপসারণ যোগ্য অসন্তত বিন্দু।

$$f(0) = 1$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{2\,\frac{x^2}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}. \qquad (\because x \to 0 \quad \therefore \frac{x}{2} \to 0)$$

এখানে, $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2} \neq f(0)$.

$\therefore$ $x = 0$ বিন্দুটি f(x)-এর অপসারণযোগ্য অসন্তত বিন্দু।

এবার, $f(x)$ -কে পুনঃসংজ্ঞায়িত করা হ'ল।

$$f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}, \quad x \neq 0$$
$$= \frac{1}{2}, \quad x = 0$$

$f(x)$ -এর নূতন সংজ্ঞানুযায়ী,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2} = f(0).$$

$f(x)$ ফাংশনটি, $x = 0$ বিন্দুতে সন্তত।

3.6.3 অন্যান্য অসন্ততির উদাহরণ

উদাহরণ 5

$f(x)=\dfrac{x-3}{\sqrt{x-3}}$ ফাংশনটির $x=3$ অসন্তত বিন্দু।

যেহেতু $x<3$ হলে ফাংশনটি সংজ্ঞাত হয় না। $(\because x\neq 3)$.

অতএব $\lim\limits_{x\to 3-} f(x)$ বিদ্যমান নয়।

কিন্তু, $\lim\limits_{x\to 3+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3+}\dfrac{x-3}{\sqrt{x-3}}=\lim\limits_{x\to 3+}\sqrt{x-3}$ $\quad(\because x\neq 3)\ x>3$

$$=0$$

আবার $f(3)$ অনির্ণেয় (বা অসংজ্ঞাত)।

$\therefore$ $x=3$ বিন্দুটি $f(x)$ ফাংশনের একটি অসন্তত বিন্দু।

সসীম অসন্ততি (Finite discontinuity) যদি $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ এবং $f(a)$ এই তিনটির অস্তিত্ব থাকে, সসীম হয় এবং উহাদের অন্তত যে কোন দুটি পরস্পর অসমান হয়, সেক্ষেত্রে $x=a$ কে $f(x)$ এর সসীম অসন্ততি (finite discontinuity বা jump discontinuity) বলা হয়।

অসীম অসন্ততির উদাহরণ (Example of Infinite Discontinuity) ঃ

যদি $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ বা $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ এদের অন্তত একটি $\pm\infty$ হয়, তাহলে $x=a$ কে অসীম অসন্ততি বলা হয়।

উদাহরণ 6 ঃ $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ ফাংশনটির $x=0$ বিন্দুটিতে অসীম অসন্ততি আছে।

দেখুন, $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=\infty$; $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\infty$;

$\therefore$ $x=0$ বিন্দুটি $f(x)$ ফাংশনের অসীম অসন্ততি।

3.7 সারাংশ

1. একটি বিন্দুতে অপেক্ষকের সন্ততি ঃ

ফাংশন $f(x), x = a$ -তে সন্তত হবে যদি $\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a)$ হয়। অর্থাৎ $\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x) = f(a)$ হয়।

2. একটি বিন্দুতে বামদিক থেকে সন্ততি ঃ

ফাংশন $f(x)$, $x = a$ -তে বামদিক থেকে সন্তত হবে যদি, $\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a)$ হয়।

3. একটি বিন্দুতে ডানদিক থেকে সন্ততি ঃ

ফাংশন $f(x), x = a$ -তে ডানদিক থেকে সন্তত হবে, যদি $\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a)$ হয়।

4. একটি

ফাংশন $f(x)$ বদ্ধ অন্তরাল [a, b]-তে সন্তত হবে যদি

(i) $f(x)$ মুক্ত অন্তরাল (a, b)-এর প্রতিটি বিন্দুতে সন্তত হয়।

(ii) $f(x)$, $x = a$-তে দক্ষিণ দিক থেকে সন্তত হয়, অর্থাৎ যদি $\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a)$ হয়।

এবং (iii) $f(x)$, $x = b$-তে বামদিক থেকে সন্তত হয়। অর্থাৎ $\lim_{x\to b-0} f(x) = f(b)$ হয়।

5. একটি বিন্দুতে সন্তত ফাংশনের ধর্ম ঃ

(i) $f(x)$, $g(x)$, $x = a$ তে সন্তত হলে,

$$f(x) \pm g(x),\ f(x).g(x)\ x = a \text{ -তে সন্তত, } \frac{f(x)}{g(x)} \text{ সন্তত যদি } g(a) \neq 0$$

(ii) $f(x)$ ফাংশন $x = a$ -তে সন্তত হলে $|f(x)|, x = a$ বিন্দুতে সন্তত হবে।

(iii) $y = f(x)$ ফাংশন $x = a$-তে সন্তত এবং $z = g(y)$, $y = b$-তে সন্তত এবং $b = f(a)$ হলে সংযোজক ফাংশন (Composite function) $z = g\{f(x)\}, x = a$ -তে সন্তত হবে।

(iv) যদি ফাংশন $f(x)$, c বিন্দুতে সন্তত হয় এবং $f(c) \neq 0$ হয়, তাহলে একটি $\delta > 0$ পাওয়া যাবে যাতে $(c-\delta, c+\delta)$ এর অন্তঃস্থ সকল x এর জন্য $f(x)$ এবং $f(c)$ এর চিহ্ন (sign) একই হবে।

6. বদ্ধ অন্তরালে সন্তত ফাংশনের কিছু ধর্ম ঃ

(i) বোলজানোর (Bolzano's) উপপাদ্য ঃ

যদি $f(x)$ ফাংশন $[a,b]$ -তে সন্তত এবং $f(a).f(b) < 0$ হয় তখন অন্তত একটি বিন্দু ξ, $a < \xi < b$ আছে যেখানে $f(\xi) = 0$.

(ii) সীমাবদ্ধতা সম্পর্কিত উপপাদ্য ঃ

$f(x)$ ফাংশন বদ্ধ অন্তরাল $[a, b]$ তে সন্তত হলে $f(x)$ ফাংশনটি সীমাবদ্ধ হবে এবং ঐ অঞ্চলে $f(x)$ -এর ক্ষুদ্রতম উচ্চসীমা এবং বৃহত্তম নিম্নসীমা মান ঐ অন্তরালে দুটি বিন্দুতে ধারণ করিবে।

(iii) অন্তবর্তী মান (Intermediate value) উপপাদ্য ঃ

$f(x)$ ফাংশন $[a, b]$-তে সন্তত এবং $f(a) \neq f(b)$ হলে $f(a)$ এবং $f(b)$ -এর মধ্যকর্তী প্রত্যেকটি মান k -এর জন্য অন্ততঃ একটি c, $a < c < b$ পাওয়া যাবে যাতে $f(c) = k$ হবে।

3.8 প্রশ্নাবলী

(1) $$\begin{aligned} f(x) &= x, && \text{যখন, } 0 < x < 1 \\ &= 2 - x, && \text{যখন, } 1 \leq x \leq 2 \\ &= x - \frac{1}{2}x^2, && \text{যখন, } x > 2. \end{aligned}$$

দেখান যে $f(x), x = 2$ -তে সন্তত।

(2) $$\begin{aligned} f(x) &= (1 + 2x)^{\frac{1}{x}} &&, \ x \neq 0 \\ &= e^2 &&, \ x = 0 \end{aligned}$$

দেখান যে $f(x), x = 0$-তে সন্তত।

(3) $f(x) = [x] + [-x]$

$x = 0$ তে $f(x)$ ফাংশন সন্তত কিনা দেখুন।

(4) $$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + x + 1 &&, \ 0 < x < 1 \\ &= 2x + 1 &&, \ 1 \leq x \leq 2 \end{aligned}$$

$x = 1$ -তে $f(x)$ ফাংশন সন্তত কিনা দেখান।

(5) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$ যখন $x\neq 3$, এবং $f(3)=6$

$x=3$-তে $f(x)$ ফাংশন কি সন্তত?

(6) $$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin(a^2x^2)}{x}, \quad x\neq 0,\ a\neq 0 \\ &= k, \quad x=0 \end{aligned}$$

k-এর মান নির্ণয় করুন যাতে $f(x)$, $x=0$ বিন্দুতে সন্তত হবে।

(7) দেখান যে, $$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^4+3x^3+5x^2}{\sin x}, \quad x\neq 0 \\ &= 0, \quad x=0 \end{aligned}$$

$x=0$-তে সন্তত কিন্তু $$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^4+3x^3+5x^2+4x}{\sin x}, \quad x\neq 0 \\ &= 0, \quad x=0 \end{aligned}$$

$x=0$-তে সন্তত নয়।

(8) দেখান যে, $f(x)=x^3-3x+1$ যে কোন x-এর মানে সন্তত এবং বদ্ধ অন্তরালে সন্ততার ধর্ম থেকে প্রমাণ করুন, $x^3-3x+1=0$ সমীকরণ-এর একটি বীজ $(1, 2)$-এর মধ্যে অবস্থিত।

(9) $$\begin{aligned} f(x) &= x\sin\frac{1}{x}, \quad x\neq 0 \\ &= 9, \quad x=0 \end{aligned}$$

দেখান যে, $f(x)$, $x=0$ বিন্দুতে অসন্তত। এই অসন্ততাটি কোন্ শ্রেণীভুক্ত বলুন।

(10) প্রমাণ করুন, $$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\tan^{-1}x}{x}, \quad x\neq 0 \\ &= 0, \quad x=0 \end{aligned}$$

$x=0$ বিন্দুতে অসন্তত।

(11) দেখান যে, বহুপদরাশি $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ যে কোন সসীম x বিন্দুতে সন্তত। $(a_0, a_1 \ldots\ldots a_n$ ধ্রুবক)

3.8.1 তৃতীয় এককের সাধারণ অনুশীলনী

1. দেখান যে, $f(x) = 1$ যখন x র‍্যাশনাল

$= -1$ যখন x হর‍্যাশনাল

হলে, $f(x)$ প্রতিটি বিন্দুতে অসন্তত।

সমাধান ঃ $x = c$ যেখানে c র‍্যাশনাল হলে $f(c) = 1$ এখন $\varepsilon > 0$ একটি প্রদত্ত সংখ্যা হলে যে কোন বাস্তবসংখ্যা $\delta > 0$ নিলে, $(c-\delta, c+\delta)$ এই অন্তরালে অসংখ্য র‍্যাশনাল ও অসংখ্য ইর‍্যাশনাল সংখ্যা পাওয়া যাবে। ধরা যাক $x_1, x_2 \in (c-\delta, c+\delta)$ এবং x_1 র‍্যাশনাল ও x_2 ইর‍্যাশনাল। তাহলে $f(x_1) = 1, f(x_2) = -1$

$$\therefore |f(x_2) - f(c)| = |-1-1| = 2$$

অতএব $\varepsilon < 2$ হলে, দেখা যাচ্ছে δ যাহাই হোক না কেন $x_2 \in (c-\delta, c+\delta)$ আছে যার জন্য $|f(x_2) - f(c)| > \varepsilon$. অতএব সান্তত্যের সংজ্ঞা পালিত হচ্ছে না। অতএব $f(x)$, c বিন্দুতে সন্তত নহে। একই -ভাবে c একটি ইর‍্যাশনাল সংখ্যা হলে, x_1 একটি র‍্যাশনাল বিন্দু $\in (c-\delta, c+\delta)$ -এর হলে $|f(x_1) - f(c)| = |1+1| = 2 > \varepsilon$.

অতএব c ইর‍্যাশনাল হলেও $f(x)$ ঐ বিন্দুতে সন্তত নহে।

2. দেখান যে $\cos x$ প্রত্যেক বিন্দুতে সন্তত।

ধরা যাক $x = c$ একটি বিন্দু। $\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$

$$\text{অতএব } \lim_{x\to 0} \cos x = \lim_{x\to 0}\left(1 - 2\sin^2\frac{x}{2}\right) = 1 - 2.0 \qquad \left(\because \lim_{x\to 0} \sin\frac{x}{2} = 0\right)$$

$$= 1 = \cos 0$$

অতএব $\cos x, x = 0$ বিন্দুতে সন্তত। এবার $c \neq 0$ বিন্দু নেওয়া যাক। $x = c + h$ বসালে

$$\cos x = \cos(c+h)$$

$$= \cos c \cosh - \sin c \sin h \qquad ....(1)$$

এখন $x \to c$ হলে, $h \to 0$ হয়। আর $\lim_{h\to 0} h = 0, \lim_{h\to 0} \sin h = 0$

অতএব (1) থেকে মৌলিক লিমিট উপপাদ্য থেকে

$$\lim_{x\to c} \cos x = \lim_{h\to 0} (\cos c \cosh - \sin c \sinh) \text{ .... } (1)$$

$$= \lim_{h\to 0} (\cos c \cos h) - \lim_{h\to 0} (\sin c \sin h)$$

$$= \cos c \lim_{h\to 0} \cos h - \sin c \lim_{h\to 0} \sin h$$

$$= \cos c.1 - \sin c.0$$

$$= \cos c$$

$\therefore$ $\cos x, x = c$ বিন্দুতে সন্তত।

3. দেখান যে $f(x) = \tan x,\quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ এই অন্তরালে সন্তত।

প্রমাণ, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

এখন $\sin x$ ও $\cos x$ উভয়েই প্রতিটি x-এর জন্য সন্তত। কিন্তু $\cos x = 0$ যদি $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n = 0 \pm 1, \pm 2$........অতএব $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ এই মুক্ত অন্তরালে $\cos x \neq 0$ অতএব $\tan x,\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ এই অন্তরালের প্রতিটি বিন্দুতে সন্তত।

4. দেখান যে $f(x) = \cot x,\ 0 < x < \pi$ এই অন্তরালে সন্তত।

[3-এর মত করে যুক্তি দিন]

5. নিম্নলিখিত ফাংশনের অসন্ততি বিন্দু নির্ণয় করুন।

(i) $f(x) = [x] + \sin\frac{1}{x}$.

(ii) $f(x) = x\cos\frac{1}{x}, (x \neq 0), f(0) = 0$

(iii) $f(x) = \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}, (x \neq 0), f(0) = 0$

(iv) $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}, (x \neq 2), f(2) = 0$

3.9 সংকেতসহ 3.8 প্রশ্নাবলীর উত্তরমালা

1) $\lim\limits_{x\to 2-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2+} f(x) = f(2)$

2) 3.3.1.(2) দেখুন।

3) $\lim\limits_{x\to 0-} = -1+0 = -1$; $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 0+(-1) = -1$; $f(0) = 0$

উত্তর : সন্তত নয়।

4) $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = 3$, $f(1) = 3$,

উত্তর : সন্তত।

5) $f(3)$ সন্তত।

উত্তর : সন্তত নয়।

6) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^2 x \sin(a^2x^2)}{a^2x^2} = 0$

উত্তর : $k = 0$

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4+3x^3+5x^2}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(x^2+3x+5)}{\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)} = 0 = f(0)$. অতএব সন্তত

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4+3x^3+5x^2+4x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3+3x^2+5x+4}{\dfrac{\sin x}{x}} = 4 \neq f(0)$ অতএব অসন্তত

8) যে কোন একটি x -এর নাম a ধরুন।

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} (x^3-3x+1) = a^3-3a+1 = f(a)$

শেষ অংশ ঃ ধরুন, $f(x) = x^3-3x+1$

$f(1) = -1, f(2) = 3$

3.6.1 উপপাদ্যের দ্বারা প্রমাণ করুন।

9) উত্তর ঃ অপসারণযোগ্য অসন্তত।

10) ধরুন $x = \tan\theta$, $\because x \to 0 \quad \therefore \theta \to 0$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{\theta\to 0} \frac{\tan^{-1}(\tan\theta)}{\tan\theta} = \lim_{\theta\to 0} \frac{\theta.\cos\theta}{\sin\theta} = 1 \neq f(0)$$

11) আমরা জানি, যে কোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা m-এর জন্য এবং $x = c$ বিন্দুতে

$\lim_{x\to 0} x^m = c^m (m = 1,2,3,4........)$ (লিমিটের এককে দেখুন)

$$\lim_{x\to c} \left(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n\right)$$

$= \lim_{x\to c} \left(a_0 x^n\right) + \lim_{x\to c} \left(a_1 x^{n-1}\right) + ... + \lim_{x\to c} \left(a_{n-1}x\right) + a_n$ লিমিটের বীজগণিত ধর্ম অনুসারে

$= a_0 c^n + a_1 c^{n-1} + ... + a_{n-1}c + a_n = f(c)$

$\therefore f(x)$, যে কোন বিন্দু $x = c$ তে সন্তত।

3.10 সহায়ক পুস্তক

1. Hardy, G. H. A Course of Pure Mathematics, Cambridge University Press.
2. Apostol, Tom M. Mathematical Analysis, Addison – Wesley Publishing Company.

একক 4 □ একচল ফাংশনের অন্তরকলজ (ডেরিভেটিভ্) ও উচ্চতর ঘাতসহ, উত্তরোত্তর অন্তরকলন; ধর্মসমূহ।

গঠন

4.1 প্রস্তাবনা ঃ

অনধীন চলের পরিবর্তনের জন্য অধীন চল রাশির পরিবর্তনের হার জানা খুবই গুরুত্বপূর্ণ। এই পরিবর্তন-এর হার থেকে অনধীন এবং অধীন চল সম্পর্কে অনেক কিছু জানা যায়। এই পরিবর্তনের হার দুই ধরনের (i) গড় পরিবর্তনের হার এবং (ii) তাৎক্ষণিক পরিবর্তনের হার। ফাংশনের কোন বিন্দুর সাপেক্ষে তাৎক্ষণিক পরিবর্তনের হার এর অস্তিত্ব থাকিলে সেটাই হবে ফাংশনের ঐ বিন্দুতে অন্তরকলজ। বাস্তবে, এই পরিবর্তন-এর হার দ্বারা বিন্দুর বেগ, ত্বরণ, বিন্দুর গতিপথের বক্রতা, সঞ্চারপথের কোন বিন্দুতে স্পর্শকের নতি ইত্যাদি জানা যায়।

4.2 উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করে আপনি—

- ফাংশনের বিশ্লেষণের বিষয়টি সম্যক অনুধাবন করতে পারবেন।
- অন্তরকলজের সংজ্ঞা নির্দেশ করতে পারবেন।
- অন্তরকলনযোগ্য ফাংশনের কিছু কিছু বিশেষ ধর্ম লক্ষ্য করবেন এবং অন্তরকলজের চিহ্নের উপর নির্ভর করে ফাংশনের ধরন নির্দেশ করতে পারবেন।
- ফাংশনের কোন বিন্দুতে প্রথম ও দ্বিতীয় অন্তরকলজ থেকে পরে ফাংশনের বক্রতা, বৃহত্তম এবং ক্ষুদ্রতম মান নির্ণয় করতে পারবেন।

এই পাঠে অন্তরকলজের সংজ্ঞা পড়ুন। অন্তরকলনযোগ্য ফাংশন কিছু কিছু ধর্ম লক্ষ্য করবেন এবং অন্তরকলজের চিহ্নের উপর নির্ভর করে ফাংশনের ধরন বুঝতে পারবেন। ফাংশনের বিশ্লেষণ-এর জন্য এই পাঠটি খুবই গুরুত্বপুর্ণ। ফাংশনের কোন বিন্দুতে প্রথম ও দ্বিতীয় অন্তরকলজ পাঠ করে ফাংশনের বক্রতা, বৃহত্তম এবং ক্ষুদ্রতম মান জানা যায়।

4.3 অন্তরকলজের সংজ্ঞা

ধরা যাক $f(x)$ ফাংশন মুক্ত অন্তরালে (a,b)-তে সংজ্ঞাত। $x \in (a,b)$ একটি বিন্দু হলে পার্শ্ববর্তী বিন্দু $x+\Delta x$ নিলে $f(x)$ এর মান পরিবর্তিত হয়। উহাকে $\Delta f(x)$ দ্বারা চিহ্নিত করলে আমরা পাই $\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$.

অতএব $(x, x+\Delta x)$ এই অন্তরালে এর গড় পরিবর্তনের হার $= \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$.

অতএব x বিন্দুতে এর পরিবর্তনের হার পাওয়া যাবে যদি

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$-এর অস্তিত্ব থাকে। $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ -কে বলা হয় $f(x)$-এর x বিন্দুতে অন্তরকলজ বা ডেরিভেটিভ। প্রতীক চিহ্ন দ্বারা লেখা হয় $f'(x)$ বা, $\dfrac{d}{dx} f(x)$.

$$\therefore \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

এই লিমিটের অস্তিত্ব থাকলে এই লিমিটের মানকে x বিন্দুতে $f(x)$ এর ডেরিভেটিভ বা অন্তরকলজ বলা হয় এবং $f'(x)$ দ্বারা নির্দেশিত হয়। অন্তরকলজ $\dfrac{df(x)}{dx}$ দ্বারাও চিহ্নিত হয়। আবার $y = f(x)$ এই ভাবে ফাংশনটির চলকে নির্দিষ্ট করলে x বিন্দুতে $f(x)$ এর অন্তরকলজ $\dfrac{dy}{dx}$ দিয়েও নির্দেশিত করা হয়।

সংজ্ঞা ঃ যদি $\lim\limits_{h \to 0+0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ এর অস্তিত্ব থাকে তবে উহাকে x বিন্দুতে $f(x)$ এর দক্ষিণ ডেরিভেটিভ বলা হয় এবং $Rf'(x)$ লেখা হয়।

যদি $\lim\limits_{h\to 0-0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ -এর অস্তিত্ব থাকে, তবে ঐ লিমিটকে f(x)-এর বাম ডেরিভেটিভ (Left hand derivative) বলা হয়, $Lf'(x)$ লেখা হয়। যদি বাম ডেরিভেটিভ ও দক্ষিণ ডেরিভেটিভ সমান হয় তবে ফাংশনটির ঐ বিন্দুতে ডেরিভেটিভ আছে এবং তার মান ঐ দক্ষিণ বা বাম ডেরিভেটিভের সমান। অতএব একটি বিন্দুতে ডেরিভেটিভের অন্তরকলজের অস্তিত্ব থাকার যথেষ্ট ও প্রয়োজনীয় শর্ত হল

$$\lim_{h\to 0+0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0-0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \frac{d}{dx} f(x)$$

f(x) ফাংশনের বদ্ধ অন্তরালে [a, b] তে অন্তরকলজ আছে বলা হয় যদি

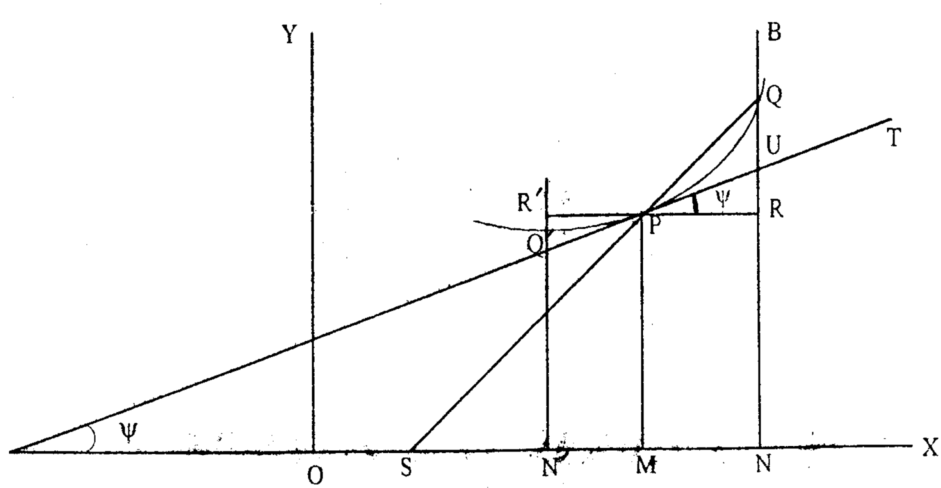
(i) f(x) এর (a, b) প্রতিটি বিন্দুতে অন্তরকলজ পাওয়া যায়।

এবং (ii) a, b প্রান্তবিন্দুদ্বয়ে $\lim\limits_{h\to 0+} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ এবং $\lim\limits_{h\to 0-} \dfrac{f(b+h)-f(b)}{h}$

এদের অস্তিত্ব থাকে অর্থাৎ a বিন্দুতে দক্ষিণ ডেরিভেটিভ ও b বিন্দুতে বাম ডেরিভেটিভ থাকে।

মন্তব্য ঃ কোন বিন্দু x তে f(x) এর ডেরিভেটিভ্ বা অন্তরকলজ থাকলে আমরা x বিন্দুতে f(x) অন্তকলনযোগ্য বা অবকলনযোগ্য বলব।

4.4. অন্তরকলজের জ্যামিতিক তাৎপর্য ঃ



ধরুন c বিন্দুটি f(x) সংজ্ঞার অঞ্চলে একটি বিন্দু।

$OM = c,\ ON = OM + MN = c + h$

$PM = f(c),\ QN = f(c + h)$

$\therefore\ QR = QN - NR = QN - PM = f(c + h) - f(c)$

এখন, $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} = \dfrac{QR}{MN} = \dfrac{QR}{PR} = \tan\angle QPR$

= PQ-এর প্রবণতা।

এখন $h \to 0+$ অর্থাৎ বক্ররেখা বরাবর $Q \to P$ হ'লে, জ্যা PQ-এর অন্তিম অবস্থান হল P বিন্দুতে স্পর্শক PT, এবং $\tan\angle QPR \to \tan\psi$ যেখানে ψ হল স্পর্শক PT, x অক্ষের সঙ্গে যে কোণে নত।

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{Q\to P}\tan\angle QPR = \tan\angle TPR = \tan\psi$$

যদি $h < o$ হয় তবে যেহেতু অন্তরকলজ আছে অতএব (চিত্র থেকে)

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \frac{-Q'R'}{-MN'}$$

$$= \tan\angle Q'PR'$$

অতএব $h \to 0-$, অর্থাৎ $Q' \to P$

অর্থাৎ Q' যখন রেখা বরাবর P-এর দিক যায়,

তখন $\displaystyle\lim_{h\to 0-}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$

$= \tan\psi$ হবে

অতএব একটি বিন্দুতে $y = f(x)$-এর অন্তরকলজ থাকলে ঐ বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সঙ্গে যে কোণ উৎপন্ন করে, তাহার tangent (ত্রিকোণমিতিক) হল dy/dx বা $f'(x)$

4.5. উদাহরণ

1. $f(x) = k$ (ধ্রুবক)-এর অন্তরকলজ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h} = 0$$

2. $f(x) = x$-এর অন্তরকলজ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} \quad = 1 \ (\because h \neq 0)$$

3. $f(x) = x^n$-এর অন্তরকলজ নির্ণয় করুন, যখন (i) n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা (ii) n ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা (iii) n একটি র‍্যাশনাল সংখ্যা

সমাধান ঃ (i) ধরুন, n-একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h-x)\left\{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}.x+(x+h)^{n-3}.x^2+.....+x^{n-1}\right\}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}.x+(x+h)^{n-3}.x^2+.....+x^{n-1}\right\} \qquad (\because h \neq 0)$$

$$= \lim_{h\to 0}(x+h)^{n-1}+x\lim_{h\to 0}(x+h)^{n-2}+x^2\lim_{h\to 0}(x+h)^{n-3}+.......+n^{n-1}$$

$$= \underbrace{x^{n-1}+x^{n-1}........+x^{n-1}}_{\text{n সংখ্যক পদ}} = n.x^{n-1} \ .... \ (i)$$

(ii) ধরুন n-একটি ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা। এখানে $x \neq 0$ ধরতে হবে। কেননা $x = 0$ তে x^n-এর অস্তিত্ব নেই। ধরুন, $n = -m$ যেখানে m একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{-m}-x^{-m}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^m-(x+h)^m}{h.x^m.(x+h)^m} = -\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^m - x^m}{h}.\lim_{h\to 0}\frac{1}{x^m(x+h)^m}$$

(যেহেতু প্রতিটি লিমিট আছে)

$$= -m.x^{m-1}.\frac{1}{x^m.x^m} \ .... \ (i)$$

$$= -m.x^{-m-1} = n.x^{n-1} \ .... \ (ii)$$

(iii) ধরুন n-ভগ্নাংশ, $n=\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ এবং ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা, p পূর্ণসংখ্যা।

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{\frac{p}{q}}-x^{\frac{p}{q}}}{h}$$

ধরুন, $z = x^{\frac{1}{q}}$

$\therefore\ z^q = x$

ধরা যাক $(x+h)^{\frac{1}{q}} = z+u$

$\therefore\ h = (z + u)^q - z^q$

এখন $h \to 0$ হলে $u \to 0$ হয়।

অতএব $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(z+u)^p-z^p}{(z+u)^q-z^q}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{\dfrac{(z+u)^p-z^p}{u}}{\dfrac{(z+u)^q-z^q}{u}}$$

$$=\frac{pz^{p-1}}{qz^{q-1}}$$ (i) ও (ii) থেকে

$$= n.z^{p-q}$$

$$= n(z^q)^{p/q} - 1$$

$$= n.x^{n-1} \text{ .... (iii)}$$

অতএব (i), (ii) ও (iii) থেকে প্রমাণ হল $\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}$ যখন n একটি র‍্যাশনাল সংখ্যা, (n ঋণাত্মক লে $x \neq 0$ হতে হবে।)

(4) $f(x) = \log_e x\ (x > 0)$

সমাধান ঃ

$$\frac{d}{dx}\log_e x=\lim_{h\to 0}\frac{\log_e(x+h)-\log_e x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log_e\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}.x},(x\neq 0)$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{\log_e\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}=\frac{1}{x}\qquad\left(\because h\to 0\Rightarrow\frac{h}{x}\to 0\right)$$

[আদর্শ লিমিট অনুসারে]

(5) $f(x) = e^x$-এর অন্তরকলজ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

$$\frac{d}{dx}e^x = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h-1)}{h} = e^x.\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = e^x \qquad \left(\because \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1\right)$$

6. $f(x) = \sin x$-এর অন্তরকলজ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

$$\frac{d}{dx}\sin x = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2.\cos\left(x+\frac{h}{2}\right).\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right).\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x$$

এখানে যেহেতু cos x ফাংশনটি সন্তত অতএব $\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) = \cos x$ এবং $(\sin h/2)/h/2 \to 1$ as $h/2 \to 0$ (আদর্শ লিমিট অনুসারে)।

(7) $f(x) = \cos x$-এর অন্তরকলজ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

$$\frac{d}{dx}\cos x = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-2.\sin\left(x+\frac{h}{2}\right).\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$= -\lim_{h\to 0}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right).\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = -\sin x.1 = -\sin x$$

(যেহেতু লিমিট দুটি আছে) এবং যেহেতু sin x সন্তত)

(7) $f(x) = a^x$-এর অন্তরকলজ নির্ণয় করুন $(a > 0)$

সমাধান ঃ

$$\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}e^{x\log_e^a} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{(x+h)\cdot\log_e^a} - e^{x\log_e^a}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x\log_e^a}\left(e^{h\log_e^a} - 1\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{a^x\left(\frac{e^{h\log_e^a} - 1}{h.\log_e^a}\right)\times\log_e^a\right\}$$

$$= \underset{h\to 0}{a^x}\log_e a\lim_{h\to 0}\frac{e^{h\log_e^a} - 1}{h.\log_e^a}\quad (\because h\to 0, h\log_e^a\to 0)$$

$= a^x\log_e a$ (আদর্শ লিমিট অনুসারে)

$$= a^x\log_e a$$

(8) $f(x) = \tan x$-এর অন্তরকলজ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

$$\frac{d}{dx}\tan x = \lim_{h\to 0}\frac{\tan(x+h) - \tan x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)} - \frac{\sin x}{\cos x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)\cos x - \cos(x+h).\sin x}{h.\cos(x+h)\cos x} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h.\cos x.\cos(x+h)}$$

$= \frac{1}{\cos x}\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\lim_{h\to 0}\frac{1}{\cos(x+h)}$ (যেহেতু প্রতিটি লিমিট আছে)

$$= \frac{1}{\cos x}.1.\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

(9) $f(x) = \cot x$ -এর অন্তরকলজ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

$$\frac{d}{dx}\cot x = \lim_{h\to 0}\frac{\cot(x+h) - \cot x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\cos(x+h)}{\sin(x+h)} - \frac{\cos x}{\sin x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x.\cos(x+h) - \cos x.\sin(x+h)}{h.\sin x.\sin(x+h)} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(-h)}{h.\sin x.\sin(x+h)}$$

$$= -\frac{1}{\sin x}.\left\{\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}.\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sin(x+h)}\right\} = -\frac{1}{\sin x}.1.\frac{1}{\sin x}$$

$$= -\operatorname{cosec}^2 x$$

(10) f(x) = sec x-এর অন্তরকলজ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

$$\frac{d}{dx}\sec x = \lim_{h\to 0}\frac{\sec(x+h)-\sec x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos x-\cos(x+h)}{h.\cos x.\cos(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2.\sin\frac{h}{2}.\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h.\cos x.\cos(x+h)}$$

$$= \frac{1}{\cos x}.\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}.\lim_{h\to 0}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right).\lim_{h\to 0}\frac{1}{\cos(x+h)}$$ (যেহেতু প্রতিটি লিমিট আছে)

$$= \frac{1}{\cos x}.1.\sin x.\frac{1}{\cos x} = \sec x.\tan x$$

(11) f(x) = cosec x-এর অন্তরকলজ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

$$\frac{d}{dx}\operatorname{cosec} x = \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{cosec}(x+h)-\operatorname{cosec} x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin x-\sin(x+h)}{h.\sin x.\sin(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2.\cos\left(x+\frac{h}{2}\right).\sin\left(-\frac{h}{2}\right)}{h.\sin x.\sin(x+h)}$$

$$= \frac{-1}{\sin x}\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right).\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}.\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sin(x+h)}$$

$$= -\frac{1}{\sin x}.\cos x.1.\frac{1}{\sin x}$$

$$= -\operatorname{cosec} x.\cot x$$

4.6. অন্তরকলজের মৌলিক উপপাদ্যসমূহ ঃ (Fundamental theorems on differentiation)

উপপাদ্য 1. যদি f(x) এবং g(x)-এর অন্তরকলজ থাকে তবে

$$\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\} = \frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x)$$

প্রমাণ ঃ

$$\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)+g(x+h)\}-\{f(x)+g(x)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}+\{g(x+h)-g(x)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x)$$

(যেহেতু প্রতিটি লিমিট আছে)

উপপাদ্য 2. যদি f(x) এবং g(x)-এর অন্তরকলজ থাকে তবে,

$$\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=\frac{d}{dx}f(x)-\frac{d}{dx}g(x)$$

প্রমাণ ঃ উপপাদ্য 1. -এর প্রমাণের মত করে প্রমাণ করুন।

উপপাদ্য 3. যদি y = f(x) ফাংশনের a বিন্দুতে অন্তরকলজের অস্তিত্ব থাকে তবে f(x), x = a বিন্দুতে সন্তত।

প্রমাণ ঃ যেহেতু f(x)-এর $\frac{dy}{dx}, x=a$ বিন্দুতে আছে, অতএব $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ টি আছে ও তার মান $f'(a)$ বা $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a}$

এখন $\lim_{h\to 0}(f(a+h)-f(a))$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.h \quad (\text{যেহেতু } h\neq 0)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.\lim_{h\to 0}h$$

(লিমিট বিষয়ক মৌলিক উপপাদ্য অনুযায়ী)

$= f'(a).\ 0 = 0$

$\therefore$ প্রমাণ হল যে $\lim_{h\to 0}f(a+h)=f(a)$

$\therefore$ f(x) ফাংশনটি x = a বিন্দুতে সন্তত।

মন্তব্য ঃ 3-নং উপপাদ্যের বিপরীত "অর্থাৎ f(x) x = a বিন্দুতে সন্তত হলে $f'(a)$ থাকিবে"—এই বিবৃতিটি সত্য নয়—কারণ এটি একটি উদাহরণ থেকে স্পষ্ট ঃ $f(x) = |x|$

এই ফাংশনটি $x = 0$ বিন্দুতে সন্তত। কিন্তু,

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{h-0}{h}=1$$

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{-h-0}{h}=-1$$

$\therefore$ $x = 0$ বিন্দুতে দক্ষিণ অন্তরকলজ ও বাম অন্তরকলজ অসমান। অতএব $f'(0)$ এর অস্তিত্ব নেই।

উপপাদ্য 4. যদি $f(x)$ এবং $g(x)$-এর অন্তরকলজ থাকে তবে $f(x).g(x)$-এর অন্তরকলজ পাওয়া যায় এবং

$$\frac{d}{dx}\{f(x).g(x)\}=f(x).\frac{d}{dx}g(x)+g(x)\frac{d}{dx}f(x)$$

প্রমাণ ঃ $\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h).g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h).g(x)-f(x)g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\{g(x+h)-g(x)\}+g(x)\{f(x+h)-f(x)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]+g(x).\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{.........} \ (i)$$

অতএব (i)-থেকে পাই,

$$\frac{d}{dx}f(x)g(x)=\lim_{h\to 0}f(x+h)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+g(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=f(x)g'(x)+g(x)f'(x).$$

উপপাদ্য 5. যদি $f(x)$ এবং $g(x)$-এর অন্তরকলজ থাকে এবং $g(x)\neq 0$ হয় তবে $\frac{f(x)}{g(x)}$-এর অন্তরকলজ থাকবে

এবং $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x)-f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{\{g(x)\}^2}$

প্রমাণ : যেহেতু $g'(x)$ আছে অতএব $g(x)$ সন্তত। আবার $g(x) \neq 0$ হওয়ায় x-এর একটি সামীপ্য থাকবে যেখানে ফাংশনটি অশূন্য হবে।

এবং $$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h).g(x)-f(x)g(x+h)}{h.g(x+h).g(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h).g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x).g(x+h)}{h.g(x+h).g(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)\{f(x+h)-f(x)\}-f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h.g(x+h).g(x)}$$

$$= \frac{1}{g(x)}\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)}\left[\lim_{h\to 0}\frac{g(x)\{f(x+h)-f(x)\}}{h}-\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h}\right\}\right]$$

(দুটি ফাংশনের গুণফলের লিমিটের ধর্ম থেকে)

$$= \frac{1}{g(x)}\frac{1}{g(x)}\left\{g(x).\frac{d}{dx}f(x)-f(x).\frac{d}{dx}g(x)\right\} \qquad (\because\ g(x) \text{ সন্তত})$$

$$= \frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x)-f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{\{g(x)\}^2}$$

উদাহরণ :

1) $f(x) = \sin x + \cos x$-এর অন্তরকলজ নির্ণয় করুন।

সমাধান : 4.5 থেকে দেখুন

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \text{ এবং } \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

এখন 4.6-এর উপপাদ্য 1 থেকে

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\sin x + \frac{d}{dx}\cos x = \cos x - \sin x$$

(2) $f(x) = \sin x - \cos x$-এর অন্তরকলজ নির্ণয় করুন।

সমাধান : 4.6-এর উপপাদ্য 2 থেকে

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\sin x - \frac{d}{dx}\cos x = \cos x + \sin x$$

(3) $f(x) = \sin x . \cos x$-এর অন্তরকলজ নির্ণয় করুন।

সমাধান : 4.6-এর উপপাদ্য 4 থেকে

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}(\sin x \cos x) = \sin x \frac{d}{dx} \cos x + \cos x \frac{d}{dx} \sin x$$

$$= -\sin^2 x + \cos^2 x$$

(4) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ যখন $0 \le x < \frac{\pi}{2}$-এর অন্তরকলজ নির্ণয় করুন।

সমাধান :

$0 \le x < \dfrac{\pi}{2}$-তে $\cos x \neq 0$

$\therefore$ (4.6)-এর উপপাদ্য 5 থেকে

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x \frac{d}{dx} \sin x - \sin x \frac{d}{dx} \cos x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

উদাহরণ : 5. $f(x) = x \; ; \; 0 \le x \le \dfrac{1}{2}$

$$= 1 - x ; \frac{1}{2} < x \le 1$$

দেখান যে $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)$-এর অস্তিত্ব নেই, যদিও $f(x), x = \dfrac{1}{2}$ বিন্দুতে সন্তত।

সমাধান :

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}-} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}-} x = \frac{1}{2}$$

এবং $\displaystyle\lim_{x \to \frac{1}{2}+} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}+} (1 - x) = \frac{1}{2}$

$$\therefore \lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{2} = f\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$\therefore f(x), x = \dfrac{1}{2}$-তে সন্তত।

এবার দেখুন, $x = \dfrac{1}{2}$ বিন্দুতে $f'(x)$-এর অস্তিত্ব নেই।

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{2}+h\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{2}+h\right)-\frac{1}{2}}{h}$$

$$\therefore \lim_{h\to 0-}\frac{f\left(\frac{1}{2}+h\right)-\frac{1}{2}}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{\frac{1}{2}+h-\frac{1}{2}}{h}=1 \quad \ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f\left(\frac{1}{2}+h\right)-\frac{1}{2}}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{1-\left(\frac{1}{2}+h\right)-\frac{1}{2}}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{-h}{h}=-1 \quad \ldots\ldots \text{(ii)}$$

$\therefore$ (i) এবং (ii) হতে দেখা যাচ্ছে $f'\left(\frac{1}{2}\right)$-এর অস্তিত্ব নেই।

4.7 ক্রম বর্ধমান (Increasing) ও ক্রমক্ষীয়মান (Decreasing) বিন্দু

সংজ্ঞা ঃ একটি ফাংশন $f(x)$-এর সংজ্ঞাঞ্চলে c একটি বিন্দু হলে এবং c-এর যদি এমন একটি সামীপ্য $(c-\delta, c+\delta)$, $(\delta > 0)$ থাকে যে ঐ অন্তরালে যেকোন দুটি বিন্দু x_1, x_2 নেওয়া হলে এবং $x_1 < x_2$ হলে $f(x_1) \le f(x_2)$ হয় তা হলে c বিন্দুতে ফাংশনটি ক্রমবর্ধমান (Increasing) বলা হয়।

আর যদি ঐ সামীপ্যে যে কোন x_1, x_2 $(x_1<x_2)$-এর জন্য $f(x_1) \ge f(x_2)$ এই অসমতাটি সিদ্ধ হয় তবে ফাংশনটি c বিন্দুতে ক্রমক্ষীয় মান (Decreasing) বলা হয়।

উপপাদ্য 6.

যদি $f'(c)$ বিদ্যমান এবং $f'(c) > 0$ হয় তখন c বিন্দুর একটি সামীপ্য (Neighbourhood) পাওয়া যাবে যেখানে $f(x)$ বর্ধমান (increasing) হবে অর্থাৎ $f(x) \lesseqgtr f(c)$ যখন $x \lesseqgtr c$

যদি $f'(c)<0$ হয় তখন a বিন্দুর একটি সামীপ্য পাওয়া যাবে যেখানে $f(x)$ ক্ষীয়মান (decreasing) হবে।

অর্থাৎ $f(x) \gtreqless f(c)$ যখন $x \lesseqgtr c$

প্রমাণ ঃ $f'(c)$ বিদ্যমান বলে যে কোন $\varepsilon > 0$ এর জন্য একটি $\delta > 0$ পাওয়া যাবে যাতে,

$$\left|\frac{f(c+h)-f(c)}{h}-f'(c)\right|<\varepsilon \text{ যখন, } 0<|h|<\delta$$

বা, $f'(c)-\varepsilon<\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}<f'(c)+\varepsilon$ যখন, $0<|h|<\delta$ বা, $-\delta<h<\delta, h\neq 0$ ...... (i)

$f'(c) > 0$ হলে ধরুন ε একটি ধনাত্মক সংখ্যা যে $\varepsilon < f'(c)$

এখন, $f'(c) - \varepsilon > 0$ এবং $f'(c) + \varepsilon > 0$

$\therefore$ (i) হতে, $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} > 0$ যখন, $-\delta < h < \delta,\ h \neq 0$.

$-\delta < h < 0$ হলে $f(c+h) - f(c) < 0$ বা, $f(c+h) < f(c)$

$0 < h < \delta$ হলে $f(c+h) - f(c) > 0$ বা, $f(c+h) > f(c)$

আবার, $f'(c) < 0$ হলে ধরুন একটি $\varepsilon > 0$ সংখ্যা যে $\varepsilon < -f'(c)$ হলে

$\therefore f'(c) + \varepsilon < 0$ এবং $f'(c) - \varepsilon < 0$

$\therefore$ (i) হতে, $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} < 0$ যখন, $-\delta < h < \delta$; $h \neq 0$.

$-\delta < h < 0$ হলে, $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} < 0$ হতে পাওয়া যায়

$f(c+h) - f(c) > 0$ বা, $f(c+h) > f(c)$

$0 < h < \delta$ হলে, $f(c+h) - f(c) < 0$ বা, $f(c+h) < f(c)$

উদাহরণ ঃ $f(x) = x^2$ ফাংশনটির অন্তরকলজ হতে উহা বর্ধমান বা ক্ষীয়মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $f(x) = x^2$

$\therefore \quad f'(x) = 2x$

যখন, $x > 0$ তখন $f'(x) > 0$

$\therefore$ $x > 0$ হইলে $f(x)$ ফাংশনটি বর্ধমান।

আবার, $x < 0$ হইলে $f'(x) < 0$

$\therefore$ $x < 0$-তে $f(x)$ ফাংশনটি ক্ষীয়মান।

4.8 বিশেষ কিছু ফাংশনের অন্তরকলজ নির্ণয়ের পদ্ধতি ঃ

উপপাদ্য 7 ঃ (চেইন্ রুল বা শৃঙ্খল নিয়ম) ঃ

ধরুন $u = \phi(x)$, $y = f(u)$ দুটি অন্তরকলনযোগ্য ফাংশন। ϕ ফাংশনের বিস্তাঞ্চল (Range) f ফাংশনের (সংজ্ঞার অঞ্চলের) সাব্‌সেট্। তাহলে কম্পোজিট্ (composite) ফাংশন $f(\phi(x))$ অন্তরকলনযোগ্য হবে এবং

$$\frac{d}{dx} f(\phi(x)) = \frac{df(\phi(x))}{d\phi(x)} \cdot \frac{d\phi(x)}{dx}$$

প্রমাণ ঃ ধরুন, x-এর Δx পরিবর্তনের জন্য u-এর পরিবর্তন হল Δu. আবার, এই Δu পরিবর্তনের জন্য y-এর পরিবর্তন হয় ধরুন Δy. (যেখানে $y = f(u)$)

$u + \Delta u = \phi(x + \Delta x)$ এবং $y + \Delta y = f(u + \Delta u)$

$\because$ ϕ এবং f অন্তরকলনযোগ্য, ϕ এবং f সন্তত।

$\therefore$ যখন $\Delta x \to 0$ তখন $\Delta u \to 0$ আবার একই যুক্তিতে $\Delta u \to 0$ হলে $\Delta y \to 0$.

এখন, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta u} \times \dfrac{\Delta u}{\Delta x}$ [এখানে $\phi'(x) \neq 0$ ধরে, ফলে $\Delta u \neq 0$ ধরে প্রমাণ করা হচ্ছে]

উভয়পক্ষ $\Delta x \to 0$ নিলে,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \qquad [\because \Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta u \to 0, \Delta u \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

মন্তব্য : উপরের উপপাদ্য হতে দেখুন, যদি y, x-এর ফাংশন হয় এবং x-কে y-এর ফাংশনরূপে দেখা যায় এবং $\dfrac{dy}{dx} \neq 0$ হয় তবে

$$\frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dy} = 1 \text{ অথবা, } \frac{dy}{dx} = 1 / \frac{dx}{dy}$$

কারণ : $y = y(x),\ x = x(y) \Rightarrow 1 = \dfrac{dy}{dy} = \dfrac{dy}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dy}$

উদাহরণ :

1) $u = 2x,\ y = e^u$; $\dfrac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন।

সমাধান :

$$u = 2x, \qquad \therefore \frac{du}{dx} = 2$$

$$y = e^u, \qquad \therefore \frac{dy}{du} = e^u$$

এখন, $u = 2x$ এবং $y = e^u$ হতে দেখুন

$y = e^{2x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = e^u \cdot 2 = 2 \cdot e^u = 2 \cdot e^{2x}$$

2. $u = \sin x,\ y = e^u$; $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন।

সমাধান :

$u = \sin x \quad \therefore \frac{du}{dx} = \cos x$

$y = e^u \quad \therefore \frac{dy}{du} = e^u$

এখন, $u = \sin x$ এবং $y = e^u$ হতে

$y = e^{\sin x}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cos x = \cos x . e^{\sin x}$

(3) $y = \sin^{-1} x$ যেখানে $|x| \le 1$; $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন।

সমাধান :

আগেই দেখেছেন $\frac{dy}{dx} = 1/\left(\frac{dx}{dy}\right)$ .... (I)

$y = \sin^{-1}x$ হতে পাওয়া যায়, $x = \sin y$ .... (II)

এখন (II)-এর উভয় পক্ষকে y-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে পাই।

$\frac{dx}{dy} = \cos y$ .... (III)

(I) এবং (III) হতে $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, যখন $|x| < 1$.

(4) $y = \cos^{-1}x$ যেখানে, $|x| < 1$-এর অন্তরকলজ নির্ণয় করুন।

সমাধান : $y = \cos^{-1}x \ \therefore x = \cos y$ .... (i)

(i)-এর উভয়পক্ষকে y-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে,

$\frac{dx}{dy} = -\sin y$

$\because \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ যখন $|x| < 1$.

(5) $y = \tan^{-1}x$-এর অন্তরকলজ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $y = \tan^{-1}x \quad \therefore x = \tan y$ .... (i)

(i) এর উভয়পক্ষকে y-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে,

$$\frac{dx}{dy} = \sec^2 y = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}$$

(6) $y = \cot^{-1}x$-এর অন্তরকলজ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $y = \cot^{-1}x \;\therefore x = \cot y$ .... (i)

(i) এর উভয়পক্ষকে y-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে পাই,

$$\frac{dx}{dy} = -\operatorname{cosec}^2 y = -(1 + \cot^2 y = -(1+x^2)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1 + x^2}$$

(7) $y = \sec^{-1}x$ যেখানে $|x| > 1$-এর অন্তরকলজ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $y = \sec^{-1}x \qquad \therefore x = \sec y$ .... (i)

(i)-এর উভয়পক্ষকে y-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করলে,

$$\frac{dx}{dy} = \sec y \tan y = x\sqrt{x^2 - 1}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

(8) $y = \operatorname{cosec}^{-1}x$, যেখানে $|x| > 1$-এর অন্তরকলজ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $y = \operatorname{cosec}^{-1}x \qquad \therefore x = \operatorname{cosec} y$ .... (i)

(i) এর উভয়পক্ষকে y-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করলে,

$$\frac{dx}{dy} = -\operatorname{cosec} y \cot y = -x\sqrt{x^2 - 1}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

4.8.2 ইমপ্লিসিট্ (Implicit) ফাংশনের অন্তরকলজ ঃ

$f(x, y) = 0$ সমীকরণকে সমাধান করে যদি $y = \phi(x)$ বা $x = \psi(y)$ আকারে লেখা না যায়, কিন্তু y যদি x-এর ফাংশন হয়, সেইক্ষেত্রে এইরূপ ইমপ্লিসিট্ ফাংশনের অন্তরকলজ নির্ণয় করার নিয়ম নিম্নরূপ ঃ

$f(x, y) = 0$ সমীকরণের প্রতিটি পদকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করতে হবে। এক্ষেত্রে y-কে x-এর একটি ফাংশন আকারে ধরতে হবে। নীচের উদাহরণগুলি দেখুন।

উদাহরণ ঃ

(1) $x^3 + y^3 = 3axy$ হলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $x^3 + y^3 = 3axy$, এখানে y-কে x-এর ফাংশন হিসাবে ধরে নিয়ে উভয়পক্ষকে 'x'-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করলে,

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 3a\left(y + x\frac{dy}{dx}\right)$$

বা, $\left(y^2 - ax\right)\frac{dy}{dx} = ay - x^2$

বা, $\frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$, যেখানে $y^2 - ax \neq 0$.

(2) $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$ হলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$-এর উভয়পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে পাই।

$$x.\frac{d}{dx}\sqrt{1+y} + \sqrt{1+y}\frac{dx}{dx} + y\frac{d}{dx}\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x}.\frac{dy}{dx} = 0$$

বা, $x.\frac{1}{2}(1+y)^{\frac{1}{2}-1}.\frac{dy}{dx} + \sqrt{1+y}.+y.\frac{1}{2}(1+x)^{\frac{1}{2}-1} + \sqrt{1+x}.\frac{dy}{dx} = 0$

বা, $\left(\frac{x}{2\sqrt{1+y}} + \sqrt{1+x}\right)\frac{dy}{dx} = -\left\{\sqrt{1+y} + \frac{y}{2\sqrt{1+x}}\right\}$

বা, $\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(2\sqrt{(1+x)(1+y)} + y\right)\sqrt{1+y}}{\left(2\sqrt{(1+x)(1+y)} + x\right)\sqrt{1+x}}$

4.8.3 প্রচলিক অন্তরকলন (Parametric Differentiation) :

ধরুন, $x = \phi(t)$ এবং $y = \psi(t)$, যেখানে t একটি প্রচল যার অঞ্চল $t_1 \leq t \leq t_2$.$\phi(t)$, $\psi(t)$ এর অন্তরকলজ আছে। $x = \phi(t)$ এবং $y = \psi(t)$-এর মধ্যে t অপনয়ন করলে x এবং y-এর মধ্যে একটি সম্পর্ক পাওয়া যাবে।

$\therefore$ y-কে x-এর ফাংশন হিসাবে ধরা হল।

t বিন্দুতে $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, t-এর মান Δt দ্বারা বর্ধিত হলে x-এর মান Δx এবং y-এর মান Δy দ্বারা বর্ধিত হয়।

অতএব $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \dfrac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \dfrac{\Delta t}{\Delta x}$

(এখানে $\Delta x \neq 0$ ধরা হয়েছে) $= \lim\limits_{\Delta t \to 0} \left(\dfrac{\Delta y}{\Delta t} / \dfrac{\Delta x}{\Delta t} \right) = \dfrac{dy}{dt} / \dfrac{dx}{dt}$

অতএব $\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{d\psi}{dt}}{\frac{d\phi}{dt}}$

উদাহরণ :

(1) $x = at^2$, $y = 2at$ যেখানে, t প্যারামিটার বা প্রচল।

$\dfrac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন।

সমাধান :

$x = at^2 \quad \therefore \dfrac{dx}{dt} = 2at$

$y = 2at \quad \therefore \dfrac{dy}{dt} = 2a$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t}$$

(2) $y = e^{\sin^{-1} x}$ এবং $z = e^{-\cos^{-1} x}$ হলে $\dfrac{dy}{dz}$ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\sin^{-1}x}\times\frac{d\sin^{-1}x}{dx}=\frac{d}{d\sin^{-1}x}e^{\sin^{-1}x}\times\frac{d}{dx}\sin^{-i}x$$

$$=e^{\sin^{-1}x}.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{d\,e^{-\cos^{-1}x}}{d\,(-\cos^{-1}x)}\times\frac{d\left(-\cos^{-1}x\right)}{dx}=-\frac{d}{d\left(-\cos^{-1}x\right)}e^{-\cos^{-1}x}\times\frac{d}{dx}\cos^{-1}x$$

$$=-e^{-\cos^{-1}x}.\left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{e^{-\cos^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dz}=\frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{dz}{dx}}=\frac{e^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}\times\frac{\sqrt{1-x^2}}{e^{-\cos^{-1}x}}=e^{\sin^{-1}x+\cos^{-1}x}=e^{\frac{\pi}{2}}$$

4.8.4 লগারিদ্‌মিক্ (Logarithmic) অন্তরকলন ঃ (Logarithmic differentiation)

যদি কোন ফাংশনের ঘাত (power) আর একটি ফাংশন হয় অথবা কোন ফাংশন অন্য কিছু ফাংশনের গুণফল আকারে থাকে তাহলে অন্তরকলজ নির্ণয় করার আগে ফাংশনটির লগারিদম্ নেওয়া হয় এবং তারপর অন্তরকলন করা হয়। নিচের উদাহরণগুলি দেখুন।

উদাহরণ ঃ

(1) $y=e^{e^x}$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $y=e^{e^x}$

উভয় পক্ষের লগারিদ্‌ম্ নিয়ে

$\log_e y=e^x\log_e e=e^x$

এখন উভয়পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করলে,

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=e^x$ বা, $\frac{dy}{dx}=y.\,e^x=e^{e^x}e^x$

(2) $y=(\sin x)^{\cos x}+(\cos x)^{\sin x}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $y = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$

উভয়পক্ষকে x সাপেক্ষে অন্তরকলন করলে,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin x)^{\cos x} + \frac{d}{dx}(\cos x)^{\sin x} \quad \text{.......... (i)}$$

ধরুন, $u = (\sin x)^{\cos x}$ এবং $v = (\cos x)^{\sin x}$

$u = (\sin x)^{\cos x}$-এর উভয়দিকে লগারিদম্ নিলে,

$$\log_e u = \cos x \log_e \sin x$$

উভয়পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \cos x \frac{d}{dx}\log_e \sin x + \log_e \sin x \frac{d}{dx}\cos x$$

$$= \cos x . \frac{1}{\sin x} \times \cos x + \log_e \sin x(-\sin x)$$

$$= \cos x . \cot x - \sin x \log_e \sin x$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = (\sin x)^{\cos x}\{\cos x . \cot x - \sin x \log_e \sin x\} \quad \text{........... (ii)}$$

আবার, $v = (\cos x)^{\sin x}$

$$\therefore \log_e v = \sin x \log_e \cos x$$

উভয়পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করলে

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = \sin x \frac{d}{dx}\log_e \cos x + \log_e \cos x \frac{d}{dx}\sin x$$

$$= \sin x . \frac{1}{\cos x} . (-\sin x) + \cos x . \log_e \cos x$$

$$= \cos x . \log_e \cos x - \sin x \tan x$$

$$\frac{dv}{dx} = (\cos x)^{\sin x}\{\cos x \log_e \cos x - \sin x \tan x\} \quad \text{.......... (iii)}$$

(i) (ii) এবং (iii) হতে,

$$\frac{dy}{dx} = (\sin x)^{\cos x}\{\cos x . \cot x - \sin x \log_e \sin x\} + (\cos x)^{\sin x}\{\cos x \log_e \cos x - \sin x \tan x\}$$

(3) $y=x^{1+x+x^2}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $y = x^{1+x+x^2}$

$\therefore \log_e y=(1+x+x^2)\log_e x$

উভয়পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে

$$\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx}=(1+x+x^2)\frac{d}{dx}\log_e x+\log_e x\frac{d}{dx}(1+x+x^2)$$

$$=(1+x+x^2).\frac{1}{x}+\log_e x,(1+2x)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=x^{1+x+x^2}\left[(1+x+x^2).\frac{1}{x}+(1+2x)\log_e x\right]$$

$$=x^{x(1+x)}\left[1+x+x^2+x(1+2x)\log_e x\right]$$

4.9. ব্যাপক ব্যবহৃত কিছু ফাংশনের অন্তরকলনের ফলসমূহের সারণী ঃ

$$\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}e^x=e^x$$

$$\frac{d}{dx}\log_e x=\frac{1}{x}\,(x>0)$$

$$\frac{d}{dx}\log_a x=\frac{1}{x}\log_a e\,(x>0)$$

$$\frac{d}{dx}a^x=a^x\log_e a$$

$$\frac{d}{dx}\sin x=\cos x$$

$$\frac{d}{dx}\cos x=-\sin x$$

$$\frac{d}{dx}\tan x=\sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\cot x=-\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\sec x=\sec x\tan x$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{cosec} x=-\operatorname{cosec} x\cot x$$

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,(|x|<1)$$

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}x=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,(|x|<1)$$

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x=\frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\cot^{-1}x=-\frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1}x=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,(|x|>1)$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{cosec}^{-1}x=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,(|x|>1)$$

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ এখানে ব্যবহৃত হাইপারবোলিক ফাংশণের পরিচিতি দেওয়া হল ঃ

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sin hx}{\cos hx} \text{ ইত্যাদি।} \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \text{ (অভেদ)}$$

$$\frac{d}{dx}\sin h\,x = \cos h\,x \qquad \frac{d}{dx}\sec h\,x = -\sec h\,x \tan h\,x$$

$$\frac{d}{dx}\cos h\,x = \sin h\,x \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{cosec} h\,x = -\operatorname{cosec} h\,x \cot h\,x$$

$$\frac{d}{dx}\cot h\,x = -\operatorname{cosec} h^2\,x \qquad \frac{d}{dx}\tan h\,x = \sec h^2\,x$$

4.10. উদাহরণ, অনুশীলনী, উত্তরমালা

4.10.1 উদাহরণ ঃ

(1) $y = \frac{(1-x)^4}{(1+x)^5}$ -এর x সাপেক্ষে অন্তরকলজ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{(1-x)^4}{(1+x)^5}\right\} = \frac{(1+x)^5 \frac{d}{dx}(1-x)^4 - (1-x)^4 \frac{d}{dx}(1+x)^5}{\left\{(1+x)^5\right\}^2}$$

$$= \frac{(1+x)^5 . 4(1-x)^3(-1) - (1-x)^4 . 5(1+x)^4}{\left\{(1+x)^5\right\}^2}$$

$$= \frac{(1-x)^3(1+x)^4\{-4-4x-5+5x\}}{\left\{(1+x)^5\right\}^2}$$

$$= \frac{(1-x)^3(1+x)^4(x-9)}{(1+x)^{10}}$$

(2) $y=\sqrt{[(1+x)/(1-x)]}$-এর x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলজ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

ধরুন, $y=\sqrt{u}$ যেখানে, $u=\dfrac{1+x}{1-x}$

$$\frac{dy}{du}=\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2\sqrt{u}}$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{(1-x)\frac{d}{dx}(1+x)-(1+x)\frac{d}{dx}(1-x)}{(1-x)^2}=\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}$$

$$=\frac{2}{(1-x)^2}$$

চেইন্ রুল অনুযায়ী

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot\frac{2}{(1-x)^2}=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$=\frac{(1-x)^{\frac{1}{2}-2}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-x)^3}}$$

(3) $y=\tan^{-1}\left(\dfrac{\cos x}{1+\sin x}\right)$, $\dfrac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

$$\frac{\cos x}{1+\sin x}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{1-\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$$

$$\therefore\ y=\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)=\tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{4}\right)-\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\right)=0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

(4) $f(x) = 1$ যখন $x < 0$

$= 1 + \sin x$ যখন $0 \le x < \frac{\pi}{2}$

$= 2 + \left(x - \frac{1}{2}\pi\right)^2$ যখন $x \ge \frac{\pi}{2}$

দেখুন $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ বিদ্যমান কিন্তু $f'(0)$ বিদ্যমান নয়।

সমাধান ঃ

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right) - 2}{h}$$

এখন,

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-2}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{2 + h^2 - 2}{h} = \lim_{h\to 0+} h = 0 \qquad (\because h \ne 0)$$

$$\lim_{h\to 0-} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-2}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{1 + \sin\left(\frac{\pi}{2}+h\right) - 2}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$$

$$= \lim_{h\to 0-} \frac{-2\sin^2 \frac{h}{2}}{h} = -\lim_{h\to 0-} \frac{\sin^2 \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \qquad = -\lim_{h\to 0-} \frac{\sin^2 \frac{h}{2}}{\left(\frac{h}{2}\right)^2} \cdot \frac{h}{2} = 0$$

$$\therefore \lim_{h\to 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right) - 2}{h} = 0 \qquad \therefore f'\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - 1}{h}$$

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(h)-1}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{1 + \sin h - 1}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{\sin h}{h} = 1$$

$$\therefore \lim_{h\to 0-} \frac{f(h)-1}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{1-1}{h} = 0$$

$\therefore f'(0)$ বিদ্যমান নয়।

(5) $\sin^{-1} x$-এর সাপেক্ষে $e^{\cos^{-1} x}$-এর অন্তরকলজ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

ধরুন, $y = e^{\cos^{-1} x}$ এবং $z = \sin^{-1} x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} e^{\cos^{-1} x} = \frac{d}{d\cos^{-1} x} . e^{\cos^{-1} x} \times \frac{d\cos^{-1} x}{dx}$$

$$= e^{\cos^{-1} x}\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = -\frac{e^{\cos^{-1} x}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dz} = \left(\frac{dy}{dx}\right) / \left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{\frac{-e^{\cos^{-1} x}}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = -e^{\cos^{-1} x} = -y$$

(6) $x^y = y^x$ হলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $x^y = y^x$

$\therefore \quad y \log_e x = x \log_e y$ (উভয়পক্ষের লগারিদম্ নিয়ে)

উভয়পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে পাওয়া যায়

$$\frac{d}{dx}(y \log_e x) = \frac{d}{dx}(x \log_e y)$$

বা, $$y \frac{d}{dx} \log_e x + \log_e x \frac{dy}{dx} = x \frac{d}{dx} \log_e y + \log_e y \frac{dx}{dx}$$

বা, $$\frac{y}{x} + \log_e x \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx} + \log_e y . 1$$

বা, $$\left(\log_e x - \frac{x}{y}\right) \frac{dy}{dx} = \log_e y - \frac{y}{x}$$

বা, $$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x \log_e y - y)}{x(y \log_e x - x)}$$

(7) $x = a\left(\cos t + \log_e \tan\frac{1}{2}t\right)$, $y = a \sin t$ হলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $x = a\left(\cos t + \log_e \tan\frac{1}{2}t\right)$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = a\left[-\sin t + \left\{\frac{1}{\tan\frac{1}{2}t} \times \sec^2\frac{t}{2} \times \frac{1}{2}\right\}\right]$$

$$= a\left[-\sin t + \frac{1}{2}\left(\cot\frac{t}{2} \times \sec^2\frac{1}{2}t\right)\right]$$

$$= a\left[-\sin t + \operatorname{cosec} t\right]$$

আবার, $y = a \sin t$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = a \cos t$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a \cos t}{a\,[-\sin t + \operatorname{cosec} t]} = \frac{\cos t . \sin t}{-\sin^2 t + 1}$$

$$= \tan t$$

4.10.2. অনুশীলনী

(1) সংজ্ঞা হইতে দেখান $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ হলে $f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$

(2) $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন ঃ

(a) $y = \frac{x \cos^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$

(b) $y = \tan^{-1}\left(\frac{a}{x}\tan^{-1}\frac{x}{a}\right)$

(c) $y = \tan^{-1}\frac{\cos x}{1 + \sin x}$

(d) $y = \log_{10}\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)$

(3) $\dfrac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন ঃ

(a) $y = \left(x^x\right)^x$ (b) $y = x^{x^x}$ (c) $y = x^{x^{x^{x^{x\cdots}}}}$

(d) $y = (\sin x)^{\tan x}$ (e) $y = x^{\log x}$ (f) $y = (\tan x)^{\cot x} + (\cot x)^{\tan x}$

(4) $\dfrac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন ঃ

(a) $x = \sin^2\theta$, $y = \tan\theta$ যেখানে θ একটি প্রচল (parameter)

(b) $x = a\,(2\cos t + \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$

(c) $x = 3a\,t/(1 + t^3)$, $y = 3a\,t^2/(1 + t^3)$

(5) (a) $\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$ -এর সাপেক্ষে $\cos^{-1}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ -এর অন্তরকলজ নির্ণয় করুন।

(b) $\cos^{-1}x^2$ -এর সাপেক্ষে $\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$ -এর অন্তরকলজ নির্ণয় করুন।

(c) $\sin^{-1}x$-এর সাপেক্ষে $x^{\sin^{-1}x}$-এর অন্তরকলজ নির্ণয় করুন।

(6) যদি $x^y + y^x = a^b$ হয়, তবে দেখান যে

$$\frac{dy}{dx} = \frac{yx^{y-1} + y^x \log y}{x^y \log x + xy^{x-1}}$$

(7) $y = x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$ হলে দেখান যে

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{x^2+a^2}$$

(8) যদি $f(x) = \left(\dfrac{a+x}{b+x}\right)^{a+b+2x}$ হলে প্রমাণ করুন

$$f'(0) = \left(\frac{a}{b}\right)^{a+b}\left(2\log\frac{a}{b} + \frac{b^2-a^2}{ab}\right)$$

(9) যদি $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ হয়, তবে দেখান যে,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{ax+hy+g}{hx+by+f}$$

(10) যদি $x = 2t + 3t^2$ এবং $y = t^2 + 2t^3$ হয়, তবে দেখান যে,

$$y = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$$

(11) যদি $f(x) = 2 + x \geq 0$

$$= 2 - x, \; x < 0$$

হয় তবে $f(x)$-এর $x = 0$ বিন্দুতে অন্তরকলজের অস্তিত্ব পরীক্ষা করুন।

(12) যদি $x = 2\sin^{-1}\sqrt{\frac{t^2}{1+t^2}}$ এবং $y = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ হয়, তবে দেখান যে $\frac{dy}{dx}$-এর মান t-এর উপর নির্ভরশীল নয়।

4.10.3 সংকেতসহ উত্তরমালা

(1) সংকেত ঃ

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sin(x+h)}{x+h} - \frac{\sin x}{x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x(\sin x\cos h + \sin h\cos x) - (x+h)\sin x}{h(x+h).x}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x\sin x(\cos h - 1) + x\cos x\sin h - h\sin x}{h(x+h).x}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{-2x\sin x\sin^2\frac{h}{2}}{h(x+h).x} + \frac{\cos x\sin h}{(x+h).h} - \frac{\sin x}{(x+h)x}\right\}$$

(2) (a) $x = \cos\theta$ বসান, তাহলে $y = \theta\cot\theta$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{d\theta}\right)\Big/\left(\frac{dx}{d\theta}\right) = \ldots\ldots = \frac{\cos^{-1}x - x\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(b) $\tan y = \frac{a}{x}\tan^{-1}\frac{x}{a}$ ধরিয়া,

উত্তর ঃ

$$\frac{a^2}{x^2 + a^2\left(\tan^{-1}\frac{x}{a}\right)^2}\left\{\frac{-1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + \frac{x}{a^2+x^2}\right\}$$

(c) $y = \tan^{-1}\left\{\dfrac{\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}}{\left(\cos\dfrac{x}{2}+\sin\dfrac{x}{2}\right)^2}\right\}\cdots\cdots = \dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}$

উত্তর ঃ $-\dfrac{1}{2}$

(3) (a) $y = x^{x^2}$ $\quad\therefore \log_e y = x^2 \log x$

উত্তর ঃ $x^{(x^2+1)}\log(ex^2)$

(b) $\log_e y = x^x \log x$ $\quad\therefore \dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} = x^x.\dfrac{1}{x} + \log x.\dfrac{d}{dx}(x^x)$

(c) $y = x^y$ $\quad$ উত্তর ঃ $\dfrac{y^2}{x(1-y\log x)}$

(d) $\log y = \tan x \log_e \sin x$ $\quad$ উত্তর ঃ $(\sin x)^{\tan x}\{\sec^2 x \log(\sin x)+1\}$

(e) উত্তর ঃ $2\log x.x^{(\log x-1)}$

(f) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(\tan x)^{\cot x}+\dfrac{d}{dx}(\cot x)^{\tan x}$

উত্তর ঃ $(\tan x)^{\cot x}\{\operatorname{cosec}^2 x(1-\log\tan x)\}+(\cot x)^{\tan x}\{\sec^2 x(\log\cot x-1)\}$

4. (a) $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)/\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)$ $\quad$ উত্তর ঃ $\dfrac{1}{2}\sec^3\theta\operatorname{cosec}\theta$

(b) উত্তর ঃ $-\tan\dfrac{1}{2}t$

(c) উত্তর ঃ $t(2-t^3)(1-2t^3)$

(5) (a) ধরুন, $u = \tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$ এবং $v = \cos^{-1}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

$x = \tan\theta$ বসালে,

$u = 2\theta, \qquad v = 2\theta$

$\therefore u = v$

$\therefore \dfrac{dv}{du} = 1$

উত্তর ঃ 1

(b) ধরুন, $u = \cos^{-1}x^2 \therefore \cos u = x^2$ .... (i)

$$v = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$$

বা, $\tan v = \dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$ .... (ii)

(i) এবং (ii) হতে $\tan v = \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{u}{2}\right)$

$$\therefore \quad v = \frac{\pi}{2}-\frac{u}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{dv}{du} = -\frac{1}{2}$$

উত্তর ঃ $-\frac{1}{2}$

(c) ধরুন, $u = \sin^{-1}x$ এবং $v = x^{\sin^{-1}x}$

$\therefore \sin u = x$

$\therefore v = (\sin u)^u$

উভয়পক্ষে $\log_e$ নিলে $\log v = u \log u$

u-এর সাপেক্ষে অন্তরকলজ করলে,

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{du} = \log u + 1 \quad \therefore \quad \frac{dv}{du} = v(1+\log u)$$

$\therefore \dfrac{d}{d\sin^{-1}x}x^{\sin^{-1}x} = x^{\sin^{-1}x}\left(1+\log(\sin^{-1}x)\right)$ (উত্তর)।

(6) ধরুন $u = x^y$ এবং $v = y^x$

$\therefore u + v = a^b$

উভয়পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে,

$\dfrac{d}{dx}u + \dfrac{d}{dx}v = 0$ .... (i)

$u = x^y \therefore \log u = y \log x$

$$\therefore \quad \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{y}{x} + \log x \frac{dy}{dx}$$

বা, $$\frac{du}{dx} = x^y\left(\frac{y}{x} + \log x \frac{dy}{dx}\right) \text{ .... (ii)}$$

আবার $v = y^x \therefore \log v = x\log y$

$$\therefore \frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = \log y + \frac{x}{y}\frac{dy}{dx}$$

বা, $$\frac{dv}{dx} = y^x\left[\log y + \frac{x}{y}\frac{dy}{dx}\right]$$

(i), (ii) এবং (iii) হতে পাবেন।

(7) উভয়পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে দেখুন।

(8) $\log_e f'(x) = (a + b + 2x)\{\log_e (a + x) - \log_e (b + x)\}$

x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে,

$$\frac{1}{f(x)}, f'(x) = 2\{\log(a+x) - \log(b+x)\} + (a+b+2x)\left(\frac{1}{a+x} - \frac{1}{b+x}\right)$$

$$\therefore \quad f'(x) = f(x)\left[2\log\left(\frac{a+x}{b+x}\right) + \frac{(a+b+2x)(b-a)}{(a+x)(b+x)}\right]$$

$$\therefore \quad f'(0) = f(0)\left[2\log_e\left(\frac{a}{b}\right) + \frac{b^2-a^2}{ab}\right]$$

(9) $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে,

$$2ax + 2hy + 2hx\frac{dy}{dx} + 2by\frac{dy}{dx} + 2g + 2f\frac{dy}{dx} = 0$$

বা, $$(hx + by + f)\frac{dy}{dx} + (ax + hy + g) = 0$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{ax+hy+g}{hx+by+f}$$

(10) $x = 2t + 3t^2$ .... (i)

$$\therefore \frac{dx}{dt} = 2+6t = 2(1+3t)$$

$y = t^2 + 2t^3$ .... (ii)

$$\therefore \frac{dy}{dt} = 2t + 6t^2 = 2t(1+3t)$$

এখন, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{d}{dt}y}{\frac{d}{dt}x} = t$ .... (iii)

(ii) এবং (iii) হতে

$$y = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$$

(11) $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h) - 2}{h}$

$$\lim_{h\to 0-} \frac{f(h) - 2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2 - h - 2}{h} = -1$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - 2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2 + h - 2}{h} = 1.$$

$\therefore f'(0)$ বিদ্যমান নয়।

$\therefore x = 0$ বিন্দুতে অন্তরকলনের অস্তিত্ব নেই।

(12) $t = \tan\theta$ ধরুন। তাহা হলে $x = 2\theta$ এবং $y = \theta$

$\therefore \dfrac{dx}{d\theta} = 2$ এবং $\dfrac{dy}{d\theta} = 1$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \dfrac{1}{2}$ $\therefore \dfrac{dy}{dx}$ এর মান t-এর উপর নির্ভরশীল নয়।

4.11 একচল ফাংশনের অন্তরকলযোগ্যতার ধারণা এবং অন্তরকলসমূহ ঃ

(Concepts of differentiability of a function of single variable and differentials)

4.11.1. সংজ্ঞা ঃ ধরুন ফাংশন $f(x)$ $[a, b]$-তে সংজ্ঞায়িত। $x \in [a, b]$ সামান্য পরিবর্তন Δx-এর জন্য ধরুন $x + \Delta x \in [a, b]$ ফাংশন $f(x)$-কে x বিন্দুতে অন্তরকলযোগ্য (differentiable) বলা হবে যদি $f(x + \Delta x) - f(x) = A.\ \Delta x + \varepsilon\Delta x$ হয়, যেখানে A, Δx-এর উপর নির্ভরশীল নয় কিন্তু $\varepsilon \to 0$ যখন $\Delta x \to 0$.

$A.\ \Delta x$-কে বলা হয় $f(x)$ ফাংশনের x বিন্দুতে অন্তরকল অথবা অবকল (Differential) এবং $d\,f(x)$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

$\varepsilon.\Delta x$-কে বলা হয় ভ্রম (Error)।

$f(x)$, x বিন্দুতে অন্তরকলযোগ্য হলে,

$f(x + \Delta x) - f(x) = A.\ \Delta x + \varepsilon.\ \Delta x$ লেখা হয়, যেখানে

A, Δx-এর উপর নির্ভরশীল নয় কিন্তু $\varepsilon \to 0$ যখন $\Delta x \to 0$.

$$\therefore \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = A + \varepsilon$$

$\Delta x \to 0$ নিলে,

$f'(x) = A$ ($\because$ $\varepsilon \to 0$ যখন $\Delta x \to 0$ এবং A, Δx-এর উপর নির্ভরশীল নয়।)

$\therefore$ দেখা যাচ্ছে $f(x)$, x বিন্দুতে অন্তরকলযোগ্য হলে

$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x).\ \Delta x + \varepsilon.\ \Delta x$ যেখানে, $\varepsilon \to 0$ যখন $\Delta x \to 0$.

মন্তব্য ঃ $f(x)$-এর অন্তরকল

$$df(x) = f'(x).\ \Delta x$$

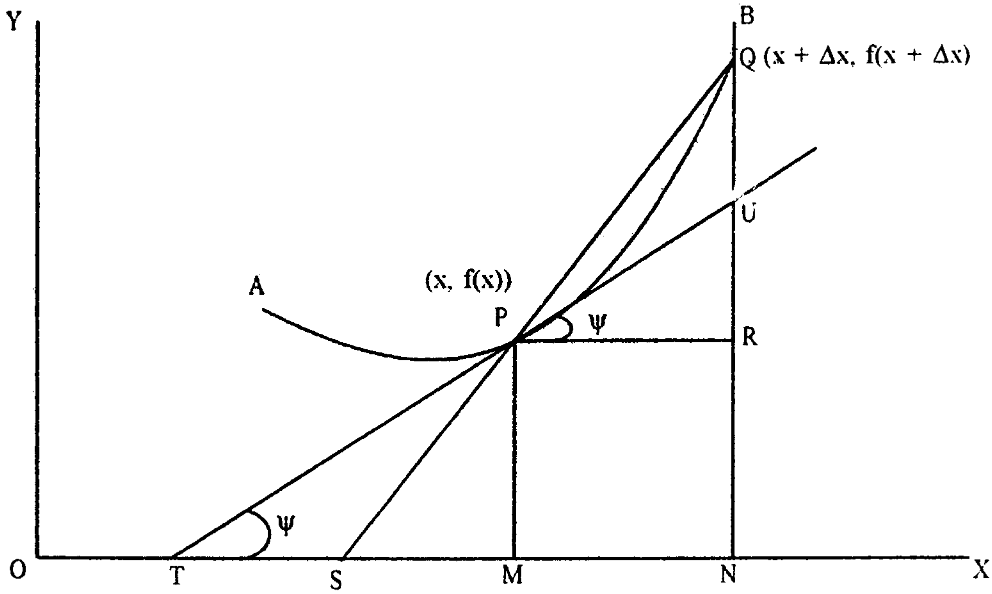
এখন ধরুন, $f(x) = x$, তাহলে দেখা যাবে, $f'(x) = 1$ এবং $dx = 1.\ \Delta x = \Delta x$

অতএব স্বাধীন চল x-এর ক্ষেত্রে Δx ও dx সমান। সাধারণভাবে $y = f(x)$ হলে

$$dy = df(x) = f'(x)dx = \frac{dy}{dx}\ dx.$$

অতএব dy এই অন্তরকল হল Δy-এর একটি আসন্নমান।

4.11.2 ফাংশনের অন্তরকলের জ্যামিতিক তাৎপর্য্য ঃ



$OM = x$, $ON = x + \Delta x$

$\therefore\ PM = f(x)$, $\quad QN = f(x + \Delta x)$

যদি $y = f(x)$, $\quad$ তবে, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

$$\therefore\ f(x + \Delta x) - f(x) = QN - PM = RQ = RU + UQ$$

$$= PR.\ \tan\psi + UQ \qquad (\because\ < RPU = \psi)$$

$$= \tan\psi.\ MN + \frac{UQ}{PR}.MN \qquad (\because\ PR = MN)$$

$$= f'(x).\ \Delta x + \varepsilon.\ \Delta x,$$ যেখানে, $\varepsilon = \dfrac{UQ}{PR}$ এবং $f'(x) = \tan\psi$

যখন, $\Delta x \to 0$ অর্থাৎ $Q \to P$ তখন $UQ \to 0$ অর্থাৎ $\varepsilon \to 0$. অতএব দেখা গেল

$f(x + \Delta x) - f(x) \to f'(x).\ \Delta x$ যখন $\Delta x \to 0$.

সুতরাং আমরা বলতে পারি যে,

$df = \dfrac{df}{dx}\ dx$ হল $\Delta f\ (= f(x + \Delta x) - f(x))$-এর প্রথম আসন্ন মান।

4.12. উচ্চতর ঘাতের উত্তরোত্তর অন্তরকলন (Successive Differentiation) :

যদি একটি ফাংশন $f(x)$ অন্তরকলনযোগ্য হয়, তবে $f(x)$-এর অন্তরকলজ $f'(x)$ সাধারণত x-এর একটি ফাংশন। এখন $f'(x) = \phi(x)$ ফাংশনটি অন্তরকলনযোগ্য হলে $\phi(x)$-এর অন্তরকলজকে $f(x)$-এর দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরকলজ বলা হয় এবং নিচের যে কোন একটি প্রতীক দ্বারা লেখা হয় ঃ

$$f''(x),\ f^2(x),\ \frac{d^2}{dx^2}f(x),\ D^2f(x),\ \text{যেখানে } D \equiv \frac{d}{dx}$$

আবার,

$$f''(x) = \frac{d}{dx}f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$$

অনুরূপে, $$f'''(x) = \frac{d^3}{dx^3}f(x) = \frac{d}{dx}f''(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f''(x+h)-f''(x)}{h}$$

....

....

$$f^n(x) = \frac{d^n}{dx^n}f(x) = \frac{d}{dx}f^{n-1}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f^{n-1}(x+h)-f^{n-1}(x)}{h}$$

∴ দেখা যাচ্ছে $f^n(x)$-এর অস্তিত্ব থাকলে নিম্নলিখিত অন্তরকলজগুলি

$f'(x), f''(x), \ldots\ldots, f^{n-1}(x)$ এদের অস্তিত্ব প্রয়োজন এবং এরা সন্তত হবে।

4.12.1. উপপাদ্য ঃ

$$\frac{d^n}{dx^n}\{f(x) \pm g(x)\} = \frac{d^n}{dx}f(x) \pm \frac{d^n}{dx^n}g(x)$$

প্রমাণ ঃ দেখুন, $$\frac{d}{dx}\{f(x) \pm g(x)\} = \frac{d}{dx}f(x) \pm \left(\frac{d}{dx}\right)g(x)$$

এখন, $$\frac{d^2}{dx^2}\{f(x) \pm g(x)\} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x)\right\}$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right) \pm \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}g(x)\right)$$

$$= \frac{d^2}{dx^2} f(x) \pm \frac{d^2}{dx^2} g(x)$$

ধরুন, $\frac{d^m}{dx^m}\{f(x) \pm g(x)\} = \frac{d^m}{dx^m} f(x) \pm \frac{d^m}{dx^m} g(x)$ .... (i)

(i)-কে x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে,

$$\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}\{f(x) \pm g(x)\} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{d^m}{dx^m} f(x) \pm \frac{d^m}{dx^m} g(x)\right\}$$

$$= \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} f(x) \pm \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} g(x) \quad \text{.......... (ii)}$$

অতএব উপপাদ্যটি $n = m + 1$ এর সত্য।

আবার উপপাদ্যটি, $n = 1$-এর জন্য সত্য।

সুতরাং, গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি অনুসারে উপপাদ্যটি যেকোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n-এর জন্য সত্য।

4.12.2 উপপাদ্য (লাইবনিৎস-এর উপপাদ্য) (Leibniz's theorem) :

বিবৃতি ঃ যদি u এবং v, x-এর ফাংশন হয় এবং উভয়ই n-বার অন্তরকলনযোগ্য হয়, তবে

$$\frac{d^n}{dx^n}(uv) = u_n v + n_{C_1} u_{n-1} v_1 + n_{C_2} u_{n-2} v_2 + \ldots\ldots\ldots + {}^nc_r u_{n-r} v_r + \ldots\ldots + uv_n$$

যেখানে $u_r = \frac{d^r u}{dx^r}$, $v_r = \frac{d^r v}{dx^r}$

প্রমাণ

আমরা জানি,

$\frac{d}{dx}(uv) = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} = vu_1 + uv_1$; অতএব উপপাদ্যটি $n = 1$-এর জন্য সত্য।

$n = 2$ ধরলে,

$$\frac{d^2}{dx^2}(uv) = \frac{d}{dx}(vu_1 + uv_1) = \frac{d}{dx}(vu_1) + \frac{d}{dx}(uv_1)$$

$$= v\frac{d}{dx}(u_1) + u_1 . \frac{dv}{dx} + v_1\frac{d}{dx}u + u\frac{d}{dx}v_1$$

$$= vu_2 + u_1v_1 + v_1u_1 + uv_2 = vu_2 + 2u_1v_1 + uv_2$$

$\therefore$ $n = 2$-এর জন্য উপপাদ্য সত্য।

ধরা যাক্ n = m-এর জন্য উপপাদ্যটি সত্য, অর্থাৎ

$$\frac{d^m}{dx^m}(uv) = u_m v + m_{C_1}\ u_{m-1} v_1 + m_{C_2}\ u_{m-2} v_2 + \ldots + m_{C_r}\ u_{m-r} v_r + \ldots + uv_m \quad \ldots \text{(i)}$$

x-এর সাপেক্ষে (i)-কে অন্তরকলন করে,

$$\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(uv) = \frac{d}{dx}(u_m v) + \frac{d}{dx}\left({}^m c_1 u_{m-1} v_1\right) + \frac{d}{dx}\left({}^m c_2 u_{m-2} v_2\right)$$

$$+ \ldots + \frac{d}{dx}\left({}^m c_r u_{m-r} v_r\right) + \ldots + \frac{d}{dx}(uv_m)$$

$$= \left(u_{m+1} v + u_m v_1\right) + {}^m c_1\left(u_m v_1 + u_{m-1} v_2\right) + {}^m c_2\left(u_{m-1} v_2 + u_{m-2} v_3\right)$$

$$+ \ldots + {}^m c_r\left(u_{m-r+1} v_r + u_{m-r} v_{r+1}\right) + \ldots + \left(u_1 v_m + uv_{m+1}\right)$$

$$= u_{m+1} v + \left(1 + {}^m c_1\right) u_m v_1 + \left({}^m c_1 + {}^m c_2\right) u_{m-1} v_2$$

$$+ \ldots + \left({}^m c_{n-1} + {}^m c_r\right) u_{m-r+1} v_r + \ldots + uv_{m+1}$$

$$= u_{m+1} v + {}^{m+1}c_1\, u_{(m+1)-1} \cdot v_1 + {}^{m+1}c_2\ u_{(m+1)-2}\ v_2 \ldots$$

$$+ \ldots + {}^{m+1}c_r\ u_{(m+1)-r}\ v_r + \ldots + uv_{m+1}$$

[যেহেতু ${}^m c_r + {}^m c_{r-1} = {}^{m+1}c_r, r = 1, 2, \ldots\ldots, m$]

অতএব দেখা গেল উপপাদ্যটি n = m + 1-এর জন্য সত্য।

যেহেতু n = 1-এর জন্য উপপাদ্যটি সত্য, সুতরাং গাণিতিক আরোহ্ পদ্ধতি প্রয়োগ করে প্রমাণিত হল উপপাদ্যটি যে কোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n-এর জন্য সত্য।

4.12.3. উদাহরণ ঃ

(1) $y = x^n$, n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা, y-এর m-তম অন্তরকলজ নির্ণয় করুন। $(m \le n)$

সমাধান ঃ

$$y = x^n$$

$$y_1 = \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

$$y_2 = \frac{d}{dx}\ y_1 = \frac{d}{dx}\ (nx^{n-1}) = n(n-1)x^{n-2}$$

$$y^3 = n(n-1)(n-2)\ x^{n-3}$$

....

....

$$y_k = n(n-1)(n-2)\ ....\ (n-k+1)\ x^{n-k}\ ;\ k \le n$$

$$\therefore\ y_m = n(n-1)(n-2)\ ....\ (n-m+1)\ x^{n-m}$$

$$= \frac{n!}{(n-m)!}\ x^{n-m}$$

$$\therefore\ y_n = n\,! \qquad \therefore\ y_{n+1} = y_{n+2} = ... = 0$$

(2) $y = (ax + b)^m$, m ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা; y-এর m-তম অন্তরকলজ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

$$y_1 = ma\ (ax + b)^{m-1}$$

$$y_2 = m(m-1)a^2(ax + b)^{m-2}$$

....

....

$$y_k = m\ (m-1)\ ....\ (m-k+1)\ a^k\ (ax + b)^{m-k}\ ;\ k \le m$$

$$\therefore\ y_m = m\,!\ a^m$$

(3) $y = e^{ax}$, n-তম অন্তরকলজ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

$$y_1 = ae^{ax}$$

$$y_2 = a^2e^{ax}$$

....

....

$$\therefore\ y_n = a^ne^{ax}$$

4. $y = \dfrac{1}{x+a}$, n-তম অন্তরকলজ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

$$y = \frac{1}{x+a}$$

$$\therefore\ y_1 = -\frac{1}{(x+a)^2}\ ;\quad y_2 = \frac{(-1)^2\, 2!}{(x+a)^3}$$

....

....

$$y_n = \frac{(-1)^n\ n!}{(x+a)^{n+1}}$$

(5) $y = \log_e(x + a)$; n-তম অন্তরকলজ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

$$y = \log_e\ (x + a)\ ;\ y_1 = \frac{1}{x+a}$$

∴ পূর্বের উদাহরণ থেকে

$$\therefore\ y_n = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+a)^n}$$

(6) $y = \sin\ (ax + b)$; n-তম অন্তরকলজ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

$$y_1 = a\cos\ (ax+b) = a\sin\left(\frac{\pi}{2}+ax+b\right)$$

$$y_2 = a^2\cos\left(\frac{\pi}{2} + ax + b\right) = a^2\sin\left(2.\frac{\pi}{2}+ax+b\right)$$

....

....

$$\therefore\ y_n = a^n\sin\left(n.\frac{\pi}{2} + ax + b\right)$$

(7) $y = \cos(ax + b)$; n-তম অন্তরকলজ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

$$y_1 = -a\sin(ax+b) = a\cos\left(\frac{\pi}{2} + ax + b\right)$$

$$y_2 = -a^2\sin\left(\frac{\pi}{2} + ax + b\right) = a^2\cos\left(2.\frac{\pi}{2} + ax + b\right)$$

....

....

$$\therefore \quad y_n = a^n\cos\left(\frac{n\pi}{2} + ax + b\right).$$

(8) যদি $y = e^{ax}\sin bx$ হয়, তবে n-তম অন্তরকলজ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

$$y = e^{ax}\sin bx$$

$$y_1 = e^{ax}.\, a\sin bx + e^{ax}\cos bx.\, b = e^{ax}(a\sin bx + b\cos bx)$$

ধরুন, $a = r\cos\phi,\ b = r\sin\phi$

$$r = (a^2+b^2)^{\frac{1}{2}},\ \phi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\therefore\ y_1 = r\,e^{ax}\sin(bx + \phi)$$

অনুরূপে,

$$y_2 = r\,e^{ax}[a\sin(bx+\phi) + b\cos(bx+\phi)]$$

$$= r^2e^{ax}\sin(bx + 2\phi)$$

এবং,

$$y_n = r^ne^{ax}\sin(bx + n\phi)$$

$$= (a^2+b^2)^{n/2}e^{ax}\sin(bx + n\tan^{-1}\frac{b}{a}).$$

(9) $y = e^{ax}\cos bx$ হলে n-তম অন্তরকলজ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

(8)-এর মতো করলে পাবেন,

$$y_n = (a^2 + b^2)^{n/2} e^{ax} \cos\left(bx + n \tan^{-1} \frac{b}{a}\right).$$

(10) $ax^2 + 2h\,xy + by^2 = 1$ হলে দেখান যে,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{h^2 - ab}{(hx + by)^3} \quad \text{যেখানে } hx + by \neq 0.$$

সমাধান ঃ

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$-কে x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলজ করে,

$$2ax + 2hy + 2h\,xy_1 + 2byy_1 = 0$$

বা, $$y_1 = -\frac{ax + hy}{hx + by} \quad \text{............} \quad \text{(i)}$$

x-এর সাপেক্ষে (i)-এর অন্তরকলজ করে,

$$y_2 = -\left[\frac{(hx + by)(a + hy_1) - (ax + hy)(h + by_1)}{(hx + by)^2}\right]$$

$$= -\frac{1}{(hx + by)^2}\left[(ahx + aby - ahx - h^2y) + y_1(h^2x + bhy - abx - hby)\right]$$

$$= -\frac{1}{(hx + by)^2}\left[(ab - h^2)y + y_1\left(h^2 - ab\right)x\right]$$

$$= -\frac{1}{(hx + by)^2}\left(h^2 - ab\right)\left[xy_1 - y\right]$$

$$= \frac{1}{(hx + by)^2}\left(h^2 - ab\right)\left[y + \frac{x(ax + hy)}{hx + by}\right]$$

$$= \frac{h^2 - ab}{(hx + by)^3}\left[ax^2 + by^2 + 2hxy\right] = \frac{h^2 - ab}{(hx + by)^3}$$

$$(\because ax^2 + by^2 + 2hxy = 1).$$

(11) যদি $y = \sin(m \sin^{-1}x)$ হয়, তবে প্রমাণ করুন,

$$(1 - x)^2 y_{n+2} - (2n + 1)\,x\,y_{n+1} + (m^2 - n^2)\,y_n = 0$$

সমাধান ঃ

$$y = \sin(m \sin^{-1}x)$$

$$\therefore \quad y_1 = \cos(m\sin^{-1}x).\frac{m}{\sqrt{1-x^2}}$$

বা, $\sqrt{1-x^2}\,.y_1 = m\cos(m\sin^{-1}x)$

পুনরায় x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করিয়া,

$$\sqrt{1-x^2}\,.y_2 - \frac{xy_1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-m^2}{\sqrt{1-x^2}}\sin(m\sin^{-1}x)$$

বা, $(1-x^2)\,y_2 - xy_1 + m^2\sin(m\sin^{-1}x) = 0$

বা, $(1-x^2)\,y_2 - xy_1 + m^2y = 0$ .... (i)

এখন লাইবনিৎসের উপপাদ্যের দ্বারা (i)-এর n-তম অন্তরকলজ নিলে

$$\left\{(1-x^2)y_{n+2} - 2nxy_{n+1} - n(n-1)y_n\right\} - \left\{x.y_{n+1} + ny_n\right\} + m^2y = 0$$

বা, $(1-x^2)\,y_{n+2} - (2n+1)\,xy_{n+1} + (m^2-n^2)\,y_n = 0$

(12) যদি $y = \tan^{-1}x$ হয়, তবে দেখান যে,

$$(1+x^2)\,y_2 + 2xy_1 = 0$$

এবং এ থেকে প্রমাণ করুন

$$(1+x^2)\,y_{n+2} + (n+1)\,x\,y_{n+1} + n(n+1)\,y_n = 0$$

সমাধান ঃ

$y = \tan^{-1}x$-কে x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে,

$y_1 = \dfrac{1}{1+x^2}$ বা, $(1+x^2)\,y_1 = 1$

আবার (x)-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে পাই

$(1+x^2)\,y_2 + 2xy_1 = 0$ .... (i)

এখন লাইবনিৎস-এর উপপাদ্যের সাহায্যে (i)-এর উভয় পক্ষের n-তম অন্তরকলজ নিলে পাই

$\{(1+x^2)\,y_{n+2} + 2nxy_{n+1} + n(n-1)y_n\} + 2\{xy_{n+1} + ny_n\} = 0$

বা, $\{(1+x^2)\,y_{n+2} + 2(n+1)\,xy_{n+1} + n(n+1)\,y_n = 0$

(13) যদি $y = a \cos(\log x) + b \sin(\log x)$, তবে দেখান যে

$$x^2y_2 + xy_1 + y = 0$$

আরও প্রমাণ করুন

$$x^2y_{n+2} + (2n+1)\, xy_{n+1} + (n^2+1)\, y_n = 0$$

সমাধান ঃ

$$y = a\cos(\log_e x) + b\sin(\log_e x)$$

$$\therefore \quad y_1 = -\frac{a}{x}\sin(\log_e x) + \frac{b}{x}\cos(\log_e x)$$

$$\therefore \quad xy_1 = -a\sin(\log_e x) + b\cos(\log_e x)$$

উভয়পক্ষের x-সাপেক্ষে অন্তরকলন করে

$$xy_2 + y_1 = -\frac{a}{x}\cos(\log_e x) - \frac{b}{x}\sin(\log_e x)$$

বা, $x^2y_2 + xy_1 = -\left[a\cos(\log_e x) + b\sin(\log_e x)\right]$

বা, $x^2y_2 + xy_1 = -y$

বা, $x^2y_2 + xy_1 + y = 0$

এখন লাইবনিৎসের উপপাদ্যের সাহায্যে n-তম অন্তরকলজ করলে

$$x^2y_{n+2} + 2nxy_{n+1} + n(n-1)\, y_n + xy_{n+1} + ny_n + y_n = 0$$

বা, $x^2y_{n+2} + (2n+1)\, xy_{n+1} + (n^2+1)\, y_n = 0$

4.13. সারাংশ

(1) $x = c$ একটি বিন্দুতে $f(x)$ অন্তরকলজের সংজ্ঞা ঃ

$$f'(c) = \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

(2) ফাংশনের একটি বিন্দুতে অন্তরকলজ জ্যামিতিক দৃষ্টিভঙ্গিতে ঐ বিন্দুতে স্পর্শকের প্রবণতা।

(3) $\frac{d}{dx}f(x)$, $\frac{d}{dx}g(x)$ এর অস্তিত্ব থাকলে,

(i) $\frac{d}{dx}\left(f(x) \pm g(x)\right) = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x)$

$$\text{(ii) } \frac{d}{dx}(f(x).g(x)) = f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x)$$

এবং $$\text{(iii) } \frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\dfrac{d}{dx}f(x) - f(x)\dfrac{d}{dx}g(x)}{\{g(x)\}^2},$$ যেখানে $g(x) \neq 0$

4) ফাংশনের কোন বিন্দুতে অন্তরকলজের অস্তিত্ব থাকলে ফাংশনটি সেই বিন্দুতে সন্তত হবে।

5) ফাংশনের কোন বিন্দুতে অন্তরকলজ ধনাত্মক হলে ঐ বিন্দুর একটি সামীপ্যে ফাংশনটি বর্ধমান হবে এবং অন্তরকলজটি ঋণাত্মক হলে একটি সামীপ্য অঞ্চলে ফাংশনটি ক্ষীয়মান হবে।

6) অন্তরকলনের শৃঙ্খলা নিয়ম (Chain rule)

$u = \phi(x)$ এবং $y = f(u)$ হলে $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

7) $x = \phi(t)$ এবং $y = \psi(t)$ হলে $$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}},$$ যেখানে t একটি প্রচল।

8) $f(x)$ ফাংশন x বিন্দুতে অন্তরকলনযোগ্য বলা হবে যদি

$$f(x+\Delta x) - f(x) = A.\,\Delta x + \varepsilon\Delta x$$

যেখানে A, Δx-এর উপর নির্ভরশীল নয় এবং $\varepsilon \to 0$ যখন $\Delta x \to 0$.

9) $$\frac{d^n}{dx^n}f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}f(x)}{dx^{n-1}}\right)$$

10) $$\frac{d^n}{dx^n}\{f(x) \pm g(x)\} = \frac{d^n f(x)}{dx^n} \pm \frac{d^n}{dx^n}g(x)$$

11) লাইবনিৎসের নিয়ম ঃ

$$\frac{d^n}{dx^n}(uv) = u_n v + n_{C_1}u_{n-1}v_1 + n_{C_2}u_{n-2}v_2 + \ldots\ldots + n_{C_r}u_{n-r}v_r + \ldots + uv_n$$

4.14 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1) $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=a(x-y)$ হলে দেখান যে, $\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$.

2) $\sin y = x\sin(a+y)$ হলে প্রমাণ করুন, $\frac{dy}{dx}=\frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$

3) যদি $y=\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+\sqrt{\text{etc. to } \infty}}}}$ হয় তবে, প্রমাণ করুন

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos x}{2y-1}$$

4) $\frac{d^n y}{dx^n}$ নির্ণয় করুন ঃ-

(a) $y=\frac{x^n}{x-1}$, (b) $y=e^x\cos x$, (c) $y=\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$

5) যদি $y=(\sin^{-1}x)^2$ হয়, তবে প্রমাণ করুন

(i) $(1-x^2)y_2-xy_1-2=0$

(ii) $(1-x^2)\,y_{n+2}-(2n+1)\,xy_{n+1}-n^2y_n=0$

(6) $y=e^{a\sin^{-1}x}$ হলে দেখান যে,

$$(1-x^2)y_{n+2}-(2n+1)xy_{n+1}-(n^2+a^2)y_n=0$$

(7) $y=x^{n-1}\log x$ হলে প্রমাণ করুন $y_n=\frac{\underline{|(n-1)}}{x}$

(8) $y=\cos(10\cos^{-1}x)$ হলে দেখান যে $(1-x^2)y_{12}=21xy_{11}$

(9) $f(x)=\tan x$ হলে প্রমাণ করুন

$$f^n(o)-{}^nc_2f^{n-2}(0)+{}^nc_4f^{n-4}(0)-\ldots\ldots\ldots=\sin\frac{n\pi}{2}$$

যেখানে n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা ।

4.15 উত্তরমালা

(1) ধরুন, $x = \sin\theta, y = \sin\phi$

$\therefore \cos\theta + \cos\phi = a(\sin\theta - \sin\phi)$

বা, $a = \dfrac{\cos\theta + \cos\phi}{\sin\theta - \sin\phi} \Rightarrow \theta - \phi = 2\cot^{-1} a$

$\therefore \sin^{-1} x - \sin^{-1} y = 2\cot^{-1} a$

x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে,

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$$

(2) $\sin y = x\sin(a+y)$ -কে x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে,

$$\cos y \frac{dy}{dx} = \sin(a+y) + x\cos(a+y).\frac{dy}{dx}$$

বা, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sin(a+y)}{\cos y - \dfrac{\sin y}{\sin(a+y)}.\cos(a+y)} = \dfrac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$

(3) $y = \sqrt{\sin x + y}$, x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{2y-1}$$

4. (a) $y = \dfrac{x^n}{x-1} = \dfrac{x^n - 1}{x-1} + \dfrac{1}{x-1}$; উত্তর ঃ $\dfrac{(-1)^n . n!}{(x-1)^{n+1}}$

(b) উত্তর ঃ $y_n = 2^{\frac{n}{2}} e^x \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{4}\right)$

(c) ধরুন $x = \cot\theta$, উত্তর ঃ $2(-1)^{n-1}(n-1)!\sin^n\theta \sin n\theta$, যেখানে $x = \cot\theta$

(5) $y = (\sin^{-1} x)^2$, x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে,

$\therefore y_1 = 2\sin^{-1} x . \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ বা, $y_1\sqrt{1-x^2} = 2\sin^{-1} x$

আবার, x -এর সাপেক্ষে অন্তর কলন করে,

$$(1-x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0$$

এরপর লাইবনিজের নিয়মের সাহায্যে n-তম অন্তরকলন

$$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - n^2 y_n = 0$$

(6) $y = e^{a\sin^{-1}x}$

x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন নিয়ে,

$$y_1\sqrt{1-x^2} = ay$$

x-এর সাপেক্ষে আবার অন্তরকলন করে,

$$y_2\sqrt{(1-x^2)} + \frac{y_1(-x)}{\sqrt{1-x^2}} = ay_1$$

বা, $y_2\,(1-x^2) - xy_1 = ay_1\,\sqrt{1-x^2}$

বা, $y_2\,(1-x^2) - xy_1 = a^2 y$

লাইবনিজের নিয়মের সাহায্যে n-তম অন্তরকলজ,

$$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (n^2+a^2)y_n = 0$$

(7) $y = x^{n-1}\log x$ কে n-তম অন্তরকলন করে $y_n = \frac{\underline{|n-1}}{x}$

(8) $y = \cos(10\cos^{-1}x)$ -কে x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে,

$$y_1 = +\sin(10\cos^{-1}x)\frac{10}{\sqrt{1-x^2}}$$

বা, $\sqrt{1-x^2}\;y_1 = 10\sin(10\cos^{-1}x)$

x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে,

$$\sqrt{1-x^2}\;y_2 + \frac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot y_1 = 10\cos(10\cos^{-1}x)\left(-\frac{10}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

বা, $(1-x^2)y_2 - xy_1 + 100y = 0$

লাইবনিজের নিয়মে 10-তম অন্তরকলজ

$$(1-x^2).y_{12}+10.(-2x)y_{11}+\frac{10\times 9}{2}.(-2)y_{10}-xy_{11}-10y_{10}+100y_{10}=0$$

বা, $(1-x^2)y_{12}=21xy_{11}$

(9) $f(x) = \tan x$

বা, $\sin x = f(x)\cos x$.............(i)

আগে দেখেছেন,

$$\frac{d^n}{dx^n}\sin x=\sin\left(n.\frac{\pi}{2}+x\right) \text{ এবং } \frac{d^n}{dx^n}\cos x=\cos\left(n\frac{\pi}{2}+x\right)$$

$f(x)$ $\cos x$-কে লাইবনিজের নিয়ম-এ n-তম অন্তরকলজ

$$\frac{d^n}{dx^n}\{f(x).\cos x\}=f^n(x)\cos x+{}^nc_1\, f^{n-1}(x)\frac{d}{dx}\cos x+{}^nc_2\, f^{n-2}(x)\frac{d^2}{dx^2}\cos x$$

$$+.......+{}^nc_r f^{n-r}(x)\frac{d^r}{dx^r}\cos x+..............$$

(i)-এর উভয়পক্ষকে n-তম অন্তরকলন করলে,

$$\sin\left(n.\frac{\pi}{2}+x\right)=f^n(x)\cos x+{}^nc_1 f^{n-1}(x).\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$

$$+{}^nc_2 . f^{n-2}(x)\cos\left(2.\frac{\pi}{2}+x\right)+...........$$

$$+{}^nc_r . f^{n-r}(x)\cos\left(r.\frac{\pi}{2}+x\right)+..........(ii)$$

(ii) $x = 0$ বসালে,

$$\sin\frac{n\pi}{2}=f^n(0)-{}^nc_2 f^{n-2}(0)+{}^nc_4 f^{n-4}(0)-............$$

4.16 সহায়ক পুস্তক

1. Hardy, G. H. Acourse of Pure Mathematics Cambridge University Press.

একক 5 ❑ রোলের উপপাদ্য, মধ্যমান উপপাদ্য সমূহ, লপিতার নিয়ম

গঠন

5.1 প্রস্তাবনা ঃ

কোন বিন্দুতে এবং কোন বদ্ধ অন্তরালে কোন অপেক্ষক কখন সন্তত হবে কিংবা অবকলনযোগ্য হবে এ সম্বন্ধে আপনারা আগের পাঠাংশগুলিতে অবহিত হয়েছেন। কোন বদ্ধ অন্তরালে অপেক্ষকের সন্ততি ও ক্রমিক অন্তরকলজগুলির অস্তিত্ব, অপেক্ষকটির কয়েকটি চারিত্রিক বৈশিষ্ট্য প্রকাশ করে, যে ফলাফলগুলি অন্তরকলন বিদ্যায় বহুব্যবহৃত। এগুলির কয়েকটি কিভাবে পাওয়া যায় তা এই অধ্যায়ে আলোচিত হবে। অপেক্ষকগুলির চরিত্র অনুধাবন অপেক্ষকগুলির বাস্তব প্রয়োগের ক্ষেত্রে প্রয়োজনীয়। বিশেষত কতগুলি অপেক্ষকের সীমা নির্ধারনের ক্ষেত্রে কয়েকটি সিদ্ধান্ত খুবই সুবিধাজনকভাবে প্রয়োগ করা যায়।

5.2 উদ্দেশ্য ঃ

এই একক পাঠ করে আপনি —

- অন্তরকলনযোগ্য অপেক্ষক (differentiable function) গুলির ক্ষেত্রে প্রযোজ্য কয়েকটি উপপাদ্য এর সঙ্গে পরিচিত হবেন।
- এদের উপর নির্ভরশীল সিদ্ধান্তগুলি অনুসরণ করতে সক্ষম হবেন।
- এদের মধ্যে প্রাথমিকভাবে উল্লেখযোগ্য রোলের উপপাদ্য বিষয়ে ধারণা করতে পারবেন।

- কিভাবে এই উপপাদ্যের পরিণতি স্বরূপ পরের উপপাদ্যগুলি (যেমন ল্যাগরাঞ্জের মধ্যমান উপপাদ্য, কসির মধ্যমান উপপাদ্য ইত্যাদি) উপস্থাপিত হয়েছে তা অনুধাবন করতে পারবেন।
- লপিতার উপপাদ্যে (L'Hospital's rule) প্রমাণ উপরোক্ত উপপাদ্যগুলির উপর কিভাবে নির্ভরশীল তা নির্দেশ করতে পারবেন।
- অনির্নীত আকারের লিমিট নির্ণয়ে লপিতার নিয়ম প্রয়োগের সুবিধাজনক ভূমিকা বুঝিয়ে দিতে পারবেন।
- মধ্যমান উপপাদ্যের লপিতার নিয়মে ক্রমপরিণতি বিশেষভাবে লক্ষ্য করবেন।

5.3 প্রাসঙ্গিক ধারণাসমূহ ঃ

রোলের উপপাদ্য এবং তার বিভিন্ন ক্রম পরিণতি ও নানাবিধ প্রয়োগ সম্বন্ধে আলোচনা করার পূর্বে কতগুলি ধারণা ও সিদ্ধান্ত যা আগেই আলোচিত হয়েছে ও ব্যাখ্যা করা হয়েছে সেগুলির উল্লেখ প্রয়োজন।

আপনারা স্মরণ করুন, কোন অপেক্ষক $y = f(x)$, $x = a$ বিন্দুতে সন্তত (continuous) বলা হয় যদি $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ হয়। আবার কোন বিন্দু $x = a$-তে যদি $\lim\limits_{x \to o} \dfrac{f(a+x)-f(a)}{x}$ লিমিট থাকে তবে ঐ অপেক্ষকটি $x = a$ বিন্দুতে অন্তরকলনযোগ্য। সন্ততির ধারণার মত, বদ্ধ অথবা মুক্ত অন্তরালে অন্তরকলনযোগ্যতার ধারণাটিরও বিস্তার করা হয়।

এই প্রসঙ্গে কতগুলি উল্লেখযোগ্য ফলাফল মনে রাখা যেতে পারে। যেমন কোন অপেক্ষকের কোন বিন্দুতে সন্ততি ঐ বিন্দুতে অপেক্ষকটির অন্তরকলনযোগ্যতার জন্য আবশ্যিক কিন্তু বিপরীত সিদ্ধান্তটি সত্য নয়। অন্তরকলনযোগ্য কোন অপেক্ষকের কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে অন্তরকলজের মান, ঐ বিন্দুতে রেখাটির স্পর্শকের নতি (gradient) এর সমান হয়। আবার কোন বদ্ধ অন্তরালে সন্তত অপেক্ষক অবশ্যই সীমাবদ্ধ (bounded) এবং ঐ বদ্ধ অন্তরালে সন্তত অপেক্ষক অন্তত একবার ঐ অন্তরালের কোন বিন্দুতে লঘিষ্ঠ উচ্চসীমা ও বৃহত্তম নিম্নসীমা ধারণ করে।

আবার $y = f(x)$-এর অন্তরকলজ $f'(x)$ কোন বিন্দুতে ধনাত্মক হলে অপেক্ষকটি ঐ বিন্দুর একটি সামীপ্যে ক্রমবর্ধমান এবং $f'(x)$ কোন বিন্দুতে ঋণাত্মক হলে ঐ বিন্দুর একটি সামীপ্য আছে যেখানে $f(x)$ ক্রমক্ষীয়মান।

5.4 রোলের উপপাদ্য (Rolle's theorem) ও প্রাসঙ্গিক আলোচনা ঃ

বিবৃতি (statement) ঃ কোন অপেক্ষক $y = f(x)$, (1) কোন বদ্ধ অন্তরাল $[a, b]$ তে সন্তত এবং (2) যদি অপেক্ষকটি মুক্ত অন্তরাল (a, b)-তে অন্তরকলনযোগ্য এবং (3) $f(a) = f(b)$ হয়, তাহলে মুক্ত অন্তরাল (a,b) তে অন্তত একটি বিন্দু ξ আছে যেখানে $f'(\xi) = 0$।

প্রমাণ ঃ 1 নং শর্তানুসারে অপেক্ষকটি বদ্ধ অন্তরাল [a,b] তে সন্তত। সুতরাং সন্তত অপেক্ষকের ধর্মানুসারে অপেক্ষকটি ঐ বদ্ধ অন্তরালে সীমাবদ্ধ (bounded) এবং অন্তত একবার ঐ অন্তরালে ল.উ.সী. ও গ. অ. সী (supremum ও infimum) ধারণ করবে। ধরা যাক অপেক্ষকটির লঘিষ্ঠ উর্ধ্বসীমা M ও গরিষ্ঠ নিম্নসীমা m।

এখন আমরা বিভিন্ন সম্ভাবনা বিবেচনা করব ঃ

(এক) $M = m$. এক্ষেত্রে অপেক্ষকটি ধ্রুবক হবে। এবং $f(a) = f(b) = M = m = f(x)$ যেখানে $a < x < b$. অতএব (a, b)-এর যে কোন বিন্দুতে অপেক্ষকটির অন্তরকলজের মান শূন্য হবে। অর্থাৎ $f'(\xi) = 0 \forall \xi \in (a, b)$

(দুই) যদি $M \neq m$ হয়, যেহেতু $f(a) = f(b)$

অতএব $[a, b]$এর প্রান্ত বিন্দু ছাড়া অন্য একটি বিন্দু $\xi (a < \xi < b)$ আছে যেখানে $f(\xi) = M$ অথবা $f(\xi) = m$ হবে।

প্রথমে ধরে নেওয়া যাক্ $f(\xi) = M$

তাহ'লে $f(\xi + h) - f(\xi) < 0$ (h একটি ক্ষুদ্র অশূন্য সংখ্যা এমন যে $a < \xi + h < b$)

অতএব $\dfrac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} < 0$ যদি $h > o$,

$\dfrac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} > 0$ যদি $h < o$,

এখন, যেহেতু $f'(\xi)$ এর অস্তিত্ব আছে,

অতএব, উপরের দুটি থেকে যথাক্রমে $h \to 0+$ এবং $h \to 0-$ লিমিট নিয়ে

আমরা পাই $Rf'(\xi) \leq 0, Lf'(\xi) \geq 0$,

যেহেতু $f'(\xi)$ বিদ্যমান; অতএব আমরা পাই $f'(\xi) = 0$

অতএব এক্ষেত্রে রোলের উপপাদ্য সত্য।

অনুরূপভাবে যদি $f(\xi) = m$ হয় তাহলে কোন $h \neq 0$এর জন্য

$\dfrac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} > 0$ হবে যদি $h > 0$ হয় এবং

$\dfrac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} < 0$ হবে যদি $h < 0$ হয়।

এখন প্রথমটিতে $h \to 0^+$ এবং দ্বিতীয়টিতে $h \to 0^-$ করিলে আমরা অনুরূপভাবে পাই $Rf'(\xi) \geq 0$ এবং $Lf'(\xi) \leq 0$

অতএব $f'(\xi) = 0$

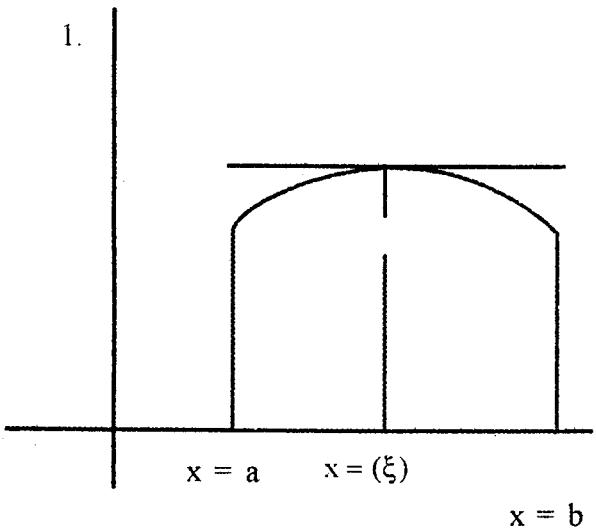
অতএব এই ক্ষেত্রেও উপপাদ্যটি সত্য।

রোলের উপপাদ্যের জ্যামিতিক তাৎপর্য

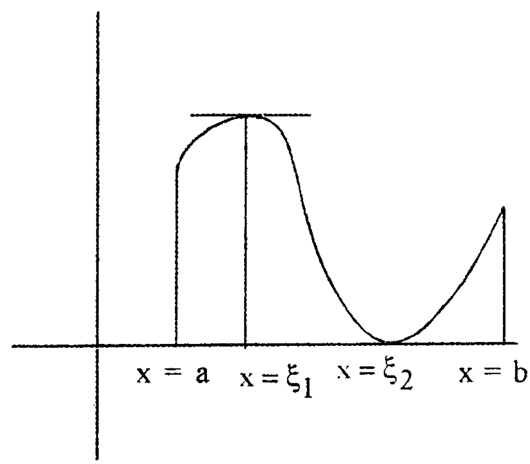
রোলের উপপাদ্যের শর্তানুসারে $[a,b]$ বদ্ধ অন্তরালে সন্তত $y = f(x)$ অপেক্ষকটি (a,b) মুক্ত অন্তরালে অন্তরকলযোগ্য ও ঐ অন্তরালের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ে অপেক্ষকটির মান সমান। রোলের সিদ্ধান্ত অনুসারে $x = \xi, a < \xi < b$ একটি বিন্দু পাব যেখানে $f'(\xi) = 0$ হবে। অর্থাৎ ঐ বিন্দুতে স্পর্শকের নতির মান শূন্য হবে অর্থাৎ স্পর্শকটি x অক্ষের সমান্তরাল।

কয়েকটি বিভিন্ন প্রকারের অপেক্ষকের চিত্র দেওয়া হল।

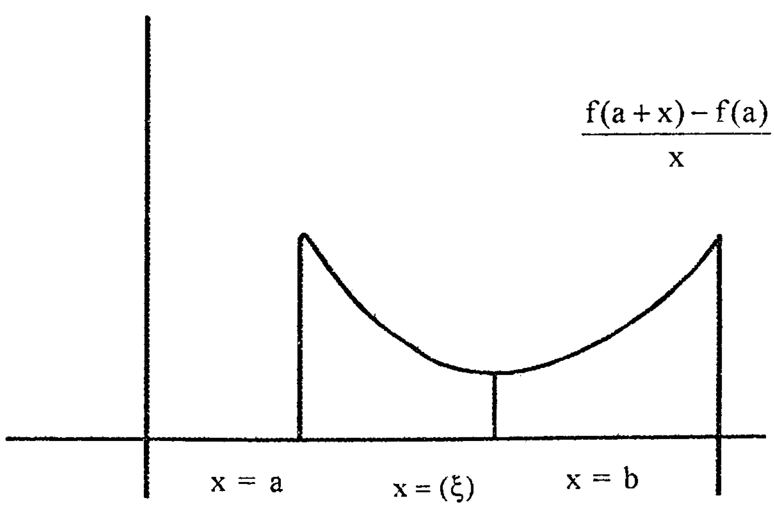
1.



3.



2.



অনুসিদ্ধান্ত : $y = f(x)$ একটি অপেক্ষক যেখানে $f(x)$ একটি বীজগাণিতিক বহুপদরাশি (Polynomial) হলে ও $x = \alpha$ ও $x = \beta$, $f(x) = 0$ এই সমীকরণের দুইটি বীজ হলে, $f(\alpha) = 0 = f(\beta)$ যেক্ষেত্রে

$[\alpha,\beta]$ অন্তরালে $y = f(x)$ অপেক্ষকটি রোলের উপপাদ্যের সমস্ত শর্তই পূরণ করে। সুতরাং রোলের উপপাদ্যের সিদ্ধান্ত অনুসারে (α,β) মুক্ত অন্তরালে একটি বিন্দু $x = r$ থাকবে যেখানে $f'(r) = 0$ হবে। অর্থাৎ $f(x)$ একটি বহুপদরাশি হলে এবং $y = f(x) = 0$ সমীকরণের যে কোন দুটি বীজের মধ্যে $f'(x) = 0$ সমীকরণের অন্তত একটি বীজ থাকবে।

মন্তব্য ঃ রোলের উপপাদ্য প্রয়োগের সময় লক্ষ্য রাখা দরকার, শর্তগুলি সঠিকভাবে পূরণ হচ্ছে কিনা। রোলের উপপাদ্য প্রয়োগের একটি ব্যতিক্রম নিম্নের উদাহরণ দেওয়া হল।

উদাহরণ ঃ $y = f(x)$ অপেক্ষকটি এইভাবে

সংজ্ঞাত $y = x + 1$ যখন $0 \le x \le 1, y = 3 - x$ যখন $1 < x \le 2$

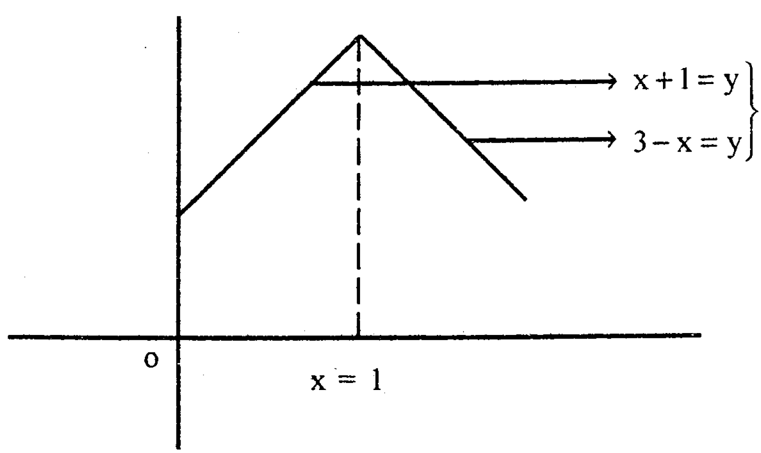
এক্ষেত্রে $f(0) = f(2)$ ও $[0,2]$ অন্তরালে

সন্তত, কিন্তু যেহেতু $f'(x)$ সর্বত্র (ঐ মুক্ত $(0,2)$ অন্তরালে) নেই, কেন না

$$\lim_{x \to 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1+} \frac{3 - x - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1+} \frac{1 - x}{x - 1} = -1$$

এবং $$\lim_{x \to 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1-} \frac{x + 1 - 2}{x - 1} = 1.$$

অতএব $x = 1$ বিন্দুতে অন্তরকলনের দক্ষিণ লিমিট $Rf'(1)$ ও বাম লিমিট $Lf'(1)$ দুইটি অসমান হওয়ায় রোলের উপপাদ্য এখানে প্রযোজ্য নয়।



অনুশীলনী ঃ

1. $y = 1 - 3\sqrt{x}[0,1]$ অন্তরালে রোলের উপপাদ্যের শর্তপূরণ করে কিনা লক্ষ্য করুন।

2. $f(x)=2x^3+3x^2+6x$ হলে রোলের উপপাদ্যের সাহয্যে দেখান যে x-এর দুইটি ভিন্ন বাস্তব মানের জন্য f(x)-এর মান কখনই সমান হবে না।

(**নির্দেশ ঃ** রোলের উপপাদ্যের সমস্ত শর্ত পূরণ করা সম্ভব কিনা পরীক্ষা করুন। আবার $f'(x)=0$-এর প্রকৃতি নির্ণয় করুন।)

3. y = tanx অপেক্ষকটিতে $[o,\pi]$ অন্তরালের রোলের উপপাদ্য প্রয়োগ সম্ভব কিনা পরীক্ষা করুন।

4. যদি $f'(x), \zeta'(x)$ অপেক্ষকগুলি [a, b] অন্তরালে সন্তত ও অবকলনযোগ্য হয় এবং $\zeta''(c) \neq 0$ হয় তবে দেখান যে এমন একটি c আছে যে a < c < b এবং $\dfrac{f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)}{\zeta(b)-\zeta(a)-(b-a)\zeta'(a)}=\dfrac{f''(c)}{\zeta''(c)}$

[**নির্দেশ ঃ** $\phi(x)=f(x)+(b-x)f'(x)+k\{\zeta(x)+(b-x)\zeta'(x)\}$ অপেক্ষকটির উপর রোলের উপপাদ্য প্রয়োগ করুন।]

k এমনভাবে ধরুন যে $\phi(a)=\phi(b)$ হয়।

5.5 ল্যাগরাঞ্জের মধ্যমান উপপাদ্য (Lagrange's Mean Value Theorem) ঃ

বিবৃতি ঃ কোন অপেক্ষক y = f(x) কোন বদ্ধ অন্তরাল [a, b] তে এমনভাবে সংজ্ঞাত যে 1) y = f(x) অপেক্ষকটি [a, b] অন্তরালে সন্তত ও 2) y = f(x) অপেক্ষকটি (a, b) এই মুক্ত অন্তরালে অন্তরকলনযোগ্য। তাহলে অন্তরাল (a, b)-তে $x=\xi$ একটি বিন্দু পাব যেখানে —

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \text{ হয়।}$$

প্রমাণ ঃ প্রথমে আমরা $y=\phi(x)$ একটি অপেক্ষক নিলাম যেখানে $\phi(x)=f(x)+A.x$ এবং A একটি ধ্রুবক। এখন A ধ্রুবকটি এমনভাবে নেওয়া হল যে $\phi(a)=\phi(b)$ হয়।

অর্থাৎ $f(a)+A.a=f(b)+A.b$

$$\text{বা } A=\frac{f(b)-f(a)}{a-b}$$

এবার লক্ষ্য করুন $\phi(x)$ অপেক্ষকটি [a, b] অন্তরালে সন্তত ও মুক্ত অন্তরাল (a,b)-তে অন্তরকলন যোগ্য। আবার নির্মাণ অনুসারে $\phi(a)=\phi(b)$ অর্থাৎ $\phi(x)$ অপেক্ষকটি (a,b) অন্তরালে রোলের সমস্ত শর্ত পূরণ করে। সুতরাং রোলের উপপাদ্যের সিদ্ধান্ত অনুসারে একটি বিন্দু $x=\xi$ পাব যেখানে $a<\xi<b$ যখন $\phi'(\xi)=0$ হবে।

কিন্তু $\phi'(x)=f'(x)+A$

সুতরাং $\phi'(\xi) = f'(\xi) + A = 0$ হবে,

বা $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ।

মন্তব্য ঃ ল্যাগ্রাঞ্জের উপপাদ্যটি অন্যভাবে প্রকাশ করা যায়। যদি $a < b$ হয় ও $b-a = h$ ধরি তাহলে $a < \xi < b$ । $\xi = a + \theta h$ বলা যায় যখন $0 < \theta < 1$ । ল্যাগরাঞ্জের সিদ্ধান্তটি তখন এইভাবে লেখা যায়।

$$f'(a + \theta h) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

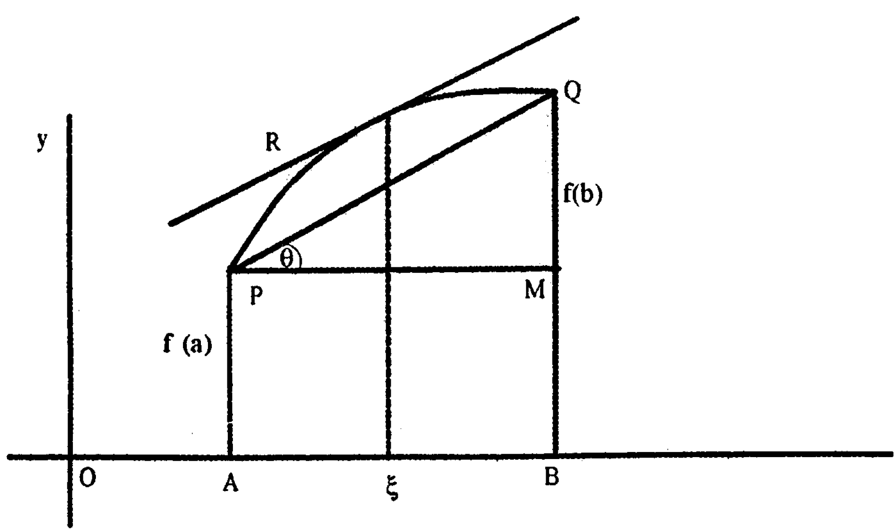
অথবা $f(b) = f(a) + hf'(a + \theta h), \qquad 0 < \theta < 1$

মন্তব্য ঃ ল্যাগরাঞ্জের উপপাদ্যে $f(a) = f(b)$ ধরে নিলে ল্যাগরাঞ্জের সিদ্ধান্ত রোলের উপপাদ্যের সিদ্ধান্তের সাথে একই হয়। অর্থাৎ $a < \xi < b$ ও $x = \xi$ একটি বিন্দু পাব যেখানে $f'(\xi) = 0$ হবে।

ল্যাগরাঞ্জের উপপাদ্যের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা

$(a, f(a))$ এবং $(b, f(b))$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখার সঙ্গে সমান্তরাল একটি সরলরেখা ঐ বক্ররেখার একটি বিন্দু $x = \xi$ (যেখানে $a < b$)-তে স্পর্শক হবে। নীচের চিত্র দ্রষ্টব্য।

PRQ বক্ররেখাটি $y = f(x)$-কে রূপায়িত করলে $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \dfrac{QB - PA}{BA}$



$$\frac{QM}{BA} = \tan\theta,$$ যেখানে $\theta = PQ$ কর্তৃক x অক্ষের সহিত নির্মিত কোণ।

কিন্তু ল্যাগরাঞ্জের উপপাদ্য থেকে পাই, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$ যেখানে $x = \xi$ একটি এমন বিন্দু যে $a < \xi < b$.

$\therefore \tan\theta = f'(\xi)$ অর্থাৎ $x = \xi$ বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের সহিত θ কোণ উৎপন্ন করে।

ল্যাগ্রাঞ্জের উপপাদ্যের অনুসিদ্ধান্ত 1 ঃ

কোন বদ্ধ অন্তরাল [a,b]-তে ল্যাগ্রাঞ্জের উপপাদ্যের শর্তপালনকারী কোন f(x) যদি এমন হয় যে $x \in (a,b)$ হলে $f'(x) = 0$, সেই ক্ষেত্রে ঐ অন্তরালে অপেক্ষকটি ধ্রুবক। কারণ h একটি ধনাত্মক সংখ্যা এমন যে $0 < h < b - a$ হলে, মধ্যমান উপপাদ্য অনুসারে $f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h)$ যেখানে

$0 < \theta < 1$ কিন্তু এখানে $f'(a+\theta h) = 0$ (প্রদত্ত শর্ত অনুযায়ী)

সুতরাং $f(a) = f(a+h) = K$

এইভাবে বিভিন্ন h এর মান নিয়ে আমরা দেখি যে

$f(a) = f(x)$ যেখানে $a < x \le b$.

অতএব f(x) একটি ধ্রুবক।

অনুসিদ্ধান্ত 2 ঃ যদি দুটি অপেক্ষক f(x) এবং g(x) এমন হয় যে $f'(x) = g'(x)\ \forall\ x \in (a,b)$

তাহলে $f(x) - g(x) =$ ধ্রুবক হবে $\forall x \in [a,b]$. এখানে $\phi(x) = f(x) - g(x)$ ধরে নিয়ে প্রথম অনুসিদ্ধান্তটি প্রয়োগ করলে আমরা এই ফলটি পেতে পারি।

অনুসিদ্ধান্ত 3 ঃ যদি কোন অপেক্ষক f(x), বদ্ধ অন্তরাল [a,b] তে সন্তত এবং মুক্ত অন্তরাল (a,b)-তে অবকলনযোগ্য হয় তাহলে $f'(x) > 0$ অথবা < 0 হলে অপেক্ষকটি a,b অন্তরালে ক্রমবর্ধমান অথবা ক্রমক্ষীয়মান হবে। ধরা যাক $x = \alpha$ এবং $x = \beta$ দুটি ভিন্ন বিন্দু (a,b) অন্তরালে নেওয়া হল এবং $\alpha < \beta$ এখন মধ্যমান উপাপাদ্য প্রয়োগে আমরা বলতে পারি

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} = f'(\alpha+\theta h), 0 < \theta < 1$$ যেখানে $h = \beta - \alpha$

এখন যদি $f'(a+\theta h) \gtreqless 0$ হয়,

তবে $f(\beta) \gtreqless f(\alpha)$ হবে, যখন $\beta > \alpha$

অর্থাৎ বলা যায় অপেক্ষকটি ক্রমবর্ধমান অথবা ক্রমক্ষীয়মান।

5.6 কসির মধ্যমান উপপাদ্য (Cauchy's Mean-Value Theorem) ঃ

বিবৃতি ঃ যদি দুটি অপেক্ষক $f(x)$ ও $\phi(x)$, $[a,b]$ বদ্ধ অন্তরালে এমনভাবে সংজ্ঞাত যে, (1) $f(x)$ ও $\phi(x)$ অপেক্ষক দুটি বদ্ধ অন্তরাল $[a,b]$-তে সন্তত ও (2) $f(x)$ ও $\phi(x)$ (a,b) মুক্ত অন্তরালে অন্তরকলনযোগ্য এবং (3) (a,b) মুক্ত অন্তরালে $\phi'(x)$ শূন্য হয় না,

তাহলে $$\frac{f(b)-f(a)}{\phi(b)-\phi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\phi'(\xi)}$$

যখন $a<\xi<b$.

প্রমাণ ঃ প্রথমে আমরা একটি অপেক্ষক $F(x)$ নির্মাণ করি যেখানে $F(x) = f(x)+A.\ \phi(x)$ যেখানে A একটি ধ্রুবক। এবার A ধ্রুবক এমনভাবে নেওয়া যাক যে $F(a) = F(b)$ হয়

অর্থাৎ $f(a)+A\phi(a)=f(b)+A\phi(b)$

অথবা বলা যায় যে $$A=\frac{f(b)-f(a)}{\phi(a)-\phi(b)}$$

এখানে $\phi(a)-\phi(b)$ কখনই শূন্য হতে পারে না কেননা তাহলে রোলের উপপাদ্যের সিদ্ধান্ত অনুসারে (a, b) অন্তরালে অন্তত একবার $\phi'(x)=0$ হবে যা তৃতীয় শর্তের বিরোধী।

সুতরাং $F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{\phi(b)-\phi(a)}\phi(x)$ একটি এমন অপেক্ষক যা [a, b] অন্তরালে রোলের উপপাদ্যের সমস্ত শর্ত পূরণ করে। রোলের উপপাদ্যের সিদ্ধান্ত অনুসারে (a, b) মুক্ত অন্তরালে একটি বিন্দু $x=\xi$ পাব যেখানে $F'(\xi)=0$ হবে।

অর্থাৎ $$F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{\phi(b)-\phi(a)}\phi'(\xi)=0$$

অথবা $$\frac{f'(\xi)}{\phi'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{\phi(b)-\phi(a)},\ a<\xi<b$$

যেহেতু $\phi'(\xi)\neq 0$

মন্তব্য 1 ঃ $b-a=h$ এবং $\xi=a+\theta h : 0<\theta<1$

লিখলে উপপাদ্যের সিদ্ধান্তটি নিম্নের মত লেখা যায়,

$$\frac{f'(a+\theta h)}{\phi'(a+\theta h)}=\frac{f(a+h)-f(a)}{\phi(a+h)-\phi(a)}$$

মন্তব্য 2 ঃ ল্যাগরাঞ্জের উপপাদ্যটি কসির উপপাদ্যের একটি বিশেষ প্রয়োগ হিসাবে পাওয়া যেতে পারে। কসির মধ্যমান উপপাদ্যে $\phi(x)=x$ অপেক্ষক নিলে কসির উপপাদ্য অনুসারে $x=\xi$ একটি বিন্দু (a,b) অন্তরালে পাওয়া যাবে যেখানে

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi) \text{ যেখানে } a<\xi<b$$

কসির উপপাদ্যের বিকল্প রূপ ঃ

আমরা কসির উপপাদ্যের উপরের বিবৃতির (1), (2), নিয়ে এবং (3) নং শর্তটির পরিবর্তে নিম্নের মত ধরলে অর্থাৎ $\phi'(x)$ ও $f'(x)$ ফাংশন দুটি (a,b) অন্তরালে কখনও একসঙ্গে শূন্য হয় না এবং $\phi(b)\neq\phi(a)$

আমরা কসির উপপাদ্যে পাই

অর্থাৎ $$\frac{f(b)-f(a)}{\phi(b)-\phi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\phi'(\xi)}.$$

[**প্রমাণ** $F(x)=f(x)\,(\phi(b)-\phi(a))-\phi(x)\,(f(b)-f(a))$

এই ফাংশনটি [a,b]-তে সন্তত, (a,b)-তে অবকলনযোগ্য এবং

$$F(a)=f(a)\phi(b)-\phi(a)f(b)=F(b)$$

অতএব রোলের উপপাদ্য প্রয়োগ করে পাই যে (a,b) অন্তরালে $x=\xi$ একটি বিন্দু আছে যেখানে $F'(\xi)=0.$

অর্থাৎ $f'(\xi)(\phi(b)-\phi(a))-\phi'(\xi)(f(b)-f(a))=0$.

যেহেতু $\phi(b)-\phi(a)\neq 0$, অতএব $\phi'(\xi)\neq 0$ হতে হবে, কেননা $\phi'(\xi)=0$ হলে $f'(\xi)=0$ হতে হয়, কিন্তু আমাদের শর্ত অনুযায়ী $f'(\xi)$ ও $\phi'(\xi)$ একসঙ্গে শূন্য নয়। অতএব আমরা পাই,

$$\frac{f(b)-f(a)}{\phi(b)-\phi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\phi'(\xi)} \quad]$$

5.7 অনির্ণেয় রূপের লিমিট (লপিতার নিয়ম) (Limit of Indeterminate forms) ঃ L' Hospital's rule

অনেক সময় দেখা যায় দুটি ফাংশনের f(x) ও g(x) এমন যে $\lim_{x\to c} f(x)=0$ এবং $\lim_{x\to c} g(x)=0$

এখন আমাদের যদি

$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$-এর মান নির্ণয় করতে হয় তা হলে উহাতে লিমিট উপপাদ্য অর্থাৎ

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)}$$

প্রয়োগ করা চলে না যেহেতু $\lim_{x\to c} g(x)\neq 0$ এটা সত্য নয়।

এ সকল ক্ষেত্রে যেমন $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{e^x-1-x}$,

আমরা এই রূপকে $\frac{0}{0}$ রূপের অনির্ণেয় রূপ বলে থাকি। আবার

$\lim_{x\to a}\dfrac{\frac{1}{(x-a)^2}}{\operatorname{cosec}^2(x-a)}$ এর রূপ হল $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

আবার $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)$-এর রূপ হল $(\infty-\infty)$

$\lim_{x\to 0+} x^x(0^0)$, $\lim_{x\to 0+}(-\log x)^x(\infty^0)$,

$\lim_{x\to 0+}(\cos ax)^{\operatorname{cosec} 2bx}$ (1^∞) ইত্যাদি

লপিতার নিয়ম ঃ (L'Hospital's rule)

উপপাদ্য 1 ঃ f(x) এবং g(x) দুটি অপেক্ষক $x = c$ দুই বিন্দুর একটি সামীপ্যে সংজ্ঞাত এবং $f'(x)$ ও $g'(x)$ ঐ সামীপ্যে বিদ্যমান। যদি $f(c) = g(c) = 0$ হয় এবং $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ থাকে,

তবে $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ অর্থাৎ $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ থাকবে ও তাহা $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$-এর সমান।

প্রমাণঃ যেহেতু $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ এর অস্তিত্ব আছে অতএব $x = c$ বিন্দুর একটি বর্জিত-সামীপ্য আছে যেখানে $g'(x) \neq 0$.অতএব $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}$ এবং আমাদের শর্ত অনুসারে x ও c বিন্দুদ্বয় প্রান্তবিন্দুসহ বদ্ধ অন্তরালে সন্তত এবং মুক্ত অন্তরালে $g'(x) \neq 0$, অতএব কসির মধ্যমান উপপাদ্য থেকে পাই

(i) .... $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ যেখানে ξ হল x ও c এর অন্তবর্তী একটি বিন্দু। দেওয়া আছে যে $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$-এর অস্তিত্ব আছে। এখন $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, যেহেতু ξ বিন্দু x ও c-এর অন্তর্বর্তী এবং $\xi \to c$ যখন $x \to c$ হয়। অতএব (i) থেকে $x \to c$ করে আমরা পাই যে, $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$-এর অস্তিত্ব আছে এবং

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

লপিতার নিয়মের অন্যরূপ ঃ

লপিতার (L'Hospital's rule) নিয়ম

লপিতার উপপাদ্য 2.

বিবৃতি : যদি $f(x)$ ও $g(x)$ দুটি অপেক্ষক এমন হয় যে

1. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = 0$ ও $\lim\limits_{x \to c} g(x) = 0$ হয় এবং

2. $f'(c)$ ও $g'(c)$ দুটিই বিদ্যমান হয় ও $g'(c) \neq 0$ হয়।

তাহলে, $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ হবে।

প্রমাণ : c বিন্দুতে, f ও g অপেক্ষক দুটিই অবকলনযোগ্য, সেইজন্য সন্তত হবে এবং

1 নং শর্তানুসারে $f(c) = 0 = g(c)$

এবার $f'(c) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(c+h)}{h}$

এবং $g'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{g(c+h) - g(c)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g(c+h)}{h}$

তাহলে $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h)/h}{g(c+h)/h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h)}{g(c+h)}$

$$= \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

লপিতার সাধারণ উপপাদ্য ঃ (General from of L'Hospital's theorem)

উপপাদ্য ও বিবৃতি : দুটি অপেক্ষক $f(x)$ ও $g(x)$ দুটি অপেক্ষক $x = c$ বিন্দুর নিকটস্থ অঞ্চলে সন্তত ও

1. $f(c) = 0 = g(c)$

2. $f^{(m)}(c) = 0 = g^{(m)}(c)$; $m = 0, 1, 2 \ldots\ldots n-1$

3. $\lim_{x \to c} \frac{f^n(x)}{g^n(x)}$ -এর অস্তিত্ব আছে এবং মান l হলে

   $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ হবে।

লপিতার উপপাদ্য 1. থেকে আমরা পাই,

যেহেতু, $\lim_{x \to c} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$ আছে এবং $f^{(n-1)}(c) = 0 = g^{(n-1)}(c)$

অতএব, $\lim_{x \to c} \frac{f^{n-1}(x)}{g^{n-1}(x)}$ -এর লিমিট আছে এবং উহা l.

অনুরূপভাবে আমরা পাই, যেহেতু, $f^{(n-2)}(c) = 0 = g^{(n-2)}(c)$

অতএব $\lim_{x \to c} \frac{f^{n-2}(x)}{g^{n-2}(x)} = l$

এইরূপভাবে আমরা শেষ অবধি পাব

$$l = \lim_{x \to c} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)}$$

$$= \lim_{x \to c} \frac{f^{(n-2)}(x)}{g^{(n-2)}(x)} = \ldots\ldots = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

মন্তব্য ঃ একইভাবে নিম্নের উপপাদ্যগুলিও প্রমাণ করা সম্ভব।

উপপাদ্য 4 ঃ বিবৃতি ঃ যদি $x \geq a$-এর জন্য $f(x)$ ও $g(x)$ দুটিরই অন্তরকলজগুলি বিদ্যমান ও সসীম হয় এবং $f'(x)$ ও $\phi'(x)$ একই সাথে শূন্য না হয় এবং

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0 = \lim_{x \to \infty} \phi(x) \text{ এবং } \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{\phi'(x)} \text{ এর অস্তিত্ব থাকে}$$

তাহলে $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{\phi(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{\phi'(x)}$ হবে।

প্রমাণ : $z = \frac{1}{x}$ বসালে

আমরা পাই $z \to 0+$ যখন $x \to \infty$,

অতএব $\lim_{z \to 0+} f\left(\frac{1}{z}\right) = 0$ এবং $\lim_{z \to 0+} \phi\left(\frac{1}{z}\right) = 0$.

এবার $\dfrac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{\phi\left(\frac{1}{z}\right)}$ এই রাশির সাপেক্ষে লপিতার নিয়ম প্রয়োগ করলে আমরা পাই,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{\phi(x)} = \lim_{z \to 0+} \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{\phi\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{z \to 0+} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{\phi'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)}$$

$$= \lim_{z \to 0+} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{\phi'\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{\phi'(x)}$$

অতএব উপপাদ্যটি প্রমাণিত হল।

উপপাদ্য 5 ঃ বিবৃতি যদি দুটি অপেক্ষক $f(x), \phi(x)$ এমন হয় যে $x = a$-এর একটি বর্জিত সামীপ্যে দুটির অন্তরকলজগুলি বর্তমান ও সসীম এবং $\phi'(x) \neq 0$, $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to a} \phi(x) = \infty$ এবং $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\phi'(x)}$-এর অস্তিত্ব থাকে তবে $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\phi(x)}$ -এর অস্তিত্ব থাকবে এবং $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\phi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\phi'(x)}$ হবে।

প্রমাণ ঃ a বিন্দুর সামীপ্যে α ও x দুটি বিন্দু নেওয়া হল যেখানে $\alpha < x < a$. কসির উপপাদ্য অনুসারে

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{\phi(x) - \phi(\alpha)} = \frac{f'(c)}{\phi'(c)}, \text{ যেখানে } \alpha < c < x \qquad \text{........(i)}$$

এখন (i)-এর বামপক্ষকে লিখতে পারি

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{\phi(x) - \phi(\alpha)} = \frac{f(x)}{\phi(x)} \cdot \frac{1 - \frac{f(\alpha)}{f(x)}}{1 - \frac{\phi(\alpha)}{\phi(x)}} \qquad \text{.......(ii)}$$

(i) ও (ii) থেকে $\frac{f'(c)}{\phi'(c)} = \frac{f(x)}{\phi(x)} \cdot \frac{1 - \frac{f(\alpha)}{f(x)}}{1 - \frac{\phi(\alpha)}{\phi(x)}}$

অর্থাৎ, $$\frac{f(x)}{\phi(x)} = \frac{1 - \frac{\phi(\alpha)}{\phi(x)}}{1 - \frac{f(\alpha)}{f(x)}} \cdot \frac{f'(c)}{\phi'(c)} \qquad \text{........(iii)}$$

এখন α বিন্দুকে স্থির রেখে $x \to a-$ নিলে (iii) থেকে পাই,

$$\lim_{x \to a-} \frac{f(x)}{\phi(x)} = \lim_{x \to a-} \frac{f'(c)}{\phi'(c)} \cdot \lim_{x \to a-} \frac{1 - \frac{\phi(\alpha)}{\phi(x)}}{1 - \frac{f(\alpha)}{f(x)}} = \lim_{x \to a-} \frac{f'(c)}{\phi'(c)}$$

আর $\frac{\phi(\alpha)}{\phi(x)} \to 0$ যখন $x \to a$, $\frac{f(\alpha)}{f(x)} \to 0$ যখন $x \to a$

কিন্তু α, a এর যথেচ্ছ নিকটে নেওয়া যায়। অতএব $c \to a$ যখন $x \to a-$

অতএব $\lim\limits_{x \to a-0} \dfrac{f(x)}{\phi(x)} = \lim\limits_{x \to a-0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ অনুরূপে $x \to a+0$ ক্ষেত্রেও সত্য। অতএব উপপাদ্যটি প্রমাণিত।

5.8 প্রয়োগ ঃ

উদাহরণ 1. রোলের উপপাদ্য প্রয়োগ করে $f(x) = 4x^3 + x^2 - 4x - 1$ এই অপেক্ষকের অন্তরকলজের $(-1, 1)$ এই অন্তরালে একটি বীজ আছে প্রমাণ করুন।

উদাহরণ 2. যদি $a < b < c$ হয় এবং $f''(x), (a, c)$ অন্তরালে বিদ্যমান হয় প্রমাণ করুন

$$\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-c)(b-a)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} = \frac{1}{2} f''(\xi)$$

যখন $a < \xi < c$ হবে।

সমাধান ঃ একটি সহায়ক অপেক্ষক $\phi(x)$ নেওয়া হল

যেখানে $\phi(x) = \dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} f(a) + \dfrac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} f(b) + \dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} f(c) - f(x)$

এখন $\phi'(x) = \dfrac{2x-(b+c)}{(a-b)(a-c)} f(a) + \dfrac{2x-(c+a)}{(b-c)(b-a)} f(b) + \dfrac{2x-(a+b)}{(c-a)(c-b)} f(c) - f'(x)$

এবং $\phi''(x) = \dfrac{2}{(a-b)(a-c)} f(a) + \dots\dots\dots + \dfrac{2}{(c-a)(c-b)} f(c) - f''(x)$

এখানে $\phi(a) = \phi(b) = 0 . \phi(x)$ অপেক্ষকটিতে (a, b) অন্তরালে রোলের উপপাদ্য প্রয়োগ করে পাই $\phi'(\xi_1) = 0$ যখন $a < \xi_1 < b$

একইভাবে $[b, c]$ অন্তরালের রোলের উপপাদ্য প্রয়োগ করে পাই, $\phi'(\xi_2) = 0$ যখন $b < \xi_2 < c$

আবার $[\xi_1, \xi_2]$ অন্তরালে $\phi'(x)$ অপেক্ষকের উপর রোলের উপপাদ্য প্রয়োগ করে পাই, $\phi''(\xi) = 0$ যেখানে $\xi_1 < \xi < \xi_2$

অর্থাৎ $\dfrac{f(a)}{(a-c)(a-b)} + \dfrac{f(b)}{(b-a)(b-c)} + \dfrac{f(c)}{(c-a)(c-b)} = \dfrac{f''(\xi)}{2}$

উদাহরণ 3. [a, b] অন্তরালে সন্তত তিনটি অপেক্ষক $f(x), \phi(x)$ ও $\psi(x)$ এবং এগুলি (a, b)-তে অন্তরকলনযোগ্য দেখান যে (a, b) অন্তরালে একটি বিন্দু $x = c$ আছে

যেখানে $\begin{vmatrix} f(a) & \phi(a) & \psi(a) \\ f(b) & \phi(b) & \psi(b) \\ f'(c) & \phi'(c) & \psi'(c) \end{vmatrix} = 0$ হবে

নির্দেশ ঃ $F(x) = \begin{vmatrix} f(a) & \phi(a) & \psi(a) \\ f(b) & \phi(b) & \psi(b) \\ f(x) & \phi(x) & \psi(x) \end{vmatrix}$ অপেক্ষকটির উপর রোলের উপপাদ্য প্রয়োগ করুন।

উদাহরণ 4. $y = \log x$ অপেক্ষকটিতে ল্যাগরাঞ্জের মধ্যমান উপপাদ্য প্রয়োগ করে θ এর মান নির্ণয় করুন এবং দেখান যে $0 < \{\log(1+x)\}^{-1} - x^{-1} < 1$ যখন $x > 0$

সমাধান : ল্যাগরাঞ্জের মধ্যমান উপপাদ্যের সাহায্যে পাই $f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h)$, $0 < \theta < 1$

এবার $f(x) = \log x$ হলে বলা যায়

$$\log(x+h) = \log x + \frac{h}{x+\theta h}$$

অথবা, $x + \theta h = \dfrac{h}{\log(x+h) - \log x}$

বা, $$\theta h = \frac{h}{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)} - x$$

$$\theta = \frac{1}{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)} - \frac{x}{h}$$

$$= \frac{1}{\log(1+y)} - \frac{1}{y} \quad \Big| \text{ যখন } y = \frac{h}{x}$$

এখন $x > 0$ ও $h > 0$ হলে বলা যায় $y > 0$

যেহেতু, $0 < \theta < 1$,

$$0 < \frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x} < 1$$

উদাহরণ 5. $f(x)=\cos x$ হলে $(0,h)$ অন্তরালে ল্যাগরাঞ্জের মধ্যমান উপপাদ্য প্রয়োগ করে θ-এর মান নির্ণয় করুন। $\lim_{h\to 0}\theta$ নির্ণয় করুন।

সমাধান : $f(x)=\cos x$

এখানে $f(h)=f(0)+hf'(\theta h)$ ধরে নিলে

বলা যায় $\cos h = 1 + h(-\sin\theta h)$

বা $\quad h\sin\theta h = 1-\cos h = 2.\sin^2\frac{h}{2}$

বা $\quad \left(\dfrac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)^2 = 2.\left(\dfrac{\sin\theta h}{\theta h}\right).\theta$

এখন $h\to 0$ হলে $2\lim_{h\to 0}\theta = 1$ অথবা $\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{2}$

উদাহরণ 6. লিমিট নির্ধারণ করুন ঃ

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{2^x-1}$$

সমাধান : এখানে $x\to 0$ নিয়ে অপেক্ষকটি $\left(\frac{0}{0}\right)$ আকারের। লপিতার নিয়ম প্রয়োগ করে পাই

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{2^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{2^x\log 2}=\frac{1}{\log 2}$$

উদাহরণ 12. সীমা নির্ধারণ করুন $\lim_{x\to 0+}\sin x.\log x$

সমাধান : এখানে $\lim_{x\to 0+}\sin x.\log x=\lim_{x\to 0+}\dfrac{\log x}{\operatorname{cosec} x}\left(=\frac{\infty}{\infty}\right)$ আকারের

$$=-\lim_{x\to 0+}\left(\frac{\frac{1}{x}}{\operatorname{cosec} x\cot x}\right)=-\lim_{x\to 0+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\tan x=0$$

উদাহরণ 7. লিমিট নির্ধারণ করুন $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

সমাধান. এই লিমিটের রূপ হল $\left(1^{\infty}\right)$.

ধরা যাক $A=\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

উভয়পক্ষের লগারিদম্ নিলে $\log A=\frac{1}{x^2}\log\frac{\tan x}{x},\left(\frac{0}{0}\right)$ আকারের যখন $x\to 0$

তাহলে $\lim\limits_{x\to 0}\ \log A$

$$=\lim_{x\to 0}\ \frac{x\sec^2 x-\tan x}{2x^2\tan x}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\ \frac{\tan x}{\sin 2x+x}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\ \frac{\sec^2 x}{2\cos 2x+1}=\frac{\lim\sec^2 x}{\lim(2\cos 2x+1)}=\frac{1}{3}$$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to 0}\ \log A=\frac{1}{3}$

সুতরাং $\log\lim\limits_{x\to 0}A=\frac{1}{3}$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}A=e^{\frac{1}{3}}$$

উদাহরণ 8. a এবং b-এর মান নির্ণয় করুন যার জন্য

$$\lim_{x\to 0}\ \frac{x(1+a\cos x)-b\sin x}{x^3}=1 \text{ হয়।}$$

সমাধান : ধরা যাক $f(x)=x(1+a\cos x)-b\sin x$ এবং $g(x)=x^3$

যেহেতু $g(0)=0, f(0)=0, g'(0)=0, g''(0)=0, g'''(x)=6$

অতএব, লিমিটের অস্তিত্বের জন্য $f'(0) = 0$ এবং $f''(0) = 0$ হতে হবে।

$$\text{কিন্তু } \begin{aligned} f'(x) &= 1+(a-b)\cos x - ax\sin x \\ f''(x) &= (b-2a)\sin x - ax\cos x \\ f'''(x) &= (b-2a)\cos x - a\cos x + ax\sin x \end{aligned}$$

$\therefore \quad f'(0) = 0 \Rightarrow b - a = 1$ ....(i)

$f''(0) = 0$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'''(x)}{6} = \frac{f'''(0)}{6} = \frac{b-3a}{6} = 1 \qquad \text{........(ii)}$$

(ii) ও (i) থেকে a, b পাওয়া যাবে।

উদাহরণ 9. যদি $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ যখন $x \neq 0$

$= 0$ যখন $x = 0$

এবং $g(x) = x$

দেখান যে, $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ -এর অস্তিত্ব নেই,

কিন্তু, $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ -এর অস্তিত্ব আছে এবং এটি $\frac{f'(0)}{g'(0)}$ -এর সমান।

সমাধান: এখানে $f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin\frac{1}{h}}{h} = 0$

এবং $g'(0) = 1$

সুতরাং $\frac{f'(0)}{g'(0)} = 0$

আবার, $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x} = 0$

কিন্তু $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{2x\sin\frac{1}{x} - \frac{x^2}{x^2}.\cos\frac{1}{x}}{1}$, $x \neq 0$

$$= 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

এখন $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$-এর অস্তিত্ব নেই,

কেননা $\lim\limits_{x\to 0} \cos\dfrac{1}{x}$ এটির অস্তিত্ব নেই।

5.9 সারাংশ

এই অধ্যায়টিতে আপনারা যা জানলেন তা হল

1. রোলের উপপাদ্য ও এর শর্তগুলি

2. রোলের উপপাদ্যের পরিণতি স্বরূপ ল্যাগরাঞ্জের মধ্যমান উপপাদ্য। এখানে স্মরণ করা যেতে পারে প্রাথমিকভাবে ল্যাগরাঞ্জের উপপাদ্যটি থেকে রোলের উপপাদ্য সিদ্ধান্ত হিসাবে পাওয়া যেতে পারে।

3. রোলের উপপাদ্য প্রয়োগ করে কসির মধ্যমান উপপাদ্য আলোচনা করা হয়েছে। দেখান গেছে যে কসির উপপাদ্যের একটি বিশেষ ক্ষেত্র ল্যাগরাঞ্জের মধ্যমান উপপাদ্য। সেইজন্য বলা যায় কসির উপপাদ্যের প্রয়োগ ক্ষেত্র ল্যাগরাঞ্জের উপপাদ্যের অপেক্ষা বৃহত্তর।

4. রোলের উপপাদ্যের সর্বশেষ পরিণতি হিসাবে যে উপপাদ্যটির আলোচনা করা হয়েছে তা হল লপিতার উপপাদ্য। লিমিট নির্ধারণের ক্ষেত্রে লপিতার নিয়ম প্রয়োগ একটি সুবিধাজনক প্রক্রিয়া। কয়েকটি উদাহরণ সহযোগে বিষয়টি ব্যাখ্যা করা হয়েছে।

মনে রাখার জন্য উপরোক্ত উপপাদ্যগুলির বিবৃতি এখানে দেওয়া হল।

1. **রোলের উপপাদ্য :** $y = f(x)$ অপেক্ষকটি $[a, b]$ বদ্ধ অন্তরালে এমনভাবে সংজ্ঞাত যে (i) অপেক্ষকটি বদ্ধ অন্তরাল [a, b]-তে সন্তত ও (ii) মুক্ত অন্তরাল (a, b)-তে অন্তরকলনযোগ্য ও iii) f(a) = f(b) তাহলে মুক্ত অন্তরাল (a, b)-তে একটি বিন্দু $x = \xi$ পাবেন যেখানে $f'(\xi) = 0$ হবে।

2. **ল্যাগরাঞ্জের মধ্যমান উপপাদ্য :**

কোন অপেক্ষক $y = f(x)$ কোন বদ্ধ অন্তরাল $[a, b]$-তে এমনভাবে সংজ্ঞাত যে (i) [a, b] -তে অপেক্ষকটি সন্তত (ii) (a, b)-তে অপেক্ষকটি অন্তরকলনযোগ্য তবে মুক্ত অন্তরাল (a, b)-তে একটি বিন্দু $x = \xi$ পাওয়া যাবে যেখানে $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

3. **কসির মধ্যমান উপপাদ্য :** $f(x)$ ও $\phi(x)$ দুটি অপেক্ষক $[a, b]$ বদ্ধ অন্তরাল এমনভাবে সংজ্ঞাত যে

(i) $[a, b]$-তেঅপেক্ষক দুটিই সন্তত (ii) $f(x)$ ও $\phi(x)$ দুটিই মুক্ত অন্তরাল (a,b)-তে অন্তরকলন যোগ্য এবং (iii) (a, b) মুক্ত অন্তরালে $\phi'(x)$ কখনই শূন্য না হয় তবে $\dfrac{f(b)-f(a)}{\phi(b)-\phi(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{\phi'(\xi)}$ যখন $a<\xi<b$.

4. **লপিতার সাধারণ উপপাদ্য :**

দুটি অপেক্ষক $f(x)$ ও $g(x)$ $x=c$ বিন্দুর নিকটস্থ অঞ্চলে সন্তত ও

1. $f(c)=0=g(c)$

2. $f^r(c)=0=g^r(c): r=0,1,2.....n-1$

3. $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f^{(n)}x}{g^{(n)}x}$ বিদ্যমান তাহলে $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ আছে এবং $=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$

দ্বিতীয় নিয়ম : $f(x)$ ও $g(x)$ দুটি অপেক্ষক এমনভাবে সংজ্ঞাত যে

1. $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\lim\limits_{x\to c} f'(x)=............=\lim\limits_{x\to c} f^{n-1}(x)=0$

   $\lim\limits_{x\to c} g(x)=\lim\limits_{x\to c} g'(x)=............=\lim\limits_{x\to c} g^{n-1}(x)=0$

2. এবং $f^n(c), g^n(c)$ দুটিই বিদ্যমান, উপরন্তু

   $g^n(c)\neq 0$ তাহলে $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f^n(c)}{g^n(c)}$ হবে।

5.10 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী :

অনুশীলনী 1. $y=e^x$ অপেক্ষকটিতে ল্যাগরাঞ্জের মধ্যমান উপপাদ্য প্রয়োগ করে প্রমাণ করুন

$$0<x^{-1}\log\left[\frac{(e^x-1)}{x}\right]<1$$

নির্দেশ : $[0,1]$ অন্তরালে ল্যাগারাঞ্জের উপপাদ্য প্রয়োগ করুন।

অনুশীলনী 2. $f(h)=f(0)+hf'(0)+\dfrac{h^2}{2!}f''(\theta h)$

$0<\theta<1$ হলে θ-র মান বাহির করুন যখন $h=7$ ও $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$

অনুশীলনী 3. কসির মধ্যমান উপপাদ্য প্রয়োগ করে ξ -এর মান বাহির করুন যখন $f(x) = x^2$,

যেখানে $\phi(x) = x$ এবং $[a, b]$ অন্তরালে উপপাদ্যটি প্রযুক্ত হয়েছে। উ : $\xi = \frac{b+a}{2}$

অনুশীলনী 4. যদি $\phi(x) = e^x$ বা $\psi = e^{-x}$ হয় অথবা $\phi(x) = x^2 + x + 1$ এবং $\psi(x) = 2x^2 + 3x + 4$ হয় দেখান যে কসির মধ্যমান উপপাদ্য প্রয়োগ করলে θ -এর মান হয় $\frac{1}{2}$.

নির্দেশ : কসির মধ্যমান উপপাদ্য প্রয়োগ করে পাই $\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{\psi(x+h)-\psi(x)} = \frac{\phi'(x+\theta h)}{\psi'(x+\theta h)}$

এখানে $\frac{e^{x+h} - e^x}{e^{-(x+h)} - e^{-x}} = \frac{e^{(x+\theta h)}}{-e^{-(x+\theta h)}} \Rightarrow \theta = \frac{1}{2}$

একইভাবে অন্য অংশটি করুন।

অনুশীলনী 5. কসির মধ্যমান উপপাদ্য হতে টেলরের উপপাদ্যটি নিরসন করুন।

নির্দেশ : $\phi(x) = f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) - \ldots..$

$$\frac{(b-x)^{n-1}}{n-1!} f^{n-1}(x)$$

এবং $\psi(x) = (b-x)^n$ ধরে অগ্রসর হউন।

অনুশীলনী 6. লপিতার নিয়ম প্রয়োগ করে সীমার মান নির্ণয় করুন।

i) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2\cos x}{x \sin x}$ উ : 2

ii) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$ উ : $\log \frac{a}{b}$

iii) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sin^{-1} x}{\sin^3 x}$ উ : $-\frac{1}{6}$

iv) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan nx - n \tan x}{n \sin x - \sin nx}$ উ : 2

অনুশীলনী 7. সীমার মান বাহির করুন।

i) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\log x - \cot\frac{\pi x}{2}}{\cot \pi x}$ উ : –2

ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(x^2)}{\log(\cot^2 x)}$ উ : –1

অনুশীলনী 8. দেখান যে,

i) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = 1$

ii) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1-x^2\right)^{\frac{1}{\log(1-x)}} = e$

নির্দেশ : প্রথমে অপেক্ষকটির log নিয়ে লপিতার সূত্র প্রয়োগ করুন।

অনুশীলনী 9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ae^{x} - b\cos x + ce^{-x}}{x\sin x} \to 2$

হলে দেখান $a = 1, b = 2, c = 1$

নির্দেশ : উদাহরণ দেখুন।

অনুশীলনী 10. দেখান যে,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_{\sin^2 x}(\cos x)}{\log_{\sin^2\frac{x}{2}}(\cos\frac{x}{2})} = 4$$

সহায়ক গ্রন্থ

1. Malik, S. C. Mathematical Analysis Wiley Eastern Ltd.
2. Hardy, G. H. A course of Pure Mathematics Cambridge University Press.

একক 6 ☐ টেলরের বিস্তৃতি (অবশেষ সহ) ও অসীম বিস্তৃতি (Taylor's expansion with remainder and Infinite series expansion)

গঠন

6.1 প্রস্তাবনা ঃ

পূর্ববর্তী অধ্যায় সমূহে আমরা ফাংশনের কতকগুলি বিশেষ ধর্ম নিয়ে আলোচনা করেছি। যেমন একটি বদ্ধ অন্তরালে একটি সন্তত ফাংশনের বিভিন্ন ধর্ম। আবার রোলের প্রতিজ্ঞা, কসি ও লাগরাঞ্জের মধ্যমান সম্পর্কিত প্রতিজ্ঞা আলোচিত হয়েছে। আমরা জানি যে যদি $f(x)$ ফাংশনটি $[a, b]$ এই বদ্ধ অন্তরালে সন্তত হয় এবং (a, b) এই মুক্ত অন্তরালে অবকলযোগ্য (differentiable) হয়, তা হলে আমরা $f(b)$-কে $f(a)$ এবং $f'(c)$-এর মাধ্যমে প্রকাশ করতে পারি, যেখানে c হল (a, b) এর অন্তঃস্থ একটি বিন্দু, অর্থাৎ (1) ...... $f(b) = f(a)+(b-a)\ f'(c)$, যেখানে $a < c < b$ (মধ্যমান বিষয়ক উপপাদ্য অনুসারে), এখন b স্থানে x এবং $c = a + \theta\ (x - a)$ (যেখানে $0 < \theta < 1$) লিখলে আমরা (1) থেকে পাই (2) ..... $f(x) = f(a) + (x - a)\ f'[a + \theta\ (x-a]$ এখানে x, a অপেক্ষা বড় অথবা ছোট হলে কোন অসুবিধা নেই কেবল মাত্র a ও x-কে প্রান্ত বিন্দু যুক্ত অন্তরালের জন্য $f(x)$-এর সন্ততি ও অবকলযোগ্যতা সত্য হতে হবে।

অতএব (1) এবং (2) থেকে আমরা বুঝতে পারছি f(x)-এর মান f(a) এবং f′(c) থেকে জানতে পারি, যেখানে c হল x ও a-এর অন্তবর্তী একটি বিন্দু।

এখানে একটি প্রশ্ন স্বাভাবিক যে একটি ফাংশনের যদি উচ্চক্রমের অন্তরকলজ থাকে সে ক্ষেত্রে ল্যাগরাঞ্জের প্রতিজ্ঞার সম্প্রসারণ করা যায় কিনা এবং গেলে সেটা কি আকার ধারণ করে। এই প্রশ্নের উত্তর দিয়েছিলেন টেলর (Taylor) ও অন্যান্য গণিতজ্ঞগণ।

6.2 উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করে আপনি—

- বিভিন্ন উপপাদ্য প্রমাণ ও তার প্রয়োগবিধি সম্বন্ধে অনুধাবন করতে পারবেন।
- যদি একটি বিন্দু x = a-তে একটি ফাংশন f(x) বা অপেক্ষকের বিভিন্ন ক্রমের অন্তরকলজ (ডেরিভিটিভ) জানা থাকে, তবে ঐ বিন্দু a-র একটি সামীপ্যে ফাংশনটির বিভিন্ন বিন্দুতে মান নির্ণয় করা কিভাবে সম্ভব হয় তা বুঝিয়ে দিতে পারবেন।
- কিভাবে অপেক্ষকটির x বিন্দুতে মান f(a), f′(a) ...... ইত্যাদির সাপেক্ষে প্রকাশ করা যায় তা দেখিয়ে দিতে পারবেন।

6.3 টেলরের উপপাদ্য (Taylor's theorem)

একটি ফাংশন f (x) কোন মুক্ত অন্তরাল (α, β)-এর প্রতিটি বিন্দুতে, তার (n – 1)-তম ক্রম অব্দি অবকল (অর্থাৎ $f'(x), f''(x), \ldots\ldots f^{(n-1)}(x)$) সহ সন্তত হলে এবং $f^{(n)}(x)$ ঐ অন্তরালে সংজ্ঞাত (defined) হলে, যদি a ঐ মুক্ত অন্তরালের একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হয়, তবে (α, β) এই অন্তরালের যে কোন বিন্দু x-এর জন্য

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + R_n$$

যেখানে $R_n = \dfrac{(x-a)^n(1-\theta)^{n-p}}{p(n-1)!}f^{(n)}[a+\theta(x-a)]$ .... (3)

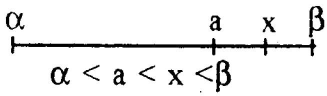
এবং p যে কোন একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা $\le n$ এবং $0 < \theta < 1$.

প্রমাণ ঃ এই উপপাদ্যটি প্রমাণ করতে আমরা রোলের উপপাদ্য (Rolle's theorem) প্রয়োগ করব। সেই উদ্দেশ্যে আমরা একটি নূতন ফাংশন F(x) গঠন করব।

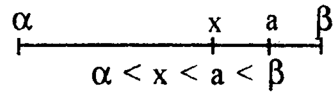
$$F(u) \equiv f(u) + (x-u)f'(u) + \frac{(x-u)^2}{2!}f''(u) + \ldots + \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(u) + (x-u)^p P \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

যেখানে p হল একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা ≤ n এবং P একটি ধ্রুবক (u সাপেক্ষে) যার মান আমরা আমাদের পছন্দমত নেব। u-এর অঞ্চল হল (α, β), উপপাদ্যের শর্ত অনুযায়ী $f(u), f'(u), f''(u), \ldots\ldots f^{(n-1)}(u)$ এবং $(x-u), (x-u)^2, \ldots\ldots (x-u)^{(n-1)}, (x-u)^p$ এরা u-এর ফাংশনরূপে a ও x প্রান্তবিন্দুসহ বদ্ধ

অন্তরালে সন্তত (মনে রাখতে হবে a ও x দুইই (α, β)-এর অন্তঃস্থ দুইটি বিন্দু)। অতএব (4) থেকে দেখতে পাচ্ছি, যে F(u), (n + 1) সংখ্যক সন্তত ফাংশনের যোগফল। অতএব F(u), a ও x-কে প্রান্ত বিন্দু নিয়ে গঠিত বদ্ধ অন্তরালে সন্তত।



চিত্র ১



চিত্র ২

যেহেতু (α, β) অন্তরলে $f^{(n)}(u)$-এর অস্তিত্ব আছে, অতএব $F'(u)$ এরও a, x প্রান্তবিন্দুর অন্তরালে অস্তিত্ব আছে। অতএব (4) থেকে পাওয়া যাচ্ছে

$$F'(u)=f'(u)-f'(u)+(x-u)f''(u)-(x-u)f''(u)+\frac{(x-u)^2}{2!}f'''(u)-\ldots$$
$$+\frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(u)-p(x-u)^{p-1}P$$

$$=\frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(u)-p(x-u)^{p-1}P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

এখন আমরা P ধ্রুবকটি যদি এমনভাবে ধরি যে F(a) = F(x) হয়, তাহলে (4) থেকে পাই

$$F(a)\equiv f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+P(x-a)^p$$
$$=F(x)=f(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

(6) থেকে P-এর মান পাওয়া যাচ্ছে।

এবার আমরা F(u) ফাংশনটিতে a ও x প্রান্তবিন্দুর অন্তরালে রোলের উপপাদ্য প্রয়োগ করব। উপরের আলোচনা থেকে স্পষ্ট যে F(u) ঐ বদ্ধ অন্তরালে সন্তত ও ঐ মুক্ত অন্তরালে অবকলযোগ্য এবং F(a) = F(x). অতএব a ও x-এর অন্তর্বর্তী একটি বিন্দু c থাকবে যেখানে $F'(c) = 0$। আমরা সর্বদা লিখতে পারি $c = a + \theta(x - a)$ যেখানে $0 < \theta < 1$.c এর ঐ রূপ $x > a$ অথবা $x < a$ উভয়ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য। (কেননা $x > a$ হলে $a < c < a + x - a$; আবার $x < a$ হলে $x - a < 0$, অতএব $c < a$ এবং $c > a + x - a$ অর্থাৎ $x < c < a$। অতএব (5)-এ u = c বসিয়ে $F'(c) = 0$ করে আমরা পাই

$$p(x-c)^{p-1}P=\frac{(x-c)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(c) \ldots\ldots\ldots$$

অর্থাৎ $P=\frac{(x-c)^{n-p}}{p(n-1)!}f^{(n)}(c)$

P-এর মান (6)-এ বসিয়ে আমরা পাই

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+R_n$$

যেখানে $R_n=(x-a)^p P=\frac{(x-a)^p(x-c)^{n-p}}{p(n-1)!}f^{(n)}(c)$

$c = a + \theta(x - a)$ বসালে

$x - c = (x - a) - \theta(x - a) = (x - a)(1 - \theta)$

অতএব

$$R_n=\frac{(x-a)^p(x-a)^{n-p}(1-\theta)^{n-p}}{p(n-1)!}f^{(n)}[a+\theta(x-a)]=\frac{(x-a)^n(1-\theta)^{n-p}}{p(n-1)!}f^{(n)}[a+\theta(x-a)]$$

.... (7)

অতএব টেলর উপপাদ্য প্রমাণিত হল।

মন্তব্য 1 : আমরা উপপাদ্যটিকে অন্যভাবেও বলতে পারি, যেমন—ধরি x একটি বিন্দু এবং $x + h$ অপর একটি নিকটস্থ বিন্দু। এখন $h > 0$ হলে যদি $[x, x + h]$ অন্তরালে $f(x), f'(x) \ldots f^{(n-1)}x$ সন্তত হয় এবং $f^{(n)}(x)$ যদি $(x, x + h)$ এই মুক্ত অন্তরালে অস্তিত্ববান্ হয়, তবে আমরা টেলর উপপাদ্য অনুসারে লিখতে পারি

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)+R_n$$

যেখানে $R_n=\frac{h^n(1-\theta)^{n-p}}{p(n-1)!}f^{(n)}(x+\theta h)$, যেখানে $0 < \theta < 1$.

আর যদি $x + h < x$ হয় তবে অন্তরালটি হবে $(x + h, x)$ এবং উপপাদ্যটি একই রকম থাকবে।

6.4 বিভিন্ন অবশেষ (Different forms of Remainder)

আমরা (7) -এ R_n -এর যে রূপ পেলাম, তাতে p একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা $\le n$ রয়েছে। $p = 1, 2 \ldots n$ পর্যন্ত যে কোন একটি পূর্ণসংখ্যা নিতে পারি। p-এর কোন মানের জন্য R_n -এর রূপ আলাদা হয়, যদিও a, x অপরিবর্তিত থাকলে R_n-এর মান একই থাকবে। ফলে বোঝা যাচ্ছে θ-এর মান p-এর উপর নির্ভর করবে। এখন $p = n$ হলে

$$R_n=\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}[a+\theta(x-a)] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

যেখানে $0 < \theta < 1$

এই রূপটিকে লাগরাঞ্জের অবশেষ (Lagrange's form of Remainder) বলা হয়। এই রূপটি সবথেকে সহজ এবং $(x - a)^n$ ক্রমের সঙ্গে সমানুপাতী। আবার $p = 1$ নিলে

$$R_n = \frac{(x-a)^n (1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}[a+\theta(x-a)] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

যেখানে $0 < \theta < 1$

(9) নম্বর অবশেষটিকে কসির অবশেষরূপ (Cauchy's form of remainder) বলা হয়।

p এর যে কোন মানের জন্য $(1 \leq p \leq n)$ R_n-এর রূপকে (Schloemilch-Roche) **স্লোয়েমিল্‌শ রোশের অবশেষ রূপ বলা হয়।**

6.5. ম্যাকলরিনের বিস্তৃতি (Maclaurin's expansion)

ম্যাক্‌লরিন $a = 0$ এই বিন্দুর সাপেক্ষে ফাংশনের বিস্তৃতি নির্ণয় করেছেন। ফলে তিনি f(x) ফাংশনের বিস্তৃতি পেয়েছেন যার প্রতিটি পদ x-এর একটি ঘাতযুক্ত। সহজেই বোঝা যায় টেলরের বিস্তৃতির একটি বিশেষ অবস্থা হল ম্যাক্‌লরীন বিস্তৃতি। এ কারণে আমরা এবারে ম্যাক্‌লরীন বিস্তৃতি টেলর বিস্তৃতি থেকে লাভ করব। ম্যাকলরীন বিস্তৃতির প্রমাণ টেলর বিস্তৃতিতে a=0 বসালে পাওয়া যায়।

ম্যাকলরিনের বিস্তৃতি ঃ

যদি কোন অন্তরাল (α, β)-এর মধ্যে একটি ফাংশন f(x)-এর $(n - 1)$ তম অবকলগুলি সন্তত হয়, এবং n -তম অবকলের অস্তিত্ব থাকে, এবং $\alpha \leq 0 \leq \beta$ হয়, তবে যে কোন $x \in (\alpha, \beta)$-এর জন্য

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)+R_n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

যেখানে $R_n = \dfrac{x^n (1-\theta)^{n-p}}{p(n-1)!} f^{(n)}(\theta x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$

এবং $0 < \theta < 1$

(11)-এ $p = n$ বসালে লাগরাঞ্জের অবশেষ এবং $p = 1$ বসালে কসির অবশেষ পাওয়া যাবে।

6.6 বিস্তৃতির বিভিন্ন উদাহরণ

উদাহরণ 1. $f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3bx + c$

এই ফাংশনটির টেলর বিস্তৃতি ($x = 1$-এর সাপেক্ষে) নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ এখানে f(x) একটি বহুপদ রাশি যার প্রত্যেকটি পদের যথেচ্ছ ক্রমের অবকল আছে। অতএব ফাংশনটির $x = 1$ এই বিন্দুর সাপেক্ষে টেলর বিস্তৃতি নির্ণয় করা যায়।

কিন্তু $f'(x) = 3x^2 + 6ax + 3b$

$f''(x) = 6x + 6a$

$f'''(x) = 6$

$f^{(iv)}(x) = f^{(v)}(x) = \ldots = 0$

অতএব এখানে $R_4 = 0$ এবং

$$f(x) = f(1) + (x-1)f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2!}f''(1) + \frac{(x-1)^3}{3!}f'''(1)$$

$$= (1+3a+3b+c)+(x-1)(3+6a+3)+\frac{(x-1)^2}{2!}(6+6a)+\frac{(x-1)^3}{3!}6$$

উদাহরণ ঃ 2. $f(x) = e^{bx}$ এর $x = a$ এর সাপেক্ষে টেলর বিস্তৃতি নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান ঃ $f'(x) = be^{bx}$, $f^{(r)}(x) = b^r e^{bx}$

অতএব সমস্ত ক্রমের ডেরিভেটিভ আছে এবং তারা যে কোন মুক্ত অন্তরালে সন্তত। অতএব যে কোন বিন্দু $x = a$-এর সাপেক্ষে ফাংশনটির টেলর বিস্তৃতি আছে।

অতএব

$$f(x) = e^{bx} = f(a) + (x-a)f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + R_n$$

$$= e^{ba} + (x-a)be^{ba} + \frac{(x-a)^2}{2!}b^2e^{ba} + \ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}b^{n-1}e^{ba} + R_n$$

যেখানে $R_n = \frac{(x-a)^n}{n!}b^n e^{b[a+\theta(x-a)]}, \qquad 0 < \theta < 1$

অতএব, $e^{bx} = e^{ba}\left\{1+(x-a)b+\frac{(x-a)^2b^2}{2!}+\ldots+\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}b^{n-1}\right\}+R_n$

আবার আমরা $a = 0$ বসিয়ে ম্যাক্লরীন বিস্তৃতি পাই

$$e^{bx} = 1 + bx + \frac{b^2x^2}{2!} + \ldots + \frac{b^{n-1}x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n$$

যেখানে $R_n = \frac{b^n x^n}{n!}e^{\theta bx}$

উদাহরণ 3. $f(x) = \sin mx$

এখানে $f'(x) = m\cos mx = m\sin\left(mx+\frac{\pi}{2}\right)$

$$f''(x) = m^2\cos\left(mx+\frac{\pi}{2}\right) = m^2\sin\left(mx+2.\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^r(x) = m^r\sin\left(mx+r.\frac{\pi}{2}\right)$$

অতএব দেখা যাচ্ছে যে f(x)-এর সমস্ত ক্রমের ডেরিভেটিভ আছে এবং যে কোন সসীম অন্তরালে তারা সন্তত।

অতএব $x = a$ বিন্দুর সাপেক্ষে টেলর বিস্তৃতি নিয়ে আমরা পাই ঃ

$$\sin mx = \sin ma + (x-a)m\sin\left(ma+\frac{\pi}{2}\right) + \frac{(x-a)^2}{2!}m^2\sin\left(ma+2.\frac{\pi}{2}\right)+\ldots$$
$$+\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}m^{n-1}\sin\left(ma+\overline{n-1}\,\frac{\pi}{2}\right)+R_n$$

$$= \sin ma + (x-a)m\cos ma - \frac{(x-a)^2}{2!}m^2\sin ma - \frac{(x-a)^3}{3!}m^3\cos ma + \ldots$$
$$+\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}m^{n-1}\sin\left[ma+\overline{n-1}\,\frac{\pi}{2}\right]+R_n$$

যেখানে $R_n = \frac{(x-a)^n}{n!}m^n\sin\left[ma+m\theta(x-a)+n\frac{\pi}{2}\right]$

উপরের বিস্তৃতি থেকে ম্যাক্লরীনের বিস্তৃতি পেতে পারি যদি $a = 0$ বসান হয়। সেটা হল ($n = 2k$ হলে)

$$\sin mx = mx - \frac{m^3x^3}{3!}+\frac{m^5x^5}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^{k-1}m^{2k-1}x^{2k-1}}{(2k-1)!}+R_{2k}$$

যেখানে $R_{2k} = \frac{x^{2k}}{(2k)!}m^{2k}\sin\left[m\theta x+2k\frac{\pi}{2}\right]$

উদা ঃ 4. $f(x) = \cos mx$

এখানে $f'(x) = -m\sin mx = m\cos\left(mx+\frac{\pi}{2}\right)$

$$f''(x) = m^2\cos\left(mx+2.\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{(r)}(x) = m^r\cos\left(mx+r\frac{\pi}{2}\right)$$

অতএব x = a সাপেক্ষে টেলর বিস্তৃতি করলে পাওয়া যায়

$$\cos mx = \cos ma + (x-a)\, m\cos\left(ma+\frac{\pi}{2}\right) + \frac{(x-a)^2}{2!} m^2 \cos\left(ma + 2.\frac{\pi}{2}\right)$$

$$+\frac{(x-a)^3}{3!} m^3 \cos\left(ma+\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{(x-a)^4}{4!} m^4 \cos\left(ma+4.\frac{\pi}{2}\right)$$

$$+\ldots+\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} m^{n-1} \cos\left(ma+\overline{n-1}\frac{\pi}{2}\right) + R_n$$

যেখানে $R_n = \dfrac{(x-a)^n}{n!} m^n \cos\left[ma + m\theta(x-a) + n\dfrac{\pi}{2}\right]$

এখন যদি a = 0 বসান হয়, তবে ম্যাকলরীন বিস্তৃতি পাই, যেটা হল [n = 2k + 1 বসিয়ে]

$$\cos mx = 1 - \frac{m^2x^2}{2!} + \frac{m^4x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^k m^{2k} x^{2k}}{2k!} + R_{2k+1}$$

যেখানে $R_{2k+1} = \dfrac{x^{2k+1} m^{2k+1}}{(2k+1)!} \cos\left[m\theta x + \overline{2k+1}\dfrac{\pi}{2}\right]$

উদা ঃ 5. $f(x) = \tan^{-1}x$

এখানে f(x), x-এর সকল মানের জন্য সংজ্ঞাত। কিন্তু

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right]$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{(x-i)^2} - \frac{1}{(x+i)^2}\right]$$

$$f'''(x) = \frac{(-1)(-2)}{2i}\left[\frac{1}{(x-i)^3} - \frac{1}{(x+i)^3}\right]$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2i}\left[\frac{1}{(x-i)^n} - \frac{1}{(x+i)^n}\right]$$

আমরা ম্যাকলরীন বিস্তৃতি লিখব এখানে

$f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = -2$

$$f^{(2k)}(0) = \frac{(-1)^{2k-1}(2k-1)!}{2i}\left[\frac{1}{(-i)^{2k}} - \frac{1}{(i)^{2k}}\right] = 0$$

$$f^{(2k-1)}(0) = \frac{(-1)^{2k-2}(2k-2)!}{2i}\left[\frac{1}{(-i)^{2k-1}} - \frac{1}{(i)^{2k-1}}\right]$$

$$= -\frac{(2k-2)!2}{2i^{2k}} = -\frac{(2k-2)!}{i^{2k}} = -\frac{(2k-2)!}{(-1)^k}$$

$$= (-1)^{k+1}(2k-2)!$$

অতএব ম্যাক্লরীন বিস্তৃতি হল

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}x^{2k-1} + R_{2k}$$

যেখানে $R_{2k} = \frac{x^{2k}}{(2k)!} . f^{(2k)}(\theta x)$

$$= \frac{x^{2k}}{(2k)!} . \frac{(-1)^{2k-1}(2k-1)!}{2i}\left[\frac{1}{(\theta x - i)^{2k}} - \frac{1}{(\theta x + i)^{2k}}\right]$$

$$= -\frac{x^{2k}}{2k} . \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{(\theta x - i)^{2k}} - \frac{1}{(\theta x + i)^{2k}}\right]$$

$$= -\frac{x^{2k}}{2k} . \frac{\left\{(\theta x + i)^{2k} - (\theta x - i)^{2k}\right\}}{(\theta^2 x^2 + 1)^{2k}\, 2i}$$

অতএব $R_{2k} = -\frac{x^{2k}}{2k} \frac{2k\theta x - \ldots\ldots}{(\theta^2 x^2 + 1)^{2k}}$

উদাঃ 6. $f(x) = \log_e (1 + x),\ x > -1$

এই ফাংশনটি $x > -1$-এর জন্য সংজ্ঞাত। আমরা উহার ম্যাকলরীন বিস্তৃতি নির্ণয় করব।

$$f(x) = \log_e(1 + x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}\ ,\ f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f'''(x) = \frac{(-1)^2 2!}{(1+x)^3}\ , \ldots\ldots$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

অতএব ম্যাক্লরীন বিস্তৃতি হল

$$\log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{n-1}}{n-1} + R_n$$

যেখানে $R_n = \frac{x^n (-1)^{n+1} (n-1)!}{p(n-1)!} \cdot \frac{(1-\theta)^{n-p}}{(1+\theta x)^n}$

$$= \frac{x^n (-1)^{n+1} (1-\theta)^{n-p}}{p(1+\theta x)^n}$$

উদা : 7. $f(x) = (1 + x)^m$, যেখানে m একটি বাস্তব সংখ্যা। এই ফাংশনটির বিভিন্ন ক্রমের ডেরিভেটিভ $x > -1$ এই সব মানের জন্য সন্তত আছে।

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1}$$

$$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}$$

....

$$f^{(r)}(x) = m(m-1)(m-2) \ldots (m-r+1)(1+x)^{m-r}$$

....

এবার আমরা m-এর বিভিন্ন মানের জন্য ম্যাকলরীন বিস্তৃতি নির্ধারণ করব।

(i) m যদি একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয় তা হলে $f'(x)$, $f''(x)$, ... ইত্যাদি সর্বত্র সন্তত এবং সমস্ত ক্রমের ডেরিভেটিভ আছে। অতএব এখানে টেলর উপপাদ্য এই ক্ষেত্রে সমস্ত x-এর জন্য প্রযোজ্য।

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1}$$

$$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}$$

....

$$f^{(m)}(x) = m!$$

$$f^{(m+1)}(x) = 0$$

অতএব এই ক্ষেত্রে আমরা ম্যাকলরীন বিস্তৃতিতে $(m + 2)$-তম পদ হতে পরবর্তী সমস্ত পদই শূন্য, অতএব অবশেষ $R_n = 0$ যদি, $n \geq m + 2$ হয়। অতএব ম্যাকলরীন বিস্তৃতি এই ক্ষেত্রে হল

$$(1+x)^m = f(0) + xf'(0) + \ldots + \frac{x^m}{m!} f^{(m)}(0)$$

$$= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \ldots + x^m$$

দেখা যাচ্ছে এই বিস্তৃতি আমাদের সুপরিচিত দ্বিপদ প্রতিজ্ঞার (Binomial Theorem) অনুরূপ।

(ii) যদি m ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা না হয়, তবে f(x)-এর সমস্ত ক্রমের ডেরিভেটিভ $x > -1$ এই অঞ্চলে অস্তিত্বশীল হবে।

অতএব $x > -1$ এই সব মানের জন্য ম্যাক্লীরন বিস্তৃতি হল

$$(1+x)^m = 1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-r+1)}{r!}x^r+\ldots$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1}+R_n$$

যেখানে $R_n = \frac{m(m-1)\ldots.(m-n+1)}{p(n-1)!}x^n(1+\theta x)^{m-n}(1-\theta)^{n-p}$

যেখানে $p \le n$

এবং $0 < \theta < 1$.

6.7. অসীম শ্রেণী সম্বন্ধে কয়েকটি জ্ঞাতব্য (Infinite series, its convergence)

আমরা এবার একটি প্রশ্ন তুলতে পারি যে একটি ফাংশনের যদি সকল ক্রমের ডেরিভেটিভ থাকে তবে কি টেলর বা ম্যাকলরীন বিস্তৃতিতে অসীম সংখ্যক পদ নেওয়া সম্ভব? এ বিষয়ে কিছু আলোচনার পূর্বে আমরা (Convergence of an infinte series) সম্পর্কে কিছু বলব।

ধরা যাক,

$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots..$ অসীম পর্যন্ত একটি অসীম শ্রেণী যার প্রথম, দ্বিতীয়, n তম পদগুলি হল u_1, u_2, ... u_n .... এখানে এই পদগুলি কতগুলি সংখ্যা অথবা প্রত্যেকটি কোন চল x এর ফাংশন (অর্থাৎ x এর মান জানা গেলে পদগুলির মান জানা যায়।) এবার আমরা উপরের শ্রেণীটির আংশিক যোগ করে নিম্নলিখিত রাশিগুলি পাই, যেমন—

s_1 = প্রথম পদ = u_1

s_2 = প্রথম ও দ্বিতীয় পদের যোগফল = $u_1 + u_2$

s_3 = প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদের যোগফল = $u_1 + u_2 + u_3$

s_n = প্রথম পদ থেকে n-তম পদ পর্যন্ত যোগফল = $u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n$ ইত্যাদি। এইভাবে আমরা কতগুলি সংখ্যা $s_1, s_2, s_3 \ldots\ldots s_n \ldots\ldots$ পেলাম। এরা একটি সিকুয়েন্স (Sequence) তৈরী করল। এখন যদি আমরা দেখি যে n যত বড় হবে s_n তত একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা s-এর নিকট যাচ্ছে অর্থাৎ লিমিটের ভাষায়

$s_n \to s$ যখন $n \to \infty$

তাহলে আমরা s-কে আমাদের অসীম শ্রেণী $u_1 + u_2 + \ldots\ldots$ এর যোগফল বলব এবং অসীম শ্রেণীটিকে

কন্‌ভারজেন্ট বা অভিসারী বলব। একটু বিশদভাবে বলা যায় যদি যে কোন প্রদত্ত ধনরাশি ε-এর জন্য এমন একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা N পাওয়া যায় যে $n > N$ হলে $|s_n - s| < \varepsilon$ হয় তবে $u_1 + u_2 + \ldots$ এই অসীম শ্রেণীকে কনভারজেন্ট এবং ঐ অসীম শ্রেণীর যোগফল s বলা হয়।

উদাহরণ স্বরূপ ঃ

1 : $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$

এই গুণোত্তর অসীম শ্রেণীটি নিলে দেখি যে

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = 2-\frac{1}{2^{n-1}}$$

এখানে স্পষ্ট যে $s = 2$ এবং

$|s_n - 2| = \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$ যদি $2^{n-1} > \frac{1}{\varepsilon}$ হয়

অর্থাৎ $(n - 1) \log 2 > -\log\varepsilon$

অর্থাৎ $(n-1) > -\frac{\log\varepsilon}{\log 2}$

অর্থাৎ যদি $n > 1-\frac{\log\varepsilon}{\log 2}$

এখন N যদি একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এমন হয় যে $N > 1-\frac{\log\varepsilon}{\log 2}$

তা হলে $n > N$ হলে, $|s_n - 2| < \varepsilon$ হবে।

অর্থাৎ $\lim_{n\to\infty} s_n = 2$

অতএব দেখা গেল উপরের গুণোত্তর শ্রেণীটি কন্‌ভারজেন্ট এবং তার যোগফল 2.

2 : এখন আমাদের দেখতে হবে x^n-এর লিমিট কত যখন $n \to \infty$ হয়। আমরা ধরেছি $|x| < 1$. অতএব আমরা

$|x| = \frac{1}{1+y}$ যেখানে $y > 0$ এভাবে লিখতে পারি।

অতএব $|x|^n = \frac{1}{(1+y)^n} = \frac{1}{1+ny+\frac{n(n-1)}{2!}y^2+\ldots+y^n} < \frac{1}{ny}$ (হরের মান কমানো হল)

$< \varepsilon$ যদি $\frac{1}{n} < y\varepsilon$ হয়, অর্থাৎ $n > \frac{1}{y\varepsilon}$ হয়

অতএব $N > \frac{1}{y\varepsilon}$ নিলে আমরা দেখছি যে $|x|^n < \varepsilon$ যখন $n > N$.

অতএব দেখা গেল $\lim_{n\to\infty} |x|^n = 0$ যখন $|x|<1$

এখন $x^n = |x|^n$ যদি $x > 0$

অতএব $x^n = (-1)^n |x|^n$ যদি $x < 0$ এবং

$\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ যদি $-1 < x < 1$ হয়।

3 : আরও একটি উদাহরণ যেমন

$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots. + x^{n-1} + \ldots..$ যেখানে $|x| <1$

এখানে,

$s_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1}$

অতএব $s_n = \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}$

অতএব আমরা পাচ্ছি যে

$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-x}$, যদি $|x|<1$.

অর্থাৎ $1 + x + x^2 + \ldots + \ldots$ অসীম পর্যন্ত $= \frac{1}{1-x}$, যদি $|x|<1$.

4 : আমরা আরও লক্ষ্য করছি যে যদি $x > 1$ হয় তা হলে x^n, n বাড়ার সঙ্গে সঙ্গে বাড়তে থাকে ও যে বৃদ্ধির কোন শেষ নেই অর্থাৎ $x^n \to \infty$ যখন $n \to \infty$-এর কারণ সহজেই বোঝা যায় যেহেতু $x > 1$.

অতএব $\frac{1}{x} = y$ ধরা যাক

$0 < y < 1$

অতএব $x^n = \frac{1}{y^n}$

কিন্তু $y^n \to 0$ যখন $n \to \infty$

অতএব $x^n \to \infty$ যখন $n \to \infty$

5 : আবার $x < -1$ হলে $x = -z$ ধরলে $x^n = (-1)^n z^n$ যেখানে $z > 1$.

যেহেতু $z^n \to \infty$ যখন $n \to \infty$ অতএব x^n-এর কতগুলি পদ ক্রমাগত বড় হয়ে ∞ দিকে চলছে আবার অবশিষ্ট পদগুলি ক্রমাগত—∞ এর দিকে চলেছে। অতএব এক্ষেত্রে x^n এর লিমিট নেই।]

উপরের আলোচনায় আমরা দেখলাম যে অসীম শ্রেণীর অভিসারিতা (Convergence) নির্ভর করে তার আংশিক যোগফল দিয়ে যে সিকুয়েন্স তৈরী হয় তার অভিসারিতার উপর। এবার আমরা একটি অসীম সিকুয়েন্স $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n \ldots\ldots\ldots$ এর অভিসারিতার সংজ্ঞা দেব।

সংজ্ঞা ঃ সিকুয়েন্স (Sequence)**-এর অভিসারিতা**

$a_1, a_2, \ldots\ldots a_n \ldots\ldots$ একটি অসীম সিকুয়েন্স হলে (যাকে আমরা $\{a_n\}$ এভাবে নির্দেশ করি) আমরা একে ξ সংখ্যায় অভিসারী বলব যদি যে কোন $\varepsilon > 0$ দেওয়া হলে এমন একটি N আমরা নির্ণয় করতে পারি যে যখন $n > N$ নেওয়া হয় তখন $|a_n - \xi| < \varepsilon$ সত্য হয়।

আমরা ইতিমধ্যে $a_n = x^n$ এই সিকুয়েন্সটির অভিসারিতা আলোচনা করে দেখেছি যে $|x| < 1$ হলে এই সিুকেয়ন্সটি অভিসারী এবং $|x| > 1$ হলে অনিভিসারী (Not convergent).

আমরা এখন দুএকটি উপপাদ্যের কথা বলব যার সাহায্যে আমরা টেলর বা ম্যাক্লরীনের অসীম বিস্তৃতি সম্বন্ধে আলোচনা করতে পারব।

উপপাদ্য 1. যদি $\{a_n\}$ ও $\{b_n\}$ দুটি এমন ধনাত্মক সিকুয়েন্স হয় যে $a_n \le b_n$ এবং $b_n \to 0$ যখন $n \to \infty$ তবে আমরা দেখাব $a_n \to 0$ যখন $n \to \infty$

অভিসারিতার সংজ্ঞা থেকে আমরা পাই যে $\varepsilon > 0$ একটি সংখ্যা দেওয়া হলে আমরা N একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা পাব যে

$n > N$ হলে $|b_n - 0| < \varepsilon$ হবে

অর্থাৎ $b_n < \varepsilon$ যেহেতু $b_n \ge 0$

কিন্তু দেওয়া আছে যে $a_n \le b_n$

অতএব

$n > N$ হলে $a_n \le b_n < \varepsilon$

অতএব $\lim_{n\to\infty} a_n$ আছে এবং তাহা হল 0.

উপপাদ্য 2. $\{a_n\}$ একটি এমন সিকুয়েন্স যে

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ যেখানে $|l| < 1$.

দেখাতে হবে যে $\{a_n\}$ সিকুয়েন্সটি অভিসারী এবং তার লিমিট 0.

প্রমাণ ঃ যদি $\varepsilon > 0$ তবে এমন একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা N_1 পাব যে যখন $n > N_1$ হবে

তখন $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - l\right| < \varepsilon$ হয়।

অর্থাৎ $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - l + l\right| \le \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - l\right| + |l| < \varepsilon + |l|$ যখন $n > N_1$

এখন $|l| < 1$ হওয়ায় ε এমন ছোট নেওয়া হল যে $|l| + \varepsilon = K < 1$ হয়।

এখন যদি একটি নির্দিষ্ট পূর্ণসংখ্যা $p > N_1$ নেওয়া হয় তবে

$$\left|\frac{a_{p+1}}{a_p}\right| < |l| + \varepsilon = K$$

$$\left|\frac{a_{p+2}}{a_{p+1}}\right| < K \text{ ইত্যাদি}$$

অতএব $\left|\frac{a_{n+p}}{a_p}\right| = \left|\frac{a_{n+p}}{a_{n+p-1}} \cdot \frac{a_{n+p-1}}{a_{n+p-2}} \cdots \frac{a_{p+2}}{a_{p+1}} \cdot \frac{a_{p+1}}{a_p}\right|$

$$= \left|\frac{a_{n+p}}{a_{n+p-1}}\right| \left|\frac{a_{n+p-1}}{a_{n+p-2}}\right| \cdots \left|\frac{a_{p+2}}{a_{p+1}}\right| \left|\frac{a_{p+1}}{a_p}\right|$$

$< K^{n-1}$ যেহেতু প্রত্যেকটি $|\,| < K$

কিন্তু $0 < K < 1$ অতএব $K^n \to 0$ যখন $n \to \infty$

$\left|\frac{a_{n+p}}{a_p}\right| < K^{n-1}$ এবং $K^n \to 0$ যখন $n \to \alpha$

অতএব $|a_{n+p}| < K^{n-1} |a_p|$

কিন্তু $|a_p|$ নির্দিষ্ট হওয়ায় $K^n|a_p|\to 0$ যখন $n\to\infty$

অতএব $a_{n+p}\to 0$ যখন $n\to\infty$ (উপপাদ্য 1 থেকে)

অর্থাৎ $a_n\to 0$ যখন $n\to\infty$

উদাহরণ 1 ঃ

$\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{x^n}{n!}\right\}=0$ যে কোন x এর জন্য

এখানে $a_n = \dfrac{x^n}{n!}$ নিলে

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{x}{n+1}\to 0 \text{ যখন } n\to\infty$$

অতএব $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ আছে এবং তার মান 0

উদাহরণ 2 ঃ

$a_n = nx^n$, যেখানে $|x|<1$.

এখানে $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{(n+1)x}{n}\to x$ যখন $n\to\infty$

কিন্তু দেওয়া আছে $|x|<1$

অতএব উপপাদ্য 2 অনুসারে

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ যখন $|x|<1$

উদাহরণ 3 ঃ $a_n=\dfrac{m(m-1)(m-2)\ldots.(m-n+1)}{(n-1)!}x^n$ যখন $|x|<1$

যেখানে m একটি ধ্রুবক

এখানে $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{m(m-1)(m-2)\ldots.(m-n)(n-1)!x}{n!m(m-1)\ldots.(m-n+1)}$

$$=\frac{(m-n)}{n}x\to -x \text{ যখন } n\to\infty$$

কিন্তু $|-x|<1$ দেওয়া আছে।

অতএব $a_n\to 0$ যখন $n\to\infty$ যদি $|x|<1$. (উপ ঃ 2 থেকে)

6.8 অসীম শ্রেণীতে টেলর বিস্তৃতি ও ম্যাকলরীন বিস্তৃতি (Infinte Taylor series expansion and Infinite Maclaurin Series expansion)

আমরা 6.1 থেকে 6.5 এ টেলরের সসীম বিস্তৃতি ও ম্যাকলরীনের সসীম বিস্তৃতি নিয়ে আলোচনা করেছি। সেখানে আমরা দেখেছি যে সসীম বিস্তৃতির পর ফাংশনটির অবশিষ্ট অংশ অবশেষ (Remainder) হিসাবে রয়েছে। এই অবশেষের বিভিন্ন সম্ভাব্য রূপও আমরা আলোচনা করেছি। তারপর 6.7 আমরা সাধারণভাবে অসীম সিকুয়েন্স ও অসীম শ্রেণীর অভিসারিতা সম্বন্ধে আলোচনা করে আমাদের বর্তমানে কাজে লাগবে এমন কতগুলি উদাহরণ নিয়েছি। এখন আমরা পরীক্ষা করে দেখব টেলর বা ম্যাকলরীন সসীম শ্রেণীতে বিস্তৃতি থেকে আমরা অসীম শ্রেণী বিস্তৃতিতে যেতে পারি কিনা এবং অসীম শ্রেণীতে বিস্তৃতি কি শর্ত সাপেক্ষে সম্ভব এবং কোন্ কোন্ ক্ষেত্রে সেই শর্ত পূরণ করা সম্ভব।

প্রথমে আমরা টেলরের সসীম বিস্তৃতির সূত্রটি পরীক্ষা করব। আমরা টেলরের উপপাদ্যে পাই যে f(x) কোন একটি অন্তরালে তার n তম ডেরিভেটিভ সহ থাকলে, আমরা ঐ অন্তরালের কোন বিন্দু a এর সাপেক্ষে ঐ অন্তরালের যেকোন অন্তঃস্থ x বিন্দুতে f(x) এর মানকে লিখতে পারি

$$f(x) = s_n(x) + R_n(x)$$

যেখানে

$$s_n(x) = f(a) + (x - a) f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)$$

এবং $R_n(x) = \dfrac{(x-a)^n (1-\theta)^{n-p}}{p(n-1)!} f^{(n)}[a+\theta(x-a)]$

যেখানে p ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা $1 \le p \le n$ এবং $0 < \theta < 1$

এখন যদি পরিস্থিতি এমন হয় যে f(x)-এর সমস্ত ক্রমের ডেরিভেটিভ $(a - \delta_1, a + \delta_2)$ এরূপ একটি অন্তরালে সমস্ত বিন্দুতে আছে (যেখানে δ_1, δ_2 দুটি ধনাত্মক সংখ্যা), তা হলে বোঝা গেল $s_n(x)$ এই সিকুয়েন্সটি n-এর যে কোন মানের জন্য সংজ্ঞাত। সুতরাং আমরা $n \to \infty$ হলে $s_n(x)$-এর লিমিট-এর কথা এক্ষেত্রে চিন্তা করতে পারি।

কিন্তু আমরা দেখছি $f(x) = s_n(x) + R_n(x)$ এই সূত্রে বামপক্ষে n অনুপস্থিত। অতএব শুধু n-এর মানের পরিবর্তনের জন্য f(x) অপরিবর্তিত থাকবে। সুতরাং $s_n(x)$ এই সিকুয়েন্সটির লিমিট থাকার পূর্বশর্ত হল $R_n(x)$ এই সিকুয়েন্সটির লিমিট থাকা। এখন আমরা চাইছি যে $s_n(x)$ এই সিকুয়েন্সটির লিমিট f(x) হবে। কেননা তবেই আমরা ফাংশনটির জন্য অসীম টেলর শ্রেণী পাব। অতএব f(x)-এর অসীম টেলর শ্রেণী থাকার জন্য প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত হল

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$$

এখন আমরা 6.6 থেকে অসীম বিস্তৃতির জন্য কতগুলি উদাহরণ পরীক্ষা করব।

উদা. 2. $f(x) = e^{bx}$

টেলর বিস্তৃতিতে অবশেষ R_n-কে লেখা হয়েছে

$$R_n = \frac{(x-a)^n}{n!} b^n e^{b[a+\theta(x-a)]}$$

এখন $n \to \infty$ হলে $\frac{\{b(x-a)\}^n}{n!} \to 0$

আবার $e^{b[a+\theta(x-a)]}$

$< e^{b(a+|x-a|)}$ $\left[\text{উদাহরণ}\left\{\frac{x^n}{n!}\right\}(6.7\text{-এ দ্রষ্টব্য})\right]$

(যাহা একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা।)

অতএব যে কোনও প্রদত্ত x-এর জন্য

$R_n \to 0$ যখন $n \to \infty$

অতএব আমরা বলতে পারি e^{bx}-এর টেলর অসীম শ্রেণীতে বিস্তৃতি আছে।

অতএব (6.6-এর উদা. 2 থেকে)

$$e^{bx} = e^{ba} + (x-a)\,b\,e^{ba} + \frac{(x-a)^2}{2!} b^2 e^{ba} + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} b^n e^{ba} + \ldots$$

ম্যাক্লরীন বিস্তৃতিও সম্ভব এবং a = 0 বসালে পাই

$$e^{bx} = 1 + bx + \frac{b^2x^2}{2!} + \frac{b^3x^3}{3!} + \ldots + \frac{b^nx^n}{n!} + \ldots$$

এই বিস্তৃতি x-এর সকল সসীম মানের জন্য চলবে।

উদা 3. f(x) = sin mx

6.6 উদা 3-এ দেখেছি sin mx-এর ম্যাক্লরীন বিস্তৃতিতে অবশেষ R_n হল

$$R_n = \frac{x^n}{n!} m^n \sin\left(m\theta x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{(mx)^n}{n!} \sin\left(m\theta x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

এখন $|R_n| = \left|\frac{(mx)^n}{n!}\right| \left|\sin\left(m\theta x + \frac{n\pi}{2}\right)\right|$

$$\leq \frac{|(mx)|^n}{n!}, \text{ যেহেতু } \left|\sin\left(m\theta x+\frac{n\pi}{2}\right)\right| \leq 1.$$

এখন আমরা দেখছি যে [6.7-এ] যেকোন x-এর জন্য $a_n = \frac{x^n}{n!}$. এই সিকুয়েন্সের লিমিট হল 0.

অতএব $\frac{(mx)^n}{n!} \to 0$, যখন $n \to \infty$ যেহেতু m নির্দিষ্ট।

অতএব 6.7-এর উপ. 2 থেকে $R_n \to 0$ যখন $n \to \infty$

অতএব sin mx-এর অসীম বিস্তৃতি হল

$$\sin mx = mx - \frac{m^3x^3}{3!} + \frac{m^5x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^k m^{2k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots$$

উদাহরণ 4. f(x) = cos mx এর ম্যাকলরীন সসীম বিস্তৃতি আমরা 6.6-এ দেখেছি

$$\cos mx = 1 - \frac{m^2x^2}{2!} + \frac{m^4x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^k m^{2k} x^{2k}}{(2k)!} + R_{2k+1}$$

এবং সঙ্গে অবশেষ হল

$$R_{2k+1} = \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} m^{2k+1} \cos\left[m\theta x + (2k+1)\frac{\pi}{2}\right]$$

এখন $k \to \infty$ হলে $2k + 1 \to \infty$-তে যায় এবং $\frac{(mx)^{2k+1}}{(2k+1)!} \to 0$ -তে যায় যখন c

এখন যেহেতু $\left|\cos\left[m\theta x + (2k+1)\frac{\pi}{2}\right]\right| \leq 1$, অতএব

$$|R_{2k+1}| \leq \frac{|mx|^{2k+1}}{(2k+1)!} \to 0 \quad \text{যখন } k \to \infty$$

অতএব 6.7 এর উপপাদ্য 2 অনুসারে

$$\lim_{k\to\infty} R_{2k+1} = 0$$

অতএব প্রমাণিত হল যে cos mx এর অসীম বিস্তৃতি আছে। সুতরাং,

$$\cos mx = 1 - \frac{m^2x^2}{2!} + \frac{m^4x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^k (mx)^{2k}}{(2k)!} + \cdots$$

যে কোন সসীম x-এর জন্য সত্য।

উদাহরণ 5. $f(x) = \tan^{-1}x$,

এখানে আমরা 6.6-এ দেখেছি যে

$$R_{2k} = -\frac{x^{2k}}{2k}\left(\frac{1}{(\theta x - i)^{2k}} - \frac{1}{(\theta x + i)^{2k}}\right)$$

এখন যেহেতু $|\theta x - i| = \sqrt{\theta^2 x^2 + 1}$ $\qquad (\because |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}, (a, b)$ বাস্তব)

অতএব $\sqrt{\theta^2 x^2 + 1} > 1$.

$$\therefore \left|(\theta x - i)^{2k}\right| = |\theta x - i|^{2k} > 1.$$

অতএব $|R_{2k}| \leq \frac{|x|^{2k}}{2k}\left(\frac{1}{|\theta x - i|^{2k}} + \frac{1}{|\theta x + i|^{2k}}\right)$

$$< \frac{|x|^{2k}}{2k} \cdot 2 = \frac{|x|^{2k}}{k}$$

এখন $\frac{|x|^{2k}}{k} \to 0$ যখন $k \to \infty$, এবং $|x| \leq 1$ হয় (উপঃ 2 থেকে)

অতএব $R_{2k} \to 0$ যখন $k \to \infty$

অতএব $\tan^{-1}x$-এর অসীম বিস্তৃতি সম্ভব, এবং $\tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots\cdots$ সত্য যখন

$|x| \leq 1$.

উদাহরণ 6. $f(x) = \log_e(1 + x)$

এখানে আমরা 6.6-এ দেখেছি ম্যাক্লরীন সসীম শ্রেণী $x > 1$-এর জন্য সত্য এবং বিস্তৃতিটি হল

$$\log_e(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n-1}x^{n-1} + R_n$$

যেখানে

$$R_n = \frac{x^n (-1)^{n+1} (n-1)!}{p(n-1)!} \frac{(1-\theta)^{n-p}}{(1+\theta x)^n}$$

$$= \frac{x^n (-1)^{n+1} (1-\theta)^{n-p}}{p(1+\theta x)^n}$$

যেখানে $p \le n$

এখন যদি $0 < x \le 1$ হয় তবে $p = n$ বসিয়ে আমরা পাই

$$R_n = \frac{x^n (-1)^{n+1}}{n(1+\theta x)^n}$$

কিন্তু এক্ষেত্রে $1 + \theta x > 1$, অতএব $\frac{1}{1+\theta x} < 1$

অতএব $\frac{1}{(1+\theta x)^n} < 1$

অতএব $|R_n| = \frac{|x|^n}{n|1+\theta x|^n} < \frac{|x|^n}{n} \to 0$ যখন $n \to \infty$

যেহেতু $0 < x \le 1$.

অতএব $R_n \to 0$ যখন $n \to \infty$ এবং $0 < x \le 1$.

এবার আমরা $-1<x<0$ এই অন্তরালের জন্য $p = 1$ বসিয়ে পাই

$$R_n = \frac{x^n (-1)^{n+1} (1-\theta)^{n-1}}{(1+\theta x)^n}$$

যেহেতু $0 > x > -1$

অতএব $0 > \theta x > -\theta$ (ধনাত্মক সংখ্যা θ দিয়ে উভয়পক্ষ গুণ করিলে)

এবং $1 > 1 + \theta x > 1 - \theta$ (উভয়পক্ষে 1 যোগ করিলে)

এবং $(1 + \theta x)^{n-1} > (1 - \theta)^{n-1}$ (যেহেতু উভয়পক্ষ ধনাত্মক অতএব তাদের $n-1$ ঘাত করলে)

অতএব $\frac{(1-\theta)^{n-1}}{(1+\theta x)^n}$

$$= \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1} \frac{1}{1+\theta x} < \frac{1}{1+\theta x} < \frac{1}{1+x}$$ যেহেতু $0 < \theta < 1$

অতএব $|R_n| = \frac{|x|^n (1-\theta)^{n-1}}{(1+\theta x)^n} < \frac{|x|^n}{1+\theta x} < \frac{|x|^n}{1+x}$

কিন্তু $\frac{|x|^n}{1+x} \to 0$ যখন $n \to \infty$ যেহেতু $-1 < x < 0$ এবং $\frac{1}{1+x}$ নির্দিষ্ট

অতএব উপ. 2 (6.7) অনুসারে $R_n \to 0$ যখন $n \to \infty$ এবং $-1 < x < 0$

অতএব আমরা প্রমাণ করলাম যে

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \cdots$$

এই অসীম বিস্তৃতি সত্য যখন $-1<x \le 1$.

উদাঃ 7. $f(x) = (1 + x)^m$

এখানে $f^{(r)}(x) = m(m-1)(m-2) \ldots\ldots (m-r+1)(1+x)^{m-r}$

এবং ম্যাকলরীন বিস্তৃতি হল

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\ldots.(m-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n$$

যেখানে ল্যাগরাঞ্জের সূত্র অনুযায়ী ($p = n$ বসিয়ে)

$$R_n = \frac{m(m-1)\ldots.(m-n+1)}{n!}x^n (1+\theta x)^{m-n}$$

এবং কসির সূত্র অনুযায়ী ($p = 1$ বসিয়ে)

$$R_n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{(n-1)!}x^n (1+\theta x)^{m-1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}$$

আমরা জানি m একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে $f^{(m+1)}(x) = f^{(m+2)}(x) = \ldots. = 0$ অতএব এখানে বিস্তৃতির শেষ পদ হল x^m.

m যদি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা না হয় তবে অসীম বিস্তৃতির সম্ভাবনা আছে। এখন $0 \le x \le 1$ হলে $1 + \theta x \ge 1$. অতএব যেহেতু n-এর যথেষ্ট বড় মানের জন্য $n > m$, অতএব

$$(1+\theta x)^{m-n} = \frac{1}{(1+\theta x)^{n-m}} \le 1$$

অতএব ল্যগরাঞ্জের R_n থেকে আমরা পাই

$$|R_n| \le \left|\frac{m(m-1)\ldots..(m-n+1)}{n!}x^n\right| = a_n \text{ ধরা যাক}$$

এখন $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left|\frac{(m-n)x}{n+1}\right| \to |x|$ যখন $n \to \infty$

অতএব $|x|<1$ হলে, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

উপপাদ্য 2. (6.7) থেকে পাচ্ছি $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$

আবার $0 > x > -1$ হলে

$1 > 1 + \theta x > 1 - \theta$

অতএব $\left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right| < 1$

এখন কসির অবশেষকে আমরা লিখতে পারি

$$R_n = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots\dots(n-1)} x^n (1+\theta x)^{m-1} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}$$

অতএব $|R_n| = |1+\theta x|^{m-1} \left|\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots(n-1)}\right| \left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|^{n-1} |x|^n$

$$< 1. \left|\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots n-1}\right| |x|^n$$

$= a_n$ (লেখা হল)

এখন $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{m-n}{n}\right| |x| \to |x|$ যখন $n \to \infty$

অতএব উপপাদ্য 2.(6.7) অনুযায়ী $|x|<1$ হলে $\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

আবার উপ 1 অনুযায়ী যেহেতু $|R_n| < a_n$, এবং $a_n \to 0$ যখন $n \to \infty$. অতএব $R_n \to 0$ যখন $n \to \infty$ অতএব আমরা প্রমাণ করলাম যে $-1 < x < 1$ এই অন্তরালে অসীম ম্যাকলরীন বিস্তৃতি সত্য।

বিশেষ উদাহরণ

6.8 অসীম শ্রেণীতে টেলর বিস্তৃতি ও ম্যাকলরীন বিস্তৃতি (Infinte Taylor series expansion and Infinite Maclaurin Series expansion)

আমরা 6.1 থেকে 6.5 এ টেলরের সসীম বিস্তৃতি ও ম্যাকলরীনের সসীম বিস্তৃতি নিয়ে আলোচনা করেছি। সেখানে আমরা দেখেছি যে সসীম বিস্তৃতির পর ফাংশনটির অবশিষ্ট অংশ অবশেষ (Remainder) হিসাবে রয়েছে। এই অবশেষের বিভিন্ন সম্ভাব্য রূপও আমরা আলোচনা করেছি। তারপর 6.7 আমরা সাধারণভাবে অসীম সিকুয়েন্স ও অসীম শ্রেণীর অভিসারিতা সম্বন্ধে আলোচনা করে আমাদের বর্তমানে কাজে লাগবে এমন কতগুলি উদাহরণ নিয়েছি। এখন আমরা পরীক্ষা করে দেখব টেলর বা ম্যাকলরীন সসীম শ্রেণীতে বিস্তৃতি থেকে আমরা অসীম শ্রেণী বিস্তৃতিতে যেতে পারি কিনা এবং অসীম শ্রেণীতে বিস্তৃতি কি শর্ত সাপেক্ষে সম্ভব এবং কোন্ কোন্ ক্ষেত্রে সেই শর্ত পূরণ করা সম্ভব।

প্রথমে আমরা টেলরের সসীম বিস্তৃতির সূত্রটি পরীক্ষা করব। আমরা টেলরের উপপাদ্যে পাই যে f(x) কোন একটি অন্তরালে তার n তম ডেরিভেটিভ সহ থাকলে, আমরা ঐ অন্তরালের কোন বিন্দু a এর সাপেক্ষে ঐ অন্তরালের যেকোন অন্তঃস্থ x বিন্দুতে f(x) এর মানকে লিখতে পারি

$$f(x) = s_n(x) + R_n(x)$$

যেখানে

$$s_n(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)$$

এবং $R_n(x) = \dfrac{(x-a)^n (1-\theta)^{n-p}}{p(n-1)!} f^{(n)}[a+\theta(x-a)]$

যেখানে p ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা $1 \le p \le n$ এবং $0 < \theta < 1$

এখন যদি পরিস্থিতি এমন হয় যে f(x)-এর সমস্ত ক্রমের ডেরিভেটিভ $(a - \delta_1, a + \delta_2)$ এরূপ একটি অন্তরালে সমস্ত বিন্দুতে আছে (যেখানে δ_1, δ_2 দুটি ধনাত্মক সংখ্যা), তা হলে বোঝা গেল $s_n(x)$ এই সিকুয়েন্সটি n-এর যে কোন মানের জন্য সংজ্ঞাত। সুতরাং আমরা $n \to \infty$ হলে $s_n(x)$-এর লিমিট-এর কথা এক্ষেত্রে চিন্তা করতে পারি।

কিন্তু আমরা দেখছি $f(x) = s_n(x) + R_n(x)$ এই সূত্রে বামপক্ষে n অনুপস্থিত। অতএব শুধু n-এর মানের পরিবর্তনের জন্য f(x) অপরিবর্তিত থাকবে। সুতরাং $s_n(x)$ এই সিকুয়েন্সটির লিমিট থাকার পূর্বশর্ত হল $R_n(x)$ এই সিকুয়েন্সটির লিমিট থাকা। এখন আমরা চাইছি যে $s_n(x)$ এই সিকুয়েন্সটির লিমিট f(x) হবে। কেননা তবেই আমরা ফাংশনটির জন্য অসীম টেলর শ্রেণী পাব। অতএব f(x)-এর অসীম টেলর শ্রেণী থাকার জন্য প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত হল

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$$

এখন আমরা 6.6 থেকে অসীম বিস্তৃতির জন্য কতগুলি উদাহরণ পরীক্ষা করব।

উদা. 2. $f(x) = e^{bx}$

$$\therefore \quad f^{(r+1)}(0) = \lim_{\substack{u\to+\infty \\ -\infty}} \frac{uP_r(u)}{e^{u^2}} \qquad \left(=\frac{\infty}{\infty}\right)$$

এখন $$\lim_{u\to\infty} \frac{u\,P_r(u)}{e^{u^2}} = \lim_{u\to\infty} \frac{(uP_r(u))'}{\left(e^{u^2}\right)'} \qquad \left(=\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$P_r(u)$-এর ঘাত যদি k হয় তবে (k + 1) বার l' Hospital's rule প্রয়োগ করে আমরা পাই $f^{(r+1)}(0) = 0$

6.10 উদাহরণমালা

1. দেখান যে

$$\sin(x+h) = \sin x + h\cos x - \frac{h^2}{2!}\sin x - \frac{h^3}{3!}\cos x + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{h^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$\cos x + \frac{(-1)^n h^{2n}}{2n!}\sin(x+\theta h) \qquad \text{যেখানে } 0<\theta<1$$

2. যদি m একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয়, তবে দেখান যে

$$(x+h)^m = x^m + {}^mC_1\, x^{m-1}h + \cdots + {}^mC_{n-1}x^{m-n+1}h^{n-1} + {}^mC_n\,(x+\theta h)^{m-n}h^n$$

যেখানে $0<\theta<1$

যেখানে n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা $<m$.

3. দেখান যে $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ .... সকল x এর জন্য

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \;\ldots\ldots\ldots$$

4. দেখান যে $\tan x = x + \frac{x^3}{3}\sec^2\theta x\left(1+3\tan^2\theta x\right)$ যেখানে $0<\theta<1$

5. টেলর বিস্তৃতিতে প্রথম দুটি পদ ব্যবহার করে sin 20°-এর আসন্ন মান নির্ণয় করুন এবং ভুলের মাত্রা নির্ণয় করুন।

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\sin\theta x \qquad 0<\theta<1$$

[এখানে $\sin 20° = \sin\frac{\pi}{9} = \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^3 + R_4$

যেখানে $R_4 = \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^4 . \sin\left(\theta . \frac{\pi}{9}\right)$

অতএব $\sin\frac{\pi}{9}$-এর আসন্ন মান

$$= \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^3$$

$$\cong 0 \cdot 349066 - 0 \cdot 007089$$

$$= 0 \cdot 341977$$

এবং $|R_4| \leq \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^4 \cong 0 \cdot 000612$

অতএব ভ্রমের মাত্রা $\leq$ 0·000612]

অতএব তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান পাওয়া গেল।

6. টেলর-সূত্র প্রয়োগ করে নিম্নের লিমিট নির্ণয় করুন—

(i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}}$

(ii) $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{1}{x^2} - \cot^2 x\right)$

7. $\sqrt{x}\,(x > 0)$ এই ফাংশনটির টেলর বিস্তৃতি নির্ণয় করুন, যেখানে a = 1 এবং n = 4 .

উঃ $1 + \frac{x-1}{1} \cdot \frac{1}{2} - \frac{(x-1)^2}{1.2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{(x-1)^3}{1.2.3} \cdot \frac{3}{8} - \frac{(x-1)^4}{4.1} \cdot \frac{15}{16}[1 + \theta(x-1)]^{-\frac{7}{2}}$

6.11 পরিশিষ্ট (Appendix)

টেলর উপপাদ্যের একটি ভিন্নরূপ ঃ

উপপাদ্য ঃ যদি f(x)-এর প্রথম n ক্রমের ডেরিভেটিভ সমূহ x = a বিন্দুতে অস্তিত্বশীল হয়, তা হলে

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\frac{h^n}{n!}\left\{f^{(n)}(a)+\eta\right\}$$

যেখানে $\eta \to 0$ যখন $h \to 0$.

অনুসন্ধিৎসু পাঠক Hardy-র Course of Pure Mathematies দেখুন।

6.12 সারাংশ (Summary)

টেলরের উপপাদ্য ঃ

যদি একটি ফাংশন f(x) কোন একটি অন্তরালে উহার প্রথম (n – 1)-তম ডেরিভেটিভ সহ সন্তত এবং n-তম ডেরিভেটিভের অস্তিত্ব থাকে, তবে ঐ অন্তরালের অন্তঃস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু a-এর সাপেক্ষে ঐ অন্তরালের অন্তঃস্থ যে কোন x-এর জন্য টেলরের সসীম বিস্তৃতি হল

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+R_n$$

যেখানে অবশেষ R_n হল

$$R_n=\frac{(x-a)^n}{(n-1)!}\frac{(1-\theta)^{n-p}}{p}f^{(n)}[a+\theta(x-a)]$$ [স্লোয়েমিলশে রোশের অবশেষ]

এবং p একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা $1 \le p \le n$

এবং θ একটি সংখ্যা এমন যে $0 < \theta < 1$

$p = n$ হলে R_n এর রূপ হল ঃ $R_n=\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}[a+\theta(x-a)]$ (ল্যাগরাঞ্জের অবশেষের রূপ)

$p = 1$ হলে

$$R_n=\frac{(x-a)^n}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}f^{(n)}[a+\theta(x-a)]$$ (কসির অবশেষ রূপ)

ম্যাকলরিনের বিস্তৃতি ঃ

যদি f(x) উহার প্রথম (n – 1)-তম ডেরিভেটিভ সহ একটি অন্তরালে সন্তত হয় এবং 0 যদি ঐ অন্তরালের অন্তঃস্থ বিন্দু হয়, n-তম ডেরিভেটিভের যদি ঐ অন্তরালে অস্তিত্ব থাকে, তবে ঐ অন্তরালে যে কোন x-এর জন্য

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f(0)+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)+R_n$$

যেখানে অবশেষ $R_n=\frac{x^n}{(n-1)!}\frac{(1-\theta)^{n-p}}{p}f^{(n)}(\theta x)$

এখানে $1 \le p \le n$, p একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা $0 < \theta < 1$.

অসীম বিস্তৃতি ঃ

টেলর বা ম্যাকলরীন বিস্তৃতির ক্ষেত্রে যদি দেখা যায় $R_n \to 0$ যখন $n \to \infty$, তখন টেলর বা ম্যাকলরীনের অসীম বিস্তৃতি পাওয়া যায় অর্থাৎ যদি একটি অন্তরালে একটি ফাংশনের সমস্ত ক্রমের ডেরিভেটিভ থাকে এবং যদি $R_n \to 0$ যখন $n \to \infty$ হয়, তখন টেলর বা ম্যাকলরীনের অসীম বিস্তৃতি হবে এবং তার রূপ হল

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\cdots \text{ অসীম পর্যন্ত}$$

(টেলর বিস্তৃতি)

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\cdots \text{ অসীম পর্যন্ত}$$

(ম্যাকলরীন বিস্তৃতি)

কয়েকটি ফাংশনের ম্যাকলরীনের অসীম বিস্তৃতি ঃ

$$e^{bx}=1+bx+\frac{b^2x^2}{2!}+\cdots+\frac{b^nx^n}{n!}+\cdots \qquad \text{সকল বাস্তব } x \text{ এর জন্য}$$

$$\sin mx = mx-\frac{m^3x^3}{3!}+\frac{m^5x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}m^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots$$

$$\cos mx=1-\frac{m^2x^2}{2!}+\frac{m^4x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}m^{2n}}{2n!}+\cdots \qquad \text{সকল বাস্তব } x \text{ এর জন্য}$$

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\cdots \qquad (-1<x\le 1 \text{ এর জন্য })$$

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-r+1)}{r!}x^r+\cdots \qquad (-1<x<1)$$

6.13 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. $a^x (a > 0)$ অপেক্ষকের ম্যাকলরীন বিস্তৃতি নির্ণয় করুন।

$$\left(\text{উঃ } a^x=e^{x\log_e^a}=1+x\log_e^a+\frac{x^2}{2!}\left(\log_e^a\right)^2+\cdots+\frac{x^n}{n!}\left(\log_e^a\right)^n+\cdots\right)$$

2. $e^{\tan^{-1}x}$ কে ম্যাকলরীণ শ্রেণীতে (প্রথম চারটি পদ) লিখুন।

$$\left(\text{উঃ } e^{\tan^{-1}x}=1+x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)$$

3. যদি $h > 0$ এবং $f'(x)$ $(a - h, a + h)$ এই অন্তরালে থাকে এবং $[a - h, a + h]$ এই অন্তরালে $f(x)$ সন্তত হয়, তবে দেখান

(i) $$\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}=f'(a+\theta h)+f'(a-\theta h), \qquad 0<\theta<1$$

(ii) $$\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h}=f'(a+\lambda h)-f'(a-\lambda h), \qquad 0<\lambda<1$$

(iii) যদি $f''(a)$ থাকে, তবে দেখান যে

$$f''(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}$$

[টেলর উপপাদ্য দ্বিতীয় রূপ থেকে (পরিশিষ্ট)

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}\left(f''(a)+n_1\right) \qquad (\text{যেখানে } n_1\to 0 \text{ যখন } h\to 0)$$

$$f(a-h)=f(a)-hf'(a)+\frac{h^2}{2!}\left(f''(a)+n_2\right) \qquad (\text{যেখানে } n_2\to 0 \text{ যখন } h^2\to 0)$$

যোগ করে h^2 দিয়ে ভাগ দিয়ে লিমিট নিলে পাওয়া যাবে]

সংকেত ঃ 3(i) $F(t) = f(a + ht) - f(a - ht), \qquad 0\le t\le 1$

নিয়ে মধ্যমান উপপাদ্য প্রয়োগ করুন।

একক 7 ❑ বহুচল ফাংশন-লিমিট সন্ততি ও আংশিক ডেরিভেটিভ বা আংশিক অবকলসমূহ (Function of Several variables, Limit, Continuity and Partial Derivatives)

গঠন

7.1 প্রস্তাবনা ঃ

আমরা জানি এমন অনেক ফাংশন আছে যারা একাধিক স্বাধীন চলের মানের উপর নির্ভর করে। যেমন তাপমাত্রা। তাপমাত্রা যে স্থানে মাপা হচ্ছে এবং যখন মাপা হচ্ছে তার উপর নির্ভর করে। অর্থাৎ (x, y, z) যদি স্থানটির স্থানাঙ্ক হয় এবং সময় যদি t হয় তবে তাপমাত্রা T, x, y, z ও t এর ফাংশন হবে।

সাধারণভাবে একটি চল u-কে অনধীন চল $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ এর ফাংশন বলা হবে যদি একটি n মাত্রিক দেশের (n-dimensional space) একটি অঞ্চলে (region) যে-কোন বিন্দু $(x_1, x_2, \ldots\ x_n)$-এর জন্য u-এর নির্দিষ্ট একটি বাস্তব মান থাকে।

উদাহরণ স্বরূপ ঃ

1. $u = x^2 + y^2 + z^2$

এখানে u একটি বহুচল ফাংশন। আমরা লিখি u(x,y,z)। ত্রিমাত্রিক দেশে যে কোন অঞ্চলের প্রতিটি বিন্দু (x,y,z)-এ এর মান u(x,y,z) আছে।

2. $u = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$

এখানে (x, y)-সমতলের যে সকল অঞ্চলে $x + y = 0$ অথবা $x - y = 0$ এই সরলরেখা দুটির কোন বিন্দু নেই সেই অঞ্চলে u(x, y)-এর মান আছে। কেননা, যে সকল বিন্দুতে $x + y = 0$ বা $x - y = 0$ সেখানে u-এর সংজ্ঞা নেই।

3. $u = x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n$, যেখানে $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n$ প্রত্যেকটি যে কোন বাস্তব মান নিতে পারে। এখানে n-মাত্রিক দেশের যে কোন সীমাবদ্ধ অঞ্চলে u সংজ্ঞাত।

আসুন এবারে আমরা বহুচল ফাংশনের সীমা, সন্ততি, অবকলন ইত্যাদি সম্পর্কে আলোচনা করি।

7.1.1 উদ্দেশ্য ঃ

এই একক পাঠ করে আপনি —

- আংশিক অবকল বা আংশিক ডেরিভেটিভের অবতারণা অনুধাবন করতে পারবেন।
  বহুচল ফাংশন যেমন u(x, y, z) কিভাবে স্বাধীন চলগুলির পরিবর্তনের সঙ্গে বদলায় তা জানার স্বাভাবিক প্রয়োজনে এই বিষয়টি ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- এইসব ডেরিভেটিভের উপর অপেক্ষকটির নির্ভরশীলতাও কিভাবে বিবেচ্য তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- একচলী ফাংশনের মত বহুচলী ফাংশনের টেলরবিস্তৃতি আছে কিনা এবং থাকলে তার রূপ কি তা পরীক্ষা করে দেখতে সক্ষম হবেন।
- সমগ্র অবকল এবং ফাংশনসমূহের ফাংশনের সমগ্র অবকল ও ডিফারেনসিয়াল-এর ধারণা পরিস্ফুট করতে পারবেন।
- অয়লারের ফাংশন সম্পর্কিত তত্ত্ব সম্বন্ধে অবহিত হবেন।

7.2 বহুচল ফাংশনের লিমিট (Limit of a function of several variables)

আমরা এখানে আলোচনায় u এই চলকে দুইটি স্বাধীন চল (x,y)-এর ফাংশন হিসাবে নেব। আলোচনার পদ্ধতি থেকে বোঝা যাবে যে অনধীন চলের সংখ্যা দুই অপেক্ষা বেশী হলে একই পদ্ধতি অনুসরণে কোন অসুবিধা হবে না।

সংজ্ঞা ঃ সামীপ্য (Neighbourhood) : (x,y) চল দুটির অঞ্চলে (x_o,y_o) একটি বিন্দুর একটি সামীপ্য বলতে আমরা সে সকল বিন্দু (x,y)-কে বোঝাব যাদের ক্ষেত্রে যে কোন প্রদত্ত ধনাত্মক সংখ্যা $\delta>0$-এর জন্য $\sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2}<\delta$. অর্থাৎ জ্যামিতিকভাবে বলতে গেলে (x_o,y_o)-কে কেন্দ্র করে δ ব্যাসার্দ্ধ নিয়ে বৃত্তের সমস্ত অন্তঃস্থ বিন্দুগুলির সেট হল (x_o,y_o) বিন্দুর একটি সামীপ্য।

মন্তব্য ঃ উপরের সংজ্ঞা থেকে পরিষ্কার যে বিভিন্ন $\delta\,(>0)$-র জন্য বিভিন্ন সামীপ্য থাকবে। এ সম্পর্কে বলা প্রয়োজন যে সামীপ্য সাধারণভাবে নানারকমের সামীপ্য হতে পারে, যেমন আয়তক্ষেত্রাকার সামীপ্য। কোন $\delta>0$-এর জন্য $0<\sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2}<\delta$ এই অসমতামানা বিন্দুসমূহের সেটকে আমরা (x_o,y_o) বিন্দুর বর্জিত সামীপ্য (Deleted neighbourhood) বলব। অর্থাৎ সামীপ্য থেকে কেন্দ্রবিন্দু (x_o,y_o)-কে এখানে বাদ দেওয়া হয়েছে।

সংজ্ঞা ঃ স্বাধীন চলসমূহের লিমিট ঃ (x,y) বিন্দু সমূহের লিমিট (x_o,y_o) বিন্দু বলা হবে যদি যে কোন $\delta>0$-এর জন্য $0<\sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2}<\delta$ অর্থাৎ (x,y) যদি (x_o,y_o) বিন্দুর সামীপ্যে থাকে, এবং δ এর মান যত ছোট ইচ্ছা নেওয়া হতে পারে। প্রতীক সাহায্যে আমরা লিখি $(x,y)\to(x_o,y_o)$, এবং বলি যে (x,y) বিন্দু (x_o,y_o), বিন্দুর নিকটে যাচ্ছে।

সংজ্ঞা ঃ ফাংশনের লিমিট $\lim\limits_{(x,y)\to(x_o,y_o)} u(x,y)$

এবার আমরা একটি ফাংশন u(x,y)-এর লিমিট-এর সংজ্ঞা দেব। ধরা যাক u(x,y), $(x_o y_o)$ বিন্দুর একটি বর্জিত সামীপ্যে সংজ্ঞাত। আমরা $\lim\limits_{(x,y)\to(x_o,y_o)} u(x,y)=l$ (যেখানে l একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা) বলব যদি, যে কোন প্রদত্ত $\varepsilon>0$ এর জন্য এমন একটি $\delta>0$ পাওয়া যায় যাতে

যখন $0<\sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2}<\delta$ হবে

তখন $|u(x,y)-l|<\varepsilon$ হয়।

মন্তব্য ঃ 1. উপরের সংজ্ঞাটি প্রকৃতপক্ষে অনেকগুলি শর্তাধীন

2. (x_o,y_o) বিন্দুতে $u(x,y)$ সংজ্ঞাত না হলেও লিমিট থাকার কোন অসুবিধা নেই।

উদাহরণ ঃ দেখান যে $\lim\limits_{(x,y)\to(x_o,y_o)} x^2+y^2 = x_o^2+y_o^2$

(এখানে (x_o, y_o), xy-সমতলের একটি নির্দিষ্ট বিন্দু)।

সমাধান ঃ $|x^2+y^2-(x_o^2+y_o^2)| = |x^2-x_o^2+y^2-y_o^2| \le |x^2-x_o^2|+|y^2-y_o^2| \ldots (i)$

$(\therefore |a+b| \le |a|+|b|)$

কিন্তু $|x^2-x_o^2| = |x+x_o||x-x_o|$

এবং $|x+x_o| = |x-x_o+2x_o| \le |x-x_o|+2|x_o|$.

অতএব $|x^2-x_o^2| \le (|x-x_o|+2|x_o|)|x-x_o| \ldots\ldots\ldots (ii)$

এইভাবে $|y^2-y_o^2| \le (|y-y_o|+2|y_o|)|y-y_o| \ldots\ldots\ldots (iii)$

অতএব (i), (ii), (iii) থেকে, যদি $0 < \sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2} \le \delta$ হয়

তবে $|x^2+y^2-(x_o^2+y_o^2)^2| \le (\delta+2|x_o|)\delta+(\delta+2|y_o|)\delta$

$= \delta\{2|x_o|+2|y_o|+2\delta \ldots\}(iv)$

এখন যদি $\varepsilon > 0$ যে কোন একটি ধনাত্মক সংখ্যা দেওয়া থাকে তবে আমরা একটি সংখ্যা $1 > \delta > 0$ এমন করে নিতে পারি যে $\delta\{2|x_o|+2|y_o|+2\delta\} < \delta\{2|x_o|+2|y_o|+2\} < \varepsilon$

এবং এটা সম্ভব যদি $\delta < \dfrac{\varepsilon}{2|x_o|+2|y_o|+2}$ নেওয়া হয়। অতএব একটি δ পাওয়া যাচ্ছে।

সংজ্ঞা ঃ $\lim\limits_{x\to x_o} u(x,y)$

যদি অনধীন চলের সমতলের সংজ্ঞাত অঞ্চলে একটি বিন্দু (x, y) নিই এবং যদি y-এর মান স্থির রেখে x-এর মান x_o-এর সামীপ্যে চলে, তবে সে অবস্থায় u(x,y)-এর কোনও লিমিট থাকলে তাকে $\lim\limits_{x\to x_o} u(x,y)$ বলা হবে।

অর্থাৎ যদি একটি সংখ্যা m এমন থাকে যে, যে কোন প্রদত্ত $\varepsilon > 0$ এর জন্য এমন একটি সংখ্যা $\delta > 0$ পাওয়া যায় যার জন্য

$|u(x,y)-m| < \varepsilon$ যখনই $0 < |x-x_o| < \delta$ হয় তাহা হলে $\lim\limits_{x\to x_o} u(x,y) = m$ বলা হয়।

এখানে আমরা দেখতে পাচ্ছি যে m-এর মান y-এর মানের উপর নির্ভর করবে।

একইভাবে আমরা $\lim\limits_{y\to y_o} u(x,y)$ এর সংজ্ঞা দিতে পারি।

উদাহরণ 1 : $u(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

$\lim\limits_{x\to o} u(x,1)$ নির্ণয় করুন।

সমাধান : এখানে $u(x,1)=\dfrac{x^2-1}{y^2+1}$

অতএব $\lim\limits_{x\to 0} u(x,1)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}=\dfrac{-1}{1}=-1$

মন্তব্য : এমন অনেক ফাংশন আছে যার জন্য কোন একটি বিন্দুতে

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} u(x,y) \neq \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} u(x,y)$$

উদাহরণ 2 :

উপরের ফাংশনটি নিয়ে আমরা দেখাবো।

$u(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, সমস্ত (x, y)-এর জন্য সংজ্ঞাত একমাত্র (0,0) বিন্দুটি ছাড়া।

এখানে $\lim\limits_{x\to 0} u(x,y)=-\dfrac{y^2}{y^2}=-1$, যখন $y\neq 0.$

$$\therefore \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} u(x,y)=\lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{y^2}=\lim_{y\to 0}(-1)=-1$$

($\therefore$ যখন $y\to 0$, তখন $y\neq 0$ এবং ফলে y cancel করার কোন অসুবিধা নেই)

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}1=1$$

উদাহরণ 3 : দেখান যে

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, এর অস্তিত্ব নেই।

এখানে (0,0) বিন্দুর নিকটে একটি বিন্দু (x,y) নিলে $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ বসাতে পারি (মেরুস্থানাঙ্ক r,θ ব্যবহার করে)।

তা হলে যখন $(x,y)\to(0,0)$ বিন্দুতে যায়, তখন $(x-0)^2+(y-0)^2=r^2\to 0$-তে যায়।

এখন $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\dfrac{r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}$

$$=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{1} \quad (\because\ r\neq 0)$$

অতএব $(x,y)\to(0,0)$ লিমিট নিলে $r\to 0$ হবে অতএব

$\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\cos^2\theta-\sin^2\theta$, অতএব দেখা যাচ্ছে লিমিট (x,y) বিভিন্ন পথে (0,0)-এর দিকে যাওয়ার ফলে বিভিন্ন লিমিট হচ্ছে। কিন্তু লিমিট থাকতে হলে একই লিমিট হতে হবে, $(x,y)\to(0,0)$ যে পথেই যাক্ না কেন। অতএব লিমিট নেই।

উদাহরণ 4 ঃ

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^3+y^4}{(x^2+y^2)}$-এর অস্তিত্ব আছে কিনা পরীক্ষা করুন।

এখানে $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ বসালে

$$\frac{x^2y^3+y^4}{x^2+y^2}=r^2\ (r\cos^2\theta\sin^3\theta+\sin^4\theta)$$

এখন (x,y) যে পথেই (0,0)-এর দিকে যাক $x^2+y^2\to 0$ যেতেই হবে অর্থাৎ $r\to 0$ হতে হবে। অতএব বোঝা যাচ্ছে এক্ষেত্রে লিমিট আছে এবং লিমিট 0.

কারণ $\left|\dfrac{x^2y^3+y^4}{x^2+y^2}-0\right|=|r^2(r\cos^2\theta\sin^3\theta+\sin^4\theta)|$

$$= r^2\,|r\cos^2\theta\sin^3\theta+\sin^4\theta\,|$$

$$\leq r^2\ (r\,|\cos^2\theta|\,|\sin\theta|^3+|\sin\theta|^4)$$

$$\leq r^2\,(1+1) \text{ যেখানে } 0<r<1$$

যেহেতু $|\cos^2\theta\,|\leq 1, |\sin\theta|\leq 1$.

অতএব $\left|\dfrac{x^2y^3+y^4}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$

যদি $2r^2<\varepsilon$

অর্থাৎ $r<\sqrt{\varepsilon/2}$ হয়

অতএব $\delta=\sqrt{\varepsilon/2}$ নিলে সংজ্ঞানুসারে লিমিট সিদ্ধ।

উদাহরণ 5 ঃ

1. $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ যখন $x^2+y^2\neq 0$

$f(0,0)=0$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ আছে কিনা পরীক্ষা করুন।

এখানে যেহেতু $f(x,y)$-এর হর $x^4+y^2\to 0$ যখন $(x,y)\to(0,0)$, অতএব লিমিটের বীজগাণিতিক ধর্ম প্রয়োগ হবে না।

এখানে $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ বসালে

$$f(x,y)=\frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^4\cos^4\theta+r^2\sin^2\theta}$$

$$=\frac{r\cos^2\theta\sin\theta}{r^2\cos^4\theta+\sin^2\theta}\ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$

অতএব দেখা যাচ্ছে $\theta\neq 0$ নিলে, (i) এর ডানপক্ষের লিমিট হয় 0, যখন $r\to 0$ হয়।

$\theta=0$ নিলে লিমিট হয় $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{0}{r^2}=0$. অতএব দেখা গেল (x,y) বিন্দু (0,0)-কেসরললেখায় নিকটবর্তী হলে সর্বদা লিমিট হয় 0.

এখন দেখা যাক (x,y) অন্য পথে (0,0) প্রতি নিকটবর্তী হলে কি হয়। $y=mx^2$ এই রাস্তায় (x,y) গেলে

$$f(x,y)=\frac{mx^4}{x^4+m^2x^4}=\frac{m}{1+m^2}.$$

অতএব দেখা যাচ্ছে $y=mx^2$ এই রাস্তায় গেলে লিমিট হয় $\dfrac{m}{1+m^2}$, কিন্তু m আমরা বিভিন্নভাবে নিতে পারি অতএব অনন্য লিমিট হচ্ছে না। অতএব $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$-এর অস্তিত্ব নেই।

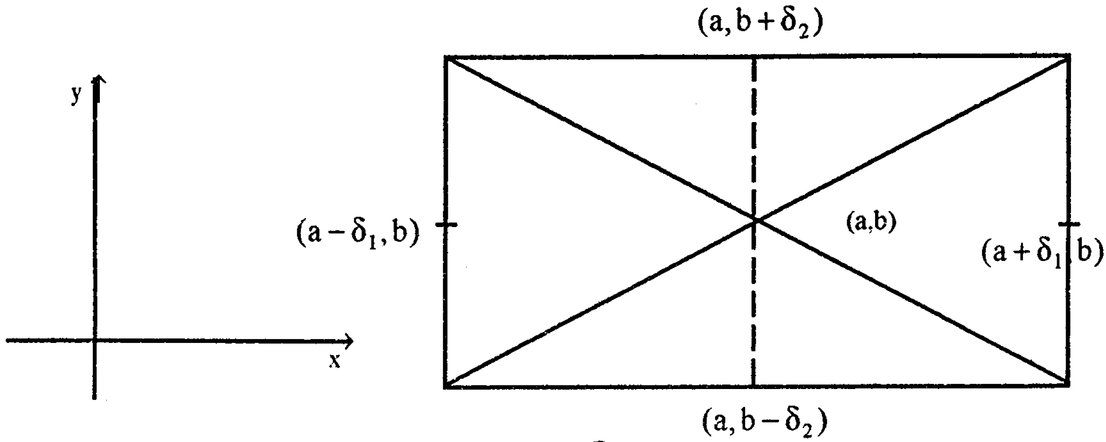
উদাহরণ 6 ঃ

একটি আয়তক্ষেত্রাকার সামীপ্য কিরূপ? উদাহরণসহ দেখান।

উত্তর ঃ ধরা যাক (a,b) একটি xy তলে একটি বিন্দু যার একটি আয়তক্ষেত্রাকার সামীপ্য (neighbourhood) দেখাতে হবে। ধরা যাক δ_1, δ_2 দুটি ধনাত্মক সংখ্যা। তাহলে আমরা একটি সেট বর্ণনা করব —

$D = \{x, y;\ x, y \in R$ এবং $|x-a| < \delta_{1,}\ |y-b| < \delta_2\}$

অতএব (x,y) বিন্দু একটি আয়তক্ষেত্রাকার ক্ষেত্রের সমস্ত অন্তঃস্থ বিন্দু। এখানে লক্ষ্য করুন অবম $(\delta_1, \delta_2) = \delta$ হলে $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta$ এই বৃত্তটি ঐ আয়তক্ষেত্রের অর্ন্তভুক্ত।



প্রশ্নাবলী

1. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, যখন $x^2+y^2 \neq 0$

$f(0,0) = 0$

(i) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$, যেখানে $a^2+b^2 \neq 0$, নির্ণয় করুন।

(ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ আছে কিনা পরীক্ষা করুন।

(iii) $\lim\limits_{x\to 0}\ \lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to 0}\ \lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ এগুলির অস্তিত্ব পরীক্ষা করুন।

[**সংকেত ঃ** লিমিটের বীজগাণিতিক ধর্ম প্রয়োগ করে (i) নির্ণয় করুন। (ii) উদাহরণ 3-এর মত করে দেখুন। (iii) যদি $x \neq 0$ হয় তবে $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = \dfrac{0}{x^2}$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}\ \lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = 0\ (\because x \neq 0)$$

অনুরূপভাবে $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ নির্ণয় করুন।

2) $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x-y}$ যখন $x\neq y$

$f(x,y) = 0$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ এর অস্তিত্ব পরীক্ষা করুন।

[**সংকেত ঃ** $y=x-mx^3$ এই পথ নিয়ে দেখুন লিমিট m-এর উপর নির্ভরশীল]

3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^3}{x^2+y^6}$ আছে কিনা পরীক্ষা করুন।

[**সংকেত ঃ** $x=my^3$ এই রাস্তায় লিমিটের অবস্থা দেখুন]

4) $\lim\limits_{x\to y}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x-y}{x+y}=?$

5) $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-y}{x+y}=?$

7.2.1 বহুচল ফাংশনের সন্ততি (Continuity of Functions of Several Variables)

ধরা যাক $u(x,y)$ ফাংশনটি (x,y) সমতলে কোন একটি অঞ্চল D-তে সংজ্ঞাত এবং ঐ অঞ্চলে (x_0, y_0) একটি বিন্দু। $u(x,y)$-কে (x_0,y_0) বিন্দুতে সন্তত (Continuous) বলা হবে যদি যে কোন $\varepsilon>0$ প্রদত্ত হলে, একটি সংখ্যা $\delta>0$ নির্ণয় করা সম্ভব যার জন্য

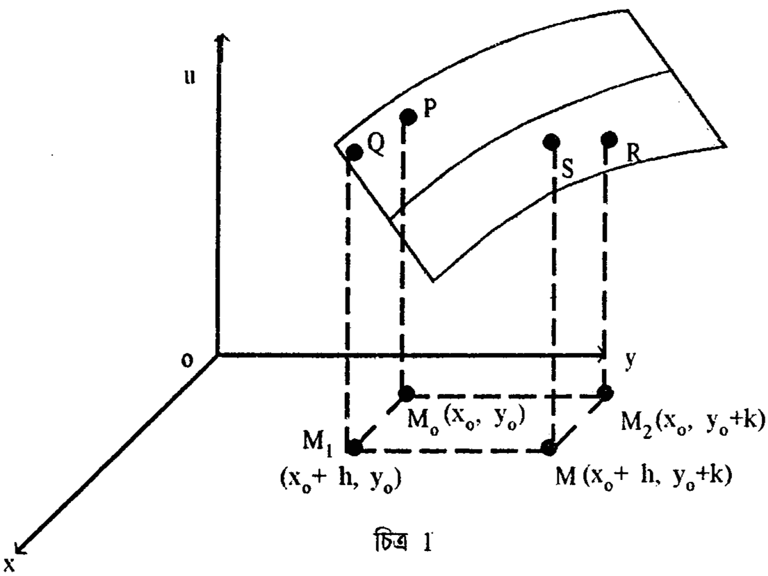
$$|u(x,y)-u(x_0,y_0)|<\varepsilon \text{ যখন } \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta \quad\ldots\ldots\ldots(i)$$

অর্থাৎ (x_0, y_0) বিন্দুকে কেন্দ্র করে δ ব্যাসার্দ্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত রচনা করলে ঐ বৃত্তের অন্তঃস্থ যে কোন বিন্দু (x,y)-এর জন্য উপরের অসমতা সত্য হবে। $u(x,y)$ যদি (x_0,y_0) বিন্দুতে সন্তত হয় তবে সংজ্ঞানুসারে $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)$ আছে এবং ঐ লিমিটের মান হল $u(x_0, y_0)$।

কিন্তু $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}(x,y)$-এর অস্তিত্ব থাকলেই সেটা ঐ বিন্দুতে u-এর মানের সঙ্গে সমান হতে হবে এমন কোনও কথা নেই; আবার এমনও হতে যে $u(x_0,y_0)$-এর অস্তিত্বই নেই।

7.2.2 বহুচল ফাংশন এর জ্যামিতিক রূপ :

দুইটি পরস্পর লম্ব সরলরেখাকে যথাক্রমে O_x, O_y অক্ষ নিয়ে ও xy-তলের উপর লম্ব দিকে u অক্ষ নিয়ে (x, y, u (x, y)) ত্রিমাত্রিক দেশে এই বিন্দুগুলি দ্বারা গঠিত তলই হল u(x,y)-এর জ্যামিতিক রূপ।



চিত্র 1

উপরের চিত্রে u(x,y)-এর তলদেশে P বিন্দু (x_0, y_0) -তে u-এর মান $u(x_0, y_0)$ নির্দেশ করছে অর্থাৎ $M_0P = u(x_0, y_0)$। এখন $M_1(x_0 + h, y_0)$ বিন্দুতে u-এর মান হল M_1Q এবং $M_2(x_0, y_0 + k)$ বিন্দুতে u-এর মান হল M_2R এবং $M(x_0 + h, y_0 + k)$ বিন্দুতে u-এর মান হল MS. এভাবে আমরা x বা y-এর কোন বৃদ্ধির জন্য u-এর মান কিভাবে পরিবর্তিত হয় বুঝতে পারছি।

7.2.3 বহুচল ফাংশনের লিমিট ও সন্ততির ক্ষেত্রে বীজগাণিতিক ধর্ম (Algebra of limits and continuty of functions of several variables).

একচল ফাংশনের ক্ষেত্রে আমরা দেখেছি যে যদি দুটি ফাংশনের f(x), g(x)-এর লিমিট $x \to a$ থাকে, তবে ফাংশন দুটির যোগ, বিয়োগ, গুণ দ্বারা লব্ধ ফাংশনগুলিরও লিমিট $x \to a$ আছে এবং সেই লিমিট যথাক্রমে ফাংশন দুটির লিমিটের যোগ, বিয়োগ এবং গুণফল হয়। আমরা আরও দেখেছি যে যদি

$\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$ হয় তবে $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$-এর অস্তিত্ব আছে এবং $= \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$.

এখন আমাদের প্রশ্ন হল বহুচল ফাংশনের ক্ষেত্রে কিরূপ হবে? এখানে আমরা প্রমাণ না দিয়ে একটি উপপাদ্য আকারে এই প্রশ্নের উত্তর দিচ্ছি।

উপপাদ্য 1 :

যদি u (x,y), v (x,y) ফাংশন দুটি (x_0, y_0)-এর কোন বর্জিত সামীপ্যে সংজ্ঞাত থাকে এবং যদি

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = l$$

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = m$ হয়, তবে

(i) $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left(u(x,y) \pm v(x,y)\right)$ এর অস্তিত্ব আছে এবং $l \pm m$-এর সমান।

(ii) $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} uv = lm$

(iii) যদি $m \neq 0$ হয়, তবে

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{u}{v} = \frac{l}{m}.$$

উপপাদ্য 2 :

যদি u(x,y), ও v(x,y) ফাংশন দুটি (x_0, y_0) বিন্দুর একট সামীপ্যে সংজ্ঞাত হয় এবং ফাংশন দুটি (x_0, y_0) বিন্দুতে সন্তত হয়, তা হলে

(i) $u \pm v$ ফাংশনটি (x_0, y_0) বিন্দুতে সন্তত

(ii) u v ফাংশনটি (x_0, y_0) বিন্দুতে সন্তত

(iii) যদি $v(x_0, y_0) \neq 0$ হয়, তবে

$\frac{u}{v}$ ফাংশনটি (x_0, y_0) বিন্দুতে সন্তত।

উদাহরণ 1 : $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ নির্ণয় করুন।

এখানে $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{\sin r^2}{r^2} = 1$

অতএব $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x. \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 0\times 1 = 0$

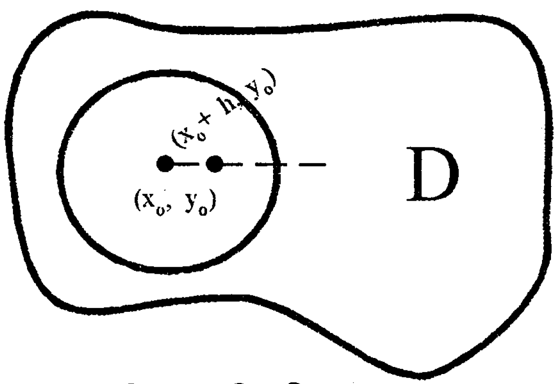
উদাহরণ 2 ঃ $\lim_{(x,y)\to(0,1)} \tan^{-1}\frac{x}{y}$ আছে কিনা পরীক্ষা করুন।

এখানে $\frac{x}{y}$ এই ফাংশন $(0,1)$ বিন্দুতে সন্তত এবং মান $= 0$. আবার $\tan^{-1}\frac{x}{y}, (0,1)$ বিন্দুতে সন্তত। অতএব

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \tan^{-1}\frac{x}{y} = \tan^{-1} \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x}{y} = \tan^{-1} 0 = 0$$

7.3 আংশিক অবকল (Partial Derivative) বা আংশিক ডেরিভেটিভ।

আমরা $u(x,y)$ একটি দ্বিচলের ফাংশন নিলাম। ধরা যাক (x_0, y_0) বিন্দুর সামীপ্যে (neighbourhood) $u(x,y)$ সংজ্ঞাত। তা হলে ঐ সামীপ্যে একটি বিন্দু $(x_0 + h, y_0)$ নিই। ($|h|$-কে যথা প্রয়োজন ছোট নিয়ে বিন্দুটিকে ঐ সামীপ্যে রাখা যায়।)



(x_0, y_0) বিন্দুর একটি সামীপ্য রয়েছে $u(x,y)$-এর সংজ্ঞা অঞ্চলে D-এর মধ্যে।

এখন x-এর বৃদ্ধির ফলে ফাংশনটির বৃদ্ধি (increment) হল $= u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)$. এবার u-এর বৃদ্ধিকে যদি x-এর বৃদ্ধি দিয়ে ভাগ করি তবে পাই $Q = \frac{u(x_0, +h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h}$

এখন h ক্রমাগত 0 দিকে গেলে Q-এর যদি কোন লিমিট থাকে, তবে সেই লিমিটকে আমরা (x_0, y_0) বিন্দুতে $u(x, y)$-এর x-সাপেক্ষে আংশিক ডেরিভেটিভ বা আংশিক অবকল বলব। ঐ লিমিটকে আমরা $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)$ অথবা $u_x(x_0, y_0)$ এভাবে লিখব। অতএব সংজ্ঞানুসারে,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h}$$

এবার আমরা যে কোন (x,y) বিন্দুর জন্য $\frac{\partial u}{\partial x}$ লিখতে পারি

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h}$$

অতএব D-অঞ্চলে (x,y) একটি বিন্দু হলে $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)$ একটি (x,y)-এর ফাংশন হবে।

অনুরূপভাবে আমরা u (x,y)-এর y সাপেক্ষে আংশিক অবকলের সংজ্ঞা দিতে পারি। সেটা হবে

$$\lim_{k\to 0}\frac{u(x,y+k)-u(x,y)}{k}$$

এই লিমিটের যদি অস্তিত্ব থাকে, তবে ঐ লিমিটকে আমরা $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$ অথবা $u_y(x,y)$ অথবা (x,y) বিন্দুতে y-এর সাপেক্ষে u-এর আংশিক অবকল বা আংশিক ডেরিভেটিভ বলব।

উদাহরণ ঃ $u(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ যখন $x^2+y^2\neq 0, u(0,0)=0$. এখানে u সর্বত্র সংজ্ঞাত। আমরা কোন বিন্দু x, y (যার জন্য $x^2+y^2\neq 0$) নিলে পাই

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\left[\frac{\frac{(x+h)^2-y^2}{(x+h)^2+y^2}-\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}{h}\right]$$

উপরের লিমিট আমরা একচল ফাংশনের অবকলনের নিয়মানুসারে সহজেই পেতে পারি, যদি আমরা সর্বদা y-কে একটি ধ্রুবক হিসাবে গণ্য করি।

এভাবে $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\frac{(x^2+y^2).2x-2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$

একইভাবে [এখানে x-কে ধ্রুবক ধরি এবং y-এর সাপেক্ষে অবকলন করে]

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=\frac{(x^2+y^2).(-2y)-2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

অতএব দেখা গেল যে সকল (x, y) তে $x^2+y^2\neq 0$, সেখানে u_x এবং u_y আছে এবং আমরা তাদের মান নির্ণয় করলাম। এখন স্বাভাবিক ভাবে প্রশ্ন উঠতে পারে যে (0,0) বিন্দুতে u_x, u_y আছে কিনা। আমরা এখন সেটাই পরীক্ষা করব।

সংজ্ঞানুসারে $u_x(0,0)=\lim\limits_{h\to}\dfrac{u(h,0)-u(0,0)}{h}$ এবং $u_y(0,0)=\lim\limits_{k\to}\dfrac{u(0,k)-u(0,0)}{k}$

এখন $\dfrac{u(h,0)-u(0,0)}{h}=\dfrac{\dfrac{h^2}{h^2}-0}{h}=\dfrac{1}{h}\quad(\because h\neq 0)$

অতএব $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{u(h,0)-u(0,0)}{h}$ নেই।

অতএব $u_x(0,0)$-এর অস্তিত্ব নেই।

আবার $\dfrac{u(0,k)-u(0,0)}{k}$

$$=\frac{-\dfrac{k^2}{k^2}-0}{k}=\frac{-1}{k}\quad(\because k\neq 0)$$

অতএব $\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{u(0,k)-u(0,0)}{k}=\lim\limits_{k\to 0}\left(-\dfrac{1}{k}\right)$

অতএব উপরের লিমিটটি নেই। অতএব দেখা গেল $u_y(0,0)$-এরও অস্তিত্ব নেই।

উদাহরণমালা ঃ

1. $u(x,y)=\dfrac{x-y}{x^2+y^2}$, যখন $x^2+y^2\neq 0$

$u(0,0)=1$

দেখান যে $(0,0)$ ব্যতীত সর্বত্র u_x, u_y-এর অস্তিত্ব আছে।

2. $u(x,y)=\sin xy$-এর সর্বত্র u_x, u_y এর অস্তিত্ব আছে দেখান।

3. $u(x,y)=\dfrac{1}{x+y}$-এর কোথায় কোথায় u_x, u_y অস্তিত্ব আছে নির্ণয় করুন।

4. $u(x,y,z)$ এই বহুচল ফাংশন $u=\sin x\cos y\tan z$.

u_x, u_y, u_z নির্ণয় করুন।

5. $u(x,y)=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ হলে, $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}$-এর মান নির্ণয় করুন যখন $x^2+y^2\neq 0$.

(উত্তর ঃ $-\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$)

6. যদি $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ যখন $x^2+y^2\neq 0$

$$f(0,0)=0$$

হয়, দেখান যে $f_x(0,0), f_y(0,0)$ এদের অস্তিত্ব আছে, কিন্তু $f(x,y), (0,0)$ বিন্দুতে সন্তত নয়।

সমাধান, $f_x(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{0-0}{h}=0$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k}=0$$

$(x,y)\to(0,0)$ যদি $y=mx$ এই পথে যায়, তবে $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f=\dfrac{m}{1+m^2}$ অতএব বিভিন্ন m-এর জন্য লিমিট আলাদা হচ্ছে। অতএব অনন্য লিমিট না থাকায় $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$-এর অস্তিত্ব নেই। অতএব f(x,y), (0,0) বিন্দুতে সন্তত নয়।

7.4. উচ্চতর ক্রমের আংশিক অবকল বা উচ্চতর ক্রমের আংশিক ডেরিভেটিভ (Higher order partial derivative)

এ পর্যন্ত আমরা দেখেছি u(x,y) একটি দ্বিচলের ফাংশনের আংশিক অবকল u_x অথবা u_y-এর সংজ্ঞা কি, আমরা আরও দেখেছি একটি বিন্দু (x,y)-তে u_x বা u_y এরা x, y-এর ফাংশন। অর্থাৎ একটি অঞ্চলে প্রত্যেক বিন্দুতে u_x, u_y থাকলে ঐ অঞ্চলে u_x বা u_y-কে আমরা একটি দ্বিচলের ফাংশন হিসেবে দেখতে পারি। অতএব প্রশ্ন স্বাভাবিক এই u_x বা u_y এদের আংশিক অবকল আছে কিনা? যদি থাকে, তাদের সংজ্ঞা ও প্রতীক হল যথাক্রমে

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}u_x\right)_{x,y}=u_{xx}=\lim_{h\to o}\frac{u_x(x+h,y)-u_x(x,y)}{h}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}u_x\right)_{x,y}=u_{xy}=\lim_{k\to o}\frac{u_x(x,y+k)-u_x(x,y)}{k}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$$

$$\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)_{x,y} = \lim_{h\to o}\frac{u_y(x+h,y)-u_y(x,y)}{h} = u_{yx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

$$\left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)_{x,y} = \lim_{k\to o}\frac{u_y(x,y+k)-u_y(x,y)}{k} = u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

এবার আবার প্রশ্ন স্বাভাবিক, একটি বিন্দুতে u_{xy} এবং u_{yx}-এর মধ্যে সম্পর্ক কি? নীচে আমরা দুটি উদাহরণ সাহায্যে দেখাব কোন কোন ক্ষেত্রে $u_{xy} = u_{yx}$ এবং কোন কোন ক্ষেত্রে $u_{xy} \neq u_{yx}$

উদাহরণ ঃ 1

$$f(x,y) = yx^2 + xy^2 + 1$$

এখানে $f_x = 2yx + y^2, f_y = x^2 + 2xy$

$$f_{xy} = 2x + 2y, f_{yx} = 2x + 2y$$

অতএব দেখা যাচ্ছে প্রতিটি (x,y) বিন্দুতে f_{xy}, f_{yx} আছে এবং তারা সমান।

উদাহরণ ঃ 2

$f(x,y) = \dfrac{yx(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$ যখন $x^2 + y^2 \neq 0$

$f(0,0) = 0$

এখানে আমরা $(0,0)$ বিন্দু ব্যতিরেকে অন্যান্য বিন্দু (x,y)-তে দেখতে পাই যে

$$f_x(x,y) = \frac{x^4y - y^5 + 4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}, \quad f_y(x,y) = \frac{x^5 - xy^4 - 4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

যখন $x \neq 0$, $\therefore f_x(x,0) = 0$

যদি $y \neq 0$, $f_x(0,y) = -\dfrac{y^5}{y^4} = -y$

$f_y(x,0) = x$. (যখন $x \neq 0$)

এবার (0,0) বিন্দুতে f_x ও f_y-এর মান নিম্নে নির্ণয় করা হচ্ছে ঃ

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k} = 0$$

এবার (0,0) বিন্দুতে f_{xy} ও f_{yx} নিরূপণ করা যাক।

সংজ্ঞানুসারে

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{-k-0}{k} = -1$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h-0}{h} = 1$$

অতএব দেখা যাচ্ছে যে (0, 0) বিন্দুতে $f_{xy} \neq f_{yx}$

মন্তব্য ঃ বিশ্লেষণাত্মক গণিতে f_{xy} এবং f_{yx}-এর সমান হবার শর্তসমূহ আলোচিত হবে।

7.5 দ্বিচল ফাংশনের আংশিক অবকলের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা ঃ

যদি u(x,y) একটি দ্বিচলের ফাংশন হয় এবং একটি বিন্দু P(x,y)-তে u_x ও u_y থাকে তবে তার জ্যামিতিক অর্থ হবে এই : P(x, y) বিন্দুগামী y = ধ্রুবক সমতলে ও u(x, y)-এর তলের যে ছেদ-রেখা পাওয়া যায়, P বিন্দুতে ঐ রেখার স্পর্শক টানলে সে স্পর্শক x অক্ষের সঙ্গে যে কোণ করে তার ট্যানজেন্ট (ত্রিকোণমিতিক) হচ্ছে $\frac{\partial u}{\partial x}$-এর জ্যামিতিক ব্যাখ্যা। অনুরূপভাবে P বিন্দু দিয়ে x = ধ্রুবক সমতল u(x, y)-এর তলকে যে রেখায় ছেদ করে সেই রেখার P বিন্দুতে স্পর্শক y অক্ষের সাথে যে কোণ তৈরী করে তার ট্যানজেন্ট হল u_y.

7.5.1 দুই-এর অধিক ক্রমের আংশিক ডেরিভেটিভ সমূহ (Partial derivatives of orders higher than two.)

আমরা $u_{xy}, u_{yx}, u_{xx}, u_{yy}$ দ্বিতীয় ক্রমের আংশিক ডেরিভেটিগুলির সংজ্ঞা দিয়েছি। একইভাবে উচ্চতর আংশিক ডেরিভেটিভসমূহের সংজ্ঞা দেওয়া যায়, যেমন $u_{xxx}, u_{xyx}, u_{xyy}, u_{yyx}, y_{yyy}$ ইত্যাদি।

অর্থাৎ $u_{xxx} = \lim_{h\to 0} \frac{u_{xx}(x+h,y) - u_{xx}(x,y)}{h}$

$$u_{xxy} = \lim_{k\to 0} \frac{u_{xx}(x,y+k) - u_{xx}(x,y)}{k}$$ ইত্যাদি।

এভাবে আরও উচ্চতর ডেরিভেটিভের সংজ্ঞা দেওয়া যায়।

7.6 সমগ্র অবকলন (Total Differentiation)

ধরি, $u(x,y,z)$ একটি বহুচলের ফাংশন (x,y,z)-দেশের একটি অঞ্চলে সংজ্ঞাত ও সন্তত। u_x, u_y, u_z আংশিক ডেরিভেটিভগুলি আছে এবং সেগুলি সন্তত।

এখন x,y,z চলগুলি যদি প্রত্যেকে একটি চল t-এর ফাংশন হয় যেখানে $a \le t \le b$, এবং $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ প্রতিটির ডেরিভেটিভ আছে, এবং $x'(t), y'(t), z'(t)$ প্রত্যেকটি $a \le t \le b$ প্রতিটি বিন্দুতে অশূন্য (non-zero), তবে যে কোন t বিন্দুতে $u(x(t), y(t), z(t))$ ফাংশনটির t সাপেক্ষে ডেরিভেটিভ আছে এবং

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

প্রমাণ ঃ $u\big(x(t), y(t), z(t)\big) =$ একটি t চলের ফাংশন $= F(t)$ বলা যাক

অতএব আমাদের $\frac{dF}{dt}$ আছে কিনা দেখা প্রয়োজন।

$$\frac{dF}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{u[x(t+\Delta t), y(t+\Delta t), z(t+\Delta t)] - u(x(t), y(t), z(t)]}{\Delta t} \quad \text{.........} (1)$$

$= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{Q}{\Delta t}$. বলা যাক

এখন আমরা লিখতে পারি

$$Q = u[x(t+\Delta t), y(t+\Delta t), z(t+\Delta t)] - u[x(t), y(t), z(t)]$$

$$= \{u[x(t+\Delta t), y(t+\Delta t), z(t+\Delta t)] - u[x(t), y(t+\Delta t), z(t+\Delta t)]\} +$$

$$+ \{u(x(t), y(t+\Delta t), z(t+\Delta z) - u(x(t), y(t), z(t+\Delta t)\}$$

$$+ \{u(x(t), y(t), z(t+\Delta z) - u(x(t), y(t), z(t)\} \text{.........} (2)$$

এখন প্রথম { } এর মধ্যবর্তী দুইটি পদের বিয়োগফলকে আমরা $\Delta x \equiv x(t+\Delta t)-x(t)$ দিয়ে ভাগ ও গুণ করতে পারি। অনুরূপভাবে পরের দুটি পদকে $\Delta y \equiv y(t+\Delta t)-y(t)$ দিয়ে ভাগ ও গুণ করতে পারি এবং শেষের পদ দুইটি $\Delta z \equiv z(t+\Delta t)-z(t)$ দিয়ে গুণ ও ভাগ করতে পারি; কেননা আমরা জানি $x'(t) \neq 0, y'(t) \neq 0, z'(t) \neq 0$ এবং $\Delta x \equiv x'(t)\Delta(t) \neq 0$ ইত্যাদি।

অতএব (1) ও (2) থেকে আমরা পাই

$$\therefore \frac{Q}{\Delta t} = \frac{u[x(t)+\Delta x, y(t)+\Delta y, z(t)+\Delta z]-u[x(t), y(t)+\Delta y, z(t)+\Delta z]}{\Delta x} \times \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$+\frac{u[x(t), y(t)+\Delta y, z(t)+\Delta z]-u[x(t), y(t), z(t)+\Delta z]}{\Delta y} \times \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$+\frac{u[x(t), y(t), z(t)+\Delta z]-u[x(t), y(t), z(t)]}{\Delta z} \times \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

এখন আমরা লাগরাঞ্জের মধ্যমান উপপাদ্য প্রয়োগ করে পাই

$$= \frac{\Delta x}{\Delta x} \frac{\partial u}{\partial x} (x(t)+\theta_1 \Delta x, y(t)+\Delta y, z(t)+\Delta z). \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$+\frac{\Delta y}{\Delta y} \frac{\partial u}{\partial y} (x(t), y(t)+\theta_2 \Delta y, z(t)+\Delta z). \frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\Delta z}{\Delta z} \frac{\partial u}{\partial z} [x(t), y(t), z(t)+\theta_3 \Delta z]. \frac{\Delta z}{\Delta t} \quad \text{.......(3)}$$

যেখানে $0<\theta_1<1, 0<\theta_2<1, 0<\theta_3<1.$

এখন যখন $\Delta t \to 0$, তখন $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\Delta z \to 0$ (যেহেতু $x(t), y(t), z(t)$ সন্তত) আবার u_x, u_y, u_z এরাও সন্তত।

অতএব (3) থেকে পাওয়া গেল

$$\frac{dF}{dt} = \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0 \\ \Delta z \to 0}} \frac{Q}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

অতএব

$$\boxed{\frac{d}{dt} u(x(t), y(t), z(t)) = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}.}$$

7.6.1 সমগ্র বৃদ্ধি (Total Increment) ও সমগ্র ডিফারেন্‌সিয়াল (Total differential)

ধরা যাক $u = u(x, y, z)$ একটি ফাংশন, (x,y,z)-এর একটি সামীপ্যে (x,y,z)-এর যথাক্রমে $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ বৃদ্ধি হলে u-এর বৃদ্ধি Δu হবে।

$$\Delta u = u(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - u(x, y, z)$$

আমরা Δu কে তিনটি অংশের যোগফল হিসাবে লিখতে পারি

$$\Delta u = u(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - u(x, y + \Delta y, z + \Delta z)$$

$$+u(x, y + \Delta y, z + \Delta z) - u(x, y, z + \Delta z)$$

$$+u(x, y, z + \Delta z) - u(x, y, z)$$

এখন যদি (x,y,z) বিন্দুর সামীপ্যে u_x, u_y, u_z গুলি অস্তিত্বশীল ও সন্তত থাকে তবে আমরা Δu কে লিখতে পারি (লাগরাঞ্জের মধ্যমান উপপাদ্য) প্রয়োগ করে

$$\Delta u = \Delta x\, u_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) + \Delta y\, u_y(x, y + \theta_2 \Delta y, z + \Delta z)$$

$$+\Delta z\, u_z(x, y, z + \theta_3 \Delta z), \ldots\ldots\ldots\ldots(A)$$

যেখানে $0 < \theta_1, \theta_2, \theta_3 < 1.$

এখন যেহেতু u_x, u_y, u_z গুলি সন্তত অতএব

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0 \\ \Delta z \to 0}} u_x\,(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) = u_x(x, y, z)$$

এবং $$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0 \\ \Delta z \to 0}} u_y\,(x, y + \theta_2 \Delta y, z + \Delta z) = u_y(x, y, z)$$

এবং $$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0 \\ \Delta z \to 0}} u_z\,(x, y, z + \theta_3 \Delta z) = u_z(x, y, z)$$

অতএব আমরা

$$u_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) = u_x(x, y, z) + r_1$$

লিখতে পারি যেখানে $r_1 \to 0$ যখন $\Delta x, \Delta y, \Delta z \to (0,0,0)$

অনুরূপভাবে $u_y(x, y+\theta_2 \Delta y, z+\Delta z) = u_y(x,y,z) + r_2$

এবং $u_z(x,y,z+\theta_3 \Delta z) = u_z(x,y,z) + r_3$

যেখানে $r_2, r_3 \to 0$ যখন $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \to (0,0,0)$

অতএব (A) থেকে আমরা পাই —

$$\Delta u = u_x(x,y,z)\,\Delta x + u_y(x,y,z)\,\Delta y + u_z(x,y,z)\,\Delta z + r_1\,\Delta x + r_2 \Delta y + r_3 \Delta z \ldots\ldots (B)$$

যেখানে $(r_1, r_2, r_3) \to (0,0,0)$ যখন $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \to (0,0,0)$

সংজ্ঞা ঃ একটি বহুচল ফাংশন $u(x,y,z)$-কে একটি বিন্দুতে অবকলনযোগ্য (Differentiable) বলা হবে যদি x,y,z চলের $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ বৃদ্ধির জন্য u-এর বৃদ্ধি Δu এমন হয় যে

$$\Delta u = A\Delta x + B\,\Delta y + C\Delta z + r_1\,{}^{\wedge}x + r_2 \Delta y + r_3 z \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

যেখানে A,B,C x,y,z উপর নির্ভরশীল কিন্তু $\Delta x, \Delta y, \Delta z$-এর নির্ভর করে না; $r_1, r_2, r_3 \to (0,0,0)$ যখন $\Delta x, \Delta y, \Delta z \to (0,0,0)$.

উপপাদ্য 3 ঃ একটি বিন্দুতে $u(x,y,z)$ অবকলনযোগ্য হলে u_x, u_y, u_z ঐ বিন্দুতে অস্তিত্ববান এবং

$$A = \frac{\partial u}{\partial x}, B = \frac{\partial u}{\partial y}, C = \frac{\partial u}{\partial z} \text{ হবে}$$

প্রমাণ : যদি $\Delta x \neq 0, \Delta y = \Delta z = 0$ নেওয়া হয় তাহলে (I) থেকে পাই $\Delta u = A\Delta x + r_1 \Delta x$

$\Delta x \to 0$ হলে পাওয়া যাচ্ছে $\dfrac{\partial u}{\partial x} = A$.

অনুরূপে, $B = \dfrac{\partial u}{\partial y}, C = \dfrac{\partial u}{\partial z}$

উপপাদ্য 4 : যদি একটি বিন্দুর সামীপ্যে u_x, u_y, u_z সন্তত হয়, তাহলে $u(x,y,z)$ ঐ বিন্দুতে অবকলনযোগ্য হবে।

প্রমাণ : 7.6.1-এ (B) থেকে (I)-এর সংজ্ঞানুসারে u 'অবকলনযোগ্য'।

উপপাদ্য : যদি $u(x,y,z)$ একটি বিন্দুতে অবকলনযোগ্য (differentiable) হয় তবে $u(x,y,z)$ ঐ বিন্দুতে সন্তত।

প্রমাণ : অবকলনযোগ্যতার সংজ্ঞা (I) থেকে $\Delta x, \Delta y, \Delta z \to (0,0,0)$ নিলে পাই $\Delta u \to 0$. অতএব $u(x,y,z)$ ঐ বিন্দুতে সন্তত।

সংজ্ঞা ঃ সমগ্র ডিফারেন্সিয়াল (Total Differential)

একটি বিন্দু (x,y,z)-এর সামীপ্যে $u(x,y,z)$ ফাংশনের আংশিক ডেরিভেটিভ সমূহ সন্তত থাকলে এবং স্বাধীন চল x,y,z-এর বৃদ্ধি যথাক্রমে Δx, Δy, Δz দেওয়া হলে (যেখানে $x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z$ ঐ সামীপ্যে অবস্থিত), তখন $u(x,y,z)$-এর বৃদ্ধি Δu হয়; $\Delta x, \Delta y, \Delta z$-এর রৈখিক অংশ

$u_x(x,y,z)\Delta x + u_y(x,y,z)\Delta y + u_z(x,y,z)\Delta z$-কে u-এর সমগ্র ডিফারেন্সিয়াল বলা হয় এবং প্রতীক du দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অর্থাৎ u-এর (x,y,z) বিন্দুতে সমগ্র ডিফারেন্সিয়াল হল

$$du = u_x(x,y,z)\Delta x + u_y(x,y,z)\Delta y + u_z(x,y,z)\Delta z$$

যেহেতু x,y,z স্বাধীন চল অতএব তাদের বৃদ্ধি dx, dy, dz দ্বারা প্রতীত হয়। অতএব u-এর সমগ্র ডিফারেন্সিয়াল হল

$$du = u_x dx + u_y dy + u_z dz \text{..................(C)}$$

অতএব (B) থেকে

$$\Delta u = du + \gamma_1 dx + \gamma_2 dy + \gamma_3 dz \text{ যেখানে } \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \to (0,0,0) \text{ যখন } dx, dy, dz \to (0,0,0)$$

7.7 তিনটি চলযুক্ত ফাংশনের দিশা ডেরিভেটিভ বা দিশা অবকল (Directional Derivative of a function of three variables)

যদি $u(x,y,z)$ একটি x,y,z চলের ফাংশন হয় ও u_x, u_y, u_z যদি $P(a,b,c)$ বিন্দুতে থাকে, তবে ঐ বিন্দু দিয়ে যে কোন দিকে আমরা u-এর ডেরিভেটিভ সংজ্ঞা দিতে পারি। এই জাতীয় ডেরিভেটিভ-কে দিশা ডেরিভেটিভ (Directional Derivative) বলা হয়। P-এর সামীপ্যে Q বিন্দু নেওয়া হল যেখানে Q-এর স্থানাঙ্ক হল $(a+rl, b+rm, c+rn)$, l, m, n হল PQ-এর দিক্ কোসাইন এবং $r =$ PQ-এর দৈর্ঘ্য। তা হলে P বিন্দুতে (l,m,n) দিকে ডেরিভেটিভ হল, $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{u_Q - u_P}{r}$ যেখানে l, m, n ধ্রুবক। অতএব (l,m,n) দিকে দিশা ডেরিভেটিভ হল

$$\lim_{r\to 0}\frac{u(a+rl, b+rm, c+rn) - u(a,b,c)}{r}$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{Q}{r} \text{ (বলা যাক)}$$

এখানে r যখন o দিকে যায়, অর্থাৎ $Q \to P$ তখন l, m, n-এর পরিবর্তন হয় না।

আমরা এক্ষেত্রে $u(a+rl, b+rm, c+rn)$-কে r-এর ফাংশন মনে করতে পারি।

অতএব সমগ্র অবকলের (Total Diffferentiation) সূত্র (7.6) থেকে প্রয়োগ করে আমরা পাই

$$\lim_{r\to 0} \frac{Q}{r} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}.l + \frac{\partial u}{\partial y}m + \frac{\partial u}{\partial z}n\right)_{(a,b,c)}$$

অতএব $l\frac{\partial u}{\partial x} + m\frac{\partial u}{\partial y} + n\frac{\partial u}{\partial z}$ হল (a, b, c) বিন্দুতে (l, m, n) দিকে দিশা ডেরিভেটিভ।

দিশা ডেরিভেটিভকে আমরা লিখতে পারি

$$(l, m, n).\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

অর্থাৎ (l, m, n) ও $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$ এই দুটি ভেকটর-এর স্কেলার গুণফল। অতএব কোন একটি দিকে দিশা ডেরিভেটিভ হল $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$ এই ভেকটরের ঐ দিকে বিশ্লেষিতাংশ।

মন্তব্য: একটি বিন্দুতে দিশা ডেরিভেটিভ স্বাভাবিকভাবে দিক্ কোসাইন-এর উপর নির্ভরশীল।

$$\left|lu_x + mu_y + nu_z\right| \le \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} \text{ (কসি-সোয়ার্জ অসমতা)}$$

$$= \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$$

অতএব দিশা ডেরিভেটিভের মান বৃহত্তম হবে যদি

$$l = \frac{u_x}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}}, m = \frac{u_y}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}}, n = \frac{u_z}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}}$$

উদাহরণ : $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$ এই ফাংশনের একটি বিন্দু (a, b, c) -তে $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ এই দিকে দিশা ডেরিভেটিভ কত?

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}, \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2z}{c^2}.$$

অতএব (a,b,c) বিন্দুতে $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ দিকে দিশা ডেরিভেটিভ হল

$$= \frac{2}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{b} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{c} .0$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{\sqrt{2}(a+b)}{ab}$$

উদাহরণ : $u = x^3 + y^3 - z^3$-এর $(1,1,1)$ বিন্দুতে (ℓ, m, n) দিকে দিশা ডেরিভেটিভ নির্ণয় করুন, যেখানে $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

7.8 বহুচলের ফাংশনের প্রথম মধ্যমান উপপাদ্য (First Mean Value Theorem for Function of several variables).

ধরা যাক $u(x, y, z)$ একটি বহুচলবিশিষ্ট ফাংশন। (a, b, c) একটি বিন্দু $u(x, y, z)$-এর সংজ্ঞা-অঞ্চলে আছে এবং (a, b, c) বিন্দুর একটি সামীপ্যে $u(x, y, z)$ সন্তত ও u_x, u_y, u_z ঐ সামীপ্যে সংজ্ঞাত ও সন্তত। $(a+h, b+k, c+l)$ ঐ অঞ্চলে আর একটি বিন্দু যেন $(a+h, b+k, c+l)$ ও (a, b, c)-এর সংযোজক রেখাখণ্ড ঐ অঞ্চলে আছে।

তবে $u(a+h, b+k, c+l) - u(a, b, c)$

$$= hu_x(a+\theta h, b+\theta k, c+\theta l) + ku_y(a+\theta h, b+\theta k, c+\theta l) + lu_z(a+\theta h, b+\theta k, c+\theta l)$$

যেখানে $0 < \theta < 1$.

প্রমাণ : একটি একচল t-এর ফাংশন $\phi(t)$ নিলাম : $\phi(t) = u(a+ht, b+kt, c+lt)$, যেখানে $0 \le t \le 1$ a, b, c, h, k, l এগুলি এখানে ধ্রুবক ধরে $\phi(t)$-এর সংজ্ঞা দেওয়া হচ্ছে।

যেহেতু $u(x, y, z)$ সন্তত অতএব $\phi(t) = u(a+ht, b+kt, c+lt)$, t-এর সাপেক্ষে সন্তত।

কারণ যখন t-এর বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হয়ে $t + \Delta t$ হয় এবং $\Delta x = h\Delta t$

তখন x বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হয়ে $x + \Delta x$ হয় এবং $\Delta y = k\Delta t$

y বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হয়ে $y + \Delta y$ হয়।

এবং z বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হয়ে $z + \Delta z$ হয়।

অতএব যখন $\Delta t \to 0$, তখন $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0, \Delta z \to 0$

এবং $u(x,y,z)$ সন্তত হওয়ায়

$u(a+ht+h\Delta t, b+kt+k\Delta t, c+lt+l\Delta t) \to u(a+ht, b+kt, c+lt)$ যখন $\Delta t \to 0.$

অতএব $\phi(t)$ t-এর সাপেক্ষে সন্তত, যেখানে $0 \le t \le 1$

এখন $a+ht=\xi, b+kt=\eta, c+lt=\zeta$ বসালে আমরা দেখি

$\phi(t)=u(\xi,\eta,\zeta)$ যেখানে ξ,η,ζ এরা t-এর সাপেক্ষে সন্তত ও ডেরিভেটিভযুক্ত।

অতএব সমগ্র অবকলের 7.5-এর নিয়ম অনুযায়ী $\phi'(t)$ অস্তিত্বশীল এবং

$$\phi'(t)=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dt}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{d\eta}{dt}+\frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{d\zeta}{dt}$$
$$=\left(h\frac{\partial u}{\partial \xi}+k\frac{\partial u}{\partial \eta}+l\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)_{\xi,\eta,\zeta}$$

যেহেতু u_ξ, u_η, u_ζ এদের অস্তিত্ব আছে, অতএব $\phi'(t)$, t-এর $0<t<1$ এই সমস্ত মানের জন্য অস্তিত্বশীল।

এবার আমরা $(0,1)$ এই অন্তরালে $\phi(t)$ এই ফাংশনের উপর লাগ্রাঞ্জের মধ্যমান উপপাদ্য প্রয়োগ করে পাই

$\phi(1)-\phi(0)=(1-0)\phi'(\theta)=\phi'(\theta)$ যেখানে $0<\theta<1.$

অতএব আমরা পাই

$$u(a+h,b+k,c+l)-u(a,b,c)$$
$$=\left(h\frac{\partial u}{\partial x}+k\frac{\partial u}{\partial y}+l\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{x=a+\theta h, y=b+\theta k, z=c+\theta l}$$
$$=hu_x(a+\theta h,b+\theta k,c+\theta l)+ku_y(a+\theta h,b+\theta k,c+\theta l)+lu_z(a+\theta h,b+\theta k,c+\theta l)$$
$$=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+l\frac{\partial}{\partial z}\right)u(a+\theta h,b+\theta k,c+\theta l)$$

মন্তব্য ঃ $u=u(x_1,x_2.....x_n)$ হলে মধ্যমান উপপাদ্যের রূপ হবে

$$u(x_1+h_1,x_2+h_2,.....x_n+h_n)-u(x_1,x_2,......x_n)$$

$$=\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+........+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)u(x_1+\theta h_1,x_2+\theta h_2,.....x_n+\theta h_n)$$

যেখানে $0<\theta<1$ এবং আংশিক অবকলগুলি $(x_1+h_1t, x_2+h_2t,......x_n+h_nt)$, $0<t<1$ এই সকল বিন্দুতে সন্তত হবে।

7.9 বহুচল ফাংশনের ক্ষেত্রে টেলর বিস্তৃতি। (Taylor expansiom for functions of several variables)

u (x,y,z) ফাংশনটি যদি তার সংজ্ঞাঞ্চলে অবস্থিত (a,b,c) ও $(a+h,b+k,c+\ell)$ এই দুইটি বিন্দুর সংযোগকারী সরলরেখাখণ্ড -এর উপর সমস্ত বিন্দুতে সংজ্ঞায়িত হয় এবং যদি তার $(n-1)$ -তম আংশিক ডেরিভেটিভ সমূহ ঐ রেখাখণ্ডের সকল বিন্দুতে সন্তত থাকে এবং n-তম আংশিক ডেরিভেটিভ সমূহের ঐ অঞ্চলে অস্তিত্ব থাকে, তবে

$$u(a+h,b+k,c+\ell)=u(a,b,c)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+\ell\frac{\partial}{\partial z}\right)u(a,b,c)$$

$$+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+\ell\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u(a,b,c)+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+\ell\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n-1} u(a,b,c)+R_n$$

যেখানে $R_n=\dfrac{1}{n!}\left(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y}+\ell\dfrac{\partial}{\partial z}\right)^n u(a+\theta h,b+\theta k,c+\theta\ell)$ যেখানে $0<\theta<1$

প্রমাণ : দেওয়া আছে যে $u(a+ht,b+kt,c+\ell t)$ $0\le t\le 1$ এই সকল বিন্দুতে u-এর $(n-1)$ তম সমস্ত অংশিক অবকলগুলি সন্তত এবং $0<t<1$ এই অঞ্চলে u-এর n-তম সমস্ত আংশিক অবকলগুলির অস্তিত্ব আছে।

এখন আমরা একটি t-এর ফাংশন $\phi(t)$ এভাবে নিলাম ঃ

$$\phi(t)=u(a+ht,b+kt,c+\ell t)$$

অতএব $\phi(t), 0\le t\le 1$ এই অন্তরালে সমস্ত বিন্দুতে সংজ্ঞাত।

আবার সমগ্র অবকলের নিয়ম প্রয়োগ করে

$$\phi'(t)=\left(hu_x+ku_y+\ell u_z\right)_{a+ht,b+kt,c+\ell t}$$

$$=\left[\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+\ell\frac{\partial}{\partial z}\right)u\right]_{\substack{x=a+ht\\y=b+kt\\z=c+\ell t}}$$

$$=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+\ell\frac{\partial}{\partial z}\right)u(a+ht,b+kt,c+\ell t)$$

সুতরাং $\dfrac{d}{dt}\equiv h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y}+\ell\dfrac{\partial}{\partial z}$

এবার আমরা পাই

$$\phi''(t)=\frac{d}{dt}\phi'(t)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+\ell\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+\ell\frac{\partial}{\partial z}\right)u(a+ht,b+kt,c+\ell t)$$

$$=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+\ell\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u(a+ht,b+kt,c+\ell t) \qquad r=1,2,\ldots n.$$

এভাবে $\phi^{(r)}(t)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+\ell\frac{\partial}{\partial z}\right)^r u(a+ht,b+kt,c+\ell t)\ \ r=1,2.......n$

যেহেতু $\phi(t)$-এর $(n-1)$ তম ডেরিভেটিভ $\phi^{(n-1)}(t)$ যে সকল আংশিক ডেরিভেটিভ মাধ্যমে প্রকাশিত তারা সন্তত, অতএব $\phi^{(n-1)}(t)$, $0\le t\le 1$ সন্তত এবং $\phi^{(n)}(t)$-এর অস্তিত্ব আছে $0<t<1$ এই অন্তরালে। অতএব আমরা $\phi(t)$ ফাংশনটির টেলর বিস্তৃতি সাধন করলে

$$\phi(t)=\phi(0)+t\phi'(0)+\frac{t^2}{2!}\phi''(0)+\cdots+\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\phi^{(n-1)}(0)+R_n$$

যেখানে $R_n=\frac{t^n}{n!}\phi^{(n)}(\theta t)\ \ 0\le t\le 1,\ 0<\theta<1$.

এবার $t=1$ বসিয়ে পাই

$$\phi(1)=\phi(0)+\phi'(0)+\frac{1}{2!}\phi''(0)+\ldots..+\frac{1}{(n-1)!}\phi^{(n-1)}(0)+\frac{1}{n!}\phi^{(n)}(\theta),0<\theta<1$$

অর্থাৎ, $u(a+h,b+k,c+\ell)=u(a,b,c)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+\ell\frac{\partial}{\partial z}\right)u(a,b,c)$

$$+\ldots\ldots\ldots..+\frac{1}{(n-1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+\ell\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n-1}u(a,b,c)$$

$$+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+\ell\frac{\partial}{\partial z}\right)^n u(a+\theta h,b+\theta h,c+\theta\ell),0<\theta<1.$$

এটিই বহুচলবিশিষ্ট ফাংশনের টেলর বিস্তৃতি।

(a, b, c)-এর পরিবর্তে (x, y, z) লিখলে আমরা পাই,

$$u(x+h, y+k, z+\ell) = u(x,y,z) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + \ell\frac{\partial}{\partial z}\right)u(x,y,z)$$

$$+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + \ell\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u(x,y,z) + \ldots\ldots$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + \ell\frac{\partial}{\partial z)}\right)^{n-1} u(x,y,z)$$

$$+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + \ell\frac{\partial}{\partial z}\right)^n u(x+\theta h, y+\theta k, z+\theta l). \quad 0<\theta<1$$

যদি আমরা $u(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ এই ফাংশনের টেলর বিস্তৃতি লিখি তবে তার রূপ :

$$u(x_1+h_1, x_2+h_2, \ldots\ldots x_n+h_n)$$

$$= u(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) + Du(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n) + \frac{D^2}{2!}u + \frac{1}{3!}D^3u + \ldots\ldots$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}D^{n-1}u + \frac{1}{n!}D^n u(x_1+\theta h_1, x_2+\theta h_2 \ldots\ldots x_n+\theta h_n)$$

যেখানে $D \equiv \left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1} + h_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots\ldots\ldots + h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$

§ 7. ম্যাকলরীন বিস্তৃতি

যদি $u(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ ফাংশন $(0, 0, \ldots\ldots 0)$এর $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots + x_n^2} < \delta$ এই সামীপ্যে $(n-1)$-তম আংশিক ডেরিভেটিভ সমূহসহ সন্তত থাকে এবং n-তম আংশিক ডেরিভেটিভ সমূহ থাকে, তবে ঐ সামীপ্যের অন্তর্গত কোন বিন্দু $(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ -তে u-এর মান $u(0, \ldots\ldots 0)$ এবং $(0, \ldots\ldots 0)$ বিন্দুতে u-এর বিভিন্ন আংশিক ডেরিভেটিভের সাপেক্ষে লিখতে পারা যায়। অর্থাৎ $u(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ এর ম্যাকলরীন বিস্তৃতি হল

$$u(x_1, x_2, \ldots\ldots x_m) = u(0, 0, \ldots\ldots 0) + \Sigma(x_i D_i)\, u(0, 0, \ldots\ldots 0)$$

$$+\frac{1}{2!}(\Sigma\, x_i D_i)^2 u(0,0, \ldots\ldots 0) + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}(\Sigma\, x_i D_i)^{n-1} u(0,0, \ldots\ldots 0)$$

$$+\frac{1}{n!}(\Sigma\, x_i D_i)^n u(\theta x_i, \theta x_2 \ldots\ldots \theta x_n)$$

যেখানে $\left(\sum_{i=1}^{m} x_i D_i\right)^r$ -এর মান সাধারণ গুণ দিয়ে করতে হবে।

উদাহরণ 1. $u(x,y)=e^{2x+2y}$ এই ফাংশনটি xy সমতলের প্রতিটি বিন্দুতে সন্তত। এর সমস্ত ক্রমের ডেরিভেটিভ আছে। $x=y=0$ এই বিন্দুর সাপেক্ষে ম্যাকলরীন বিস্তৃতি করব।

যেহেতু $\dfrac{\partial}{\partial x}e^{2x+2y}=2e^{2x+2y}=2, x=y=0$ বসিয়ে

$\dfrac{\partial}{\partial y}e^{2x+3y}=3e^{2x+3y}=3, x=y=0$ বসিয়ে

একইভাবে $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}e^{2x+3y}\right)_{x=y=0}=4$

অতএব ম্যাকলরীন বিস্তৃতি হল $e^{2x+3y}=1+x\left(\dfrac{\partial}{\partial x}e^{2x+3y}\right)_{x=y=0}+y\left(\dfrac{\partial}{\partial y}e^{2x+3y}\right)_{x=y=0}$

$$+\frac{1}{2!}\left[x^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x}e^{2x+3y}\right)_{(0,0)}+y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}e^{2x+2y}\right)_{(0,0)}+2xy\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}e^{2x+3y}\right)_{(0,0)}\right]+\ldots\ldots+R_n$$

$$=1+(2x+3y)+\frac{1}{2!}(4x^2+9y^2+12xy)+\ldots.$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}(2x+3y)^{n-1}+\frac{1}{n!}(2x+3y)^n.e^{2\theta x+3\theta y}$$

উদাহরণ 2.

$$u(x,y)=\frac{e^x}{x^2+y^2}\left(x^2+y^2\neq 0\right), u(0,0)=0$$

এই ফাংশনটি (0,0) বিন্দু ব্যতীত অন্য যে কোন বিন্দুতে সংজ্ঞাত ও এর সমস্তক্রমের আংশিক অবকল আছে। অতএব যে কোন একটি বিন্দু (x,y)-এর সাপেক্ষে টেলর বিস্তৃতি নির্ণয় করা যায় যেখানে $x^2+y^2\neq 0$.

বি. দ্র. $(x + h, y + k)$ ও (x, y) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশে $(0, 0)$ বিন্দু না থাকলে বিস্তৃতি সম্ভব।

$$u(x,y)=\frac{e^x}{x^2+y^2}$$

$$\therefore\quad \left(x^2+y^2\right)u=e^x$$

উভয়পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অবকল করে পাই

$$2xu+(x^2+y^2)\frac{\partial u}{\partial x}=e^x$$

$$\therefore\quad u_x=\frac{e^x-2xu}{x^2+y^2}$$

আবার $2yu+(x^2+y^2)\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$

$$\therefore \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2yu}{x^2+y^2}$$

$$\therefore \; u(x+h, y+k) = u(x,y) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)u(x,y) + \ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-1}}{(n-1)!}u(x,y) + R_n$$

$$= \frac{e^x}{x^2+y^2} + \left(h\frac{e^x - 2xu}{x^2+y^2} - k\frac{2yu}{x^2+y^2}\right) + \ldots\ldots\ldots + R_n$$

উদাহরণ 3.

$\sin(x+y)$-এর ম্যকলরীন বিস্তৃতি নির্ণয় করুন।

উত্তর : $(x+y) - \frac{(x+y)^3}{3!} + \frac{(x+y)^5}{5!} \ldots\ldots\ldots$

উদাহরণ 4. $\cos(2x-3y)$-এর ম্যকলরীন বিস্তৃতি নির্ণয় করুন।

7.11 সমঘাতী ফাংশন (Homogeneous function)

$u(x_1, x_2, \ldots. x_n)$ একটি বহুচলের ফাংশনকে সমঘাতী (homogeneous) বলা হয় যদি,

$u(x_1t, x_2t, \ldots. x_nt) = t^n u(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$, t এর প্রতিটি বাস্তব মানের জন্য সত্য। n-কে বলা হয়, সমঘাতী ফাংশনের ঘাত (degree).

উদাহরণ স্বরূপ ঃ দেখুন

$u(x,y) \equiv x^2 + y^2$ সমঘাতী (ঘাত $= 2$)

$u(x,y) = \frac{2x^2+3xy-5y^2}{3x^2-5y^2}$ সমঘাতী (ঘাত $= 0$)

$u(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^4+x^3y+y^4} =$ সমঘাতী (ঘাত $= -2$)

উদাহরণ 1 ঃ u (x, y) যদি n ঘাতের সমঘাতী ফাংশন হয় এবং u_x যদি সংজ্ঞায়িত হয়, তবে u_x সমঘাতী

কারণ $u(tx, ty) = t^n u(x,y)$ সকল t এর জন্য

উভয় পক্ষের আংশিক অবকল x এর সাপেক্ষে নিলে

$$t\frac{\partial u}{\partial (xt)}(tx,ty) = t^n \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)$$

অতএব $\frac{\partial u}{\partial (xt)}(tx,ty) = t^{n-1}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)$ ......(i)

এখন আমরা যদি $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \phi(x,y)$ লিখি

তাহলে $\phi(tx,ty) = \frac{\partial u(tx,ty)}{\partial (tx)}$

অতএব (i)-থেকে আমরা পাই, $\phi(tx,ty) = t^{n-1}\phi(x,y)$

অতএব $\phi(x,y)$ সমঘাতী এবং ঘাত $= n-1$.

উদাহরণ 2. $f(x,y)$ ও $g(x,y)$ দুটি সমঘাতী এবং তাদের ঘাত প্রত্যেকের n। তবে দেখান $f(x,y)\pm g(x,y)$ সমঘাতী।

উদাহরণ 3. $f(x,y)$ সমঘাতী এবং ঘাত $m, g(x,y)$ সমঘাতী এবং ঘাত $= n$ তাহা হলে দেখান fg সমঘাতী ও ঘাত $m+n$.

অয়লারের সমঘাতী ফাংশন সম্পর্কিত উপপাদ্য : (Euler's theorem on homogeneous functions) ঃ

যদি $u(x_1, x_2, \ldots x_m)$ একটি সমঘাতী ফাংশন যার ঘাত $= n$, এবং $u_{x_1}, u_{x_2}, \ldots\ldots u_{x_m}$ এদের অস্তিত্ব থাকলে ও সেগুলি সন্তত হলে

$$x_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_m\frac{\partial u}{\partial x_m} = nu(x_1, x_2, \ldots\ldots x_m)$$ হবে।

প্রমাণ : সমঘাতী ফাংশনের ধর্ম অনুসারে

$$u\left(tx_1, tx_2, \ldots\ldots tx_m\right) = t^n u(x_1, x_2, \ldots\ldots x_m)$$

উভয়পক্ষকে t-এর সাপেক্ষে অবকল করে (সমগ্র অবকলসূত্র প্রয়োগ করে)

$$\frac{\partial u}{\partial (tx_1)}\frac{d(tx_1)}{dt} + \frac{\partial u}{\partial (tx_2)}\frac{d(tx_2)}{dt} + \ldots\ldots + \frac{\partial u}{\partial (tx_m)}\frac{d(tx_m)}{dt} = nt^{n-1}u(x_1, x_2 \ldots\ldots x_m)$$

অতএব

$$\left(x_1\frac{\partial}{\partial tx_1}+x_2\frac{\partial}{\partial tx_2}+.......+x_m\frac{\partial}{\partial tx_m}\right)u(tx_1,.....tx_m)=nt^{n-1}u(x_1,x_2,....x_m)$$

উপরের এই সম্পর্কটি t এর বিভিন্ন মানের জন্য সত্য।

অতএব $t=1$ বিন্দুতে মান নিয়ে পাই

$$\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+x_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right)u\left(x_1,x_2\ldots x_m\right)=nu\left(x_1,x_2\ldots x_m\right)$$

অয়লারের উপপাদ্যের বিপরীত (Converse of Euler's Theorem)

উপপাদ্য : যদি একটি সন্তত ফাংশন $u(x_1.......x_m)$ এমন হয় যে তার প্রথম ঘাতের আংশিক অবকলগুলি থাকে এবং $x_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+........+x_m\frac{\partial u}{\partial x_m}=n\,u(x_1,x_2,.....x_m)$ তাহা হলে $u(x_1,x_2.....x_m)$ একটি n ঘাতের সমঘাতী ফাংশন হবে।

প্রমাণ : আমরা একটি নূতন ফাংশন $F(t)$ নিলাম :

$$F(t)=u(\xi_1,\xi_2,......\xi_m)$$

যেখানে $\xi_1=tx_1,\xi_2=tx_2,.......\xi_m=tx_m$

অতএব $x_1,x_2....x_m$ স্থির থাকিলে $F(t)$, t -এর ফাংশন হয়।

অতএব t -এর সাপেক্ষে সমগ্র অবকল নিয়ে

$$F'(t)=\frac{\partial u}{\partial\xi_1}\frac{d\xi_1}{dt}+.......+\frac{\partial u}{\partial\xi_m}\frac{d\xi_m}{dt}=x_1\frac{\partial u}{\partial\xi_1}+.....+x_m\frac{\partial u}{\partial\xi_m}$$

$$=\frac{1}{t}\left(\xi_1\frac{\partial u}{\partial\xi_1}+\xi_2\frac{\partial u}{\partial\xi_2}+.......+\xi_m\frac{\partial u}{\partial\xi_m}\right)$$

$$=\frac{1}{t}.nu(\xi_1,\xi_2,.......\xi_m),\ (\text{প্রদত্ত শর্ত অনুযায়ী})$$

$$=\frac{n}{t}F(t)$$

অতএব $\frac{dF}{dt} = \frac{n}{t}F(t)$

এই অবকল সমীকরণের সমাকল হল

$F(t) = At^n$, যেখানে A একটি ধ্রুবক।

$t = 1$ বসালে

$\therefore\ A = F(1) = u(x_1, x_2, \ldots x_m)$

$F(t) = u(tx_1, tx_2, \ldots tx_m) = At^n = t^n u(x_1, x_2, \ldots x_m)$

অতএব $u(x_1, \ldots x_m)$n ঘাতের সমঘাতী ফাংশন।

মন্তব্য : উপরের উপপাদ্য দুইটি একত্রে বলা যায় যে একটি ফাংশন $u(x_1, \ldots x_m)$-এর সমঘাতী (ঘাত = n) হওয়ায় প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত হল $x_1 u_{x_1} + x_2 u_{x_2} + \ldots + x_m u_{x_m} = nu(x_1, \ldots x_m)$

উদাহরণ 4. যদি $f(x_1, x_2)$ সমঘাতী (ঘাত = n) হয় তবে

$$\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2 f(x_1, x_2) = n(n-1)f(x_1, x_2)$$

সমাধান ঃ $\left(x_1\frac{\partial}{\partial(x_1 t)} + x_2\frac{\partial}{\partial(x_2 t)}\right)f(tx_1, tx_2) = nt^{n-1}f(x_1, x_2)$

আর একবার t-এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাই

$\left(x_1\frac{\partial}{\partial(x_1 t)} + x_2\frac{\partial}{\partial(x_2 t)}\right)^2 f(tx_1, tx_2) = n(n-1)t^{n-2}f(x_1, x_2)$. এবার $t = 1$ বসালে হয়

উদাহরণ 5. $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{xy}$ এই ফাংশনটির ক্ষেত্রে অয়লারের উপপাদ্য ও উদাহরণ (4) যে সত্য তাহা করিয়া দেখান।

উদাহরণ 6. যদি $f(x_1, \ldots x_m)$ n ঘাতের সমঘাতী হয়, তবে দেখাতে হবে যে

$$f(x_1, x_2, \ldots x_m) = x_1^n \phi\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots \frac{x_m}{x_1}\right)$$

$$\left[\because f(tx_1, \ldots tx_m) = t^n f(x_1, x_2, \ldots x_m)\right]$$

7.12 সংযোজক অপেক্ষকের আংশিক অবকল ও সমগ্র অবকল (Partial derivatives and Differential of a Composite function)

যদি $z = F(u,v)$ হয়, এবং u, v যদি স্বাধীন চল x ও y-এর ফাংশন হয় অর্থাৎ যদি $u = \phi(x,y), v = \psi(x,y)$ হয়, তবে আমরা z -কে x, y -এর কম্পোসিট ফাংশন বলব। আমরা লিখতে পারি

$z = F[\phi(x,y), \psi(x,y)]$

উদাহরণ : $z = u^2v^2 + u + 1, u = x^2 + y^2, v = e^{x+y} + 1$

অতএব $z = (x^2 + y^2)^2(e^{x+y} + 1)^2 + (x^2 + y^2) + 1$

এখন যদি $F(u,v), \phi(x,y)$ ও $\psi(x,y)$ ফাংশনসমূহের সন্তত আংশিক ডেরিভেটিভ সমূহ থাকে অর্থাৎ $F_u, F_v, \phi_x, \phi_y, \psi_x, \psi_y$ যদি সন্তত থাকে তা হলে যদি x এর মান Δx পরিমাণ বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হয় এবং y অপরিবর্তিত থাকে, তবে

$$\Delta z = \frac{\partial F}{\partial u}\Delta_x u + \frac{\partial F}{\partial v}\Delta_x v + r_1\Delta_x u + r_2\Delta_x v$$

যেখানে $\Delta_x u, \Delta_x v$ হল u ও v -এর বৃদ্ধি x -এর Δx পরিমাণ বৃদ্ধির জন্য। এবং $r_1, r_2 \to 0$ যখন $\Delta x \to 0$ । (7.6.1 দ্রষ্টব্য)। এবার Δz কে Δx দিয়ে ভাগ করে উপরের সমীকরণ থেকে $\Delta x \to 0$ করে পাই

(1) .... $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

এভাবে শুধু y-এর বৃদ্ধি দিয়ে আমরা পাই

(2) .... $$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

উপরের (1) ও (2) ফর্মূলা থেকে আমরা z-এর ডিফারেন্সিয়াল নির্ণয় করতে পারি।

(3) .... $$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$ (7.6.1 যেহেতু z হল স্বাধীন চল x ও y এর ফাংশন)

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy$$

$$= \frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right)$$

(4) .... $$= \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv$$

অতএব (3) ও (4) থেকে আমরা দেখলাম যে u, v পরস্পর স্বাধীন না হলেও z-এর ডিফারেন্সিয়ালের রূপ একই রূপ হয়।

7.13 সারাংশ (Summary)

1. বহুচল ফাংশনের সংজ্ঞা

2. বহুচল ফাংশন $f(x,y)$-এর জন্য $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ এদের সংজ্ঞা ও পারস্পরিক সম্পর্ক।

3. (x_0,y_0) বিন্দুতে $f(x,y)$ সন্তত যদি $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$ হয়।

4. $u(x,y)$ এই ফাংশনের আংশিক অবকলসমূহ :

$$u_x(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h}$$

$$u_y(x,y) = \lim_{k\to 0}\frac{u(x,y+k)-u(x,y)}{k}$$

5. $$u_{xx}(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{u_x(x+h,y)-u_x(x,y)}{h}$$

$$u_{xy} = \lim_{k\to 0}\frac{u_x(x,y+k)-u_x(x,y)}{k}$$

$$u_{yx} = \lim_{h\to 0}\frac{u_y(x+h,y)-u_y(x,y)}{h}$$

$$u_{yy} = \lim_{k\to 0}\frac{u_y(x,y+k)-u_y(x,y)}{k}$$ ইত্যাদি।

6. যদি $u(x(t),y(t))$ হয় এবং $u(x,y)$-এর আংশিক অবকল u_x, u_y সন্তত হয় এবং $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ থাকে, এবং $\frac{dx}{dt} \neq 0$, $\frac{dy}{dt} \neq 0$ হয় তবে t-এর সাপেক্ষে $u(x,y)$-এর সমগ্র অবকল

$$\frac{du}{dt} = u_x\frac{dx}{dt} + u_y\frac{dy}{dt}.$$

7. $u(x,y,z)$ এই ফাংশনের (ℓ, m, n) দিকে দিশা ডেরিভেটিভ $= \dfrac{\partial u}{\partial x}\ell + \dfrac{\partial u}{\partial y}m + \dfrac{\partial u}{\partial z}n$

8. **বহুচল ফাংশনের প্রথম মধ্যমান উপপাদ্য** (First Mean Value Theorem for functions of several variables)

$u(x, y, z)$ এই ফাংশনটির (a, b, c) ও $(a + h, b + k, c + l)$ এই বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাখণ্ডের প্রতিটি বিন্দুতে u_x, u_y, u_z সংজ্ঞাত ও সন্তত হলে

$$u(a+h, b+k, c+\ell) - u(a,b,c)$$

$$= hu_x(a+\theta h, b+\theta k, c+\theta\ell) + ku_y(a+\theta h, b+\theta k, c+\theta\ell) + \ell u_z(a+\theta h, b+\theta k, c+\theta\ell)$$

যেখানে $0<\theta<1$.

9. **বহুচল ফাংশনের টেলর বিস্তৃতি :**

যদি $u(x, y, z)$ ফাংশন $(a+ht, b+kt, c+lt)\, 0 \le t \le 1$ বিন্দুসমূহে সংজ্ঞাত এবং উহার $(n-1)$-তম আংশিক অবকল সমূহ (a,b,c) ও $(a+h, b+k, c+\ell)$ এই প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের বদ্ধ অন্তরালে সন্তত থাকে এবং (n)-তম আংশিক অবকলসমূহ ঐ প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের মুক্ত অন্তরালে অস্তিত্বশীল হয় তবে

$$u(a+h, b+k, c+l)$$

$$= u(a,b,c) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + \ell\frac{\partial}{\partial z}\right)u(a,b,c)$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + \ell\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u(a,b,c)$$

$$+ \dots\dots\dots + \frac{1}{(n-1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + \ell\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n-1} u(a,b,c)$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + \ell\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n} u(a+\theta h, b+\theta k, c+\theta\ell)$$

যেখানে $0<\theta<1$.

10. বহুচলের ক্ষেত্রে ম্যাকলরীন বিস্তৃতি ঃ

$$u(x_1, x_2, \ldots\ldots x_m) = u(0,0,\ldots.0) + \left(\sum_{i=1}^{m} x_i D_i\right) u(0,0,\ldots.0)$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\sum_{i=1}^{m} x_i D_i\right)^2 u(0,0,\ldots.0) + \frac{1}{(n-1)!}\left(\sum_{i=1}^{m} x_i D_i\right)^{n-1} u(0,0,\ldots.0)$$

$$+\frac{1}{n!}\left(\sum_{i=1}^{m} x_i D_i\right)^{n} u(\theta x_1, \theta x_2, \ldots\ldots \theta x_n).$$

যেখানে $u(x_1, \ldots\ldots x_m)$-এর n-তম আংশিক অবকলগুলি $(0, \ldots\ldots 0)$ এই বিন্দুর কোন সামীপ্যে অস্তিত্বশীল এবং $(n-1)$-তম ক্রমপর্যন্ত আংশিক অবকলসমূহ $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots + x_m^2} \le \delta$ (যেখানে $\delta > 0$ একটি ধনাত্মক সংখ্যা)।

11. সমঘাতী ফাংশন ও অয়লারের উপপাদ্য (Homogeneous Functions and Euler's Theorem)

যদি $f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_m)$ একটি n-ঘাতের সমঘাতী বহুচলের ফাংশন হয়, তবে

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots\ldots\ldots + x_m \frac{\partial f}{\partial x_m} = nf(x_1, x_2, \ldots\ldots x_m)$$ হয়।

বিপরীতক্রমে, যদি $f(x_1, \ldots.. x_m)$ এর প্রথম ক্রমের আংশিক অবকল সমূহ থাকে ও সন্তত হয় এবং যদি

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} \ldots + x_m \frac{\partial f}{\partial x_m} = nf(x_1, x_2, \ldots.. x_m)$$ হয়, তবে $f(x_1 \ldots x_m)$ একটি n ঘাতের সমঘাতী ফাংশন।

12. যদি $z = F(u, v)$ সন্তত এবং u, v এর সাপেক্ষে আংশিক অবকল সন্তত হয় $u(x, y)$, $v(x, y)$ ফাংশন দুটির আংশিক অবকল থাকে ও সন্তত হয় তাহা হলে

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial v} dv$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy .$$

7.14 প্রশ্নাবলী

1. দেখান যে, (x, y) বিন্দুতে $f_{xy} = f_{yx}$

   যেখানে $f(x, y) = \frac{2x - y}{x^2 + y^2}$ যখন $x^2 + y^2 \neq 0$

2. যদি $z = \log\left\{(x-a)^2 + (y-b)^2\right\}$ হয়

   প্রমাণ করুন $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, যখন $(x-a)^2 + (y-b)^2 \neq 0$

3. যদি $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, দেখান যে $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$ যখন $x^2+y^2+z^2 \neq 0$

   [সংকেত : $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}.2x$

   $$= -x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

   $$\therefore \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}.2x$$

   $$= -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}$$

অনুরূপভাবে $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.]

4. $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ এবং $r > 0$ হলে দেখান যে $f(x, y)$-এর ক্ষেত্রে

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial f}{\partial \theta}.\frac{\sin\theta}{r}$$

এবং $$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r}\sin\theta + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}$$

[**সংকেত** : সংযোজক অপেক্ষকের আংশিক অবকল সূত্র 7.12 থেকে

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

কিন্তু $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$

অতএব $r^2 = x^2 + y^2, \tan\theta = \frac{y}{x}$

$r^2 = x^2 + y^2$ -এর উভয়পক্ষ x-এর সাপেক্ষে আংশিক অবকল নিলে

$2r\frac{\partial r}{\partial x} = 2x$ ($\because x, y$ পরস্পর অনধীন)

$\therefore \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$. একইভাবে $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

x-এর সাপেক্ষে আংশিক অবকল নিয়ে $\sec^2\theta\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}$

$\therefore \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r}$. একইভাবে $\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r}$.

5. যদি $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ এবং $u(x, y)$ -কে r, θ মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়, তবে দেখান যে

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

[**সংকেত ঃ** 4-নং থেকে $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}$

$$\therefore\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$=\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)$$

$$=\cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\sin\theta}{r^2}\cos\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}-\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}$$

$$+\frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}+\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}$$

$$\therefore\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{u}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)$$

$$=\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}$$

$$+\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}+\frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}$$

সহায়ক গ্রন্থ ঃ

1. Kaplan, W. Advanced Calculus Addison Wesley Publishing Company, Inc.
2. Courant, R. Differential and Integral Calculus Vol I & II. New York.
3. J. de la Vallee Poussain : Infinitisimal Calculus Vol I.

পুস্তকে ব্যবহৃত কতিপয় পারিভাষিক শব্দ ঃ

Derivative অন্তরকলজ

Partial derivative আংশিক অন্তরকল, আংশিক অবকল

Differential অন্তরকল বা অবকল

Differentiation অন্তরকলন অবকলন

Higher order derivative উচ্চতর ক্রমের অন্তরকলজ

Homogeneous function সমঘাতী ফাংশন

Function ফাংশন বা অপেক্ষক

Parametric differentiation প্রচলিক অন্তরকলন

Differentiability অন্তরকলন যোগ্যতা বা অবকল যোগ্যতা

একক 8 ❑ বক্ররেখার স্পর্শক, অভিলম্ব এবং রৈখিক অসীমপথ (Tangent, Normal and linear asymptote)

গঠন

8.1 প্রস্তাবনা

অবকলনবিদ্যার ভিত্তি লিমিটের (limit-র) ধারণার উপর প্রতিষ্ঠিত। এই লিমিটের ধারণাকে অবলম্বন করেই আমরা স্পর্শকের ধারণায় উপনীত হব এবং পরবর্তী আনুসাঙ্গিক আলোচনা বিস্তার লাভ করবে। উচ্চমাধ্যমিক স্তরে যদিও স্পর্শক ও অভিলম্বের উপর আলোচনা পাঠক্রমের অন্তর্গত, এখানে উক্ত আলোচনা থাকবে আরও বিস্তৃতাকারে। গণিতজ্ঞ নিউটন (Newton) এবং লাইবনিজের (Leibnitz- র) নাম আমরা এখানে অবশ্যই উল্লেখ করব, কারণ তাঁরাই প্রথম কলবিদ্যার লিমিট ও অবকলন গুণাঙ্কের ধারণা জ্যামিতিক ক্ষেত্রে প্রয়োগ করেছেন।

বক্ররেখার অসীম-বিস্তৃত শাখাকে অসীমে মিলিত হবার রৈখিক বা অরৈখিক পথই হলো অসীম পথ (asymptote)। এই অসীমপথটি অবশ্যই মূলবিন্দু থেকে সসীম লম্বদূরত্বে থাকবে। এই অসীমপথের ধারণা আপনাদের কাছে সম্পূর্ণ নতুন। রৈখিক অসীমপথের (Linear asymptote -র) আলোচনাতেই আমাদের আলোচনা সীমিত। লিমিটের ধারণাকে ভিত্তি করেই অসীমপথের সংজ্ঞায় যাব এবং অসীমপথের সমীকরণ নির্ণয় করব। স্পর্শকের ধারণা থেকেও আমরা রৈখিক অসীমপথের ধারণায় আসতে পারি তা আপনারা যথাসময়ে জানতে পারবেন।

8.2 উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করে আপনি —

● যে কোন বক্ররেখার যে কোন বিন্দুতে স্পর্শক (tangent) এবং অভিলম্বের (normal-র) ধারণা এবং তাদের সমীকরণ গঠন করতে পারবেন। কার্তিয় স্থানাঙ্ক (Cartesian Coordinates) এবং মেরু স্থানাঙ্ক (Polar coordinates) এই উভয় স্থানাঙ্কের বিস্তৃত আলোচনা করতে সক্ষম হবেন।

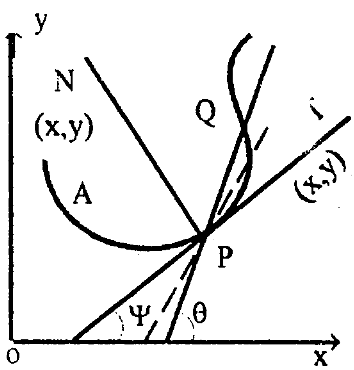
● দুটি বক্ররেখার ছেদবিন্দুতে উৎপন্ন কোণের মান নির্ণয় করতে পারবেন।

● একটি বক্ররেখার চাপ দৈর্ঘ্যের (arc-length-র) অবকলন গুণাঙ্ক (derivative) কি হবে তা নির্ণয় করতে সক্ষম হবেন।

● বক্ররেখার পেডাল সমীকরণ (Pedal equation) নির্ণয় পদ্ধতি বুঝিয়ে দিতে পারবেন।

● যে সকল বক্ররেখার অসীম বিস্তৃত শাখা আছে সেই শাখার সঙ্গে অসীমে মিলিত হবার রৈখিক অসীমপথের (linear asymptote-র) ধারণা এবং তার সমীকরণ গঠন করতে পারবেন।

8.3 স্পর্শক ও অভিলম্ব (Tangent and normal) ঃ সংজ্ঞা ও সমীকরণ



চিত্র 8.3.1

স্পর্শকের সংজ্ঞা ঃ

একটি বক্ররেখার উপর P যে কোন একটি বিন্দু। উক্ত বিন্দুর নিকটবর্তী এবং বক্ররেখার উপর অপর আর একটি বিন্দু Q (P-র যে কোন পাশে Q থাকতে পারে)। এখন Q বিন্দুটি বক্ররেখা বরাবর P -র দিকে অগ্রসর হলে সরলরেখা PQ -র অবস্থান পরিবর্তিত হবে (চিত্রে PQ_1 এমন একটি অবস্থান) এবং যখন $Q \to P$ লিমিট নেওয়া হবে তখন PQ সরলরেখার সীমাস্থ অবস্থান (limiting position) হবে PT। PT বক্ররেখাকে কেবলমাত্র একটি বিন্দু P তে স্পর্শ করে। PT হলো P বিন্দুতে বক্ররেখাটির স্পর্শক।

স্পর্শকের সমীকরণ ঃ বক্ররেখার উপর যে কোন বিন্দু P -র কার্তিয় স্থানাঙ্ক (x,y) এবং P বিন্দুতে স্পর্শক PT x -অক্ষের ধনাত্মক দিকে ψ কোণ উৎপন্ন করছে, অর্থাৎ স্পর্শকটির প্রবণতা $\tan\psi$ । অতএব PT -র সমীকরণ—

$$Y-y = \tan\psi\,(X-x), \qquad (8.3.1)$$

(x, y) হচ্ছে স্পর্শকের উপর যে কোন একটি বিন্দু।

অভিলম্বের সংজ্ঞা ঃ একটি বক্ররেখার P বিন্দুতে PT স্পর্শক। P- বিন্দুগামী এবং PT -র উপর লম্বভাবে অবস্থিত PN সরলরেখাকে উক্ত বক্ররেখার P বিন্দুতে অভিলম্ব বলে (চিত্রে PN অভিলম্ব)।

অভিলম্বের সমীকরণ ঃ P -র স্থানাঙ্ক (x, y)। স্পর্শক PT-র প্রবণতা $\tan\psi$ হলে অভিলম্ব PN -র প্রবণতা হবে $-\dfrac{1}{\tan\psi}$ (যেহেতু $PN \perp PT$). অতএব PN -র সমীকরণ—

$$Y-y = -\frac{1}{\tan\psi}\,(X-x), \qquad 8.3.2$$

(x, y) হচ্ছে অভিলম্বের উপর যে কোন একটি বিন্দু (চিত্র দেখুন)।

মন্তব্য ঃ স্পর্শকের ধনাত্মক দিক্ ও অভিলম্বের ধনাত্মক দিক্

বক্ররেখার উপর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু A হতে P বিন্দুর (চিত্র দেখুন) চাপদৈর্ঘ্য $\overset{\frown}{AB} = s$ ধরা হলো। এখন যেদিকে s -র মান বৃদ্ধিপাবে সেদিকেই P- বিন্দুতে স্পর্শক PT -র ধনাত্মক দিক্ ধরা হবে। চিত্রে ψ হচ্ছে স্পর্শকের ধনাত্মক দিক্ এবং x– অক্ষের ধনাত্মক দিকের অন্তর্গত কোণ।

অভিলম্বের ধনাত্মক দিক্ x– অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গে $\psi + \dfrac{\pi}{2}$ কোণে নত। চিত্রে PN অভিলম্বটি ধনাত্মক দিকেই আছে।

8.4 বক্ররেখার সমীকরণ ঃ

A) কার্তিয় স্থানাঙ্কে ঃ আমাদের আলোচনা প্রধানতঃ বিভিন্ন একতলীয় বক্ররেখা (Plane Curve) নিয়ে। মনে করি বক্ররেখাটি যে তলে অবস্থিত সে তলটি xy -তল। উক্ত তলে একটি বক্ররেখা হচ্ছে কোন নির্দিষ্ট শর্ত মেনে চলমান একটি বিন্দুর সঞ্চারপথ। বৃত্তের ক্ষেত্রে এই শর্ত হচ্ছে চলমান বিন্দুটি উক্ত তলের একটি স্থির নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে সর্বদা সমদূরে থাকবে। অতএব চলমান বিন্দুটির যে কোন একটি অবস্থানে x- স্থানাঙ্ক ও y- স্থানাঙ্ক যে সমীকরণ দ্বারা সম্বন্ধযুক্ত হবে সেই সমীকরণটি হবে বক্ররেখাটির সমীকরণ (যেমন বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2=a^2$, কেন্দ্র $\equiv$ (0,0)। কার্তিয় স্থানাঙ্কে বক্ররেখার সমীকরণ নিম্নলিখিত আকারে প্রকাশ করা হয় ঃ

a) **ইমপ্লিসিট আকার** (implicit form)

$$F(x, y) = 0 \qquad 8.4.1$$

উদাহরণ $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (Astroid, অ্যাস্ট্রয়েড)

b) **এক্সপ্লিসিট আকার** (explicit form)

$$y = f(x) \qquad 8.4.2$$

উদাহরণ $y = x^2$ (অধিবৃত্ত Parabola)

c) **প্যারামেট্রিক আকার** (Parametric form)

$$x = \varphi(t),\ y = \Psi(t)$$

(t হচ্ছে প্যারামিটার)

উদাহরণ $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$ (উপবৃত্ত ellipse) 8.4.3

B) মেরু স্থানাঙ্কে ঃ (in polar coordinates)

বক্ররেখার উপর যে কোন বিন্দুর মেরু স্থানাঙ্ক (r, θ) হলে বক্ররেখার সমীকরণ সাধারণভাবে

$$r = f(\theta) \qquad 8.4.4$$

আকারে প্রকাশ করা হয়।

C) **অন্যান্য স্থানাঙ্কে ঃ**

a) **পেডাল সমীকরণ ঃ** $p = f(r)$ 8.4.5

(Pedal equation) (08.15 দেখুন)

b) **ইন্ট্রিনসিক সমীকরণ ঃ** $s = f(\Psi)$ 8.4.6

(Intrinsic equation) (10·5A দেখুন)

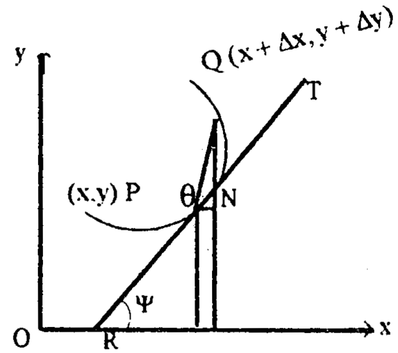
c) **স্পর্শকীয় মেরু সমীকরণ ঃ** $p = f(\Psi)$ 8.4.7

(Tangential polar equation) (10·5 G দেখুন)

(p হচ্ছে মূলবিন্দু থেকে স্পর্শকের লম্বদূরত্ব)

আপনারা লক্ষ্য করেছেন স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক ও স্পর্শকের প্রবণতা জানা থাকলেই আমরা স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ লিখতে পারব। বিভিন্ন আকারে বক্ররেখার সমীকরণের ক্ষেত্রে (প্রধানতঃ কার্তিয় ও মেরুস্থানাঙ্কে) স্পর্শক-প্রবণতা নির্ণয়ের উপায়টি আমরা এবার আলোচনা করব।

8.5 স্পর্শকের প্রবণতা নির্ণয়



চিত্র 8.5.1

A) **কার্তিয় সমীকরণের ক্ষেত্রে :** P (x, y) বক্ররেখার উপর যে কোন একটি বিন্দু এবং উক্ত বিন্দুতে স্পর্শক RPT -র ধনাত্মক দিক্ x -অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গে Ψ কোণে নত। অতএব স্পর্শকটির প্রবণতা tanΨ. Q (x+ Δ x, y + Δ y) উক্ত বক্ররেখার উপর P -র নিকটবর্তী অপর এক বিন্দু এবং PQ সরলরেখাংশ (বা PQ জ্যাটি) x -অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গে θ কোণ উৎপন্ন করেছে।

চিত্রানুসারে

$\tan\theta = \frac{QN}{PN} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

এখন বক্ররেখা বরাবর Q → P লিমিট নিয়ে PQ সরলরেখাটি PT স্পর্শকে রূপান্তরিত হবে। অতএব

$$\tan\psi \text{ (স্পর্শকটির প্রবণতা)} = \underset{Q\to P}{\text{Lt}} \tan\theta = \underset{\Delta x\to 0}{\text{Lt}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} \qquad (8.5.1)$$

সুতরাং বক্ররেখার কোন বিন্দুতে স্পর্শকের প্রবণতা হচ্ছে উক্ত বিন্দুতে অবকল সহগ বা অবকলন গুণাঙ্ক (differential coefficient or derivative) যা নির্ধারিত হবে বক্ররেখার সমীকরণ দ্বারা।

আমরা জানি —

a) বক্ররেখার সমীকরণ যখন ইমপ্লিসিট আকারে (8.4.1) থাকে তখন

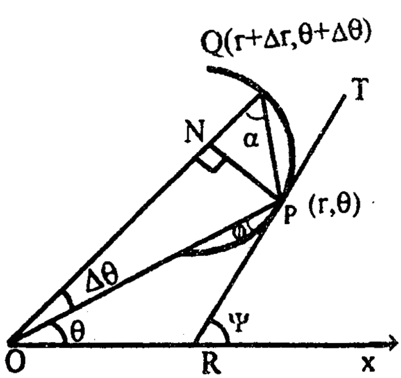
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}, F_x \equiv \frac{\partial F}{\partial x}, F_y \equiv \frac{\partial F}{\partial y} (\neq 0) \qquad (8.5.2)$$

b) এক্সপ্লিসিট আকারে বক্ররেখার সমীকরণের ক্ষেত্র (8.4.2) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(f(x))$. (8.5.3)

c) প্যারামেট্রিক আকারের ক্ষেত্র $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dt}\Psi(t)}{\frac{d}{dt}\phi(t)}$ (8.5.4)

$(8.L_1.3)$

B) **মেরু স্থানাঙ্কে বক্ররেখার সমীকরণের ক্ষেত্রে :**



চিত্র 8.5.2

চিত্রে P (r, θ) এবং Q (r + Δr, θ + Δθ) বক্ররেখার উপর কাছাকাছি দুটি বিন্দু। O কে মেরু এবং Ox কে প্রাথমিক রেখা (initial line) ধরে P ও Q বিন্দুদ্বয়ের ক্ষেত্রে

$OP = r, OQ = r + \Delta r, \angle POx = \theta \;\; \angle QOx = \theta + \Delta\theta$।

$PN \perp OQ$ আঁকা হলো। বক্ররেখার PQ ছেদক সরলরেখাটির সীমান্ত অবস্থানে (limiting position এ) PT স্পর্শকে রূপান্তরিত হবে এবং OQ রূপান্তরিত হবে OP তে যখন Q → P লিমিট নেওয়া হবে, অবশ্যই বক্ররেখা বরাবর Q বিন্দুটি P -র দিকে অগ্রসর হবে।

ধরা যাক্ $\angle NQP=\alpha$ এবং $OPR=\phi$ । অতএব $\alpha \to \phi$ যখন $Q \to P$ হবে। চিত্রানুসারে

$$\tan\alpha = \frac{PN}{NQ} = \frac{r\sin\Delta\theta}{r+\Delta r - r\cos\Delta\theta}$$

$$= \frac{r\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}}{r\frac{(1-\cos\Delta\theta)}{\Delta\theta}+\frac{\Delta r}{\Delta\theta}} = \frac{r\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}}{r\frac{\sin^2\frac{\Delta\theta}{2}}{\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)^2}\frac{\Delta\theta}{2}+\frac{\Delta r}{\Delta\theta}}$$

এখন $Q \to P$ (বক্ররেখা বরাবর) লিমিট নিলে আমরা পাই

$$\underset{Q\to P}{Lt}\tan\alpha = \underset{\Delta\theta\to 0}{Lt}\frac{r\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}}{r\frac{\Delta\theta}{2}\left(\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}}\right)^2+\frac{\Delta r}{\Delta\theta}}$$

($Q \to P$ লিমিটে $\Delta\theta \to 0$ হচ্ছে) (8.5.5)

$$\text{বা, } \tan\phi = \frac{rd\theta}{dr}$$

$$\left(\text{যেহেতু } \underset{\Delta\theta\to 0}{Lt}\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}=1\right)$$

আপনারা লক্ষ্য করুন ϕ হচ্ছে P বিন্দুতে উৎপন্ন স্পর্শক PT এবং P বিন্দুটির মেরুদূরত্বের বা দূরকের (radius vector) অন্তর্গত কোণ। ϕ নির্ণয়ের সূত্রটি (8.5.5) আমাদের অনেক ক্ষেত্রেই প্রয়োজন হবে।

পুনরায় চিত্রানুসারে

$$\tan\Psi = \text{স্পর্শকের প্রবণতা} = \tan(\theta+\phi)$$

$$= \frac{\tan\theta+\tan\phi}{1-\tan\theta\tan\phi} = \frac{\tan\theta + r\frac{d\theta}{dr}}{1-\tan\theta\, r\frac{d\theta}{dr}} \qquad (8.5.6)$$

এবং $\frac{dr}{d\theta}$ -র মান মেরুস্থানাঙ্কে বক্ররেখার সমীকরণ (8.4.4.) থেকে সহজেই নির্ণয় করা যাবে।

8.6 উদাহরণ

a) $y^2 = 4a\,(x+a\sin \frac{x}{a})$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল সেই বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান : বক্ররেখা $y^2 = 4a(x + a\sin\frac{x}{a})$ (8.6.1)

(8.6.1) কে x− সাপেক্ষেঅবকলন দ্বারা আমরা পাই

$$2y\frac{dy}{dx} = 4a\left(1+\cos\frac{x}{a}\right) = 8a\cos^2\frac{x}{2a} \tag{8.6.2}$$

x -অক্ষের সমান্তরাল স্পর্শকের ক্ষেত্রে স্পর্শকের প্রবণতা $\frac{dy}{dx} = 0$, অতএব $\cos^2\frac{x}{2a} = 0$

বা, $\frac{x}{2a} = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ ....

বা $x = +\pi a, +3\pi a, +5\pi a$ .... (ঋণাত্মক মানগুলি হবে না কারণ, সেক্ষেত্রে $y^2<0$ হচ্ছে)

(8.6.1) থেকে আনুসাঙ্গিক

$$y = \pm\sqrt{4\pi a^2}, \pm\sqrt{12\pi a^2}, \pm\sqrt{20\pi a^2} \text{ ....}$$

অতএব নির্ণেয় বিন্দুগুলি $\left(\pi a, \pm\sqrt{4\pi a^2}\right), \left(3\pi a, \pm\sqrt{12\pi a^2}\right)$,................

মন্তব্য ঃ লক্ষ্য করুন এই বিন্দুগুলি $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত।

(b) $y^2(a^2-x^2) = a^2x^2$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে y -স্থানাঙ্ক $=\frac{a}{\sqrt{3}}$ সে বিন্দুগুলিতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান ঃ বক্ররেখার সমীকরণ $y^2(a^2-x^2) = a^2x^2$ (8.6.3)

এখন (8.6.3) তে $y=\frac{a}{\sqrt{3}}$ বসিয়ে পাওয়া যায় $x = \pm\frac{a}{2}$ অতএব বিন্দু দুটি যথাক্রমে $\left(a/2,\ a/\sqrt{3}\right)$ এবং $\left(-a/2, a/\sqrt{3}\right)$। পুনরায় (8.6.3) থেকে x-সাপেক্ষে অবকলন দ্বারা আমরা পাই

$$\frac{dy}{dx} = \left(a^2x + xy^2\right)/\,y\left(a^2 - x^2\right)\text{ ।}$$

অতএব $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\left(a/2,\ a/\sqrt{3}\right)} = \frac{8\sqrt{3}}{9}$ এবং $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\left(-a/2,\ a/\sqrt{3}\right)} = \frac{-8\sqrt{3}}{9}$।

অতএব $\left(a/2,\ a/\sqrt{3}\right)$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ যথাক্রমে

$$y - a/\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}}{9}(x - a/2)$$

$$y - a/\sqrt{3} = -\frac{9}{8\sqrt{3}}(x - a/2)\text{ ।}$$

অনুরূপে আপনারা $\left(-a/2, a/\sqrt{3}\right)$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ লিখতে পারবেন।

(c) সমানকোণী স্পাইরাল (equi-angular Spiral)

$r = ae^{\theta \cot \alpha}$ -র যে কোন বিন্দুতে স্পর্শক ও দূরকের (radius vector -র) অন্তর্গত কোণ দেখাতে হবে α.

সমাধান ঃ (8.5.5) এ স্পর্শক ও দূরকের অন্তর্গত কোণ ϕ নির্ণয়ের সূত্রটি হচ্ছে

$$\tan \phi = r \frac{d\theta}{dr}$$

বক্ররেখার সমীকরণ থেকে θ-সাপেক্ষে অবকলন দ্বারা

$$\frac{dr}{d\theta} = a \cot \alpha \, e^{\theta \cot \alpha} = r \cot \alpha$$

অতএব $\quad \tan\phi = r / r \cot \alpha \quad = \tan \alpha$

বা $\phi = \alpha$.

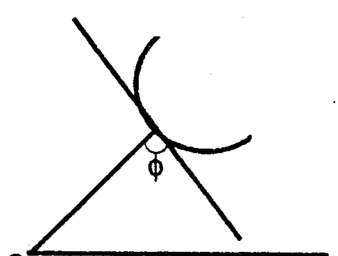
(d) কার্ডিঅয়েড (cardiod) $r = a(1 + \cos\theta)$ -র $\theta = \pi/2$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান ঃ বক্ররেখার সমীকরণ $r = a(1 + \cos\theta)$। (8.6.4) এই সমীকরণে $\theta = \pi/2$ বসিয়ে বিন্দুটির দূরক পাওয়া যায়, $r = a$ অতএব $(a, \pi/2)$ বিন্দুতে আমাদের স্পর্শক ও অভিলম্ব নির্ণয় করতে হবে।

মেরু স্থানাঙ্কে

$$u \equiv \frac{1}{r} = \frac{1}{a} \cos(\theta - \pi/2) + B \sin(\theta - \pi/2) \tag{8.6.5}$$

একটি সরলরেখা যা $(a, \pi/2)$ বিন্দুগামী [$(a, \pi/2)$ বিন্দু দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হচ্ছে]। ধরি এই সরলরেখাটি $(a, \pi/2)$ বিন্দুতে বক্ররেখার স্পর্শক। অতএব বক্ররেখা ও স্পর্শক এই উভয় ক্ষেত্রে উক্ত বিন্দুতে $\tan \phi$ -র মান সমান হবে (চিত্রে বিষয়টি লক্ষ্য করুন, যে কোন বক্ররেখার ক্ষেত্রে এটি দেখানো হয়েছে)।



চিত্র 8.6.1

এখন যেহেতু $\tan \phi = r \frac{d\theta}{d\theta}$

$$= -u \Big/ \frac{du}{d\theta} \quad \left(\because u = \frac{1}{r}\right),$$

সেহেতু উক্ত বিন্দুতে $\frac{du}{d\theta}$ -র মানদ্বয়, বক্ররেখা এবং স্পর্শকের ক্ষেত্রে পরস্পর সমান হবে। অতএব (8.6.4) এবং (8.6.5) থেকে আমরা পাই $\left(u^2 a \sin\theta\right)_{(a,\,\pi/2)} = \left[-\frac{1}{a}\sin(\theta-\pi/2) + B\cos(\theta-\pi/2)\right]_{(a,\,\pi/2)}$

বা $\frac{1}{a} = B$ [এখানে $r = a,\ \theta = \pi/2$]

সুতরাং নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ হচ্ছে

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a}\sin\theta - \frac{1}{a}\cos\theta$$

$$\text{বা } \frac{a}{r} = \sin\theta - \cos\theta$$

যেহেতু অভিলম্ব স্পর্শকের উপর লম্ব, অভিলম্বের সমীকরণ ধরা হলো

$$\frac{A}{r} = \sin(\theta + \pi/2) - \cos(\theta + \pi/2)$$

এই সরলরেখাটি অবশ্যই $(a, \pi/2)$ বিন্দুগামী হবে, অতএব

$$\frac{A}{a} = \sin(\pi/2 + \pi/2) - \cos(\pi/2 + \pi/2) = +1$$

বা $A = +a$

সুতরাং নির্ণেয় অভিলম্বের সমীকরণ

$$\frac{a}{r} = \cos\theta + \sin\theta$$

$$\text{বা, } \frac{a}{r} = \sin\theta + \cos\theta$$

মন্তব্য ঃ (8.5.6) অনুসারে স্পর্শকের প্রবণতা বের করে কার্তিয় স্থানাঙ্কে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করে মেরু স্থানাঙ্কে রূপান্তর করলে আমরা স্পর্শক ও অভিলম্বের উপরে লেখা সমীকরণ দুটিই পাব।

8.7 একটি বিশেষ ক্ষেত্র ঃ মূলবিন্দুগামী র‍্যাশনাল বীজগাণিতিক বক্ররেখার (rational algebraic curve -র) মূলবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় ঃ

$$\begin{aligned}&\left(a_{11}x + a_{12}y\right) + \left(a_{21}x^2 + a_{22}xy + a_{23}y^2\right)\\&+ \ldots + \left(a_{n1}x^n + a_{n2}x^{n-1}y + \ldots + a_{nn}y^n\right) = 0\end{aligned} \tag{8.7.1}$$

সমীকরণটি xy- তলে যে বক্ররেখাটিকে প্রকাশ করে তাকেই র‍্যাশনাল বীজগাণিতিক বক্ররেখা বলে। এই সমীকরণটিতে x বা y বিবর্জিত কোন ধ্রুবক পদ না থাকায় বক্ররেখাটি (0,0) মূলবিন্দুগামী। (0,0) বিন্দুতে

স্পর্শকের সমীকরণ $Y-0 = m\ (X - 0)$, (8.7.2)

(x, y) হচ্ছে স্পর্শকটির উপর যে কোন একটি বিন্দু।

আমাদের উদ্দেশ্য m (স্পর্শকের প্রবণতা) নির্ণয় করা। O (0, 0) বিন্দুর নিকটবর্তী এবং বক্ররেখার উপর যে কোন একটি বিন্দু P (x, y) নিয়ে জ্যা OP-র প্রবণতা হয় $\frac{y}{x}$। এখন যদি বক্ররেখা বরাবর $P \to O$ লিমিট বা $(x, y) \to (0, 0)$ লিমিট নেওয়া হয় তবে OP -র সীমান্ত অবস্থানই হবে 0 বিন্দুতে স্পর্শক। অতএব

$$m = \underset{(x,y)\to(0,0)}{\mathrm{Lt}} \frac{y}{x} \tag{8.7.3}$$

স্পর্শকটি y- অক্ষ না হলে, কেবলমাত্র সেক্ষেত্রেই উক্ত সূত্রানুসারে আমরা m- র নির্দ্দিষ্ট সসীম মান পাব। সুতরাং ধরি স্পর্শকটি y -অক্ষ নয় এবং $a_{12} \neq 0$ এখন (8.7.1) কে x দ্বারা ভাগ করে পাওয়া যায়

$$\left(a_{11} + a_{12}\frac{y}{x}\right) + \left(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}\frac{y}{x}y\right)$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots+\left(a_{n1}x^{n-1} + a_{n2}\,x^{n-1}\frac{y}{x} + \ldots.. + a_{nn}y^{n-1}\frac{y}{x}\right) = 0\ ।$$

এই সমীকরণে $(x,y) \to (0, 0)$ লিমিট নিলে আমরা পাই

$$a_{11} + a_{12}m + \left(a_{12}o + a_{22}o + a_{23}mo\right) + \left(a_{n1}o + a_{n2}om + \ldots..+ a_{nn}om\right) = 0$$

বা $a_{11} + a_{12}m = 0$

বা $m = -\frac{a_{11}}{a_{12}}$ । (8.7.4)

অতএব (o,o) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণটি হলো

$$Y = -\frac{a_{11}}{a_{12}}X\ ।$$

(X, Y) -র স্থানে (x,y) লিখে সমীকরণটি দাঁড়ায়

$$a_{11}x + a_{12}y = 0 \tag{8.7.5}$$

লক্ষ্য করুন বক্ররেখার সমীকরণ (8.7.1) সর্বনিম্ন ঘাতবিশিষ্ট পদসমষ্টি $a_{11}x + a_{12}y$ কে শূন্যমান দানে এই সমীকরণটি (8.7.5) পাওয়া যাচ্ছে।

$a_{12} = 0$ হলে (8.7.4) থেকে দেখা যাচ্ছে $a_{11} = 0$ এবং সেক্ষেত্রে (8.7.1) সমীকরণটি হয় নিম্নলিখিত আকারের ঃ

$$\left(a_{21}x^2 + a_{22}xy + a_{23}y^2\right) + \left(a_{31}x^3 + a_{32}x^2y + a_{33}xy^2 + a_{34}y^3\right) + \ldots\ldots = 0 \qquad (8.7.6)$$

এক্ষেত্রে স্পর্শকের প্রবণতা m নির্ণয়ের জন্য (8.7.6) কে x^2 দ্বারা ভাগ করে $(x,y) \to (o,o)$ লিমিট নিলে আমরা পাই

$$a_{21} + a_{22}m + a_{23}m^2 = 0 \qquad (8.7.7)$$

ধরে নিচ্ছে m -র দ্বিঘাত সমীকরণটি m -র দুটি বাস্তবমান যথা m_1 এবং m_2 , উৎপন্ন করে। অতএব এক্ষেত্রে (o,o) বিন্দুতে আমরা বক্ররেখার দুটি স্পর্শক পাচ্ছি। এটি সম্ভব হচ্ছে এই কারণে যে বক্ররেখাটির (o,o) বিন্দুগামী দুটি শাখা (branch) আছে বুঝতে হবে। স্পর্শকদুটির মিলিত সমীকরণ

$$(Y-m_1X)\,(Y-m_2X) = 0$$

বা $Y^2 - (m_1 + m_2)\,XY + m_1m_2X^2 = 0$

বা $Y^2 + \dfrac{a_{22}}{a_{23}}XY + \dfrac{a_{21}}{a_{13}}X^2 = 0$

বা $a_{21}X^2 + a_{22}XY + a_{23}Y^2 = 0$

(X,Y) -র স্থানে (x,y) লিখে সমীকরণটি হলো

$$a_{21}x^2+a_{22}xy+a_{23}y^2=0 \qquad (8.7.8)$$

এক্ষেত্রেও লক্ষ্য করুন (8.7.6) সমীকরণে (অর্থাৎ বক্ররেখার সমীকরণে) সর্বনিম্নঘাতবিশিষ্ট পদসমষ্টিকে (অর্থাৎ $a_{21}x^2+a_{22}xy+a_{23}y^2$ কে শূন্যমান দানে যে সমীকরণটি উৎপন্ন হচ্ছে তাই হচ্ছে মূলবিন্দুতে স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ।

(8.7.7) সমীকরণে অবাস্তব বা কাল্পনিক বীজ থাকলে (o,o) বিন্দুতে স্পর্শকের বাস্তব অস্তিত্ব নেই বুঝতে হবে।

পরবর্তী অন্যান্য ক্ষেত্রে (o,o) বিন্দুতে স্পর্শক নির্ণয়ের জন্য উপরে উল্লেখিত নিয়মই ঘোষিত হবে।

y- অক্ষ (o,o) বিন্দুতে স্পর্শক হলে, x- অক্ষকে y- অক্ষ এবং y- অক্ষকে x- অক্ষ ধরে একই পদ্ধতি অনুসরণক্রমে দেখা যাবে যে স্পর্শক-সমীকরণ একই নিয়ম দ্বারা গঠিত হবে।

8.8 উদাহরণ ঃ

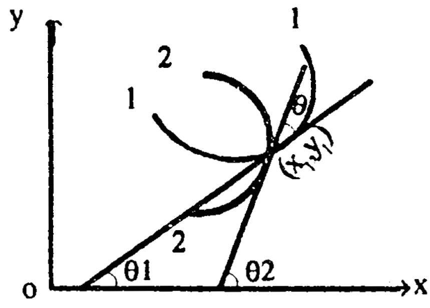
$x^3 + y^3 - 3axy = 0$ বক্ররেখাটি (0,0) বিন্দুগামী। এই বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ বের করতে হবে।

সমাধান ঃ

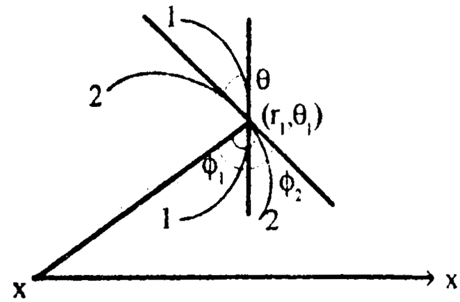
বক্ররেখার সমীকরণ $x^3 + y^3 - 3axy = 0.$ (8.8.1)

এই সমীকরণে সর্বনিম্ন ঘাতবিশিষ্ট পদটি হচ্ছে 3axy । অতএব (0,0) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ xy = 0, অর্থাৎ x -অক্ষ (y = 0) এবং y- অক্ষ (x = 0) উভয়েই মূলবিন্দুতে বক্ররেখাটির স্পর্শক।

8.9 দুটি বক্ররেখার ছেদবিন্দুতে উৎপন্ন কোণের মান নির্ণয় ঃ



চিত্র 8.9.1



চিত্র 8.9.2

ধরাযাক্ দুটি বক্ররেখা (চিত্রে (1) এবং (2)) (x_1, y_1) বিন্দুতে (অথবা মেরুস্থানাঙ্কে (r_1, θ_1) বিন্দুতে) ছেদ করে। ছেদ বিন্দুতে 1 ও 2 -র স্পর্শকদ্বটির অন্তর্গত কোণই হচ্ছে (1) এবং (2)-এর (x_1, y_1) (বা (r_1, θ_1)) বিন্দুতে উৎপন্ন কোণ। উৎপন্ন কোণটি θ হলে চিত্রানুসারে

কার্তিয় স্থানাঙ্কে ঃ

$$\tan\theta = \tan(\theta_2 - \theta_1)$$

$$= \frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1 + \tan\theta_2 \tan\theta_1} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}, \qquad (8.9.1)$$

m_2 এবং m_1 যথাক্রমে (2) এবং (1) -র ছেদবিন্দুতে স্পর্শকদ্বয়ের প্রবণতা। অবকলন গুণাঙ্ক দ্বারা m_2 এবং m_1 নির্ণয় করতে হবে (8.5 দেখুন)।

মেরু স্থানাঙ্কে ঃ $\tan\theta = \tan(\phi_2 - \phi_1)$

$$= \frac{\tan\phi_2 - \tan\phi_1}{1 + \tan\phi_2 \tan\phi_1}, \qquad (8.9.2)$$

ϕ_2 এবং ϕ_1 যথাক্রমে (2) এবং (1) -র ছেদবিন্দুতে দূরক (radius vector) এবং স্পর্শকের অন্তর্গত কোণদ্বয়। (8.5.5) সূত্রানুসারে $\tan\phi_2$ এবং $\tan\phi_1$ বার করতে হবে।

$\tan\theta$ নির্ণয়ের পর আমরা সহজেই কোণ θ নির্ণয় করতে পারব।

মন্তব্য ঃ বক্ররেখা দুটি পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করবে তার শর্ত $m_2 m_1 = -1$ (কার্তিয় স্থানাঙ্কে)

বা $\tan\phi_1 \tan\phi_2 = -1$ (মেরু স্থানাঙ্কে)

8.10 উদাহরণ

a) $y = \sin x$ এবং $y = \cos x$ বক্ররেখা দ্বয়ের যে কোন একটি ছেদবিন্দুতে অন্তর্গত কোণের মান নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান : বক্ররেখাদ্বয় $y = \sin x$, $y = \cos x$

ছেদবিন্দুর ক্ষেত্রে আমরা পাই $\sin x = \cos x$

অতএব $x = \dfrac{\pi}{4}$ হচ্ছে একটি ছেদবিন্দু।

এই বিন্দুতে $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. এখন $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ এই ছেদবিন্দুতে উভয় বক্ররেখার স্পর্শকের প্রবণতা বের করতে হবে।

$y = \sin x$ -র ক্ষেত্রে $\dfrac{dy}{dx} = \cos x$ এবং $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{\left(\pi/4, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (m_2 ধরি)

$y = \cos x$ -র ক্ষেত্রে $\dfrac{dy}{dx} = -\sin x$ এবং $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{\left(\pi/4, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (m_1 ধরি)

এখন (8.9.1) সূত্রানুসারে

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{\frac{2}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}}$$

$$= 2\sqrt{2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(2\sqrt{2}\right)$$

b) $r^n = a^n \cos n\theta$ এবং $r^n = b^n \sin n\theta$ স্পাইরালদুটি পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করছে দেখাতে হবে।

সমাধান : $r^n = a^n \cos n\theta$ $\qquad$ $r^n = b^n \sin n\theta$

ধরি এদের ছেদবিন্দু (r_1, θ_1).

অতএব $r_1^{\,n} = a^n \cos n\theta_1$ এবং $r_1^{\,n} = b^n \sin n\theta_1$

প্রথম বক্ররেখার সমীকরণটি হতে আমরা পাই

$$n \log r = n \log a + \log \cos n\theta$$

এখন θ সাপেক্ষে অবকলন দ্বারা পাওয়া যায়

$$\frac{n}{r}\frac{dr}{d\theta} = -n \tan n\theta$$

অতএব প্রথম বক্ররেখার ক্ষেত্রে (r_1, θ_1) বিন্দুতে দূরক ও স্পর্শকের অন্তর্গত কোণ ϕ_1 হলে আমরা পাই

$$\tan\phi_1 = \left(r\frac{d\theta}{dr}\right)_{(r_1,\theta_1)} = -\cot n\theta_1$$

অনুরূপে দ্বিতীয় বক্ররেখার ক্ষেত্রে (r_1, θ_1) বিন্দুতে দূরক ও স্পর্শকের অন্তর্গত কোণ ϕ_2 হলে আমরা পাই

$$\tan\phi_2 = \tan n\theta_1$$

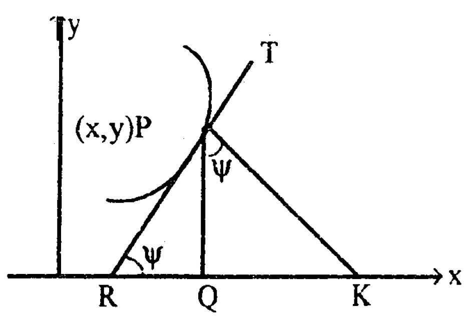
অতএব $\tan\phi_1 \tan\phi_2 = -\cot n\theta_1 \tan n\theta_1 = -1$,

অর্থাৎ পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করার শর্তটি সিদ্ধ হচ্ছে।

(8.9 -র মন্তব্য দেখুন)

8.11 স্পর্শক দৈর্ঘ্য, অভিলম্ব দৈর্ঘ্য, উপ-স্পর্শক (Sub-tangent) এবং উপ-অভিলম্ব (Sub-normal) নির্ণয় ঃ

A) কার্তিয় স্থানাঙ্কে ঃ



চিত্র 8.11.1

বক্ররেখার $P(x, y)$ বিন্দুতে স্পর্শক RPT এবং অভিলম্ব PK যথাক্রমে x অক্ষকে R এবং K বিন্দুতে ছেদ করে। $PQ \perp x$-অক্ষ। এখন RP, PK, RQ এবং KQ রেখাগুলিকে যথাক্রমে স্পর্শকদৈর্ঘ্য, অভিলম্ব দৈর্ঘ্য, উপস্পর্শক এবং উপাভিলম্ব বলে।

চিত্রানুসারে

$$PR = \text{স্পর্শকদৈর্ঘ্য} = y\operatorname{cosec}\psi = y\sqrt{1+\cot^2\psi}$$

$$= y\sqrt{1+\frac{1}{y_1^2}} = \frac{y}{y_1}\sqrt{1+y_1{}^2}, \tag{8.11.1}$$

$$\tan\Psi = \text{স্পর্শকের প্রবণতা} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x,y)} = y_1 \text{ (ধরা হয়েছে)}$$

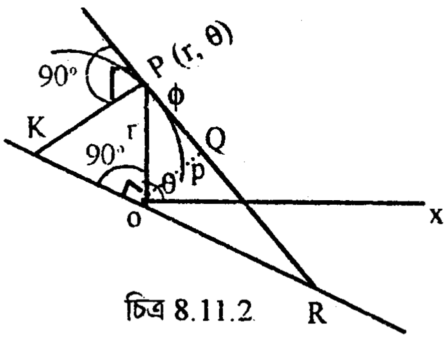
$$PK = \text{অভিলম্ব দৈর্ঘ্য} = y\sec\Psi = y\sqrt{1+y_1^2} \tag{8.11.2}$$

$$RQ = \text{উপ-স্পর্শক} = y\cot\Psi = \frac{y}{y_1} \tag{8.11.3}$$

$$KQ = \text{উপাভিলম্ব} = y\tan\Psi = yy_1, \tag{8.11.4}$$

এখানে $y_1 \equiv \left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{(x,y)}$

B) মেরু স্থানাঙ্কেঃ



চিত্র 8.11.2

বক্ররেখার উপর P (r, θ) একটি বিন্দু। মেরু স্থানাঙ্কে O হচ্ছে মূলবিন্দু এবং 0x হচ্ছে প্রাথমিক রেখা। অতএব OP = r ∠POx = θ, O বিন্দুগামী এবং OP-র উপর লম্বভাবে অবস্থিত সরলরেখাকে P বিন্দুতে স্পর্শক এবং অভিলম্ব যথাক্রমে R এবং K বিন্দুতে ছেদ করেছে। PR, PK, RO এবং KO যথাক্রমে স্পর্শক দৈর্ঘ্য, অভিলম্ব দৈর্ঘ্য, উপ-স্পর্শক এবং উপাভিলম্ব বলে।

চিত্রানুসারে

$$PR = \text{স্পর্শক দৈর্ঘ্য} = r\sec\phi = r\sqrt{1+r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2} \quad (8.11.5)$$

$$PK = \text{অভিলম্ব দৈর্ঘ্য} = r\operatorname{cosec}\phi = \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} \quad (8.11.6)$$

$$RO = \text{উপ-স্পর্শক} = r\tan\phi = r^2\frac{d\theta}{dr} \quad (8.11.7)$$

$$KO = \text{উপাভিলম্ব} = r\cot\phi = \frac{dr}{d\theta}, \quad (8.11.8)$$

কারণ (8.5.5) অনুসারে $\tan\phi = r\dfrac{d\theta}{dr}$

আনুসাঙ্গিক একটি সূত্র ঃ মূলবিন্দু হতে যে কোন বিন্দুতে স্পর্শকের লম্ব-দূরত্ব

(8.11.2) চিত্রানুসারে

$$p = \text{মূলবিন্দু O হতে স্পর্শক PR -র লম্বদূরত্ব} = OQ = r\sin\phi \quad (8.11.9)$$

অতএব
$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2}\operatorname{cosec}^2\phi = \frac{1}{r^2}\left(1+\frac{1}{\tan^2\phi}\right)$$
$$= \frac{1}{r^2}\left(1+\frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right)$$
$$= \frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \text{।} \quad (8.11.10)$$

$r = \dfrac{1}{u}$ ধরে, $\dfrac{dr}{d\theta} = -\dfrac{1}{u^2}\dfrac{du}{d\theta}$ এবং

$$\frac{1}{p^2} = u^2+\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 \text{।} \quad (8.11.11)$$

8.12 উদাহরণ ঃ

যে কোন বক্ররেখার ক্ষেত্রে যে কোন বিন্দুতে প্রমাণিত হয়

$$\left(\frac{\text{উপস্পর্শক}}{\text{উপাভিলম্ব}}\right)=\left(\frac{\text{স্পর্শক-দৈর্ঘ্য}}{\text{অভিলম্ব-দৈর্ঘ্য}}\right)^2.$$

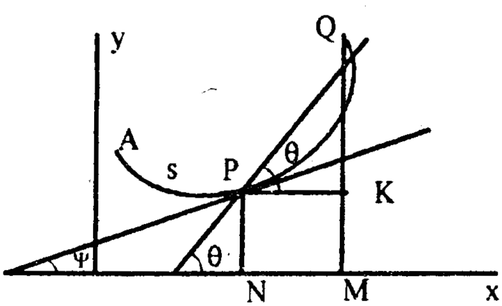
সমাধান ঃ বামপক্ষ = উপস্পর্শক / উপাভিলম্ব

$$=\frac{y}{y_1}/yy_1=\frac{1}{y_1^2} \qquad \text{(8.11.3 এবং 8.11.4 অনুসারে)}$$

ডানপক্ষ = (স্পর্শক দৈর্ঘ্য/অভিলম্ব-দৈর্ঘ্য)^2

$$=\left(\frac{y\sqrt{1+y_1^2}}{y_1}\Big/ y\sqrt{1+y_1^2}\right)^2=\frac{1}{y_1^2} \qquad \text{(8.11.1 এবং 8.11.2 অনুসারে)}$$

8.13. চাপ-দৈর্ঘ্যের (arc-length-র) অবকল সহগ (derivative) নির্ণয় ঃ



চিত্র 8.13.1

A) কার্তিয় স্থানাঙ্কে ঃ

বক্ররেখার উপর P (x,y) এবং Q (x+Δx, y+Δy) দুটি নিকটতম বিন্দু। A উক্ত বক্ররেখার উপর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। A থেকে P -র এবং Q -র চাপদূরত্ব $\widehat{AP}$ এবং $\widehat{AQ}$ -র মান যথাক্রমে ধরা হল s এবং s+Δs, অতএব $\widehat{PQ}=\Delta s$

s অবশ্যই y -র অপেক্ষক বা ফাংসন (function) এবং তার ফলে x -এরও ফাংসন। সুতরাং $\frac{ds}{dx}$ এবং $\frac{ds}{dy}$ -র মান নির্ণয় করা যাবে। এই অবকলন গুণাঙ্ক দুটি বের করার জন্য আমরা নিম্নলিখিত উপপদ্যটির সত্যতা স্বীকার করে নিচ্ছি ঃ

$$\underset{Q\to P}{Lt}\ \frac{\text{জ্যা } PQ}{\text{চাপ } PQ}=1$$

(বক্ররেখা বরাবর)

$$\text{বা, } \underset{Q\to P}{Lt}\ \frac{PQ}{\widehat{PQ}}=1 \qquad (8.13.1)$$

এখন চিত্রানুসারে

$$(PQ)^2 = (PK)^2 + (KQ)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \qquad (8.13.2)$$

বা, $\left(\dfrac{PQ}{\Delta s}\right)^2\left(\dfrac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2$

এবার $Q \to P$ (বক্ররেখা বরাবর) লিমিট নিলে (8.13.1) -র সাহায্যে আমরা পাই

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \qquad \text{বা, } \frac{ds}{dx} = \pm\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \qquad (8.13.3)$$

যদি s -র মান x -বৃদ্ধির সঙ্গে বৃদ্ধি পায় তবে $\dfrac{ds}{dx} > 0$ ধরবেন, নচেৎ $\dfrac{ds}{dx} < 0$ নেবেন। অনুরূপে (8.13.2) কে $(\Delta y)^2$ দ্বারা ভাগ করে একই ভাবে $Q \to P$ লিমিট নিয়ে আমরা পাব

$$\frac{ds}{dy} = \pm\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \qquad (8.13.4)$$

(8.13.3) এবং (8.13.4) থেকে লেখা যায়

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \qquad (8.13.5)$$

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \qquad ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy \qquad (8.13.6)$$

[এখানে $\dfrac{ds}{dx} > 0$ এবং $\dfrac{ds}{dy} > 0$ ধরা হয়েছে]

পুনরায় চিত্রানুসারে

$$\cos\theta = \frac{\Delta x}{PQ} = \frac{\Delta x}{\Delta s}\frac{\Delta s}{PQ}$$

বা, $$\operatorname*{Lt}_{Q\to P} \cos\theta = \operatorname*{Lt}_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta s} \operatorname*{Lt}_{Q\to P} \frac{\Delta s}{PQ}$$

$$\text{বা } \cos\Psi = \frac{dx}{ds} \qquad (8.13.7)$$

অনুরূপে

$$\sin\Psi = \frac{dy}{ds} \qquad \tan\Psi = \frac{dy}{dx} \qquad (8.13.8)$$

(B) **মেরু স্থানাঙ্কে ঃ** মেরুস্থানাঙ্ক ও কার্তিয় স্থানাঙ্কের সম্পর্ক হচ্ছে

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

অতএব (8.13.5) থেকে আমরা লিখতে পারি

$$\begin{aligned}(ds)^2 &= (dx)^2 + (dy)^2\\ &= (dr\cos\theta - r\sin\theta\, d\theta)^2 + (dr\sin\theta + r\cos\theta\, d\theta)^2\\ &= (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 \qquad (8.13.9)\end{aligned}$$

এবং তার ফলে আমরা পাচ্ছি

$$\frac{ds}{dr} = \sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}, \quad \frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} \qquad (8.13.10)$$

এখন সহজেই দেখা যাচ্ছে $\cos\phi = \dfrac{dr}{ds}, \sin\phi = \dfrac{rd\theta}{ds}$ (8.13.11)

[যেহেতু $\tan\phi = {}^{rd\theta}/_{dr}$]

8.14 উদাহরণ ঃ

a) বৃত্ত $x^2 + y^2 = a^2$ -র পরিধির মান $2\pi a$ দেখাতে হবে।

সমাধান ঃ বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 = a^2$, অতএব $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$ সূত্র (8.13.3) অনুসারে

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dx} &= \sqrt{1 + \left(\tfrac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\tfrac{x}{y}\right)^2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y}\\ &= \frac{a}{y}\left[\because x^2 + y^2 = a^2\right]\end{aligned}$$

অতএব বৃত্তের পরিধি $= 4\int_o^a ds = 4\int_o^a \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx =$

$$= 4a\left[\sin^{-1}\tfrac{x}{a}\right]_o^a = 4a\ \pi/_2 = 2\pi a \text{ ।}$$

b) $\frac{2a}{r} = 1 + \cos\theta$ অধিবৃত্তের ক্ষেত্রে প্রমাণ করা যায়

$$\frac{ds}{d\theta} = r^2 / p \text{ ।}$$

সমাধান ঃ (8.13.10) অনুসারে

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{r^2 + \frac{r_4 \sin^2\theta}{4a^2}} \quad \left[\text{কারণ অধিবৃত্তের সমীকরণ হতে } \frac{dr}{d\theta} = +\frac{r^2 \sin\theta}{2a}\right]$$

পুনরায় (8.5.5) অনুসারে

$$\tan\phi = r\frac{d\theta}{dr} = +\frac{2a}{r\sin\theta} \text{ এবং তার ফলে } \sin\phi = \frac{2a}{\sqrt{4a^2 + r^2\sin^2\theta}}$$

পুনরায় (8.11.9) অনুসারে

$$p^2 = r^2\sin^2\phi = r^2\left(\frac{4a^2}{4a^2 + r^2\sin^2\theta}\right)$$

$$\text{অতএব } \frac{r^2}{p} = \frac{r^2\sqrt{4a^2 + r^2\sin^2\theta}}{r\ 2a} = r\sqrt{1 + \frac{r^2\sin^2\theta}{4a^2}} = \frac{ds}{d\theta}.$$

8.15 বক্ররেখার পেডাল সমীকরণ (Pedal equation) ঃ

যে কোন বক্ররেখার উপর $P(r,\theta)$ যে কোন একটি বিন্দু, (r,θ) উক্ত বিন্দুর মেরু স্থানাঙ্ক। (8.11.9) এ আমরা মূলবিন্দু থেকে P বিন্দুতে স্পর্শকের উপর লম্বদূরত্বকে চিহ্নিত করেছি p দ্বারা। r হচ্ছে মূলবিন্দু হতে P -র দূরত্ব যাকে আমরা দূরক (radius vector) বলি। **বক্ররেখার সমীকরণ যখন এই p এবং r -র সাপেক্ষে প্রকাশ করা হয় তখন বক্ররেখার পেডাল সমীকরণ পাওয়া যায়, অবশ্যই মূল বিন্দুর সাপেক্ষে।** মূলবিন্দু ছাড়াও অন্য যে কোন বিন্দুর সাপেক্ষে পেডাল সমীকরণ নির্ণয় করা যায়, তখন p এবং r হচ্ছে ঐ বিন্দু থেকে উল্লেখিত দূরত্ব।

(8.11.10) আমরা পেয়েছি $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$ ।

বক্ররেখার সমীকরণ মেরু স্থানাঙ্কে ধরা হলো

$$r = f(\theta)$$

এই দুই সমীকরণ থেকে θ কে অপনয়ন দ্বারা মূলবিন্দু সাপেক্ষে পেডাল সমীকরণ পাওয়া যাবে।

অথবা, (8.11.9) এর সূত্র $p = r\sin\phi$ এবং (8.5.5) এর সূত্র $\tan\phi = r\frac{d\theta}{dr}$ এই দুই সমীকরণ থেকে ϕ এবং θ অপনয়ন দ্বারাও আমরা পেডাল সমীকরণ নির্ণয় করতে পারি (অবশ্যই মূল বিন্দু সাপেক্ষে)।

কার্তিয় স্থানাঙ্কে $P(x,y)$ বিন্দুতে

স্পর্শক $Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$ ।

এই সমীকরণ থেকে মূল বিন্দু হতে স্পর্শকের লম্ব দূরত্ব p নির্ণয় করতে হবে। আবার $r^2 = x^2 + y^2$. এখন p এবং r উভয়ে x ও y সাপেক্ষে প্রকাশিত থাকায়, x এবং y কে অপনয়ন দ্বারা মূলবিন্দু সাপেক্ষে (p, r) — সমীকরণ বা পেডাল সমীকরণ নির্ণয় করা যাবে।

8.16 উদাহরণ ঃ

a) $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের নাভি (focus) সাপেক্ষে পেডাল সমীকরণ হবে $p^2 = ar$.

সমাধান ঃ $y^2 = 4ax$ -র যে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক ধরা যায় $(at^2, 2at)$ উক্ত বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$y - 2at = \frac{1}{t}\left(x - at^2\right) \quad \left[\text{কারণ } \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2a}{2at}\right]$$

বা $\quad yt - x - at^2 = o.$

অতএব p = নাভি (a,o) হতে স্পর্শকটির লম্বদূরত্ব $= \left|\frac{-a - at^2}{\sqrt{1+t^2}}\right|$

$$= |a|\sqrt{1+t^2}$$

এবং r = নাভি (a, o) হতে $(at^2, 2at)$ -র দূরত্ব $= \sqrt{\left(at^2 - a\right)^2 + \left(2at - o\right)^2}$

$$= a\,(1+t^2)$$

এখন সহজেই দেখা যাচ্ছে $p^2 = ar$.

b) মূলবিন্দু সাপেক্ষে $r = ae^{\theta\cot\alpha}$ বক্ররেখার পেডাল সমীকরণ হবে $p = r\sin\alpha$ ।

সমাধান ঃ বক্ররেখাটি $r = ae^{\theta\cot\alpha}$

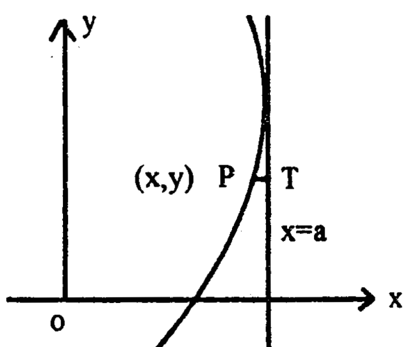
(8.5.5) সূত্রানুসারে $\tan\phi = r\frac{d\theta}{dr} = \tan\alpha$ [8.6 উদা. c দেখুন]

বা, $\phi = \alpha$

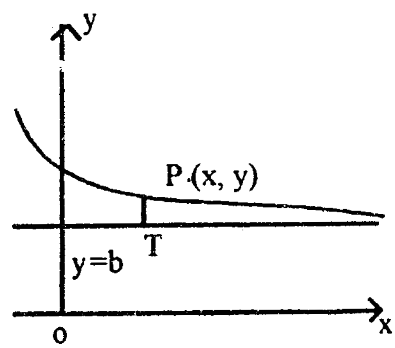
অতএব $p = r\sin\phi$ সূত্র হতে আমরা সহজেই পেডাল সমীকরণটি পাচ্ছি $p = r\sin\alpha$ ।

8.17 বক্ররেখার ক্ষেত্রে রৈখিক অসীমপথের (Linear asymptote-র) ধারণা ও সংজ্ঞা ঃ

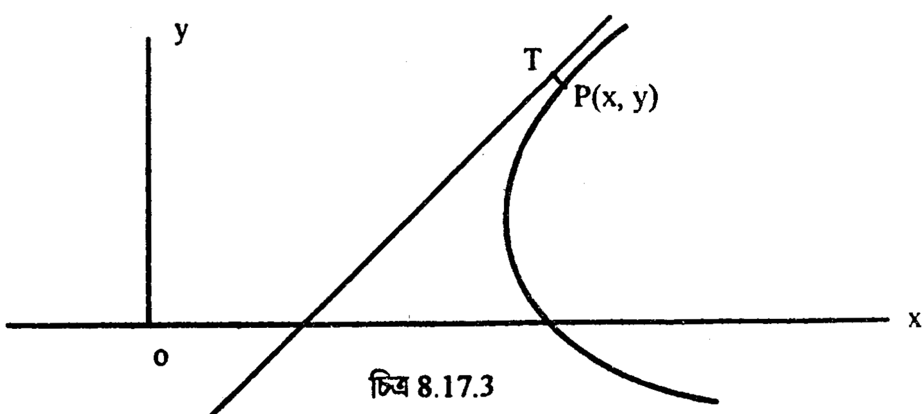
xy -তলে বিশেষ কোন শর্ত সাপেক্ষে একটি বিন্দুর সঞ্চার পথই গঠন করে xy -তলে একটি বক্ররেখা। সঞ্চারণশীল বিন্দুটির গতিবৈচিত্রের উপর নির্ভর করে বক্ররেখার গঠন বৈচিত্র্য। কখনও দেখা যায় সঞ্চারপথটি বা বক্ররেখাটি xy– তলে কেবলমাত্র সসীমস্থানে আবদ্ধ থাকে (উদাহরণ বৃত্ত), কখনও দেখা যায় সঞ্চারপথটি xy -তলে সসীম স্থানে আবদ্ধ না থেকে অসীমে বিস্তৃত হয় এবং বক্ররেখাটির এক বা একাধিক অসীম-বিস্তৃত শাখা থাকে (উদাহরণ পরাবৃত্ত (hyperbola))। **যে সকল বক্ররেখার ক্ষেত্রে অসীম-বিস্তৃত শাখা** (infinite branch) **থাকে, কেবলমাত্র সে সকল বক্ররেখার ক্ষেত্রে মূলবিন্দু থেকে সসীম দূরত্বে রৈখিক বা অরৈখিক** (linear or non-linear) **অসীমপথের অস্তিত্ব থাকতে পারে**। অসীম-বিস্তৃত শাখা থাকলেই যে অসীম পথ থাকবে তার কোন স্থিরতা নেই (যেমন অধিবৃত্তের অসীমবিস্তৃত শাখার জন্য কোন রৈখিক অসীমপথ নেই, প্রমাণ যথাস্থানে আছে 8.19 দেখুন)। অসীমপথ দুধরণের আছে, রৈখিক বা অরৈখিক। আমাদের আলোচনা রৈখিক অসীমপথ নিয়ে। **রৈখিক অসীমপথ হচ্ছে এমন একটি সরলরেখা যা বক্ররেখার অসীম-বিস্তৃত শাখার সঙ্গে অসীমেই মিলিত হবে এবং মূলবিন্দু থেকে সসীম দূরত্বে অবস্থান করবে।**



চিত্র 8.17.2



চিত্র 8.17.1



চিত্র 8.17.3

গাণিতিক হিসাবে $y = mx + c$ সরলরেখা $y=f(x)$ বা $F(x, y) = 0$ বক্ররেখার অসীমবিস্তৃত কোন একটি শাখার রৈখিক অসীম পথরূপে স্বীকৃত হবে যদি বক্ররেখার অসীম-বিস্তৃত শাখাটির উপর একটি বিন্দু $P(x,y)$ বক্ররেখা বরাবর অসীমে অগ্রসর হলে, অর্থাৎ $x \to \pm\infty$ (চিত্র 8.17.1) বা $y \to \pm\infty$ (চিত্র 8.17.2) বা $(x, y) \to \pm\infty$ (চিত্র 8.17.3) লিমিট নিলে, P হতে উক্ত সরলরেখার উপর লম্বদূরত্ব PT ক্রমশঃ কমে গিয়ে শূন্য সীমাস্থ মানে যাবে (অর্থাৎ $PT \to 0$ হবে)। উপরন্তু সরলরেখাটির মূলবিন্দু থেকে লম্বদূরত্ব সসীম হতে হবে।

চিত্র 8.17.1 এ রৈখিক অসীমপথটি x-অক্ষের সমান্তরাল এবং এক্ষেত্রে $P(x,y)$ -র x-স্থানাঙ্ক $x \to \infty$ লিমিটে P বিন্দুটি বক্ররেখা বরাবর অসীমে যাচ্ছে। সেক্ষেত্রে $y=b$ সরলরেখাটি থেকে P -র লম্বদূরত্ব $PT \to 0$ হচ্ছে। অতএব এখানে $y = b$ হচ্ছে x -অক্ষের সমান্তরাল একটি রৈখিক অসীমপথ। একই ভাবে চিত্র 8.17.2 এবং 8.17.3 লক্ষ্য করুন। চিত্র 8.17.2 এ $P(x,y)$ -র $y \to \infty$ এবং অসীমপথটি y -অক্ষের সমান্তরাল। চিত্র 8.17.3 এ $P(x,y)$ -র $(x, y) \to \infty$ এবং অসীমপথটি একটি তির্যক অসীমপথ (oblique asymptote)।

মন্তব্য ঃ চিত্র তিনটিতে লক্ষ্য করুন $P(x, y)$ বিন্দুতে বক্ররেখার স্পর্শকটির সীমাস্থ অবস্থান (limiting Position), $P \to \infty$ লিমিটের (বক্ররেখা বরাবর) ক্ষেত্রে, হচ্ছে রৈখিক অসীম পথ তিনটি। সুতরাং রৈখিক **অসীমপথের বিকল্প সংজ্ঞা ঃ**

মূল বিন্দু হতে সসীম দূরত্বে অবস্থিত একটি সরলরেখা একটি বক্ররেখার রৈখিক অসীম পথ হবে যদি উক্ত বক্ররেখার একটি অসীমবিস্তৃত শাখার উপর $P(x,y)$ বিন্দুতে অংকিত স্পর্শকের সীমাস্থ অবস্থান ($P \to \infty$ লিমিটের ক্ষেত্রে, অবশ্যই বক্ররেখার শাখাটি বরাবর) হয় উক্ত সরলরেখাটি।

8.18 উপপাদ্য ঃ

y -অক্ষের সমান্তরাল এরূপ রৈখিক অসীম পথ সংক্রান্ত

একটি বক্ররেখার অসীম-বিস্তৃত একটি শাখা (infinite branch) আছে। $y = mx + c$ একটি সরলরেখা যার m এবং c নির্দ্দিষ্ট সসীম মানযুক্ত। এরূপ একটি সরলরেখা উক্ত অসীম-বিস্তৃত শাখার রৈখিক অসীমপথ হলে নিম্নলিখিত লিমিট দুটি

$$m = \operatorname*{Lt}_{|x| \to \infty} \frac{y}{x} \quad \text{এবং} \quad c = \operatorname*{Lt}_{|x| \to \infty} (y - mx)$$

সিদ্ধ হবে, এক্ষেত্রে (x, y) হচ্ছে অসীম-বিস্তৃত শাখার উপর যে কোন একটি বিন্দু P -র স্থানাঙ্ক।

প্রমাণ ঃ $P(x, y)$ বক্ররেখার অসীম-বিস্তৃত শাখার উপর একটি বিন্দু। অতএব

$$d \equiv PT = P \text{ হতে } y = mx + c \text{ -র লম্বদূরত্ব}$$

$$= \frac{y - mx - c}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

এখন y = mx + c রৈখিক অসীমপথ হলে, অসীমপথের সংজ্ঞানুসারে

$$\lim_{p\to\infty} d = 0 \quad \text{বা} \quad \lim_{|x|\to\alpha} \frac{y-mx-c}{\sqrt{1+m^2}} = 0$$
(বা $x \to \pm\infty$)

$$\text{বা,} \lim_{|x|\to\infty} (y-mx-c) = 0 \qquad \text{বা,} \qquad c = \lim_{|x|\to\infty} (y-mx)$$

পুনরায় $\frac{y}{x} - m = \frac{y-mx}{x}$ হতে আমরা পাই

$$\lim_{|x|\to\infty}\left(\frac{y}{x} - m\right) = \lim_{|x|\to\infty} \frac{(y-mx)}{x} = c.o = 0.$$

অতএব $m = \lim_{|x|\to\infty} \frac{y}{x}$

বিপরীতক্রমে $m = \lim_{|x|\to\infty} \frac{y}{x}$ এবং $c = \lim_{|x|\to\infty} (y-mx)$

(যেখানে (x,y) হচ্ছে বক্ররেখার অসীম-বিস্তৃত শাখার উপর একটি বিন্দু) সিদ্ধ হলে অবশ্যই

$$d = \frac{y-mx-c}{\sqrt{1+m^2}} \to 0,$$

অর্থাৎ $y - mx - c = o$ সরলরেখাটি একটি রৈখিক অসীম পথ।

মন্তব্য ঃ a) $m = \lim_{|x|\to\infty} \frac{y}{x} = 0$ হলে আমরা x -অক্ষের সমান্তরাল রৈখিক অসীম-পথ পাব। **কিন্তু, এই উপপাদ্যের সাহায্যে y -অক্ষের সমান্তরাল অসীমপথ পাব না।** (উপপাদ্য 8.20 দেখুন)

b) বক্ররেখার সমীকরণ ($y = f(x)$ বা $F(x,y) = o$ যে আকারেই থাকুক) থেকে $m = \lim_{|x|\to\infty} \frac{y}{x}$ দ্বারা m বের করতে হবে। বিভিন্ন অসীম-বিস্তৃত শাখার ক্ষেত্রে বিভিন্ন m, যথা $m_1, m_2 \ldots\ldots m_k$ পাব। এবার $\lim_{|x|\to\infty} (y-mx)$ দ্বারা আনুসাঙ্গিক $c_1, c_2,\ldots\ldots c_k$ পাওয়া যাবে। **সাধারণভাবে বলা যায় একটি বক্ররেখার অসীম-বিস্তৃত শাখার সংখ্যা K হলে আমরা সর্বোচ্চ K সংখ্যক রৈখিক অসীম পথ পেতে পারি। বক্ররেখার সমীকরণটি K-ঘাত বিশিষ্ট হলে বক্ররেখার K সংখ্যক অসীম-বিস্তৃত শাখা থাকতে পারে।**

c) বক্ররেখার সমীকরণ $y = mx + c + \theta(x)$ আকারে থাকলে এবং $\lim_{|x|\to\infty} \theta(x) = 0$ হলে $y = mx + c$ একটি অসীমপথ।

8.19 উদাহরণঃ

a) $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের অসীমবিস্তৃত শাখার কোন রৈখিক অসীমপথ নেই।

সমাধানঃ প্রদত্ত বক্ররেখার ক্ষেত্রে

$$m = \underset{|x|\to\infty}{Lt} \frac{y}{x} = \underset{|x|\to\infty}{Lt} \frac{\sqrt{4ax}}{x} = \underset{|x|\to\infty}{Lt} \frac{\sqrt{4a}}{\sqrt{x}} = 0$$

এবং $c = \underset{|x|\to\infty}{Lt} (y - mx) = \underset{|x|\to\infty}{Lt} y = \underset{|x|\to\infty}{Lt} \sqrt{4ax} = \infty$ (অসীম)

অতএব উপপাদ্য 8.18 অনুসারে $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের কোন রৈখিক অসীমপথ নেই।

b) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তের অসীমপথ দুটির মিলিত সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$

সমাধানঃ প্রদত্ত বক্ররেখার ক্ষেত্রে

$$m = \underset{|x|\to\infty}{Lt} \frac{y}{x} = \underset{|x|\to\infty}{Lt} \frac{\pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}}{x}$$

$$= \underset{|x|\to\infty}{Lt} \pm \frac{b}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

$$= \pm \frac{b}{a}$$

অতএব $m_1 = \frac{b}{a}$, $m_2 = -\frac{b}{a}$ এবং

$$c_1 = \underset{|x|\to\infty}{Lt} (y - m_1 x) = \underset{|x|\to\infty}{Lt} \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^a} - \frac{b}{a}x$$

$$= \underset{|x|\to\infty}{Lt} \left\{ \frac{bx}{a}\left[\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] - \frac{b}{a}x \right\}$$

$$= \underset{|x|\to\infty}{Lt} \left[\frac{bx}{a}\left(1 - \frac{1}{2}a^2/x^2 \ldots\ldots\right) - \frac{b}{a}x \right]$$

$$= 0$$

অনুরূপে $c_2 = \underset{|x| \to \infty}{Lt} (y - m_2 x) = 0$

অতএব অসীমপথ দুটির মিলিত সমীকরণ

$$\left(y - \frac{b}{a}x\right)\left(y + \frac{b}{a}x\right) = 0$$

$$\text{or, } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

8.20 উপপাদ্য ঃ

y- অক্ষের সমান্তরাল রৈখিক অসীমপথ সংক্রান্ত

$y = f(x)$ আকারের বক্ররেখার $x = a$ একটি y-অক্ষের সমান্তরাল রৈখিক অসীমপথ হবে তার প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত (necessary and sufficient condition) হলো

$|f(x)| \to \infty$ যখন $x \to a+$ বা, $x \to a-$ বা, $x \to a$.

প্রমাণ ঃ প্রয়োজনীয় শর্ত ঃ

ধরি $|f(x)| \to \infty$ যখন $x \to a+$

অতএব $y = f(x) \to \pm\infty$ যখন $x \to a+$. এখন $y = f(x)$ -র উপর যে কোন একটি বিন্দু P (x, y) হতে $x = a$ -র লম্বদূরত্ব

$$d = |x - a|$$

এবং তারফলে $\underset{x \to a+}{Lt} d = 0$ হচ্ছে।

অতএব লক্ষ্য করা গেল $x \to a+$ ক্ষেত্রে বক্ররেখার অসীমবিস্তৃত শাখায় অবস্থিত P (x,y) বিন্দুর $y \to \infty$ হচ্ছে, অর্থাৎ বিন্দুটি অসীমে অগ্রসর হচ্ছে এবং সেই ক্ষেত্রে $d \to o$ হচ্ছে। অতএব $x = a$ রেখাটি একটি অসীমপথ।

যথেষ্ট শর্ত ঃ ধরা যাক্ $x = a$ হচ্ছে $y = f(x)$ বক্ররেখার একটি y- অক্ষের সমান্তরাল রৈখিক অসীমপথ।

অতএব

d = বক্ররেখার উপর P (x, y) থেকে $x = a$ -র লম্ব দূরত্ব

$= (x - a) \to o$ যখন $P \to \infty$

এখন $x \to a+$ হলে অবশ্যই P-র y-স্থানাঙ্ক $y \to \pm\infty$ হবে অর্থাৎ $|f(x)| \to \infty$ হবে, নচেৎ P কখনই অসীমে অগ্রসর হবে না।

অনুরূপে $x \to a-$ বা $x \to a$ -র ক্ষেত্রে উপপাদ্যটি প্রমাণ করা যাবে।

মন্তব্য ঃ a) এই উপপাদ্য (8.20) এর অনুরূপ $x = \phi(y)$ বক্ররেখার $y = b$ সরলরেখাটি (যা x -অক্ষের সমান্তরাল) একটি অসিমপথ হবে তার প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত

$$|\phi(y)| \to \infty \text{ যখন } y \to b+ \text{ বা } y \to b- \text{ বা } y \to b$$

উদাহরণ ঃ আপনারা লক্ষ্য করুন $y = \tan x$ বক্ররেখার ক্ষেত্রে $x = \pm \pi/2,\ x = \pm 3\pi/2,$ $x = \pm 5\pi/2$ ......রেখাগুলি y- অক্ষের সমান্তরাল অসীমপথ (কারণ $\underset{x \to \pm\pi/2}{\text{Lt}} y = \infty$ ইত্যাদি)।

8.21 F(x, y) = 0 আকারের সাধারণ বীজগাণিতিক সমীকরণ দ্বারা বক্ররেখার সমীকরণ নির্দ্দিষ্ট থাকলে y -অক্ষের সমান্তরাল নয় এরূপ রৈখিক অসীমপথের সমীকরণ নির্ণয় ঃ

n ঘাত বিশিষ্ট F(x, y) = o আকারের সাধারণ বীজগণিতিক বক্ররেখার (Algebraic Curve) সমীকরণ হচ্ছে

$$\left(a_0y^n + a_1y^{n-1}x \ldots + a_nx^n\right) + \left(b_1y^{n-i} + b_2y^{n-2} + \ldots\ldots + b_nx^{n-1}\right)$$
$$+ \ldots\ldots + \left(\ell_{n-1}y + \ell_nx\right) + K_n = 0$$

(8.21.1)

এই সমীকরণটিকে নিম্নলিখিত আকারে সাজানো যায়

$$x^n\phi_n\left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-1}\phi_{n-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots\ldots + x\phi_1\left(\frac{y}{x}\right) + \phi_0\left(\frac{y}{x}\right) = 0, \quad (8.21.2)$$

$\phi_r\left(\frac{y}{x}\right)$ হচ্ছে r -ঘাত বিশিষ্ট y/x -র বহুপদ

রাশিমালা (Polynomial), r = 0, 1, 2 ....n

উপপাদ্য 8.18 অনুসারে (8.12.2) -র যে কোন রৈখিক অসীমপথের ক্ষেত্রে প্রবণতা $(m) = \underset{|x| \to \infty}{\text{Lt}} y/x$ ।

সুতরাং (8.12.2) কে x^n দ্বারা ভাগ করে $|x| \to \infty$ লিমিট নিলে আমরা পাই

$$\phi_n(m) = 0 \quad (8.21.3)$$

এই সমীকরণটি m -র n -ঘাতবিশিষ্ট সমীকরণ। ধরা যাক্ n সংখ্যক বাস্তব বীজ যথা $m_1, m_2, \ldots m_n$ উৎপন্ন হচ্ছে। যে কোন একটি বীজ (ধরি m_k) এর ক্ষেত্রে উপপাদ্য 8.18 অনুসারে

$$c_k = \underset{|x| \to \infty}{\text{Lt}} (y - m_kx)$$

অতএব আমরা লিখতে পারি

$$y = m_k x + c_k + u_k(x), \tag{8.21.4}$$

যেখানে $u_k(x)$ অপেক্ষক (function) টি এমন যে

$$\underset{|x|\to\infty}{\text{Lt}} \; u_k(x) = 0 \text{ ।}$$

(8.21.4) হতে $\dfrac{y}{x} = \dfrac{c_k + u_k(x)}{x} + m_k$ এই মানটি (8.21.2) তে বসিয়ে পাওয়া যায়

$$\phi_n\left(m_k + \frac{c_k + u_k}{x}\right) + \frac{1}{x}\phi_{n-1}\left(m_k + \frac{c_k + u_k}{x}\right)$$

$$+ \frac{1}{x^2}\phi_{n-2}\left(m_k + \frac{c_k + u_k}{x}\right) + \ldots\ldots\ldots = 0$$

এখন টেলার-বিস্তৃতি (Taylor's expansion) অবলম্বনে উপরের সমীকরণটি নিম্নলিখিত আকারে প্রকাশ করা যায় ঃ

$$\left\{\phi_n(m_k) + \frac{c_k + u_k}{x}\phi_n'(m_k) + \frac{(c_k + u_k)^2}{2!}\phi_n''(m_k) + \ldots\ldots\right\}$$

$$+\frac{1}{x}\left\{\phi_{n-1}(m_k) + \frac{c_1 + u_k}{x}\phi_{n-1}'(m_k) + \frac{(c_k + u_k)}{2!x^2}\phi_{n-1}''(m_k) + \cdots\cdots\right\}$$

$$+\frac{1}{x^2}\left\{\phi_{n-2}(m_k) + \frac{c_k + u_k}{x}\phi_{n-2}'(m_k) + \frac{(c_k + u_k)^2}{2!x^2}\phi_{n-2}''(m_k) + \ldots\ldots\right\}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \tag{8.21.5}$$

(8.21.5) এ লক্ষ্য করুন $\phi_n(m_k) = 0$ (কারণ m_k হচ্ছে ϕ (8.21.3) -র একটি বীজ) এবং $u_k \to 0$ যখন $|x| \to \infty$. অতএব (8.21.5) -কে x দ্বারা গুণ করে $|x| \to \infty$ লিমিট নিলে আমরা পাই

$$c_k\phi_n'(m_k) + \phi_{n-1}(m_k) = 0 \tag{8.21.6}$$

$\phi_n'(m_k) \neq 0$ ধরে শেষ পর্যন্ত পাওয়া গেল

$$c_k = -\frac{\phi_{n-1}(m_k)}{\phi_n'(m_k)} \tag{8.21.7}$$

[$\phi_n'(m_k), \phi_n''(m_k) \cdots\cdot$ হচ্ছে যথাক্রমে $\phi_n(m_k)$ -র একঘাত, দ্বিঘাত অবকলন গুণাঙ্ক m_k -র সাপেক্ষে]

অতএব

$$y = m_k x - \frac{\phi_{n-1}(m_k)}{\phi_n'(m_k)}, \phi_n'(m_k) \neq 0$$

$$(k = 1, 2, \ldots\ldots, n) \tag{8.21.8}$$

হচ্ছে n-সংখ্যক রৈখিক অসীমপথের সমীকরণ।

মন্তব্য : a) $\phi_n(m)$ গঠনের সহজ উপায় হচ্ছে (8.21.1) এ, **অর্থাৎ বক্ররেখার সমীকরণে** n -ঘাত বিশিষ্ট **পদগুলিতে y = m এবং x = 1 বসানো।** একই উপায়ে $\phi_{n-1}(m), \phi_{n-2}(m)$ গঠন করা যাবে।

b) (8.21.7) এ $\phi_{n-1}(m_k) \neq 0$, কিন্তু $\phi_n'(m_k) = 0$, সেক্ষেত্রে c_k অনির্ণেয় এবং অসীমপথের অস্তিত্ব নেই বলতে হবে।

c) (8.21.6) এ $\phi_n'(m_k) = \phi_{n-1}(m_k) = 0$ হলে সমীকরণটি পরিণত হয় একটি অভেদে (identity তে)। এক্ষেত্রে (8.21.5) কে x^2 দ্বারা গুণ করে $|x| \to \infty$ লিমিট নিলে নিম্নলিখিত সমীকরণটি উৎপন্ন হবে ঃ

$$\frac{c_k^2}{2}\phi_n''(m_k) + c_k\,\phi_{n-1}'(m_k) + \phi_{n-2}(m_k) = 0 \qquad (8.21.9)$$

$\phi_n''(m_k) \neq 0$ ধরে এই সমীকরণ c_k -র দুটি মান দেবে। ধরা যাক্ মান দুটি বাস্তব, যথা c_k', c_k''। আপনারা লক্ষ্য করুন $\phi_n(m) = 0$ সমীকরণের (8.21.3 এর) m_k বীজের ক্ষেত্রে আমরা পাচ্ছি $\phi_n(m_k) = 0$ এবং $\phi_n'(m_k) = 0$, অর্থাৎ m_k বীজটি (8.21.3) -র একটি বহুবীজ, মাত্রা দুই (multiple root of order two)। সুতরাং দেখা গেল দুই মাত্রা বিশিষ্ট m_k বীজের ক্ষেত্রে আমরা দুটি সমান্তরাল রৈখিক অসীমপথ

$$y = m_k x + c_k' \qquad \text{এবং} \qquad y = m_k x + c_k'' \text{ পাচ্ছি।}$$

যদি (8.21.9) একটি অভেদে (identity-তে) পরিণত হয়, সেক্ষেত্রে (8.21.5) কে x^3-দ্বারা গুণ করে $|x| \to \infty$ লিমিট নিতে হবে এবং তারফলে c_k-র ত্রিঘাত সমীকরণ পাওয়া যাবে। একই ভাবে পরবর্তীক্রমে এগিয়ে যেতে হবে।

$\phi_n(m) = 0$ কোন কাল্পনিক বীজে থাকলে, অসীমপথের কোন বাস্তব অস্তিত্ব নেই বুঝতে হবে।

কার্যকরী নীতি

a) বক্ররেখার সমীকরণ থেকে $\phi_n(m), \phi_{n-1}(m), \phi_{n-2}(m)$..... গঠন করুন (গঠন পদ্ধতি মন্তব্য (a) অনুসারে হবে)

b) $\phi_n(m) = 0$ সমীকরণ সমাধান করে m -র মান নির্ণয় করুন।

c) $m = m_k$-র জন্য $c_k = -\dfrac{\phi_{n-1}(m_k)}{\phi_n'(m_k)}$

d) $\phi_n'(m_k) = \phi_{n-1}(m_k) = 0$ হলে

$$c_k^2\,\phi_n''(m_k) + c\phi_{n-1}'(m_k) + \phi_{n-2}(m_k) = 0$$

সমীকরণ থেকে c_k -র মানদুটি নির্ণয় করুন।

8.22 $F(x, y) = 0$ আকারের সাধারণ বীজগাণিতিক বক্ররেখার ক্ষেত্রে y -অক্ষের সমান্তরাল রৈখিক অসীমপথ নির্ণয় ঃ

$F(x, y) = 0$ সমীকরণটি নিম্নলিখিত আকারে প্রকাশ করা হলো ঃ

$$y^n\phi(x) + y^{n-1}\phi_1(x) + y^{n-2}\phi_2(x) + \ldots + \phi_n(x) = 0 \tag{8.22.1}$$

এই সমীকরণে y-র ঘাত ক্রমশঃ কমছে এবং $\phi_1(x), \ldots\ldots, \phi_n(x)$ হচ্ছে x-র বহুপদ রাশিমালা। (8.22.1) কে y^n দ্বারা ভাগ করে আমরা পাই

$$\phi(x) + \frac{1}{y}\phi_1(x) + \frac{1}{y^2}\phi_2(x) + \ldots + \frac{1}{y^n}\phi_n(x) = 0 \tag{8.22.2}$$

উপপাদ্য (8.20) অনুসারে y -অক্ষের সমান্তরাল $x = a_1$ সরলরেখাটি একটি অসীমপথ হবে যদি $x \to a_1 +$ বা $x \to a-$ বা $x \to a_1$ লিমিট নিলে $y \to \pm\infty$ হয়। অতএব (8.22.2) এ $x \to a_1$ এবং $y \to \pm\infty$ লিমিট নিয়ে আমরা পাই

$$\phi(a_1) = 0, \tag{8.22.3}$$

অর্থাৎ a_1 হচ্ছে $\phi(x) = 0$ সমীকরণের একটি বীজ। $\phi(x) = 0$ সমীকরণের বাস্তব ও সসীম বীজগুলি a_1, a_2, ……a_k হলে, $x = a_1, x = a_2, \ldots\ldots, x = a_k$ সরলরেখাগুলি হবে বক্ররেখার y -অক্ষের সমান্তরাল বিভিন্ন অসীমপথ (অবশ্যই বিভিন্ন বিভিন্ন অসীমবিস্তৃত শাখার ক্ষেত্রে)। পুনরায় এই বীজগুলির সাপেক্ষে

$$\phi(x) \equiv (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_k).$$

সুতরাং আমাদের সিদ্ধান্ত এই যে বক্ররেখার সমীকরণে (8.22.1) y-র সর্বোচ্চ ঘাতের সহগ বহুপদ রাশিমালা $\phi(x) \equiv (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_k)$ কে **শূন্যমান দানে y-অক্ষের সমান্তরাল অসীমপথগুলির মিলিত সমীকরণ** (joint equation) **পাওয়া যাবে।**

যদি y -র সর্বোচ্চ ঘাতের সহগটি একটি ধ্রুবকপদ (Constant term) হয় বা যদি সহগটি বাস্তব রৈখিক উৎপাদকে বিশ্লেষণযোগ্য না হয়, তবে y -অক্ষের সমান্তরাল কোন অসীমপথ নেই এই সিদ্ধান্ত নিতে হবে।

মন্তব্য ঃ অনুরূপে $F(x, y) = 0$ কে

$$x^n\psi(y) + x^{n-1}\psi_1(y) + x^{n-2}\psi_2(y) + \ldots = 0$$

আকারে লিখে x -র সর্বোচ্চ ঘাতের সহগ $\psi(y)$ কে রৈখিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে x -অক্ষের সমান্তরাল অসীমপথগুলি আমরা পাব। সহগটি ধ্রুবক বা রৈখিক উৎপাদকে বিশ্লেষণযোগ্য না হলে x-অক্ষের সমান্তরাল অসীমপথ থাকবে না।

8.23 উদাহরণ ঃ

a) $(y-x)^2 x - 3y(y-x) + 2x = 0$

বক্ররেখার রৈখিক অসীমপথগুলি নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান ঃ বক্ররেখার সমীকরণ

$$(y-x)^2 x - 3y(y-x) + 2x = 0 \tag{8.23.1}$$

y – অক্ষের সমান্তরাল রৈখিক অসীম পথ ঃ

(8.23.1) এ y–র সর্বোচ্চ ঘাত দুই এবং y^2–র সহগ $(x-3)$. অতএব $x-3 = 0$ হচ্ছে y– অক্ষের সমান্তরাল অসীমপথ (8.22 অনুসারে)।

x– অক্ষের সমান্তরাল অসীমপথ ঃ

(8.23.1) এ x -র সর্বোচ্চ ঘাত তিন এবং x^3-র সহগ-1. অতএব x-অক্ষের সমান্তরাল কোন অসীমপথ নেই (8.22 মন্তব্য দেখুন)।

$y = mx + c$ আকারের তির্যক অসীমপথ ঃ

(8.21) এ বর্ণিত কার্যকরী নীতি দেখুন। (8.23.1) এ সর্ব্বোচ 3 ঘাত রাশিমালাতে $y = m$ এবং $x = 1$ বসিয়ে আমরা পাই

$$\phi_3(m) = (m-1)^2$$

অনুরূপে
$$\phi_2(m) = -3m(m-1)$$

$$\phi_1(m) = 2$$

এখন $\phi_3(m) = 0$ সমীকরণের বীজদ্বয় 1,1 (বহুবীজ, ঘাত –2)।

তারফলে $c = -\dfrac{\phi_2(m)}{\phi_3'(m)}$ (8.21.7 সূত্র)

দ্বারা c–র মান নির্ণয় করা যাবে না, কারণ এক্ষেত্রে $\phi_2(m=1) = 0$ এবং $\phi_3'(m=1) = 0$ আমাদের c–র মান নির্ণয় করার জন্য (8.21.9) সমীকরণটি, অর্থাৎ

$$\frac{c^2}{2}\phi_3''(1) + c\phi_2'(1) + \phi_1(1) = 0$$

নিতে হবে। এই দ্বিঘাত সমীকরণটিতে $\phi_3''(1)$, $\phi_2'(1)$, $\phi_1(1)$ এর মান বসিয়ে আমরা পাই

$$c^3 - 3c + 2 = 0$$

বা (c–2) (c–1)=0 অতএব c=1, 2 এবং অভিসারক দুটি হলো

$$y = x+1,\ y = x+2$$

(8.23.1) সমীকরণটি ত্রিঘাত সমীকরণ। এর অসীমপথের সর্বোচ্চ সংখ্যা 3, এক্ষেত্রে অসীমপথ তিনটি

$$x = 3,\ y = x + 1,\ y = x + 2$$

b) $x^4-5x^2y^2+4y^4+x^2-2y^2+2x+y+7=0$ বক্ররেখার রৈখিক অসীমপথগুলি নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান ঃ বক্ররেখার সমীকরণটি আমরা নিম্নলিখিত আকারে লিখতে পারি

$$(x^2-4y^2)(x^2-y^2)+x^2-2y^2+2x+y+7=0$$

বা $(x+2y)(x-2y)(x+y)(x-y)+x^2-2y^2+2x+y+7=0$

বা $F_4+F_2=0,$

যেখানে F_4 হচ্ছে একটি 4 ঘাত বিশিষ্ট x এবং y-র সমসত্ত্ব (homogeneous) রাশিমালা এবং এই রাশিমালাটি চারটি রৈখিক উৎপাদকে বিশ্লেষণযোগ্য, কিন্তু কোন দুটি উৎপাদককে শূন্যমান দ্বারা দুটি সমান্তরাল রেখা পাচ্ছি না। F_2 হচ্ছে 2 ঘাত বিশিষ্ট x এবং y-র বহুপদ রাশিমালা (সমসত্ত্ব নাও হতে পারে)।

এখন উদাহরণ (8.23) (a) অনুসরণ করে একই পদ্ধতির সাহায্যে আপনারা বক্ররেখাটির অসীমপথগুলি পাবেন

$$x+2y=0,\qquad x-2y=0$$

$$x+y=0,\qquad x-y=0,$$

অর্থাৎ এদের মিলিত সমীকরণ $F_4 = 0$.

এই উদাহরণের ভিত্তিতে **পর্যবেক্ষণ দ্বারা অসীমপথ নির্ণয়ের একটি নীতি বর্ণনা করা হলো।**

8.24 পর্যবেক্ষণ দ্বারা অসীমপথ নির্ণয় ঃ

বক্ররেখার সমীকরণ $F_n+F_{n-2}=0$ আকারের, যেখানে F_n হচ্ছে x এবং y -র n-ঘাত বিশিষ্ট সমসত্ত্ব (homogeneous) রাশিমালা এবং F_{n-2} হচ্ছে $n-2$ ঘাতবিশিষ্ট x এবং y-র রাশিমালা যা সমসত্ত্ব নাও হতে পারে। উপরন্তু F_n কে n সংখ্যক রৈখিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যাচ্ছে এবং উৎপাদকগুলি এমন আকারের যে কোন দুটি উৎপাদককে শূন্য মান দানে দুটি সমান্তরাল রেখা পাওয়া যাচ্ছে না। এক্ষেত্রে বক্ররেখাটির রৈখিক অসীমপথগুলির সংযুক্ত বা মিলিত সমীকরণ হবে $F_n = 0$, F_n এর এক একটি উৎপাদককে শূন্যমান দানে এক-একটি অসীমপথ পাওয়া যাবে।

8.25 উদাহরণ ঃ বক্ররেখা ও অসীমপথের ছেদবিন্দু সংক্রান্ত

$$x^4-5x^2y^2+4y^4+x^2-y^2+x+y+1=0$$

বক্ররেখার অসীমপথগুলি বক্ররেখার সঙ্গে কতকগুলি বিন্দুতে মিলিত হচ্ছে। প্রমাণ করতে হবে এই ছেদবিন্দুগুলি একটি সমপরাবৃত্তের (rectangular hyperbola-র) উপর অবস্থিত।

সমাধান ঃ লক্ষ্য করুন প্রদত্ত বক্ররেখাটি

$$F_4+F_2=0$$

আকারের এবং $F_4 \equiv (x+2y)(x-2y)(x+y)(x-y)$। F_4-র কোন দুটি উৎপাদক শূন্যমান দানে সমান্তরাল রেখা হচ্ছে না। অতএব (8.24) এ বর্ণিত নীতি অনুসারে অসীমপথগুলির মিলিত সমীকরণ

$$(x-2y)(x+2y)(x+y)(x-y) = 0.$$

বক্ররেখার সমীকরণ এবং অসীমপথগুলির মিলিত সমীকরণ এই উভয় সমীকরণই ছেদবিন্দুগুলির ক্ষেত্রে সিদ্ধ হবে। অতএব দ্বিতীয় সমীকরণটি প্রথম সমীকরণে প্রয়োগে আমরা পাই

$$x^2 - y^2 + x + y + 1 = 0.$$

এটি একটি দ্বিঘাত সমীকরণ যাকে নিম্নলিখিত আকারে লেখা যায় ঃ

$$\left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(y-\tfrac{1}{2}\right)^2 = -1$$

বা $$\left(y-\tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2 = 1.$$

এটি একটি সমপরাবৃত্ত। অতএব প্রমাণিত হলো ছেদবিন্দুগুলি একটি সমপরাবৃত্তের উপর অবস্থিত।

8.26 মেরুস্থানাঙ্কে বক্ররেখার সমীকরণ $r = f(\theta)$ হলে রৈখিক অসীমপথের সমীকরণ নির্ণয় ঃ

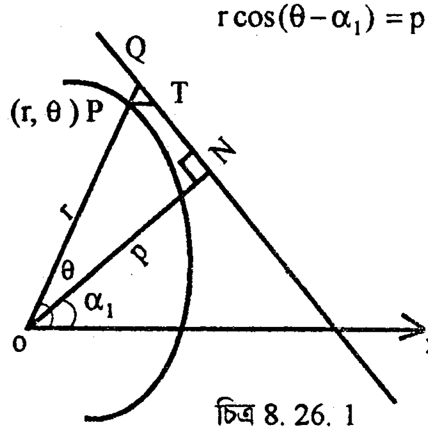
বক্ররেখার সমীকরণকে নিম্নলিখিত আকারে প্রকাশ করা হলো ঃ

$$u \equiv \frac{1}{r} = \frac{1}{f(\theta)} = F(\theta) \quad \text{(ধরা হলো)} \qquad (8.26.1)$$

এখন (8.26.1) -র একটি অসীম-বিস্তৃত শাখার উপর $P(r,\theta)$ বিন্দু নিয়ে $P \to \infty$ লিমিট (অবশ্যই বক্ররেখা বরাবর) নিলে $r \to \infty$ হবে এবং সেক্ষেত্রে $F(\theta) \to 0$ হবে। অতএব $F(\theta)=0$ সমীকরণটি সমাধান করে $\theta = \alpha, \beta, \gamma ....$ জাতীয় দিকেই আমরা বক্ররেখার অসীম-বিস্তৃত শাখাগুলি পাব।

$\theta = \alpha$ -র দিকে যে অসীম-বিস্তৃত শাখা আছে তার সাপেক্ষে রৈখিক অসীমপথটি মনে করি

$$r\cos(\theta - \alpha_1) = p \qquad (8.26.2)$$



চিত্র 8. 26. 1

এখন আমাদের কাজ p এবং α_1 নির্ণয় করা। চিত্রে (8.26.2) সরলরেখাটি হচ্ছে NT. এই সরলরেখার উপর মূলবিন্দু 0 থেকে লম্ব দূরত্ব ON = p এবং $\angle NOx = \alpha_1$ বক্ররেখার অসীম-বিস্তৃত শাখায় $P(r,\theta)$ একটি বিন্দু। OP, NT কে Q বিন্দুতে ছেদ করে। PT হচ্ছে P হতে TN -র লম্বদূরত্ব। যেহেতু NT হচ্ছে অসীমপথ, সেহেতু $P \to \infty$ (বক্ররেখা বরাবর) লিমিটে $PT \to 0$ হবে।

চিত্রানুসারে

$$PT = PQ\cos(\theta - \alpha_1) = (OQ - OP)\cos(\theta - \alpha_1)$$

$$= \left[p\sec(\theta - \alpha_1) - f(\theta)\right]\cos(\theta - \alpha_1)$$

$$= p - \cos(\theta - \alpha_1) f(\theta).$$

এখন $\underset{P\to\infty}{\mathrm{Lt}}\ PT = 0$ হতে আমরা পাই

$$\underset{\substack{r\to\infty\\ \theta\to\alpha}}{\mathrm{Lt}} \left[p - \cos(\theta - \alpha_1) f(\theta)\right] = 0$$

বা, $$p = \underset{\theta\to\alpha}{\mathrm{Lt}} \cos(\theta - \alpha_1) f(\theta) = \underset{\theta\to\alpha}{\mathrm{Lt}} \frac{\cos(\theta - \alpha_1)}{F(\theta)}$$

লক্ষ্য করুন $\underset{\theta\to\alpha}{\mathrm{Lt}} F(0) = 0$ এবং অসীমপথটি

সংজ্ঞানুসারে মূলবিন্দু থেকে সসীম লম্বদূরত্বে অবস্থিত হওয়ায় p -র মান অবশ্যই সসীম এবং নির্দ্দিষ্ট মানযুক্ত। অতএব $\underset{\theta\to\alpha}{\mathrm{Lt}} \dfrac{\cos(\theta - \alpha_1)}{F(\theta)}$ লিমিটে $\underset{\theta\to\alpha}{\mathrm{Lt}} \cos(\theta - \alpha_1) = 0$ হবে।

এখন $\underset{\theta\to\alpha}{\mathrm{Lt}} \cos(\theta - \alpha_1) = 0$ হতে আমরা পাই $\cos(\alpha - \alpha_1) = 0$, বা

$\alpha_1 = \alpha - \pi/2$ এবং $p = \underset{\theta\to\alpha}{\mathrm{Lt}} \dfrac{\cos(\theta - \alpha_1)}{F(\theta)}$ [$\frac{0}{0}$ আকারের]

$$= \underset{\theta\to\alpha}{\mathrm{Lt}} \frac{-\sin(\theta - \alpha_1)}{F'(\theta)}$$

$$= \frac{-\sin(\alpha - \alpha + \pi/2)}{\underset{\theta\to\alpha}{\mathrm{Lt}} F'(\theta)} = -\frac{1}{\underset{\theta\to\alpha}{\mathrm{Lt}} F'(\theta)}.$$

অতএব নির্ণেয় অসীমপথটি

$$r\cos(\theta - \alpha + \pi/2) = -\frac{1}{\underset{\theta\to\alpha}{\mathrm{Lt}} F'(\theta)}$$

বা $$r\sin(\theta - \alpha) = \frac{1}{\underset{\theta\to\alpha}{\mathrm{Lt}} F'(\theta)}. \qquad \textbf{(8.26.3)}$$

অনুরূপে $\theta = \beta, \gamma \ldots$ ইত্যাদি দিকে অসীম বিস্তৃত শাখার সাপেক্ষে অসীমপথগুলি নির্ণয় করা যাবে।

কার্যকরী নীতি ঃ প্রদত্ত সমীকরণ $r = f(\theta)$ কে

$$u \equiv \frac{1}{r} = \frac{1}{f(\theta)} = F(\theta)$$

আকারে লিখে $F(\theta) = 0$ সমীকরণ থেকে θ-র বিভিন্ন মানগুলি যথা α, β, γ ....নির্ণয় করুন। তারপর

$$\underset{\theta\to\alpha}{\text{Lt}} F'(\theta) = \underset{\theta\to\alpha}{\text{Lt}} \left(\frac{du}{d\theta}\right), \underset{\theta\to\beta}{\text{Lt}} F'(\theta) = \underset{\theta\to\beta}{\text{Lt}} \frac{du}{d\theta}$$ নির্ণয় করুন।

এবার (8.26.3) সূত্রানুসারে অসীমপথগুলি পেয়ে যাবেন।

8.27 উদাহরণ ঃ

a) $r = \dfrac{a\theta}{\theta - 1}$ বক্ররেখার রৈখিক অসীমপথটি নির্ণয় করা যাক্।

সমাধান ঃ বক্ররেখার সমীকরণটি নিম্নলিখিত আকারে প্রকাশ করা হলো ঃ

$$u \equiv \frac{1}{r} = \frac{\theta - 1}{a\theta} = F(\theta)$$ ধরি

এখন $F(\theta) = 0$ হতে আমরা পাই $\theta = 1$ (8.26 -র কার্যকরী নীতি দেখুন), অতএব $\theta = 1$ দিকে বক্ররেখার অসীম-বিস্তৃত শাখা আছে। পুনরায়

$$\underset{\theta\to 1}{\text{Lt}} F'(\theta) = \underset{\theta\to 1}{\text{Lt}} \frac{1.a\theta - (\theta - 1)a}{(a\theta)^2} = \frac{1}{a}$$

অতএব (8.26.3) সূত্রানুসারে রৈখিক অসীমপথটির সমীকরণ

$$r\sin(\theta - 1) = a$$

b) $r = \dfrac{a^2\theta^2}{\theta^2 + \sin^2\theta}$ বক্ররেখার একটি বৃত্তীয় অসীমপথ আছে দেখাতে হবে।

সমাধান ঃ

$$\underset{\theta\to\infty}{\text{Lt}} \left(\frac{a^2\theta^2}{\theta^2 + \sin^2\theta}\right) = \underset{\theta\to\infty}{\text{Lt}} \left(\frac{a^2}{1 + \left(\dfrac{\sin\theta}{\theta}\right)^2}\right) = \frac{a^2}{1+0} = a^2$$

অতএব $r = a^2$ এই বৃত্তটি প্রদত্ত বক্ররেখার অরৈখিক অসীমপথ।

মন্তব্য ঃ সাধারণভাবে $r = f(\theta)$ সমীকরণে $\underset{\theta\to\infty}{Lt} f(\theta) = a$ হলে $r = a$ **হবে বক্ররেখাটির একটি** বৃত্তীয় অসীমপথ। অরৈখিক অসীমপথের আলোচনা আমাদের পাঠ্যতালিকায় নেই। **শুধুমাত্র অরৈখিক** অসীমপথ আছে বোঝাতে এই উদাহরণটি দেওয়া হলো।

8.28 সারাংশ ঃ

a) বক্ররেখার (x,y) বিন্দুতে স্পর্শক অভিলম্বের সমীকরণ যথাক্রমে

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x) \text{ এবং } Y - y = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(X - x),$$ $\frac{dy}{dx}$-র মান বক্ররেখার সমীকরণ থেকে বার করতে হবে।

b) মূলবিন্দুগামী র‍্যাশনাল বীজগাণিতিক বক্ররেখার মূলবিন্দু (o,o) তে স্পর্শকের সমীকরণ পাওয়া যাবে বক্ররেখার সমীকরণের x এবং y এর সর্বনিম্ন ঘাতবিশিষ্ট পদসমষ্টিকে শূন্যমান প্রদান করে।

c) দুটি বক্ররেখার ছেদবিন্দু বক্ররেখার অন্তর্গত কোণ θ হলে,

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \text{ (কার্তিয় স্থানাঙ্কে)}, \quad \tan\theta = \frac{\tan\phi_2 - \tan\phi_1}{1 + \tan\phi_2 \tan_1} \text{ (মেরু স্থানাঙ্কে)}$$

m_1 এবং m_2 হচ্ছে ছেদবিন্দুতে বক্ররেখাদ্বয়ের স্পর্শকদ্বয়ের প্রবণতা, ϕ হচ্ছে স্পর্শক ও দূরকের অন্তর্গত কোণ, $\tan\phi = r\frac{d\theta}{dr}$, অতএব মেরু স্থানাঙ্কে দুটি বক্ররেখার ক্ষেত্রে ছেদবিন্দুতে $\tan\phi_1$ এবং $\tan\phi_2$ বার করতে হবে। বক্ররেখা দুটি পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করবে তার শর্ত $m_1 m_2 = -1$ বা $\tan\phi_2 \tan\phi_1 = -1$

d) $r = f(\theta)$ বক্ররেখার $\theta = \alpha$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ ধরা যায়

$$u \equiv \frac{1}{r} = \frac{1}{f(\alpha)}\cos(\theta - \alpha) + B\sin(\theta - \alpha)$$

এবার স্পর্শবিন্দুতে বক্ররেখা ও স্পর্শকের ক্ষেত্রে $\frac{du}{d\theta}$ অভিন্ন হওয়ায় B বের হবে।

e) বক্ররেখার পেডাল সমীকরণ সাধারণভাবে $p = r\sin\phi$ এবং $\sin\phi = r\frac{d\theta}{dr}$ থেকে ϕ অপনয়ন করে পাওয়া যাবে।

f) রৈখিক অভিসারক একটি সরলরেখা $y = mx + c$ যা বক্ররেখার অসীমবিস্তৃত শাখার সঙ্গে অসীমে মিলিত হচ্ছে এবং মূলবিন্দু থেকে সসীম দূরে আছে। একটি n-ঘাত বিশিষ্ট বীজগাণিতিক বক্ররেখার ক্ষেত্রে $\phi_n(m), \phi_{n-1}(m)\ldots$ নির্ণয় করতে হবে ($\phi_n(m)$ পাওয়া যাবে n-ঘাত বিশিষ্ট পদগুলিতে $y = m$, $x = 1$ বসিয়ে। $\phi_n(m) = 0$ সমীকরণ থেকে তির্যক (বা x-অক্ষের সমান্তরাল) অসীমপথের প্রবণতা পাওয়া যাবে। c-র মান $c = -\phi_{n-1}(m)/\phi_n'(m)$ দ্বারা বা $\frac{c^2}{2}\phi_n''(m) - c\phi_{n-1}'(m) + \phi_{n-2}(m) = 0$ সমীকরণ দ্বারা পাওয়া যাবে। বক্ররেখার সমীকরণে y-র সর্বোচ্চ ঘাতবিশিষ্ট y^n-র সহগকে শূন্যমান দ্বারা y-অক্ষের সমান্তরাল রৈখিক পথ পাওয়া যাবে।

8.29 অনুশীলনী ঃ

1) সাধারণ কণিক $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ -র (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হবে।

$$axx_1 + h(x_1y + xy_1) + byy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$$

সমাধান ঃ বক্ররেখার সমীকরণ $F(x,y)=0$ আকারের, অতএব (8.5.2) র প্রয়োগে

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Fx}{Fy} = -\frac{ax + hy + g}{hx + by + f}$$

সুতরাং (x_1,y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)} (x - x_1) = -\frac{ax_1 + hy_1 + g}{hx_1 + by_1 + f}(x - x_1)$$

বা $$axx_1 + h(x_1y + xy_1) + byy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c$$

$$= ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$$

$$= 0 \; [\because (x_1 y_1) \text{ বিন্দুটি কণিকের উপর আছে }]$$

মন্তব্য ঃ (x_1,y_1) বিন্দুতে সাধারণ কণিকের স্পর্শকের সমীকরণের আকৃতিটি সহজেই মনে রাখা যায়। কণিকের সমীকরণে x^2 কে xx_1 দ্বারা, y^2 কে yy_1 দ্বারা, $2xy$ কে (x_1y+xy_1) দ্বারা, $2x$ কে $(x+x_1)$ দ্বারা, $2y$ কে $(y+y_1)$ দ্বারা প্রতিস্থাপিত করলেই স্পর্শক-সমীকরণটি উৎপন্ন হচ্ছে। একটি বিষয় মনে রাখতে হবে এইরূপ প্রতিস্থাপন প্রক্রিয়া কেবলমাত্র বীজগাণিতিক সমীকরণের ক্ষেত্রে, অন্যত্র প্রয়োগ করা যাবে না। যেমন $y = a \sinh x/a$ বক্ররেখার ক্ষেত্রে উল্লেখিত নিয়ম স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয়ে প্রয়োগ করা যাবে না। মূলসূত্র

$$y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)} (x - x_1)$$ দ্বারাই স্পর্শক সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে।

2) $y = mx + c$ সরলরেখা $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$-র স্পর্শক হবে তার শর্তকি?

সমাধান ঃ ধরা যাক্ $y = mx + c$, উপবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$-র (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শক। (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শক অনুশীলনী 1 অনুসারে

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

এখন প্রদত্ত সরলরেখা এবং (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকটি অভিন্ন। তাহলে আমরা লিখতে পারি

$$\frac{y_1/b^2}{1} = \frac{-x_1/a^2}{m} = \frac{1}{c}$$ [যেহেতু উভয় সমীকরণের x-র সহগ, y-র সহগ এবং ধ্রুবক পদ সমানুপাতিক]

অতএব $x_1 = -\frac{a^2m}{c}, y_1 = \frac{b^2}{c}$.

যেহেতু (x_1, y_1) উপবৃত্তের একটি বিন্দু, সেহেতু আমরা পাই

$\frac{y_1^2}{b^2} + \frac{x_1^2}{a^2} = 1$ বা $b^2 + a^2m^2 = c^2$

বা $c = \pm\sqrt{b^2 + a^2m^2}$ এটাই নির্ণেয় শর্ত

মন্তব্য ঃ $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ সরলরেখাদুটি $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তের স্পর্শক।

3) প্রমাণ করুন $y^2 = 4ax$ -র অভিলম্ব $27ay^2 = 4(x-2a)^3$ কে স্পর্শ করে।

সমাধান ঃ $y^2 = 4ax$ -র উপর যে কোন বিন্দু $(am^2, 2am)$ এই বিন্দুতে অভিলম্ব

$$y - 2am = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(am^2, 2am)}}\left(x - am^2\right)$$ কে সরলীকরণ দ্বারা

লেখা যায় $y = mx - 2am - am^3$ ....(i)

$27ay^2 = 4(x-2a)^3$ বক্ররেখাকে নিম্নলিখিত আকারে

প্রকাশ করা হলো ঃ

$x - 2a = 3at$

$y = 2at^{3/2}$ (প্যারামেট্রিক আকার)

এবার এই বক্ররেখার $t = m^2$ -বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$y - 2am^3 = \left(\frac{3at^{1/2}}{3a}\right)_{t=m^2}\left(x - 2a - 3am^2\right)$$

বা $y - 2am^3 = m\left(x - 2a - 3am^2\right)$

বা $y = mx - 2am - am^3$........... (ii)

লক্ষ্য করুন (i) এবং (ii) একই সমীকরণ। অতএব বিষয়টি প্রমাণিত হলো।

4) প্রমাণ করুন $ax^2 + by^2 = 1$ এবং $a'x^2 + b'y^2 = 1$ পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করবে তার শর্ত হবে

$\frac{1}{b} - \frac{1}{b'} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a'}$.

সমাধান ঃ

$$ax^2+by^2=1.........(i)\quad a'x^2+b'y^2=1.............(ii)$$

ধরুন (i) এবং (ii) -র ছেদ বিন্দু (x_1,y_1) অতএব $ax_1^2+by_1^2=1\ldots$ (iii) এবং $a'x_1^2+b'y_1^2=1\ldots$ (iv) এই ছেদবিন্দুতে

$$\text{(i) -র স্পর্শকের প্রবণতা } (m_1) = -\frac{ax_1}{by_1}$$

এবং $$\text{(ii) -র স্পর্শকের প্রবণতা } (m_2) = -\frac{a'x_1}{b'y_1}.$$

(i) এবং (ii) পরস্পর (x_1, y_1) বিন্দুতে লম্বভাবে ছেদ করলে আমরা পাই

$m_1m_2=-1$ (8.9 -র মন্তব্য দেখুন)

বা $$aa'x_1^2+bb'y_1^2=0\,.....\,(v)$$

এখন (iii) (iv) এবং (v) হতে x_1^2 ও y_1^2 কে অপনয়ন দ্বারা আমরা পাই

$$aa'\left(\frac{b'-b}{ab'-a'b}\right)+bb'\left(\frac{a-a'}{ab'-a'b}\right)=0$$

((iii) ও (iv) থেকে x_1^2 ও y_1^2 -র মান (v) এ বসান)

বা $$aa'b'+bb'a=aa'b+bb'a'$$

বা $$\frac{1}{b}+\frac{1}{a'}=\frac{1}{b'}+\frac{1}{a}$$

বা $$\frac{1}{b}-\frac{1}{b'}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a'}$$

5) $y=a\log(x^2-a^2)$ বক্ররেখার যে কোন বিন্দুতে স্পর্শক দৈর্ঘ্য এবং উপস্পর্শক দৈর্ঘ্যের যোগফল দেখান উক্ত বিন্দুর স্থানাঙ্কদ্বয়ের গুণফল সমানুপাতিক।

সমাধান ঃ বক্ররেখার সমীকরণ থেকে $\frac{dy}{dx}=\frac{2ax}{x^2-a^2}$ অতএব বক্ররেখার উপর যে কোন বিন্দু (x, y) এ

$$\text{স্পর্শক দৈর্ঘ্য + উপস্পর্শক} = \frac{y\sqrt{1+y_1^2}}{y_1}+\frac{y}{y_1},\; y_1\equiv\frac{dy}{dx}\quad \text{(8.11 দেখুন)}$$

$$=\frac{y}{\frac{2ax}{x^2-a^2}}\left[\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}+1\right]=\frac{yx}{a}\;\alpha\; yx.$$

6) কার্ডিঅয়েড $r = a(1-\cos\theta)$ এবং বৃত্ত $r = a\cos\theta$ যে বিন্দুতে ছেদ করে সেই বিন্দুতে এই বক্ররেখাদুটির অন্তর্গত কোণ কত?

সমাধান: $r = a(1-\cos\theta)$ ...... (i) $\qquad r = 2a\cos\theta$ ......(ii)

(i) এবং (ii) ছেদবিন্দুর ক্ষেত্রে $a(1-\cos\theta) = 2a\cos\theta$ বা $\cos\theta = \frac{1}{3}$ অতএব ছেদবিন্দুটি $\left(\frac{2a}{3}, \cos^{-1}\frac{1}{3}\right)$. এইবিন্দুতে (i) এবং (ii) -র $\tan\phi$ (ϕ হচ্ছে স্পর্শক ও দূরকের (radius vector -র) অন্তর্গত কোণ) বার করতে হবে। তারপর (8.9.2) অনুসারে অন্তর্গত কোণ θ বার করা যাবে। (8.5.5) সূত্রানুসারে

$$\tan\phi_1 \text{ ((i)-র ক্ষেত্রে)} = \left(r\frac{d\theta}{dr}\right)_{\left(\frac{2a}{3},\cos^{-1}\frac{1}{3}\right)} = \left(\frac{a(1-\cos\theta)}{a\sin\theta}\right)_{\left(\frac{2a}{3},\cos^{-1}\frac{1}{3}\right)}$$

$$= \frac{2/3}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan\phi_2 \text{ ((iii)-র ক্ষেত্রে)} = \left(\frac{2a\cos\theta}{-2a\sin\theta}\right)_{\left(\frac{2a}{3},\cos-1\frac{1}{3}\right)} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

অতএব (8.9.2) অনুসারে

$$\tan\theta = \frac{\tan\phi_2 - \tan\phi_1}{1+\tan\phi_2\tan\phi_1} = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\sqrt{2}$$

অতএব নির্ণেয় অন্তর্গত কোণ $= \tan^{-1}\left(-\sqrt{2}\right)$।

7) $r = ae^{\theta\cot\alpha}$ (সমানকোনী স্পাইরাল)-র ক্ষেত্রে (a,o) বিন্দু হতে চাপ দৈর্ঘ্য s মাপা হচ্ছে। দেখান $\frac{ds}{dr}$ একটি ধ্রুবক।

সমাধান: $r = ae^{\theta\cot\alpha}$ ....(i)

(8.3.10) অনুসারে

$$\frac{ds}{dr} = \sqrt{1+r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2} = \sqrt{1+r^2\frac{1}{r^2\cot^2\alpha}} = \operatorname{Sec}\alpha \text{ (একটি ধ্রুবক)}$$

8) মূলবিন্দু সাপেক্ষে অ্যাসট্রয়েড (Astroid) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ -র পেডাল সমীকরণ দেখান

$r^2+3p^2=a^2$

সমাধান: $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ .....(i)

(i) হতে $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2/3\,x^{-1/3}}{2/3\,y^{-1/3}}=-\dfrac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$ অতএব (i) -র

যে কোন একটি বিন্দু $p(\alpha,\beta)$ তে স্পর্শকের সমীকরণ

$$y-\beta=-\frac{\beta^{1/3}}{\alpha^{1/3}}(x-\alpha)\text{ ....(ii)}$$

অতএব p=(o, o) বিন্দু হতে (ii) -র লম্ব দূরত্ব $=(a\alpha\beta)^{1/3}\left[\because \alpha^{2/3}+\beta^{2/3}=a^{2/3}\right]$

এবং $r^2=[$ (o, o) বিন্দু হতে (α,β) -র দূরত্ব $]^2=\alpha^2+\beta^2$

$$=\left(\alpha^{2/3}+\beta^{2/3}\right)^3-3\alpha^{2/3}\beta^{2/3}\left(\alpha^{2/3}+\beta^{2/3}\right)=a^2-3(a\alpha\beta)^{2/3}=a^2-3p^2$$

9) দেখান $x=\dfrac{1}{t^4-1},\ y=\dfrac{t^3}{t^4-1}$ এই বক্ররেখার রৈখিক অসীমপথ দুটি 4y= 4x+3, 4y+4x+3 = 0

সমাধান: লক্ষ্য করুন $t\to 1$ এবং $t\to -1$ এই উভয় ক্ষেত্রে $x\to\infty, y\to\infty$

উপপাদ্য 8.18 অনুসারে $y=mx+c$ অসীমপথের

$$m=\underset{|x|\to\infty}{Lt}\frac{y}{x} \text{ এবং } c=\underset{|x|\to\infty}{Lt}(y-mx)$$

প্রদত্ত বক্ররেখার ক্ষেত্রে $\dfrac{y}{x}=t^3$ অতএব

$$m_1=\underset{t\to 1}{Lt}\,t^3=1 \text{ এবং } m_2=\underset{t\to -1}{Lt}\,t^3=-1$$

$$\text{এবং } c_1=\underset{t\to 1}{Lt}(y-1x)=\underset{t\to 1}{Lt}\left(\frac{t^3}{t^4-1}-\frac{1}{t^4-1}\right)=\underset{t\to 1}{Lt}\frac{t^2+t+1}{(t^2+1)(t+1)}=\frac{3}{4}$$

$$c_2=\underset{t\to -1}{Lt}(y-(-1)x)=\underset{t\to -1}{Lt}\frac{t^2-t+1}{(t-1)(t^2+1)}=\frac{-3}{4}$$

অতএব রৈখিক অসীমপথ দুটি

$$y = m_1x + c_1 = x + \tfrac{3}{4} \text{ বা } 4y = 4x + 3$$

এবং $y = m_2x + c_2 = -x - \frac{3}{4}$ বা, $4y + 4x + 3 = 0$

8.30 প্রশ্নাবলী ঃ

1. a) নিম্নলিখিত বক্ররেখাগুলির ক্ষেত্রে P (x,y) বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করুন ঃ

(i) $y = a\sinh x/a$ (b) $x^2y + xy^2 = a^3$ (c) $x = a(t + \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$

[উত্তর ঃ— (i) $Y - y = \cos h(x/a)(X - x), Y - y = -\sec h(x/a)(X - x)$

(ii) $$Y - y = -\frac{y(y+2x)}{x(x+2y)}(X - x), Y - y = \frac{x(x+2y)}{y(y+2x)}(X - x)$$

(iii) $$y - a(1 - \cos t) = \tan\frac{1}{2}t(x - a(t + \sin t),$$

$$y - a(1 - \cos t)\tan\frac{1}{2}t + (x - a(t + \sin t)) = 0.$$

সংকেত ঃ স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ $Y - y = \dfrac{dy}{dx}(X - x)$ এবং $Y - y = -\dfrac{dx}{dy}(X - x)$ বক্ররেখার সমীকরণ থেকে $\dfrac{dy}{dx}$ বার করুন]

b) $y = be^{-x/a}$ বক্ররেখাকে y -অক্ষ যে বিন্দুতে ছেদ করেছে সে বিন্দুতে স্পর্শকটি দেখান $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

[সংকেত ছেদ বিন্দু (o, b)]

c) দেখান $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ বক্ররেখার যে কোন বিন্দুতে স্পর্শকের অক্ষদ্বয়ের ছেদিতাংশের সমষ্টি একটি ধ্রুবক।

[সংকেত ঃ (x, y) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ ছেদিতাংশ আকারে সাজান]

d) অ্যাসট্রয়েড $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ বা, $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ -র 't' বিন্দুতে স্পর্শক দেখান $x\sin t + y\cos t = a\sin t\cos t$.

2. (a) $\ell x + my = 1$ সরলরেখাটি $y^2 = 4ax$ -র অভিলম্ব হবে তার শর্ত হবে $\ell^3 a + 2a\ell m^2 = m^2$

[সংকেত ঃ $\ell x + my = 1$ -কে $y^2 = 4ax$ -র (α,β) বিন্দু অভিলম্ব মান করুন এবং (α,β) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করুন। সরলরেখাটি এবং অভিলম্বটি অভেদ হবে; তার ফলে উভয় সমীকরণের x-র সহগ, y-র সহগ এবং ধ্রুবকপদ সমানুপাতিক ধরে শর্তটি নির্ণয় করুন। অনুশীলনী 2 দেখুন।]

b) যদি $x\cos\theta + y\sin\theta = p$ সরলরেখাটি $x^m y^n = a^{m+n}$ কে স্পর্শকে তবে প্রমাণ করুন

$$p^{m+n} m^m n^n = (m+n)^{m+n} a^{m+n} \sin^n\theta \cos^m\theta$$

c) যদি $\ell x + my = n$ সরলরেখাটি $\dfrac{x^p}{a^p} + \dfrac{y^p}{b^p} = 1$ কে স্পর্শ করে, তবে দেখান

$$(al)^{p/p-1} + (bm)^{p/p-1} = n^{p/p-1} \ (p \neq 1).$$

3) (a) দেখান $r = a(1+\cos\theta)$ কার্ডিঅয়েডের $\theta = 2\alpha$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণদ্বয় হবে

$$r\cos(\theta - 3\alpha) = 2a\cos^3\alpha, \qquad r\sin(3\alpha - \theta) = \frac{a}{2}(\sin 3\alpha + \sin\alpha)$$

[8.6 উদাহরণ (d) অনুসরণ করুন]

b) $\dfrac{\ell}{r} = 1 - e\cos\theta$ কণিকে $\theta = \alpha$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ দেখান

$$\frac{\ell}{r} = \cos(\theta - \alpha) - e\cos\theta \qquad \text{এবং} \qquad \frac{e\ell\sin\alpha}{r(1 - e\cos\alpha)} = e\sin\theta - \sin(\theta - \alpha)$$

[8.6 উদাহরণ (d) পদ্ধতি অনুসরণ করুন]

4. a) $y = \log_e x$ এবং $y = \log_{10} x$ বক্রদ্বয়ের ছেদবিন্দুতে উৎপন্ন কোণ দেখান

$$\tan^{-1}\{(\log_{10} x - 1)/\log_{10} x + 1\}$$

b) $y^2 = 4ax$ এবং $x^2 = 4ay$ -র ছেদবিন্দুতে অন্তর্গত কোণ $\tan\left(-\dfrac{3}{4}\right)$ প্রমাণ করুন

[সংকেত ঃ a) এবং b) উভয় প্রশ্নে উদা ঃ 8.10 (a) অনুসরণ করুন]

c) দেখান $r = a(1-\cos\theta)$ এবং $r = a(1+\cos\theta)$ কার্ডিঅয়েড দুটি পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করে।

d) প্রমান করুণ $r^n = a^n \cos n\theta$ এবং $r^n = b^n \sin n\theta$ পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করে। [সংকেত ঃ c) এবং d) প্রশ্নে উদাঃ 8.10 b) অনুসরণ করুন]

e) প্রমাণ করুন $r^n = a^n \sec(n\theta + \alpha)$ এবং $r^n = b^n \sec(n\theta + \beta)$-র অন্তর্গত কোণের মান $|\alpha - \beta|$ সংকেতঃ অনুশীলনী (6) অনুসরণ করুন]

5. a) $by^2=(x+a)^3$ বক্ররেখার যে কোন বিন্দুতে প্রমাণ করুন

(উপস্পর্শকের দৈর্ঘ্য)^2 α উপঅভিলম্বের দৈর্ঘ্য

[8.11 -এর সূত্রাবলী দেখুন]

b) $\frac{2a}{r}=1-\cos\theta$ অধিবৃত্তের ক্ষেত্রে দেখান মেরু উপস্পর্শকের দৈর্ঘ্য $=2a\,\text{cosec}\,\theta$ এবং মেরু উপাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $a\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{3\theta}{2}$

[সংকেত ঃ 8.11 (B) -র সূত্রাবলী দেখুন]

6. a) প্রমাণ করুন $x=a(1-\cos\theta)$, $y=a(\theta+\sin\theta)$ বক্ররেখার $ds=2a\cos\frac{\theta}{2}d\theta$

b) $y=c\cosh\frac{x}{c}$ ক্যাটিনারির (o,c) বিন্দু থেকে (x,y) বিন্দুর চাপদৈর্ঘ্য s হলে দেখান

(i) $\left(\frac{ds}{dx}\right)=\cosh\frac{x}{c}$, (ii) $y^2=c^2+s^2$

[সংকেত ঃ (8.13) -র সূত্রবলী এবং (8.14) উদাঃ দেখুন]

7. a) দেখান $\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1$ -র নাভির সাপেক্ষে পেডাল সমীকরণ দ্বয় যথাক্রমে

$$\frac{b^2}{p^2}=\frac{2a}{r}\pm 1$$

b) দেখান $x^2/a^2\pm y^2/b^2=1$ -র কেন্দ্রের সাপেক্ষে পেডাল সমীকরণ যথাক্রমে

$$\frac{a^2b^2}{p^2}\pm r^2=a^2\pm b^2$$

[সংকেত উভয়প্রশ্নে 8.16 উদাহরণ (a) অনুসরণ করুন]

c) বৃত্তের উপরিস্থিত কোন বিন্দুর সাপেক্ষে বৃত্তের পেডাল সমীকরণ দেখান $2pa=r^2$ [সংকেত ঃ বৃত্তের উপরিস্থিত কোন বিন্দুকে মেরু ধরে বৃত্তের মেরুসমীকরণ $r=2a\cos\theta$, $a=$ ব্যাসার্ধ। উদাঃ (8.16) b দেখুন]

d) লেমনিসেকট $r^2=a^2\cos 2\theta$ -র মেরু সাপেক্ষে পেডাল সমীকরণ দেখান $r^3=a^2p$.

8. a) $x^3+y^3=3axy$ (Folium of Descartes) -র তির্যক রৈখিক অসীমপথটি দেখান $x+y+a=o$.

[সংকেত ঃ উপপাদ্য 8.18 অনুসারে অসীমপথ $y=mx+c$ -র নির্ণয় করুন। বক্ররেখার সমীকরণ থেকে $\frac{y^3}{x^3}=3a\frac{1}{x}\frac{y}{x}-1$ এবং $\underset{|x|\to\alpha}{Lt}\frac{y}{x}=m$ হওয়ায় আমরা পাই $m^3=-1$ বা $m=-1$ এবং

$$c = \underset{|x|\to\infty}{\mathrm{Lt}}(y - mx) = \underset{|x|\to\infty}{\mathrm{Lt}}(y + x)$$

$$= \underset{|x|\to\infty}{\mathrm{Lt}} \frac{3axy}{x^2 - xy + y^2} = \underset{|x|\to 1}{\mathrm{Lt}} \frac{3a}{\frac{x}{y} - 1 + \frac{y}{x}}$$

$$= \frac{3a}{-1-1-1} = -a.$$

আপনারা ইচ্ছা করলে 8.23 উদা ঃ (a) অনুসরণ করতে পারেন]

b) দেখান $y = a\log\sec\frac{x}{a}$-র কোন তির্যক অসীমপথ নেই।

[সংকেতঃ লক্ষ্য করুন $m = \underset{|x|\to\infty}{\mathrm{Lt}} \frac{y}{x}$-র অস্তিত্ব নেই]

c) নিম্নলিখিত বক্ররেখাগুলির ক্ষেত্রে অসীমপথগুলি নির্ণয় করুন

(i) $x^2y^2 - x^2y - xy^2 + x + y + 1 = 0$ [উ: $x = o, y = o, x = 1, y = 1$]

(ii) $y^3 + x^2y + 2xy^2 - y + 1 = 0$ [উ: $y = o, x + y = \pm 1$]

(iii) $x^3 - 2y^3 + xy(2x - y) + y(x - y) + 1 = 0$ [উ: $x - y = 0, x + y + 1 = 0, x + 2y = 1$]

[প্রতি ক্ষেত্রে 8·23 উদাঃ (a) অনুসরণ করুন]

d) $x^3 - 6x^2y + 11xy^2 - 6y^3 + x + y + 1 = 0$ রৈখিক অসীমপথগুলি দেখান $x - y = 0$, $x - 3y = 0$ এবং $x - 2y = 0$

[সংকেত 8.23 উদা (c) দেখুন]

e) $2y^3 - 2x^2y - 4xy^2 + 4x^3 - 14xy + 6y^2 + 4x^2 + 6y + 1 = 0$ বক্ররেখাটি এবং এর অসীমপথগুলির ছেদবিন্দুগুলি দেখান $8x + 2y + 1 = 0$ সরলরেখার উপর অবস্থিত। [সংকেত ঃ 8.25 দেখুন]

9. a) $r\theta = a$-র অসীমপথটি দেখান $r\sin\theta = a$

$r^n \sin\theta = a^n\ (n > 1)$-র রৈখিক অসীমপথগুলি বার করুন।

[উ ঃ $r\sin\left(\theta - \frac{m\pi}{n}\right) = 0, m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots\ldots$]

[সংকেত ঃ 8.27 উদা (a) লক্ষ্য করুন]

সহায়ক পাঠ্য পুস্তকাবলী ঃ

1) An elementary treatise on the differential calculus– Joseph Edwards, Macmillan & Co. 1950

2) Differential Calculus – B. C. Das and B. N. Mukherjee, U. N.. Dhur & Sons.

3) An introduction to analysis, Differential Calculus, Part 1 – R. K. Ghosh & K. C. Maity, Books & Allied (P) Ltd.

4) Modern differential calculus – S. C. Mitra, The Indian Press (Pubs.) Private Ltd. (Allahabad)

5) কলনবিদ্যা, প্রথমভাগ — অধ্যাপক মহাদেব দত্ত এবং শান্তি কুমার চট্টোপাধ্যায়, পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষদ, ১৯৮২.

6) Introduction to real Analysis – Robert G. Bartle & Donald R. Sherbert, John Wiley & Sons, INC, 1994

একক 9 ❑ পরিস্পর্শক, কাস্‌প, নোড্‌, দ্বিবিন্দু, উত্তলতা, অবতলতা, ইনফ্লেকশন-বিন্দু, (Envelope, Cups, node, double point, point of inflection)

গঠন

9.1 প্রস্তাবনা ঃ

স্পর্শক ও অভিলম্বের এককে (৪এ) আমরা জেনেছি বক্ররেখার কোন একটি বিন্দুতে একটি স্পর্শক মানে একটি সরলরেখা যা বক্ররেখাকে কেবলমাত্র একটি বিন্দুতে ছেদ করে বা স্পর্শ করে। বর্তমান এককে সর্বপ্রথম আমাদের চিন্তা করতে হবে একটি সরলরেখার পরিবার বা একটি বক্ররেখার পরিবার নিয়ে। পরিবার মানে একাধিক সদস্য। সরলরেখার পরিবার মানে সেখানে বিশেষ আকারের সরলরেখাকে একত্রিত করা হয়েছে। যে কোন একটি পরিবারের (তা সরলরেখা পরিবার বা বক্ররেখা-পরিবার যাই হোক্ না) প্রতি সদস্যকে স্পর্শ করে আছে এমন একটি সরলরেখা বা বক্ররেখাকে ঘিরেই 'পরিস্পর্শক'' বিষয়ক আলোচনা বিস্তারিত।

কোন একটি বক্ররেখা তার সঞ্চারপথে একটি বিন্দুতে এসে দুটি অংশে বিভক্ত হয়ে দুটি শাখায় বিস্তৃত হতে পারে। যে বিন্দু থেকে বক্ররেখাটির দুটি শাখা উৎপন্ন হচ্ছে সে বিন্দুটিকে দ্বিবিন্দু (double point) বলে। একটি দ্বিবিন্দুতে তাই আমরা দুটি স্পর্শক পেতে পারি। স্পর্শক দুটির বাস্তব অস্তিত্ব, ভিন্নতা, অভিন্নতা ইত্যাদি বিষয় নিয়েই কাস্‌প, নোডের (cusp, node) আলোচনা। সাধারণভাবে $f(x,y) = 0$ আকারের বক্ররেখার ক্ষেত্রে একাধিক শাখা থাকে।

উত্তলতা বা অবতলতার ধারণা আপনাদের আছে। একটি বিন্দু বা একটি সরলরেখার পরিপ্রেক্ষিতে একটি বক্ররেখা তার একটি বিন্দুতে উত্তল না অবতল না অন্যকিছু এ সম্বন্ধীয় বিশ্লেষণাত্মক আলোচনাও আমরা করব।

প্রতিটি বিষয়ে অবকলনবিদ্যার অদ্ভূত প্রয়োগ আপনারা লক্ষ্য করবেন।

9.2 উদ্দেশ্য ঃ

এই এককটি পাঠ করে আপনি —

একটি সরলরেখা-পরিবার বা বক্ররেখা-পরিবারের সকলকে স্পর্শ করে থাকবে এমন বক্ররেখা বা সরলরেখার ধারণা ও তার সমীকরণ গঠন করতে পারবেন।

- যেখানে একটি বক্ররেখার একাধিক শাখা থাকে, সেখানে যে বিন্দু থেকে দুটি শাখা বের হচ্ছে বক্ররেখাটির সেই 'দ্বিবিন্দু' (double point) সংক্রান্ত আলোচনা করতে সক্ষম হবেন।

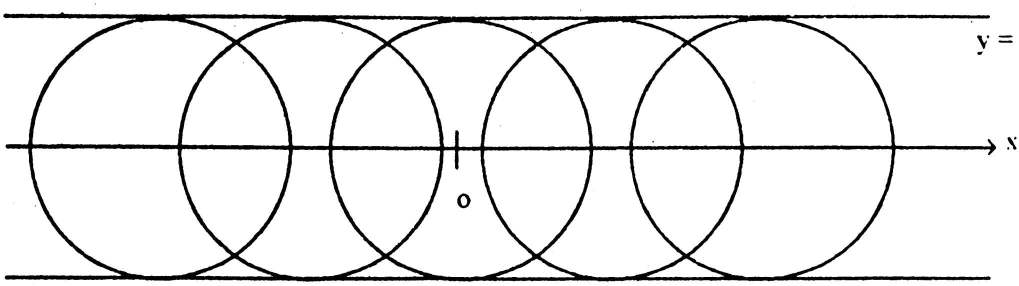
- একটি নির্দিষ্ট বিন্দু বা নির্দিষ্ট সরলরেখার সাপেক্ষে একটি বক্ররেখার কোন একটি বিন্দুতে বক্ররেখাটির উত্তলতা ও অবতলতার (convexity and concavity) ধারণা করতে পারবেন এবং সেই বিষয়ে ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

9.3 একই পরিবারস্থ সরলরেখা বা একই পরিবারস্থ বক্ররেখা এবং পরিস্পর্শকের ধারণা ও সংজ্ঞা (family of curves and idea of envelope and definition)

$y = \sqrt{3}x + c$ সরলরেখার সমীকরণে c এখন একটি ধ্রুবকপদ যে বিভিন্ন সসীম নির্দিষ্ট মান গ্রহণে সক্ষম। অতএব $c = 1, 2, -5, \ldots\ldots$ ইত্যাদি মানে যথাক্রমে $y = \sqrt{3x} + 1$, $y = \sqrt{3x} + 2$, $y = \sqrt{3x} - 5, \ldots.$ ইত্যাদি

সরলরেখাগুলি পাচ্ছি যাদের বৈশিষ্ট্য এই যে প্রত্যেকের প্রবণতা $\sqrt{3}$, কিন্তু y অক্ষের উপর ছেদিতাংশগুলি বিভিন্ন। এক্ষেত্রে $y = \sqrt{3}x + c$ দ্বারা উল্লেখিত সমান্তরাল সরলরেখাগুলিকে একই পরিবারস্থ বলা হবে এবং c কে বলা হবে প্যারামিটার (Parameter)। অনুরূপে $y = mx + 5$, যেখানে m একটি প্যারামিটার, একই পরিবারস্থ সরলরেখা যাদের প্রতিটি সদস্যের y -অক্ষের ছেদিতাংশ 5. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, সরলরেখাগুলি যেখানে a এবং b উভয়েই প্যারামিটার, অবশ্যই একই পরিবারে অন্তর্গত।

$(x-\alpha)^2 + y^2 = \beta^2$ এই বৃত্তের ক্ষেত্রে যদি ধরা যায় β সসীম নির্দিষ্ট মানযুক্ত, কিন্তু α একটি প্যারামিটার



চিত্র 9·3.1

(অর্থাৎ α বিভিন্ন বাস্তব সসীম মান গ্রহণে সমর্থ), তাহলে উক্ত সমীকরণটি যে সকল বৃত্তকে উল্লেখ করে তাদের কেন্দ্র x-অক্ষের উপর বিভিন্ন বিন্দুতে অবস্থিত, কিন্তু ব্যাসার্ধ সকলের ক্ষেত্রে নির্দিষ্ট β (চিত্র লক্ষ্য করুন)। এই পরিবারস্থ বক্ররেখাগুলি অর্থাৎ বৃত্তগুলি এমন যে $y = \pm\beta$ সরলরেখা দুটি এদের সকলকে স্পর্শ করছে। উপরন্তু $y = \pm\beta$ সরলরেখাদ্বয়ের যে কোন বিন্দুতে বৃত্ত পরিবারের কোন না কোন সদস্য অবশ্যই স্পর্শ করে আছে (চিত্রে এ বিষয়টি দেখানো সম্ভব নয়, কিন্তু সহজেই প্রতিপন্ন হচ্ছে যে $y = \beta$-র (a,β) বিন্দুতে স্পর্শ করে আছে $(x-a)^2 + y^2 = \beta^2$ বৃত্তটি)। $y = \beta$ এবং $y = -\beta$ এই সরলরেখা দুটি হলো উক্ত বৃত্ত পরিবারের পরিস্পর্শক।

আমরা জানি $y^2 = 4ax$ (a নির্দিষ্ট বাস্তব মানযুক্ত) অধিবৃত্তে $y = mx + \frac{a}{m}$, m -র যে কোন বাস্তব মানে, একটি স্পর্শক। এখন $y = mx + \frac{a}{m}$, যেখানে m প্যারামিটার, সরলরেখাগুলি একই পরিবারভুক্ত। এই পরিবারের প্রত্যেককে স্পর্শ করে আছে $y^2 = 4ax$ এই বক্ররেখাটি। আবার $y^2 = 4ax$ -র যে কোন বিন্দুতে আমরা একটি স্পর্শক পাব যা অবশ্যই $y = mx + \frac{a}{m}$ পরিবারের একটি সদস্য হবে। অতএব উপরিউক্ত ধারণা থেকে বলা যায় $y^2 = 4ax$ এই বক্ররেখাটি (অধিবৃত্তটি) $y = mx + \frac{a}{m}$ (m = প্যারামিটার) পরিবারের পরিস্পর্শক।

এক প্যারামিটার বিশিষ্ট বক্ররেখা বা সরলরেখা পরিবারের সমীকরণ সাধারণভাবে ধরা হয়

$f(x, y, \alpha) = 0$ আকারে (9.3.1)

দুই প্যারামিটার বিশিষ্ট বক্ররেখা বা সরলরেখা পরিবারের সমীকরণ সাধারণভাবে ধরা হয়।

$f(x,y,\alpha,\beta)=0$ আকারে। (9.3.2)

পরিস্পর্শকের সংজ্ঞা ঃ

এক প্যারামিটার বিশিষ্ট বক্ররেখা বা সরলরেখা পরিবার $f(x,y,\alpha)=0$ -র ক্ষেত্রে যদি দেখা যায় একটি সরলরেখা বা বক্ররেখা $y=\phi(x)$ উক্ত পরিবারের প্রতিটি সদস্যকে স্পর্শ করছে এবং $y=\phi(x)$ -র যে কোন বিন্দুতে উক্ত পরিবারের কোন না কোন সদস্য স্পর্শ করে আছে, তবে $y=\phi(x)$ হবে $f(x,y,\alpha)=0$ পরিবারের পরিস্পর্শক।

একটি প্রদত্ত বক্ররেখা পরিবারের ক্ষেত্রে কিভাবে আমরা পরিস্পর্শকের সমীকরণ গঠন করব তার আলোচনায় আসছি।

9.4 উপপাদ্য ঃ

এক প্যারামিটার বিশিষ্ট বক্ররেখা বা সরলরেখা পরিবারের সমীকরণ $f(x,y,\alpha)=0$ (α হচ্ছে প্যারামিটার)। এই পরিবারের পরিস্পর্শক হচ্ছে একটি বক্ররেখা বা সরলরেখা যা,

$$f(x,y,\alpha)=0$$

এবং
$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,y,\alpha)=0$$

সমীকরণদ্বয় হতে α অপনীত হলে উৎপন্ন হবে।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক্

$$f(x,y,\alpha)=0 \text{ (} \alpha \text{ প্যারামিটার)} \tag{9.4.1}$$

পরিবারের পরিস্পর্শকের সমীকরণ

$$y=\phi x. \tag{9.4.2}$$

মনে করি পরিস্পর্শকটি সন্তত বা অবিচ্ছিন্ন (continuous) এবং অবকলনযোগ্য (differentiable).

(9.4.2) -র উপর একটি বিন্দু $P_1(x_1, y_1)$ নেওয়া হলো। এখন পরিস্পর্শকের সংজ্ঞানুসারে (9.4.1) পরিবারের অবশ্যই কোন একটি সদস্য আছে যা (9.4.2) কে P_1 বিন্দুতে স্পর্শ করছে। ধরা যাক্ $\alpha=\alpha_1$ মানে সেই সদস্যটি পাওয়া যাচ্ছে। অনুরূপে (9.4.2)-র $P_2(x_2, y_2)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে আছে অপর একটি সদস্য $\alpha=\alpha_2$ অতএব α-র মান $P_1, P_2 \ldots$ র স্থানাঙ্কের উপর নির্ভরশীল। সুতরাং সাধারণভাবে (9.4.2)-র উপর $P(x,y)$ বিন্দুর ক্ষেত্রে (9.4.2) কে $P(x,y)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে আছে সেই সদস্যের ক্ষেত্রে $\alpha=\alpha(x,y)$ [x এবং y-র অপেক্ষক বা ফাংশন]. এখন P-র স্থানাঙ্ক (x,y) এবং x ও y সাপেক্ষে α-র মান অবশ্যই (9.4.1)-কে সিদ্ধ করবে।

$$f(x,y,\alpha(x,y))=0 \tag{9.4.3}$$

এই (9.4.3) থেকেই (9.4.2) -র $P(x,y)$ বিন্দুতে স্পর্শকের প্রবণতা নির্ণয় করা যাবে। ধরা যাক্ $\alpha(x,y)$ অপেক্ষকটি অবকলনযোগ্য। তাহলে (9.4.3) থেকে $P(x,y)$ বিন্দুতে (9.4.2) -র

স্পর্শকের প্রবণতা $\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{f_x + f_\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x}}{f_y + f_\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial y}}$

$$\left(f_x \equiv \frac{\partial f}{\partial y}, f_y \equiv \frac{\partial f}{\partial y}, f_\alpha \equiv \frac{\partial f}{\partial \alpha}\right) \qquad (9.4.3)$$

পুণরায় **P (x, y)** বিন্দুতে স্পর্শ করছে (9.4.1) পরিবারের সদস্য (α -র একটি নির্দিষ্ট বাস্তব মানের জন্য) তার ঐ বিন্দুতে স্পর্শকের প্রবণতা

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{fx}{fy} \qquad (9.4.5)$$

(এখানে α ধ্রুবক)

P (x,y) বিন্দুতে (9.4.2)-র স্পর্শক এবং (9.4.1) -র একটি সদস্যের স্পর্শক এই দুই স্পর্শকের প্রবণতা পরস্পর সমান। অতএব,

$$\frac{f_x}{f_y} = \frac{f_x + f_\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x}}{f_y + f_\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial y}}$$

বা, $$\frac{\partial f}{\partial \alpha}\left[f_x \frac{\partial \alpha}{\partial y} - f_y \frac{\partial \alpha}{\partial x}\right] = 0$$

বা, $$\frac{\partial f}{\partial \alpha}\left[\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right] = 0 \qquad (9.4.6)$$

[এখানে $f_y \neq 0$ ধরা হয়েছে]

যেহেতু $\alpha(x, y) \neq$ ধ্রুবক, সেহেতু

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial y}\frac{dy}{dx} \neq 0$$

অতএব, (9.4.6) থেকে পাওয়া যাচ্ছে।

$$f_\alpha(x, y, \alpha) = 0 \qquad (9.4.7)$$

সর্বশেষে এটাই প্রতিপন্ন হলো যে পরিস্পর্শকের উপর যে কোন একটি বিন্দু P (x,y) -র ক্ষেত্রে নিম্নলিখিত সমীকরণ দুটি সিদ্ধ ঃ

$$f(x, y, \alpha) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, \alpha) = 0 \tag{9.4.8}$$

অতএব এই দুটি সমীকরণ থেকে α অপনীত হলে যে অপনীতক (eliminant) -টি পাওয়া যাবে সেটাই হবে পরিস্পর্শকের সমীকরণ।

উপপাদ্যের প্রমাণ সম্পূর্ণ হবে যদি এখন আমরা দেখাতে পারি যে (9.4.8) হতে α-অপনীতকটি (9.4.1) পরিবারের সকল সদস্যকেই স্পর্শ করছে।

(9.4.8) -কেসমাধান করে লেখা যায়

$$x = A(\alpha), \; y = B(\alpha) \tag{9.4.9}$$

(9.4.9) হলো পরিস্পর্শকের প্যারামেট্রিক সমীকরণ। (9.4.9) থেকে α-সাপেক্ষে x এবং y-র মান (9.4.8)এ বসিয়ে আমরা নিম্নলিখিত অভেদটি (identity টি) পাই

$$f(A(\alpha), \; B(\alpha), \; \alpha) = 0 \tag{9.4.10}$$

অতএব $df = 0$

বা, $$\frac{\partial f}{\partial x}A'(\alpha) + \frac{\partial f}{\partial y}B'(\alpha) + \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$$

$$\left[A' = \frac{dA}{d\alpha}, B' = \frac{dB}{d\alpha}\right]$$

বা, $$f_x A'(\alpha) + f_y B'(\alpha) = 0$$

[কারণ $(9.4.8)_2$ অনুসারে $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$]

বা, $$-\frac{f_x}{f_y} = \frac{B'(\alpha)}{A'(\alpha)} \tag{9.4.11}$$

(9.4.1) পরিবারের যে কোন একটি সদস্য মনে করি $\alpha = \alpha_1$. অতএব এই সদস্যটির ক্ষেত্রে

$$f(x, y, \alpha_1) = 0 \tag{9.4.12}$$

আমরা প্রমাণ করব (9.4.8) বা (9.4.9), (9.4.12) কে স্পর্শ করছে। তাহলে প্রমাণ হবে (9.4.8) পরিস্পর্শকটি (9.4.11)-র সকল সদস্যকেই স্পর্শ করছে। (9.4.12) -কে x -সাপেক্ষে অবকলন দ্বারা আমরা পাই।

$$\frac{dy}{dx}(\alpha = \alpha_1 \text{ সদস্যের } (x,y) \text{ বিন্দুতে স্পর্শকের প্রবণতা}) = -\left(\frac{\frac{\delta f}{\delta x}}{\frac{\delta f}{\delta y}}\right)_{\alpha=\alpha_1} \quad (9.4.13)$$

আবার (9.4.9) হতে আমরা পাই

$$\frac{dy}{dx} (\text{পরিস্পর্শকের উপর } (x,y) \text{ বিন্দুতে প্রবণতা}) = \frac{B'(\alpha)}{A'(\alpha)} \quad (9.4.14)$$

$\alpha = \alpha_1$ হলে $(x_1 = A(\alpha_1), y_1 = B(\alpha_1))$ বিন্দুটি পরিস্পর্শক (9.4.9) উপর অবস্থিত। আবার (9.4.10) অভেদটি α-র যে কোন মানে সত্য হওয়ায়

$f(A(\alpha_1), B(\alpha_1), \alpha_1) = 0$ সিদ্ধ হচ্ছে এবং প্রতিপন্ন হচ্ছে এই বিন্দুটি $\alpha = \alpha_1$ সদস্যের (9.4.12) উপরও অবস্থিত। উপরন্তু (9.4.11), (9.4.13) এবং (9.4.14) প্রমাণ করে (x_1, y_1) বিন্দুতে $\alpha = \alpha_1$ সদস্যের স্পর্শকের প্রবণতা এবং পরিস্পর্শকের স্পর্শকের প্রবণতা পরস্পর সমান। অতএব প্রমাণিত হলো (9.4.8) বা (9.4.9) অবশ্যই $\alpha = \alpha_1$ সদস্যকে স্পর্শ করে। $\alpha = \alpha_1$ পরিবারস্থ যে কোন একটি সদস্য যাওয়া প্রমাণিত হলো পরিস্পর্শক (9.4.8) অবশ্যই (9.4.1) পরিবারের সকল সদস্যকে স্পর্শ করছে।

9.5 কতিপয় সংজ্ঞা ঃ সাধারণ বিন্দু (Ordinary point), বিশিষ্ট বিন্দু (Singular point) এবং বৈশিষ্ট্য বিন্দু (Characteristic point).

সাধারণ বিন্দু ঃ $f(x,y,\alpha) = 0$, α নির্দ্দিষ্ট, বক্ররেখার ক্ষেত্রে P(a,b) বিন্দুটিকে সাধারণ বিন্দু বলা হবে যদি উক্ত বিন্দু দ্বারা $f_x = 0$ এবং $f_y = 0$ সমীকরণদ্বয়ের কমপক্ষে একটি সিদ্ধ না হয়।

বিশিষ্ট্য বিন্দু ঃ $f(x,y,\alpha) = 0$, α নির্দিষ্ট, বক্ররেখার ক্ষেত্রে P (a,b) বিন্দুটিকে বিশিষ্ট বিন্দু বলা হবে যদি উক্ত বিন্দু দ্বারা $f_x = 0$ এবং $f_y = 0$ এই উভয় সমীকরণই সিদ্ধ হয়।

বৈশিষ্ট্য বিন্দু ঃ $f(x,y,\alpha) = 0$, α প্যারামিটার, পরিবারের যোগফল সাধারণ বিন্দুগুলির ক্ষেত্রে $f(x,y,\alpha) = 0$, এবং $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,y,\alpha) = 0$ এই উভয় সমীকরণই সিদ্ধ হয় সেই সকল বিন্দুগুলির প্রতিটিকে বৈশিষ্ট্য বিন্দু বলে।

9.6 পরিস্পশর্কের বিকল্প সংজ্ঞা ঃ

আমরা (9.4) উপপাদ্যে, জেনেছি $f(x,y,\alpha) = 0$, α প্যারামিটার, পরিবারের পরিস্পর্শক হচ্ছে $f(x,y,\alpha) = 0$ এবং $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,y,\alpha) = 0$ সমীকরণদ্বয় হতে α-অপনীতকটি। (9.5)এ জেনেছি উক্ত পরিবারের

সাধারণ বিন্দুগুলির মধ্যে বৈশিষ্ট্য বিন্দুগুলি $f(x,y,\alpha)=0$ এবং $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,y,\alpha)=0$ এই উভয় সমীকরণকে সিদ্ধ করে। সুতরাং আমরা লিখতে পারি—

$f(x,y,\alpha)=0$, α **প্যারামিটার, পরিবারের পরিস্পর্শক হচ্ছে উক্ত পরিবারের বৈশিষ্ট্য বিন্দুগুলির সঞ্চারপথ।**

(B) $f(x,y,\alpha)=0, \alpha$ প্যারামিটার, পরিবারের দুটি নিকটবর্তী সদস্যের সমীকরণ

$f(x,y,\alpha)=0$, এবং $f(x,y,\alpha+\delta\alpha)=0$, ধরা যাক্ এরা পরস্পরকে P (x,y) বিন্দুতে ছেদ করে। উক্ত বিন্দুতে উভয় সমীকরণ সিদ্ধ। এখন দ্বিতীয় সমীকরণটি হতে, টেলর উপপাদ্যের সাহায্যে, লেখা যায়,

$$f(x,y,\alpha)+\delta\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}f(x,y,\alpha)+\frac{(\delta\alpha)^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}f(x,y,\alpha)+.....=0$$

বা $$\frac{\partial}{\partial\alpha}f(x,y,\alpha)+\frac{\delta\alpha}{2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}f(x,y,\alpha)+.....=0$$

(যেহেতু $f(x,y,\alpha)=0$)

খুব নিকটবর্তী সদস্যের ক্ষেত্রে আমরা $\delta\alpha\to 0$ লিমিট নিতে পারি। সুতরাং $\delta\alpha\to 0$ **লিমিট নিলে পূর্ব** সমীকরণটি পরিণত হয়

$\frac{\partial}{\partial\alpha}f(x,y,\alpha)=0$ সমীকরণে। অতএব পরিবারের খুব নিকটবর্তী দুটি সদস্যের চরম-ছেদবিন্দুর **(ultimate point of intersection)** স্থানাঙ্ক

$$f(x,y,\alpha)=0 \text{ এবং } \frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,y,\alpha)=0$$

সমীকরণদ্বয়কে সিদ্ধ করে। সুতরাং এই দুই সমীকরণ থেকে α অপনীত হলে আমরা চরম ছেদবিন্দুটির সঞ্চারপথ পাব। অতএব পরিস্পর্শকের বিকল্প সংজ্ঞা আমরা নিম্নোক্ত প্রকারে দিতে পারি ঃ

বক্ররেখা বা সরলরেখা পরিবারের দুটি নিকটবর্তী রেখার চরম ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথই হলো উক্ত পরিবারের পরিস্পর্শক।

9.7 **উপপাদ্য ঃ** $f(x,y,\alpha)=0$, α প্যারামিটার, পরিবারস্থ যে কোন সদস্যের বিশিষ্ট বিন্দু **(Singular point)** -র ক্ষেত্রে

$f(x,y,\alpha)=0$ এবং $\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,y,\alpha)=0$ এই দুই সমীকরণও সিদ্ধ হচ্ছে।

প্রমাণ ঃ $f(x,y,\alpha)=0$, α **প্যারামিটার, সমীকরণ থেকে আমরা পাই,** **(9.7.1)**

$$df \equiv \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial \alpha}d\alpha = 0 \qquad (9.7.2)$$

উক্ত পরিবারের প্রতিটি বিশিষ্ট বিন্দুর ক্ষেত্রে,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}. \qquad (9.7.3)$$

অতএব, (9.7.3) সাহায্যে, পরিবারের প্রতিটি বিশিষ্ট বিন্দুর ক্ষেত্রে, (9.7.2) সমীকরণটি পরিণত হয়।

$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$ সমীকরণে। সুতরাং প্রমাণিত হল বিশিষ্ট বিন্দুগুলির ক্ষেত্রে

$f(x,y,\alpha) = 0$ এবং $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,y,\alpha) = 0$ এই উভয় সমীকরণও সিদ্ধ হচ্ছে।

মন্তব্য : এই উপপাদ্যের সাহায্যে এটা বোঝা যাচ্ছে যে $f(x,y,\alpha) = 0$ এবং $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,y,\alpha) = 0$-র α-অপনীতকটি পরিস্পর্শক হতে পারে অথবা বিশিষ্ট বিন্দুগুলির সঞ্চারপথও হতে পারে। সেজন্য চিত্রের সাহায্যে সঠিকভাবে স্থির করতে হয় উক্ত α-অপনীতকটি পরিস্পর্শক না বিশিষ্ট বিন্দুগুলির সঞ্চার পথ। যখন পরিস্পর্শক হবে, তখন অবশ্যই পরিবারের সকলকে স্পর্শ করবে। বিশিষ্ট বিন্দুর সঞ্চারপথের ক্ষেত্রে তা হবে না। এ বিষয়ে পরিষ্কার ধারণার জন্য পরবর্তী 9.17 দেখুন।

9.18 উদাহরণ :

a) $x\sec^3\theta + y\,\mathrm{cosec}^3\theta = c$ (θ হচ্ছে প্যারামিটার) সরলরেখা পরিবারের পরিস্পর্শক নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান : প্রদত্ত পরিবার

$$f(x,y,\theta) \equiv x\sec^3\theta + y\,\mathrm{cosec}^3\theta - c = 0 \qquad \text{(i)}$$

(i)-কে প্যারামিটার θ সাপেক্ষে অবকলন দ্বারা

$$\frac{\partial}{\partial \theta}f(x,y,\theta) \equiv 3x\sec^3\theta\tan\theta - 3y\,\mathrm{cosec}^3\theta\cot\theta = 0$$

সমীকরণটি সরলীকরণ দ্বারা নিম্নলিখিত সমীকরণে পরিণত হয় :

$$\frac{x}{\mathrm{cosec}^3\theta\ \cot\theta} = \frac{y}{\sec^3\theta\ \tan\theta} \qquad \text{(ii)}$$

উপপাদ্য 9.4 অনুসারে (i) এবং (ii) হতে θ অপনীতকই হবে নির্ণেয় পরিস্পর্শক।

(ii) থেকে আমরা পাচ্ছি

$$\frac{\cos^5\theta}{x} = \frac{\sin^5\theta}{y} = K \quad \text{(ধরা হলো)} \tag{iii}$$

বা, $\dfrac{\cos^2\theta}{x^{2/5}} = \dfrac{\sin^2\theta}{y^{2/5}} = \left(\dfrac{1}{x^{2/5}+y^{2/5}}\right) = K^{2/5}$

(অনুপাতের নিয়মানুসারে)

অতএব $K = \left(\dfrac{1}{x^{2/5}+y^{2/5}}\right)^{5/2}$ এবং (iii)-র সাহায্যে

$$\cos^3\theta = K^{3/5}x^{3/5} = x^{3/5}\left(\frac{1}{x^{2/5}+y^{2/5}}\right)^{3/2}$$

$$\sin^3\theta = K^{3/5}y^{3/5} = y^{3/5}\left(\frac{1}{x^{2/5}+y^{2/5}}\right)^{3/2}$$

এখন (i) এ $\cos^3\theta$ এবং $\sin^3\theta$ -র মান বসিয়ে নির্ণেয় পরিস্পর্শকটি

$$x\frac{\left(x^{2/5}+y^{2/5}\right)^{3/2}}{x^{3/5}} + y\frac{\left(x^{2/5}+y^{2/5}\right)^{3/2}}{y^{3/5}} = c$$

বা, $x^{2/5}+y^{2/5} = c^{2/5}$

b) $y = c(x+2c)^2$, c হচ্ছে প্যারামিটার, পরিবারের পরিস্পর্শক দেখাতে হবে $2x^3+27y=0$.

সমাধান ঃ $f(x,y,c) \equiv y - c(x+2c)^2 = 0$ (i)

এবং $\dfrac{\partial f}{\partial c}(x,y,c) \equiv (x+2c)^2(x+6c)$ অতএব $\dfrac{\partial f}{\partial c}(x,y,c) = 0$

সমীকরণ থেকে আমরা পাই $c = -\dfrac{x}{6}[x+2c \neq 0$, কারণ $x+x=0$ হলে প্রদত্ত বক্ররেখাটি হয় $y=0$ (x-অক্ষ) যা অসম্ভব]

এখন c-র এই মানটি (i)-এ বসিয়ে নির্ণেয় পরিস্পর্শক

$y = -x/6[x-x/3]^2$ বা, $2x^3+27y=0$

9.9 দুই প্যারামিটার বিশিষ্ট বক্ররেখা বা সরলরেখা পরিবারের পরিস্পর্শক নির্ণয় ঃ

ধরা যাক্ দুই প্যারামিটার বিশিষ্ট বক্ররেখা বা সরলরেখা পরিবারের সমীকরণ

$$f(x, y, \alpha, \beta) = 0 \tag{9.9.1}$$

যেখানে α ও β দুটি প্যারামিটার। এই প্যারামিটার দুটি, ধরা যাক, অনির্ভর (independent) নয়, নিম্নলিখিত সমীকরণ দ্বারা আবদ্ধ ঃ

$$\phi(\alpha, \beta) = 0 \tag{9.9.2}$$

এক্ষেত্রে পরিস্পর্শক নির্ণয়ের দুটি পদ্ধতি প্রকাশ করা হলো।

প্রথম পদ্ধতি ঃ পরিস্পর্শকের উপর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু (x,y)-র ক্ষেত্রে (9.9.1) এবং (9.9.2) হতে অবকলন দ্বারা আমরা পাই

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial f}{\partial \beta} d\beta = 0 \tag{9.9.3}$$

$$\frac{\delta\phi}{\delta\alpha} \delta\alpha + \frac{\delta\phi}{\delta\beta} d\beta = 0 \tag{9.9.4}$$

এই দুই সমীকরণ থেকে $\dfrac{d\beta}{d\alpha}$-র মান বের করে লেখা যায়

$$\frac{\partial f / \partial \alpha}{\partial f / \partial \beta} = \frac{\partial \phi / d\alpha}{\partial \phi / \partial \beta} \tag{9.9.5}$$

এখন (9.9.1), (9.9.2) এবং (9.9.5) -র সাহায্যে α ও β কে অপনয়ন দ্বারা পরিস্পর্শকের সমীকরণ পাওয়া যাবে।

দ্বিতীয় পদ্ধতি ঃ (9.9.2) হতে যে কোন একটি প্যারামিটার, ধরা হোক্ β কে, অপর প্যারামিটার α -র সাপেক্ষে প্রকাশ করে (9.9.1) এ উপস্থাপন করলে আমরা এক প্যারামিটার বিশিষ্ট রেখা-পরিবারের সমীকরণ পাব। এক্ষেত্রে $f(x, y, \alpha, \beta(\alpha)) = 0$ এবং $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}(x, y, \alpha, \beta(\alpha)) = 0$ সমীকরণদ্বয় হতে α-অপনীতকই হবে পরিস্পর্শক।

মন্তব্য ঃ সাধারণভাবে প্রথম পদ্ধতিটি অনুসরণ করা অপেক্ষাকৃত সহজ হবে।

9.10 উদাহরণ ঃ

$\sqrt{\dfrac{x}{a}} + \sqrt{\dfrac{y}{b}} = 1$ (যেখানে a এবং b উভয়ে প্যারামিটার) সমীকরণটি একটি অধিবৃত্ত পরিবারের সমীকরণ। যদি a ও b, $a + b = c$ (ধ্রুবক) সম্বন্ধে সম্বন্ধযুক্ত হয় তবে উক্ত পরিবারের পরিস্পর্শক নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান ঃ $\sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\dfrac{y}{b}}=1$ (i)

$a+b=c$ (ii)

(i) ও (ii) কে, পরিস্পর্শকের উপর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু (x, y)-এ, প্যারামিটার সাপেক্ষে অবকলন দ্বারা পাই,

$$\frac{\sqrt{x}}{a^{3/2}}da+\frac{\sqrt{y}}{b^{3/2}}db=0 \quad \text{(iii)}$$

এবং $da+db=0\,.$ (iv)

(iii) এবং (iv) এই উভয় সমীকরণ থেকে $-\dfrac{db}{da}$ মান বের করে পাওয়া যায়।

$$\frac{\sqrt{x}/a^{3/2}}{\sqrt{y}/b^{3/2}}=1$$

বা, $\dfrac{b^{3/2}}{\sqrt{y}}=\dfrac{a^{3/2}}{\sqrt{x}}$

বা, $\dfrac{b}{y^{1/3}}=\dfrac{a}{x^{1/3}}=\dfrac{a+b}{x^{1/3}+y^{1/3}}=\dfrac{c}{x^{1/3}+y^{1/3}}$

বা, $b=\dfrac{c\,y^{1/3}}{x^{1/3}+y^{1/3}}$ এবং $a=\dfrac{c\,x^{1/3}}{x^{1/3}+y^{1/3}}$

a এবং b -র এই মান দুটি (i) এ বসিয়ে পরিস্পর্শকের সমীকরণ হয়

$$\frac{x^{1/2}}{c^{1/2}x^{1/6}}(x^{1/3}+y^{1/3})^{1/2}+\frac{y^{1/2}}{c^{1/2}y^{1/6}}(x^{1/3}+y^{1/3})^{1/2}=1$$

বা, $x^{1/3}(x^{1/3}+y^{1/3})^{1/2}+y^{1/3}(x^{1/3}+y^{1/3})^{1/2}=c^{1/2}$

বা, $(x^{1/3}+y^{1/3})^{3/2}=c^{1/2}$

বা, $x^{1/3}+y^{1/3}=c^{1/3}\,.$

9.11 দ্বিবিন্দু, কাস্‌প, নোড্ এবং কন্‌জুগেট বিন্দু (double point, cusp, node and conjugate point) :

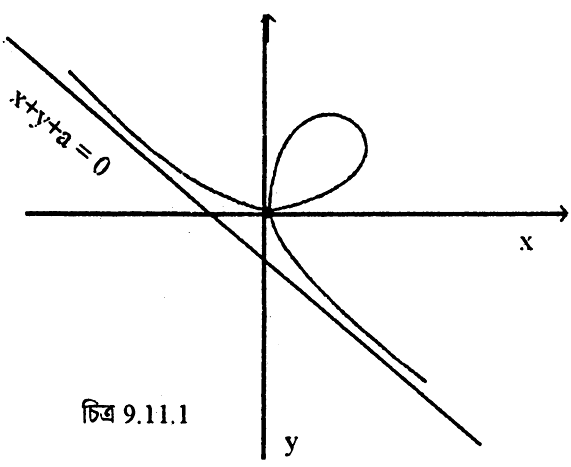
ধারণা ও সংজ্ঞা : বক্ররেখার সমীকরণ যখন $F(x, y) = 0$ আকারে দেওয়া থাকে, তখন উক্ত সমীকরণ থেকে আমরা সর্বদা y-কে x -র সাপেক্ষে এক-মান উৎপাদনকারী (one-valued) অপেক্ষক বা ফাংশন পাই না (যেমন $y^2 - x^2 = a^2$ হতে $y = \pm\sqrt{a^2 + x^2}$ দুটি ফাংশন পাওয়া যাচ্ছে। সুতরাং যখন প্রদত্ত সমীকরণ থেকে y-চলরাশি স্বাধীন চলরাশি x সাপেক্ষে দুই বা ততোধিক মান উৎপন্ন করে, তখন সমীকরণটি দ্বারা প্রকাশিত বক্ররেখাটি দুই বা ততোধিক শাখায় বিস্তৃত হয়।

বক্ররেখার উপর যে বিন্দু হতে দুটি শাখা বিস্তৃত হয় বা বক্ররেখার দুটি শাখা যে বিন্দুতে মিলিত হয় সেই বিন্দুটিকে উক্ত বক্ররেখার **দ্বিবিন্দু** (double point) বলে।

এখন একটি বক্ররেখার একটি দ্বিবিন্দুতে ঐ বিন্দুগামী বক্ররেখার দুটি শাখাতে দুটি স্পর্শক টানা যায়। স্পর্শব দুটি (i) বাস্তব ও পরস্পর ভিন্ন (real and different), (ii) বাস্তব ও পরস্পর অভিন্ন (real and coincident) এবং (iii) কাল্পনিক (imaginary) হতে পারে। (i) প্রথম ক্ষেত্রে দ্বিবিন্দুটিকে **নোড** (node), (ii) দ্বিতীয় ক্ষেত্রে দ্বিবিন্দুটিকে **কাস্‌প** (cusp) এবং (iii) তৃতীয় ক্ষেত্রে দ্বিবিন্দুটিকে **কন্‌জুগেট বিন্দু** বা বিচ্ছিন্ন বিন্দু বলে (conjugate point বা isolated point)।

উদাহরণ সহযোগে বিষয়টিকে স্পষ্টতর করা যাক্।

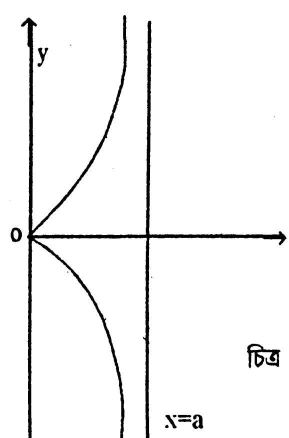
উদাহরণ : (i) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$



চিত্র 9.11.1

বক্ররেখার মূলবিন্দু (0, 0)-তে স্পর্শকের সমীকরণ $xy = 0$ (উদা 8.8 দেখুন), অর্থাৎ (0,0) বিন্দুতে উভয় অক্ষই বক্ররেখার স্পর্শক, অতএব মূলবিন্দুগামী বক্ররেখার দুটি শাখায় দুটি বাস্তব ও অভিন্ন স্পর্শকের অস্তিত্ব স্বীকৃত হচ্ছে। সুতরাং এক্ষেত্রে (0,0) বিন্দুটি বক্ররেখাটি একটি দ্বিবিন্দু এবং দ্বিবিন্দুটি নোড্ (চিত্র দেখুন)।

উদাহরণ : (ii) $y^2(a - x) = x^3$



চিত্র 9.11.2

বক্ররেখাটি 8.7 অনুসারে (0,0) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $y^2 = 0$ বা, $y = 0$ এবং $y = 0$, অর্থাৎ স্পর্শক দ্বারা বাস্তব এবং অভিন্ন। অতএব (0,0) দ্বিবিন্দুটি একটি কাস্‌প (চিত্র দেখুন)।

উদাহরণ : (iii) $a^2x^2 + b^2y^2 = (x^2 + y^2)^2$ বক্ররেখার (0,0) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $a^2x^2 + b^2y^2 = 0$

বা, $by = \pm iax$ যা কাল্পনিক। অতএব এক্ষেত্রে (0,0) বিন্দুটি কন্‌জুগেট বা বিচ্ছিন্ন বিন্দু। এরূপ কাল্পনিক স্পর্শক উৎপন্নের কারণ (0,0) বিন্দুর নিকটবর্তী অঞ্চলে বক্ররেখাটির কোন বিন্দু নেই। তাই বাস্তব স্পর্শকের অস্তিত্ব স্বীকৃত না হয়ে কাল্পনিক স্পর্শক-সমীকরণ পাওয়া যাচ্ছে।

মন্তব্য ঃ (a) **বহু বিন্দু** (multiple point) ঃ যদি বক্ররেখার কোনবিন্দু থেকে দুই-এর অধিক তিন, চার বা তার বেশী শাখা বিস্তৃত থাকে তবে ঐ বিন্দুটিকে **বহুবিন্দু** (multiple point) বলে। আমাদের আলোচনা দ্বিবিন্দু ক্ষেত্রেই সীমিত।

(b) প্রদত্ত তিনটি উদাহরণে আপনারা লক্ষ্য করেছেন প্রতিক্ষেত্রে (0,0) বিন্দুটি দ্বিবিন্দু। কিন্তু (0,0) ব্যতীত অন্য কোন বিন্দুও দ্বিবিন্দু হতে পারে। অতএব সাধারণভাবে দ্বিবিন্দুটি নির্ণয় এবং তার প্রকৃতি জানার জন্য নীচে বর্ণিত উপপাদ্যদুটি দেখুন।

9.12 উপপাদ্য ঃ F(x,y) = 0 সমীকরণদ্বারা ঘোষিত বক্ররেখার (a,b) বিন্দুটি দ্বিবিন্দু হবে তার প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত (necessary and sufficient condition) হলো।

$F_x(a,b) = 0$ এবং $F_y(a,b) = 0$

প্রমাণ ঃ $F(x,y) = 0$ (9.12.1)

বক্ররেখার উপর (a,b) একটি বিন্দু। অতএব

$$F(a,b) = 0 \qquad (9.12.2)$$

(9.12.1)-কে x সাপেক্ষে অবকলন দ্বারা

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (9.12.3)$$

সমীকরণটি পাওয়া যাচ্ছে। (a, b) বিন্দুতে স্পর্শকের প্রবণতা $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(a,b)}$-র মান (9.12.3) দ্বারা বের করা যাবে। কিন্তু, যদি (a,b) একটি দ্বিবিন্দু হয়, তবে $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(a,b)}$-র দুটি মানেই

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{(a,b)} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{(a,b)}\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(a,b)} = 0$$

সমীকরণটি সিদ্ধ হবে। এটি তখনই সম্ভব যখন

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{(a,b)} = 0 \text{ এবং } \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{(a,b)} = 0$$

অতএব উপপাদ্যটি প্রমাণিত হলো।

মন্তব্য : a) দ্বিবিন্দু নির্ণয় পদ্ধতি

$F(x, y) = 0$-র (a, b) একটি দ্বিবিন্দু হলে আমরাই পাই $F(a,b) = 0$, $F_x(a, b) = 0$ এবং $F_y(a,b) = 0$. অতএব $F(x, y) = 0$, $F_x(x, y) = 0$ এবং $F_y(x,y) = 0$ সমীকরণ তিনটির সমাধান দ্বারা দ্বিবিন্দুগুলি নির্ণয় করতে হবে।

9.13 উপপাদ্য

$F(x,y) = 0$ আকারে প্রকাশিত বক্ররেখার (a,b) দ্বিবিন্দুটি নোড়, কাস্‌প, কন্‌জুগেট বিন্দু (বা বিচ্ছিন্ন বিন্দু) হবে তার শর্ত যথাক্রমে

$$[(F_{xy})^2 - F_{yy}F_{xx}] \gtreqless 0 \text{ ।} \tag{9.13.1}$$

প্রমাণ : $F(x,y) = 0$

সমীকরণকে x -র সাপেক্ষে অবকলন দ্বারা পাওয়া যায়

$$F_x + F_y \frac{dy}{dx} = 0 \tag{9.13.2}$$

পুনরায় (9.15.2)-কে x সাপেক্ষে অবকলন দ্বারা নিম্নলিখিত সমীকরণটি গঠিত হয়।

$$F_{xx} + F_{yx}\frac{dy}{dx} + \left[F_{xy} + F_{yy}\frac{dy}{dx}\right]\frac{dy}{dx} + F_y\frac{d^2y}{dx} = 0 \tag{9.13.3}$$

ধরা যাক্‌, $F_{xy}(a, b) = F_{yx}(a, b)$. (9.13.4)

উপপাদ্য 9.12 অনুসারে (a,b) দ্বিবিন্দু হওয়ায়

$$F_x(a, b) = F_y(a, b) = 0 \tag{9.13.5}$$

অতএব (9.13.3)-এ $x = a$ এবং $y = b$ বসিয়ে আমরা পাই

$$F_{xx}(a,b) + 2F_{xy}(a,b)\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(a,b)} + F_{yy}(a,b)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2_{(a,b)} = 0. \tag{9.13.6}$$

এই সমীকরণটি $(\frac{dy}{dx})$-র একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। অতএব (a,b) দ্বিবিন্দুটি নোড়, কাস্‌প বা কন্‌জুগেট বিন্দু হবে যদি (9.13.6) হতে উৎপন্ন (a,b) বিন্দুতে স্পর্শকের প্রবণতা $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(a,b)}$ -র মানদুটি যথাক্রমে বাস্তব ও পরস্পর ভিন্ন, বাস্তব ও অভিন্ন বা কাল্পনিক হয়। অতএব নির্ণেয় শর্ত

$$\left(F_{xy}(a,b)\right)^2 - F_{xx}(a,b)F_{yy}(a,b) \gtreqless 0.$$

মন্তব্য : $F_{xy}(a,b) = F_{xx}(a,b) = F_y(a,b) = 0$ হলে (a,b) বিন্দুটি বহু বিন্দু হবে (multiple point হবে)।

9.14 উদাহরণ ঃ

$ay^2 = (x-a)^2(x-b)$ বিন্দুটি (0,0) বিন্দুগামী নয়। দেখা যাক্ এর (0,0) ব্যতীত অন্য কোন বিন্দু দ্বিবিন্দু হয় কিনা। দ্বিবিন্দু-র অস্তিত্ব স্বীকৃত হলে, তাদের প্রকৃতি নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান ঃ $ay^2 = (x-a)^2(x-b)$ (i)

সমীকরণটি লেখা যায় নিম্নলিখিত আকারে ঃ

$$F(x,y) \equiv ay^2 - (x-a)^2(x-b) \tag{ii}$$

এখন $F_x \equiv -2(x-a)(x-b) - (x-a)^2 = 0$ (iii)

এবং $F_y \equiv 2ay = 0$ (iv)

সমীকরণদ্বয়কে সমাধান করে আমরা

$(a,0)$ এবং $\left(\dfrac{a+2b}{3},0\right)$ বিন্দু দুটি পাচ্ছি (উপপাদ্য 9.14 উপপাদ্য 3 মন্তব্য দেখুন)। এই বিন্দু দুটির মধ্যে $(a,0)$ বিন্দুটি দ্বারা (i) সিদ্ধ হচ্ছে। অতএব $(a,0)$ বিন্দুটি (i) -র একটি দ্বিবিন্দু।

এবং (iii) এবং (iv) থেকেআমরা পাচ্ছি

$$F_{xx} = -2(x-b) - 4(x-a), F_{yx} = 0, F_{yy} = 2a$$

অতএব $[(F_{yx})^2 - F_{xx}F_{yy}]_{(a,0)} = 2(a-b)\,2a \gtrless 0$ হবে যখন $a \gtrless b$ হবে।

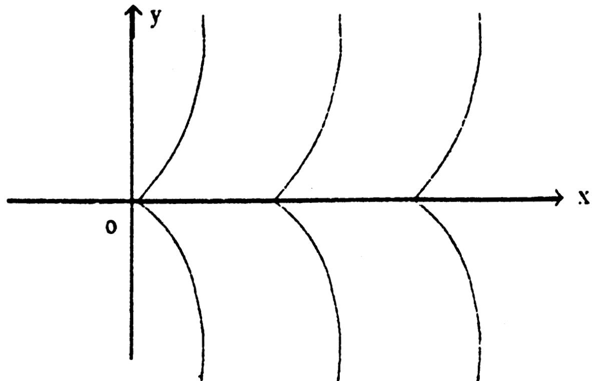
সুতরাং, উপপাদ্য 9.13 অনুসারে (a, 0) দ্বিবিন্দুটি নোড্, কাস্প বা কন্জুগেট বিন্দু হবে যখন $a > b$, $a = b$ বা $a < b$ হবে।

9.15 একটি বিশেষ সর্তকতা ঃ

9.7 উপপাদ্যে আমরা দেখেছি $f(x,y,\alpha) = 0$ পরিবারের $f(x,y,\alpha) = 0$ এবং $f_\alpha(x,y,\alpha) = 0$ সমীকরণদ্বয় হতে α-অপনীতকটি পরিস্পর্শক বা বিশিষ্ট বিন্দুর সঞ্চারপথ হতে পারে। 9.14 এবং 9.15 উপপাদ্য অনুসারে দ্বিবিন্দু অবশ্যই বিশিষ্ট বিন্দু এবং একটি দ্বিবিন্দু কখনও নোড্, কখনও কাস্প বা কখনও ইন্‌ফ্লেক্‌শন বিন্দু। নিম্নলিখিত উদাহরণ দুটিতে লক্ষ্য করুন উক্ত α-উপনীতকটি কি হচ্ছে।

উদা ঃ 1. $y^2 - (x+\alpha)^3 = 0$, α প্যারামিটার, উপ-ত্রিঘাত অধিবৃত্ত (Semicubical parabolas) পরিবারের $\dfrac{\partial}{\partial\alpha} f(x,y,\alpha) \equiv -3(x+\alpha)^2 = 0$ [এখানে $f(x,y,\alpha) \equiv y^2 - (x+\alpha)^3$] সমীকরণ থেকে আমরা পাই $x+\alpha = 0$ অতএব $f(x,y,\alpha) = 0$ এবং $f_\alpha(x,y,\alpha) = 0$ সমীকরণদ্বয়ের α অপনীতকটি $y^2 = 0$ বা $y = 0$ (x -অক্ষ)।

আবার দেখুন, $f_x = 0 = f_y$ সমীকরণদ্বয় থেকে আমরা পাচ্ছি $(-\alpha,0)$ বিন্দু। এবং এই বিন্দুর ক্ষেত্রে $((f_{xy})^2 - f_{xx}f_{yy}) = 0$ এবং $(f_{xy}, f_{xx}, f_{yy}) \neq (0,0,0)$. অতএব $(-\alpha,0)$ একটি কাস্‌প। অতএব প্রদত্ত পরিবারের কাস্‌পমলর (বিশিষ্ট বিন্দুগুলির) সঞ্চারপথ $y = 0$ (x-অক্ষ) এখন প্রশ্ন $y = 0$ প্রকৃতপক্ষে কি? চিত্র (9.15.1) লক্ষ করুন $y = 0$ কাস্‌প সঞ্চারপথ, পরিস্পর্শক নয়।



চিত্র 9.15.1

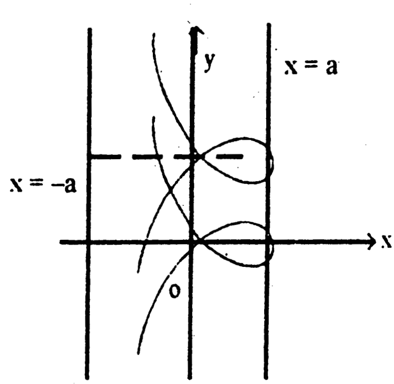
উদা ঃ $x^2(x-a)+(x+a)(y-m)^2 = 0$, m প্যারামিটার এবং a নির্দিষ্ট বক্র রেখা পরিবারের, $f(x,y,m) = 0$ এবং $f_m\ (x,y,m) = 0$ সমীকরণদ্বয় হতে m অপনীতকটি হবে

$x^2(x-a) = 0$

অতএব, $x = 0$ অথবা $x = a$.

আবার $f_x = f_y = 0 \Rightarrow (0,m)$ বিন্দুগুলি, m-র বিভিন্ন মানে, বিশিষ্ট বিন্দু। এবার দেখুন $(f_{xy})_{(0,m)} = 0$, $(f_{xx})_{(0,m)} = -2a, (f_{yy})_{(0,m)} = 2a$. অতএব এই বিশিষ্ট বিন্দুগুলি কাস্‌প এবং কাস্‌প সঞ্চারপথটি হচ্ছে $x = 0$ (y-অক্ষ) সরলরেখাটি।

অতএব $f(x,y,m) = 0$ এবং $f_m\ (x,y,m) = 0$ -র m- অপনীতকে হতে প্রাপ্ত $x = 0$ কাস্‌প-সঞ্চারপথ এবং $x = a$ পরিস্পর্শক। চিত্রে দেখুন, $x = -a$ অসীমপথ, $x=0$ কাস্‌পা সঞ্চারপথ $x=a$ পরিস্পর্শক যা বক্ররেখা পরিবারের সকলকে স্পর্শ করছে।



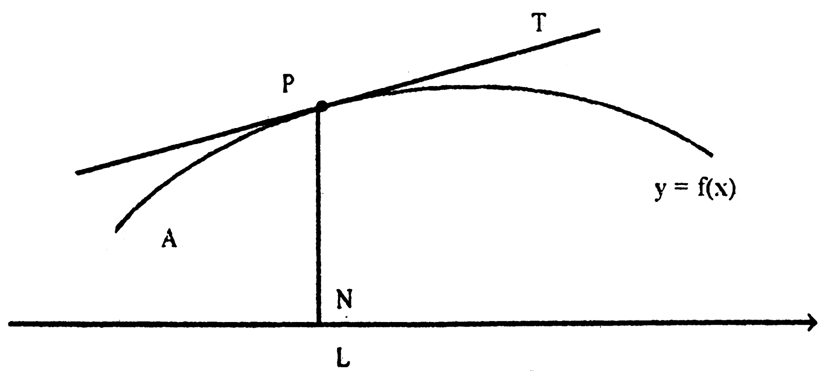
চিত্র 9.15.2

9.16 বক্ররেখার অবতলতা, উত্তলতা এবং ইন্‌ফ্লেক্‌শনবিন্দু (concavity, convexity and point of inflexion) ঃ ধারনা ও সংজ্ঞা

A) একটি বিন্দুর সাপেক্ষে ঃ

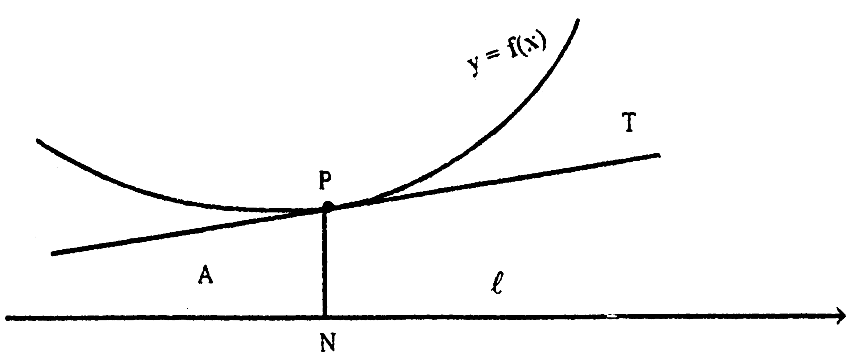
বক্ররেখার সমীকরণ $y = f(x)$ আকারে আছে ধরা হলো। আমরা মনে করছি স্বাধীন চলরাশি x -র একটি মানে y চলরাশি উক্ত অপেক্ষক (বা ফাংশন) দ্বারা কেবলমাত্র একটি মানই উৎপন্ন করছে (One-valued function, বক্ররেখাটি এক শাখা বিশিষ্ট)। এরূপ **বক্ররেখার উপর কোন একটি বিন্দু P-র নিকটবর্তী উভয়পাশে বক্ররেখার বিন্দুগুলির অবস্থান** (অর্থাৎ খুব স্বল্প পরিসরে P -র উভয়দিকে বক্রাংশের অবস্থিতি) **P বিন্দুতে স্পর্শক PT-তে অবস্থিত নয় এরূপ অপর একটি বিন্দু A-র পরিপ্রেক্ষিতে অবলোকন করেই বক্ররেখাটির P-তে অবতল বা উত্তল বা বিন্দুটি ইনফ্লেক্‌শন বিন্দু কিনা তা বিচার করা হয়।**

যদি P-র উভয় পাশে স্বল্প পরিসরে বক্রাংশটি PT স্পর্শক এবং A-র অন্তর্বর্তী স্থানে থাকে তবে P-তে বক্ররেখাটিকে A-র সাপেক্ষে অরতল (concave) এই আখ্যা দেওয়া হয় (চিত্র 9.16.1 দেখুন)।



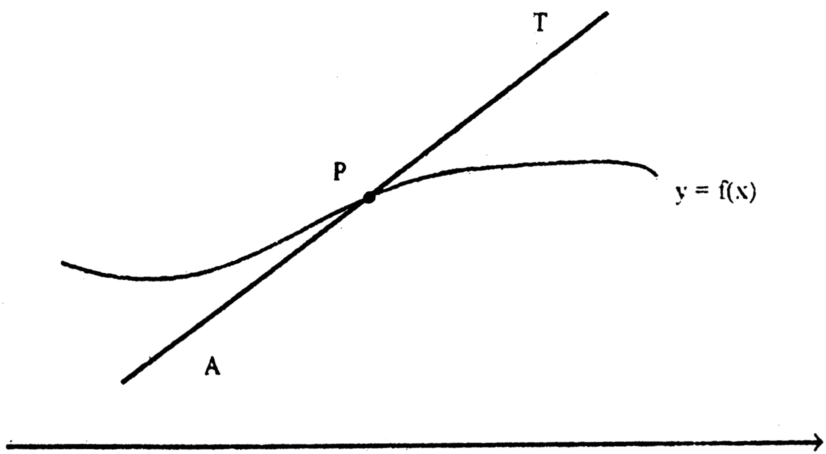
চিত্র 9.16.1

যদি P-র উভয়পাশে স্বল্প পরিসরে বক্রাংশটি PT স্পর্শক এবং A-র অন্তর্বর্তী স্থানে না থাকে, তবে P-তে বক্ররেখাটিকে A-র সাপেক্ষে উত্তল (convex) এই আখ্যা দেওয়া হয় (চিত্র 9.16.2 দেখুন)।



চিত্র 9.16.2

যদি P-র উভয়পাশে স্বল্প-পরিসরে বক্রাংশের মধ্যে একপাশের অংশ PT স্পর্শক ও A -র অন্তবর্তী স্থানে থাকে এবং অপরপাশের অংশ উক্ত অন্তবর্তী স্থানের বাইরে থাকে তবে P বিন্দুটিকে বক্ররেখার একটা ইন্‌ফ্লেক্‌শন বিন্দু বলে। এক্ষেত্রে P-র একপাশে বক্ররেখাটি A সাপেক্ষে অবতল এবং অপর পাশে বক্ররেখাটি উত্তল। যার ফলে PT স্পর্শকটি বক্ররেখাকে P বিন্দুতে ভেদ করে যাচ্ছে (চিত্র দেখুন)



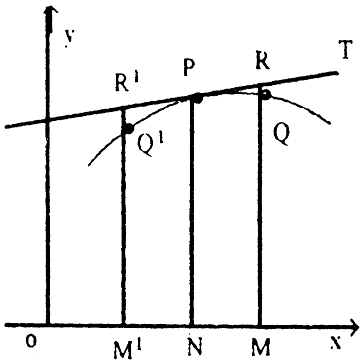
চিত্র 9.16.3

B) একটি সরলরেখার সাপেক্ষে

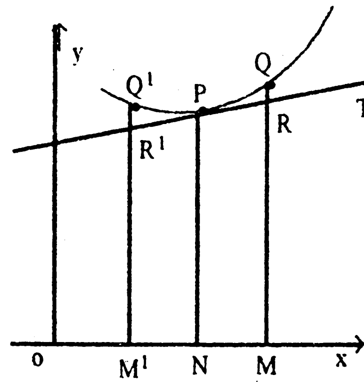
y = f(x) বক্ররেখার উপর P বিন্দুতে বক্ররেখাটিকে, P বিন্দুগামী নয়, এরূপ একটি সরলরেখা ℓ -র সাপেক্ষে, অবতল বা উত্তল আখ্যা দেওয়া হবে যদি P বিন্দু হতে ℓ -র উপর অংকিত লম্বের পাদবিন্দু N-র সাপেক্ষে বক্ররেখাটি P -তে অবতলতা বা উত্ততলা থাকে (চিত্র 19.8.1 এবং 19.8.2 দেখুন)। ইনফ্লেকশন বিন্দুর ক্ষেত্রে (A) -তে বর্ণিত সংজ্ঞাই বর্তমান।

9.19 x-অক্ষের সাপেক্ষে y = f(x) বক্ররেখার P (x,y) বিন্দুতে অবতলতা বা উত্তলতা বা P বিন্দুটি ইন্‌ফ্লেক্‌শন বিন্দু হওয়ার শর্ত নির্ণয় ঃ

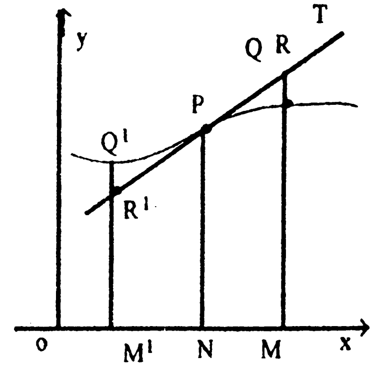
y = f(x) বক্ররেখার উপর P (x,y) বিন্দুর নিকটবর্তী অপর একটি বিন্দু Q (x + h, y + k). h > 0 হলে P -র ডানপাশে Q-র অবস্থান, নচেৎ P-র বামপাশে। এখানে Q -বিন্দুটি P-র খুব নিকটস্থ, অতএব h এবং k -র মান খুবই ছোট। P বিন্দুতে স্পর্শক PT. PT স্পর্শক y-অক্ষের সমান্তরাল নয়। QM $\perp$ x -অক্ষ এবং QM, PT কে R বিন্দুতে ছেদ করছে। PN $\perp$ x -অক্ষ।



চিত্র 9.17.1



চিত্র 9.17.2



চিত্র 9.17.3

PT -র সমীকরণ

$$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x), \tag{9.17.1}$$

(X, Y) হচ্ছে PT -র উপর যে কোন একটি বিন্দু। এই সমীকরণে x -র স্থানে $x+h$ বসিয়ে আমরা R-র y-স্থানাঙ্ক RM -র মান পাব।

$$RM = y + h\frac{dy}{dx} \tag{9.17.2}$$

আবার Q-র y -স্থানাঙ্ক QM পাব $y=f(x)$-এ x -র স্থানে $x+h$ বসিয়ে। অতএব,

$$QM = f(x+h). \tag{9.17.3}$$

ধরা যাক্ P -র নিকটবর্তী স্বল্প পরিসরে উভয় পাশে $f(x)$ এবং $f'(x) \equiv \frac{df}{dx}$ সন্তত বা অবিচ্ছিন্ন (continuous) এবং $f''(x) \equiv \frac{df}{dx^2}$ -র অস্তিত্ব স্বীকৃত হচ্ছে। এখন টেলর উপপাদ্য অনুসারে

$$QM = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{\underline{|2}} f''(x+\theta h), 0<\theta<1 \tag{9.17.4}$$

অতএব, $$QM - RM = \frac{h^2}{\underline{|2}} f''(x+\theta h). \tag{9.17.5}$$

চিত্র, (9.17.1) এবং (9.17.2) অনুসারে h -র ধনাত্মক বা ঋণাত্মক মানে ($h<0$ ক্ষেত্রে Q -র পরিবর্তে Q′ বিন্দুটি দেখুন) x-অক্ষের সাপেক্ষে (অর্থাৎ P-র x অক্ষের উপর লম্বের পাদবিন্দু N সাপেক্ষে বক্ররেখাটি P -তে অবতল বা উত্তল হবে যদি $QM < RM$ বা $QM > RM$ হয়। এখানে অবশ্যই লক্ষণীয় যে QM এবং RM উভয়েই ধনাত্মক। তার কারণ P (x,y)-র y স্থানাঙ্ক $PN > 0$.

সুতরাং যখন P(x,y) -র y স্থানাঙ্ক $PN > 0$, তখন (9.17.5) হতে P-তে বক্ররেখার অবতলতা বা উত্তলতার শর্ত হচ্ছে

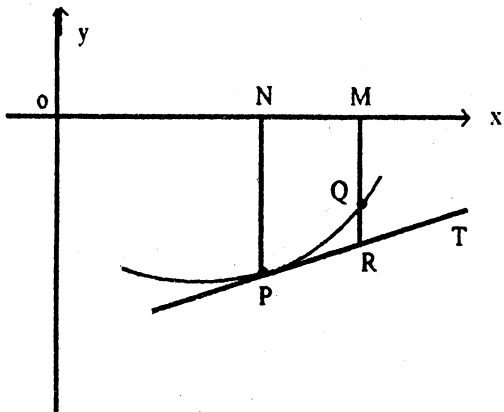
$QM < RM$ বা $QM > RM$

অর্থাৎ $f''(x+\theta h) < 0$ বা $f''(x+\theta h) > 0$ (9.17.6)

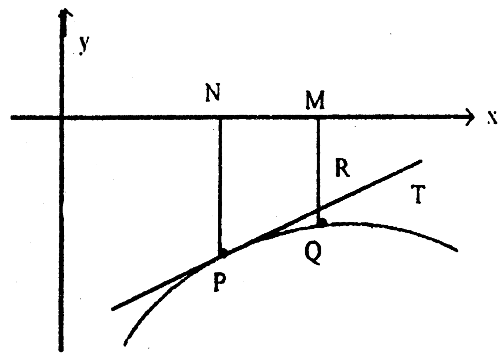
(h^2 -র চিহ্ন সর্বদা ধনাত্মক)

P -র নিকটবর্তী স্বল্প পরিসরে $f''(x)$-র অস্তিত্ব স্বীকৃত হচ্ছে এ আমরা আগেই ধরে নিয়েছি। এখন মনে করি $f''(x)$ সন্তত এবং $f''(x) \neq 0$, তাহলে $0 < \theta < 1$ এবং h-র মান খব ছোট হওয়ায়, $f''(x+\theta h)$ এবং $f''(x)$ সমচিহ্নযুক্ত হবে। অতএব **P (x , y) বিন্দুতে, যখন $y > 0$, $y = f(x)$ বক্ররেখা x-অক্ষের সাপেক্ষে অবতল হবে তার শর্ত হল $f''(x) < 0$ বা $yf''(x) < 0$.** (9.19.7)

উক্ত বিন্দুতে বক্ররেখাটি উত্তল হবে তার শর্ত $yf''(x) > 0$.



চিত্র 9.17.4



চিত্র 9.17.5

P (x,y) -র y -স্থানাঙ্ক ঋণাত্মক হলে, চিত্র 9.17.4 এবং 9.17.5 অনুসারে QM ও RM উভয়েই ঋণাত্মক হবে এবং P -তে বক্ররেখাটি অবতল (বা উত্তল) হবে তার শর্ত ঃ

$$|QM| < |RM| \quad (\text{বা } |QM| > |RM|)$$

অর্থাৎ, $QM > RM$ (বা $QM > RM$)

($\because$ QM এবং RM উভয়েই ঋণাত্মক)

অর্থাৎ, $f''(x) > 0$ (বা $f''(x) < 0$)

(9.17.5) অনুসারে

অর্থাৎ, $yf''(x) < 0$ (বা $yf''(x) > 0$) (9.17.8)

(যেহেতু $y < 0$)

অতএব $P(x,y)$ -র y স্থানাঙ্ক ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যাই হোক্ না কেন P-তে $y = f(x)$ বক্ররেখার x-অক্ষ সাপেক্ষে অবতলতা বা উত্তলতার শর্ত হচ্ছে ঃ

(i) $yf''(x) < 0$ **হলে বক্ররেখাটি P-তে অবতল**

(ii) $yf''(x) > 0$ **হলে বক্ররেখাটি P-তে উত্তল।** (9.17.9)

P-বিন্দুটি ইন্‌ফ্লেক্‌শন বিন্দু হবে তার শর্ত এবার আমরা নির্ণয় করব। মনে করি P-তে $f''(x) = 0$ এবং P-র নিকটবর্তী স্বল্প পরিসরে $f'''(x) \equiv \frac{d^3f}{dx^3}$ সন্তত। তাহলে (9.17.4) পরিবর্তে আমরা লিখতে পারি

$$QM = f(x+h)$$

$$= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{\underline{|2}} f''(x) + \frac{h^3}{\underline{|3}} f'''(x+\theta h) \ (0 < \theta < 1)$$

$$= f(x) + hf'(x) + \frac{h^3}{\underline{|3}} f'''(x+\theta h) \quad (9.17.10)$$

এবং (9.17.9) ও (9.17.2) হতে

$$QM - RM = \frac{h^3}{\underline{|3}} f'''(x+\theta h) \tag{9.17.11}$$

$f'''(x)$ সন্তত হওয়ায় $f'''(x+\theta h)$ ও $f'''(x)$ সমচিহ্নযুক্ত। অতএব (9.17.11) থেকে সহজেই বোঝা যাচ্ছে (চিত্র 9.17.3 দেখুন) $f'''(x) > 0$ হলে $QM > RM,\ h > 0$ ক্ষেত্রে এবং $QM < RM,\ h < 0$ ক্ষেত্রে। আবার $f'''(x) < 0$ হলে $QM < RM,\ h > 0$ ক্ষেত্রে এবং $QM > RM,\ h < 0$ ক্ষেত্রে। সুতরাং $f'''(x)$ যে চিহ্নযুক্ত হোক্ না কেন P -র নিকটবর্তী স্বল্প পরিসরে বক্ররেখার একপাশের বিন্দুগুলির PT স্পর্শক ও N -র অন্তর্বর্তী স্থানে থাকছে এবং অপরপাশের বিন্দুগুলি উক্ত অন্তর্বর্তী স্থানে থাকছে না। অর্থাৎ, স্পর্শক PT, P -তে বক্ররেখাকে ভেদ করে যাচ্ছে। **অতএব P বিন্দুটি ইন্‌ফ্লেক্‌শন বিন্দু হবে তার শর্ত ঃ**

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \text{ এবং } \frac{d^3y}{dx^3} \neq 0 \tag{9.17.12}$$

মন্তব্য ঃ (a) উপরের আলোচনা-নিবদ্ধ আছে এ ধারণায় যে P -তে স্পর্শক PT কখনই y-অক্ষের সমান্তরাল নয়। যদি PT, $y-$অক্ষের সমান্তরাল হয়, তখন $\frac{dy}{dx}$-র P বিন্দুতে মান অসংজ্ঞাত হবে এবং $f(x+h)$-এ টেলর উপপাদ্য প্রয়োগ করতে পারব না। সুতরাং **যদি PT স্পর্শক $y-$অক্ষের সমান্তরাল হয়, তখন P বিন্দুতে বক্ররেখার অবতলতা বা উত্তলতা বিচার করতে হবে $x-$অক্ষের পরিবর্তে $y-$অক্ষের সাপেক্ষে। একই পদ্ধতি অনুসরণক্রমে P-তে বক্ররেখাটি $y-$অক্ষের সাপেক্ষে অবতল বা উত্তল হবে তার শর্ত হবে।**

$$x\frac{d^2x}{dy^2} > 0 \text{ এবং } x\frac{d^2x}{dy^2} < 0$$

যখন P-তে $\frac{dy}{dx}$ অসংজ্ঞাত, একই পদ্ধতি অনুসরণক্রমে P বিন্দুটি ইন্‌ফ্লেক্‌শন বিন্দু হবে তার শর্ত হবে ঃ

$$\frac{d^2x}{dy^2} = 0 \text{ এবং } \frac{d^3x}{dy^3} \neq 0$$

(b) অনেক সময় $y > 0$ ক্ষেত্রে P-তে x অক্ষ সাপেক্ষে অবতলতাকে বক্ররেখার P বিন্দুতে নিম্নমুখী অবতলতা আছে বলা হয় (Concave downward at P) বা উর্ধ্বমুখী উত্তলতা আছে বলা হয়। (convex upward at P) [চিত্র 9.17.1 দেখুন]

(c) $y > 0$ ক্ষেত্রে P -তে x -অক্ষ সাপেক্ষে উত্তলতাকে বক্ররেখার P -বিন্দুতে উর্ধ্বমুখী অবতলতা আছে বলা হয় (concave upward at P) অথবা নিম্নমুখী উত্তলতা আছে বলা হয়। (Convex downward at P) (চিত্র 9.17.2 দেখুন)

(d) P ইনফ্লেক্‌শন বিন্দু হবে তার বিকল্প শর্ত ঃ

(9.19.5) অনুসারে,

$$QM - RM = \frac{h^2}{\lfloor 2}f''(x+\theta h)$$

এবং $f''(x+\theta h)$ ও $f''(x)$ সমচিহ্নযুক্ত (কারণ, আমরা ধরে নিয়েছি $f''(x)$ সন্তত], এখন যদি দেখা যায় $h > 0$ ক্ষেত্রে (অর্থাৎ P -র ডানপাশে) $f''(x)$ যে চিহ্নযুক্ত, $h < 0$ ক্ষেত্রে (অর্থাৎ P -র বামপাশে) $f''(x)$ তার বিপরীত চিহ্নযুক্ত, তাহলে উপরে লেখা সমীকরণ থেকে সহজেই প্রতিপন্ন হচ্ছে যে PT স্পর্শক বক্ররেখাটিকে P বিন্দুতে ভেদ করে যাচ্ছে। অতএব P বিন্দুটি একটি ইন্‌ফ্লেক্‌শনবিন্দু হচ্ছে। **সুতরাং P বিন্দুটি বক্ররেখার একটি ইন্‌ফ্লেকশনবিন্দু হবে তার আর একটি শর্ত হচ্ছে এই যে $f''(x)$ -র P-র ডান ও বামপাশে বিপরীত চিহ্নযুক্ত।**

(d) সাধারণ শর্ত (most general condition) :

যদি দেখা যায় P (x,y) বিন্দুতে

$$f''(x) = f'''(x) = \ldots\ldots = f^{n-1}(x) = 0 \text{ এবং } f^n(x) \neq 0,$$

তখন (9.17.10) পরিবর্তে

$$QM - RM = \frac{h^n}{\lfloor n}f^n(x+\theta h)$$

তখন ধরা যাক্ $f^n(x)$ সন্তত এবং তার ফলে $f^n(x+\theta h)$ ও $f^n(x)$ সমচিহ্নযুক্ত। অতএব

(i) n জোড়সংখ্যা, $y > 0, h > 0$ বা $h < 0$ এবং $f^n(x) < 0$

$$\Rightarrow QM < RM$$

$\Rightarrow P(x,y)$ বিন্দুতে বক্ররেখাটি x-অক্ষের সাপেক্ষে অবতল।

n জোড়সংখ্যা, $y < 0$, $h > 0$ বা $h < 0$ এবং $f^n(x) > 0$

$\Rightarrow |QM| < |RM|$

$\Rightarrow QM > RM$ (যেহেতু উভয়ে ঋণাত্মক)

$\Rightarrow P(x,y)$ বিন্দুতে বক্ররেখাটি x অক্ষের সাপেক্ষে অবতল

উভয়ক্ষেত্রে একত্রে বলা যায় **n জোড় সংখ্যা হলে $P(x,y)$ বিন্দুতে বক্ররেখাটি x-অক্ষ সাপেক্ষে অবতল হবে তার শর্ত $yf^n(x) < 0$**

অনুরূপে n জোড়সংখ্যা হলে P-তে উত্তলতার শর্ত $yf^n(x) > 0$.

(ii) n **বিজোড় সংখ্যা,** $y > 0, h > 0$ এবং $f^n(x) < 0$

$\Rightarrow QM < RM$

এবং $y > 0, h < 0$ এবং $f^n(x) < 0$

$\Rightarrow QM > RM$

এক্ষেত্রে PT স্পর্শক P-তে বক্ররেখাকে ভেদ করে যাচ্ছে। অর্থাৎ, P একটি ইন্‌ফ্লেকশন বিন্দু। অনুরূপে n বিজোড় সংখ্যা এবং $y < 0$ ক্ষেত্রে একই সিদ্ধান্ত। $f^n(x) > 0$ ক্ষেত্রেও একই সিদ্ধান্ত।

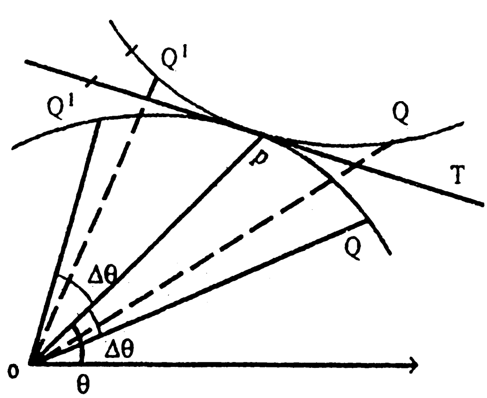
9.18 মেরু স্থানাঙ্কে অবতলতা এবং উত্তলতার শর্ত এবং ইন্‌ফ্লেক্‌শন বিন্দু হওয়ার শর্ত ঃ

মেরু স্থানাঙ্কে বক্ররেখার সমীকরণ

$$r = f(\theta) \qquad (9.18.1)$$

$$\text{বা } u \equiv \frac{1}{r} = \frac{1}{f(\theta)} = F(\theta) \text{ (ধরা হলো)} \qquad (9.18.2)$$

(9.18.1) বা (9.18.2)-র $P(r,\theta)$ বিন্দুতে বক্ররেখাটির অবতলতা বা উত্তলতার শর্ত নির্ণয় করতে হবে। PT হচ্ছে P-তে স্পর্শক। Q ও Q′ বক্ররেখার উপর যথাক্রমে P-র ডান ও বামপাশে দুটি নিকটস্থ বিন্দু। মেরু O সাপেক্ষে বক্ররেখাটি P-তে অবতল বা উত্তল হবে যদি বক্ররেখার বক্রাংশ



চিত্র 9.18.1

OPQ : O বিন্দু ও PT স্পর্শকের অন্তর্বর্তী স্থানে থাকে বা না থাকে। অতএব, **অবতলতার শর্ত হচ্ছে :**

$$\Delta OQ'P + \Delta OQP > \Delta QOQ'$$

বা, $rr_1 \sin\Delta\theta + r_2 r \sin\Delta\theta > r_1 r_2 \sin 2\Delta\theta$

[Q' -র স্থানাঙ্ক $(r_1, \theta + \Delta\theta)$ এবং Q-র স্থানাঙ্ক $(r_2, \theta + \Delta\theta)$ ধরা হয়েছে]

বা, $r_1 r + r_2 r > 2r_1 r_2 \cos\Delta\theta$

বা, $\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1} > \frac{2}{r}\cos\Delta\theta$

বা, $h_2 + h_1 > 2h\cos\Delta\theta$ (9.18.3)

এখন টেলর উপপাদ্য অনুসারে,

$$u_2 = F(\theta - \Delta\theta) = u - \Delta\theta\frac{du}{d\theta} + \frac{(\Delta\theta)^2}{\lfloor 2}\frac{d^2u}{d\theta^2} - \ldots\ldots\ldots$$

$$u_1 = F(\theta + \Delta\theta) = u + \Delta\theta\frac{du}{d\theta} + \frac{(\Delta\theta)^2}{\lfloor 2}\frac{d^2u}{d\theta^2} + \ldots\ldots\ldots$$

এবং আমরা জানি

$$\cos\Delta\theta = 1 - \frac{(\Delta\theta)^2}{\lfloor 2} + \frac{(\Delta\theta)^4}{\lfloor 4} + \ldots\ldots\ldots$$

অতএব, (9.18.3) শর্তটি রূপান্তরিত হয় নিম্নলিখিত শর্তে

$$2u + 2\frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{(\Delta\theta)^2}{\lfloor 2}\ldots\ldots\ldots > 2n\left[1 - \frac{(\Delta\theta)^2}{\lfloor 2} + \ldots\ldots\right]$$

এবার $\Delta\theta \to 0$ লিমিট নিলে আমরা পাই

$$u + \frac{d^2u}{d\theta^2} > 0$$

এটাই হলো অবতলতার নির্ণেয় শর্ত। অনুরূপে উত্তলতার শর্ত

$$u + \frac{d^2u}{d\theta^2} < 0,$$

P বিন্দুটি ইনফ্লেকশন বিন্দু হবে তার শর্ত হবে P-র দুপাশে স্বল্প পরিসরে বক্ররেখার উপর $u + \frac{d^2u}{d\theta^2}$ বিপরীত চিহ্নযুক্ত হবে এবং ঐ বিন্দুতে $u + \frac{d^2u}{d\theta^2} = 0$ হবে।

9.19 উদাহরণ

(a) $y = \sin^{-1} x$ বক্ররেখার কোন্ কোন্ অবতলতা বা উত্তলতা তা নির্ণয় করতে হবে। কোন্ বিন্দুগুলি ইন্‌ফ্লেকশনবিন্দু তাও বের করতে হবে।

সমাধান : $y = \sin^{-1} x$ কে অবকলন দ্বারা

$$\frac{dy}{dx} = -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}, \frac{d^2y}{dx^2} = -x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -3x^2(1-x^2) - (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$y\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-x \sin^{-1}x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

যেহেতু $x = \sin y$, অতএব $0 < x^2 < 1$. x-র ধনাত্মক বা ঋণাত্মক উভয় মানে $(1-x^2)^{3/2} > 0$. $x < 0$ হলে $\sin^{-1} x < 0$ এবং $x > 0$ হলে $\sin^{-1} x > 0$. অতএব $y\frac{d^2y}{dx^2} > 0$, x-র যে কোন অশূন্য মানে। কেবলমাত্র $x = 0$ ক্ষেত্রে $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, এবং $\frac{d^3y}{dx^3} \neq 0$, এখন (9.17.9) অনুসারে বক্ররেখাটি (0, 0) বিন্দু ব্যতীত অপর সকলবিন্দুতে x- অক্ষের সাপেক্ষে উত্তল এবং (0, 0) বিন্দুটিই একমাত্র ইন্‌ফ্লেক্‌শন বিন্দু।

(*b*) $r = b\theta^n$-র ইনফ্লেক্‌শন বিন্দুগুলি নির্ণয় করা যাক্।

সমাধান : $r = b\theta^n$

বা, $$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{b\theta^n} = \frac{1}{b}\theta^{-n} \quad \text{(i)}$$

θ-সাপেক্ষে অবকলন দ্বারা পাই

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{n}{b}\theta^{-n-1}, \quad \frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{n(n+1)}{b}\theta^{-(n+2)}$$

এবং $$u + \frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{1}{b}\theta^{-n} + \frac{n(n+1)}{b}\theta^{-(n+2)} \quad \text{(ii)}$$

(9.20) উপপাদ্যে আমরা জেনেছি ইন্‌ফ্লেক্‌শন বিন্দুর ক্ষেত্রে

$$u+\frac{d^2u}{d\theta^2}=0 \quad \text{(iii)}$$

অতএব (ii) এবং (iii) সাহায্যে

$$\frac{1}{b\theta^n}[1+n(n+1)\theta^{-2}]=0$$

বা $\quad \theta=[-n(n+1)]^{\frac{1}{2}}$

n -র বিভিন্ন ঋণাত্মক মানে আমরা θ -র বিভিন্ন বাস্তব মান পাব। θ -র সেই সকল মানে $r=b[-n(n+1)]^{\frac{n}{2}}$.

অতএব $b[-n(n+1)]^{\frac{n}{2}}$, $[-n(n+1)]^{\frac{1}{2}}$, n -র বিভিন্ন ঋণাত্মক মানে, বিন্দুগুলি ইন্‌ফ্লেকসন বিন্দু।

9.20 সারাংশ

(a) এক প্যারামিটার বিশিষ্ট বক্ররেখা বা সরলরেখার পরিবারের সমীকরণ $f(x,y,\alpha)=0$, α হচ্ছে প্যারামিটার।

(b) উক্ত পরিবারের পরিস্পর্শক হচ্ছে একটি সরলরেখা বা বক্ররেখা যা $f(x,y,\alpha)=0$ এবং $f_\alpha(x,y,\alpha)=0$ সমীকরণ হতে α অপনীতক। পরিস্পর্শকটি পরিবারের প্রতি সদস্যকে স্পর্শ করে এবং পরিস্পর্শকের যে কোন বিন্দুতে পরিবারের কোন না কোন সদস্য স্পর্শ করে আছে।

(c) পরিস্পর্শকের প্রকল্প সংজ্ঞা ঃ পরিবারের বৈশিষ্ট্য বিন্দুগুলির সঞ্চার পথই পরিস্পর্শক (যে বিন্দুগুলি $f(x,y,\alpha)=0$ এবং $\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,y,\alpha)=0$ কে সিদ্ধ করে তাদের পরিবারের বৈশিষ্ট্য বিন্দু (characteristic point) বলে।

(d) পরিবারের বিশিষ্ট বিন্দুগুলি [যে বিন্দুগুলির ক্ষেত্রে $f_x(x,y,\alpha)=0$ এবং $f_y(x,y,\alpha)=0$ সিদ্ধ হচ্ছে।] পরিবারের পরিস্পর্শকের উপর অবস্থিত।

(e) $f(x,y,\alpha,\beta)=0$ পরিবারের দুই প্যারামিটার $\phi(\alpha,\beta)=0$ সমীকরণ দ্বারা আবদ্ধ হলে, $\frac{\partial f}{\partial\alpha}d\alpha+\frac{\partial f}{\partial\beta}d\beta=0$ এবং $\frac{\partial\phi}{\partial\alpha}d\alpha+\frac{\partial\phi}{\partial\beta}d\beta=0$ এই দুই সমীকরণ থেকে $f_\alpha/f_\beta=\phi_\alpha/\phi_\beta$ সমীকরণটি পাওয়া যাবে। এবার $f=0$, $\phi=0$ এবং $f_\alpha/f_\beta=\phi_\alpha/\phi_\beta$ থেকে (α,β) অপনীতকই হবে পরিবারের পরিস্পর্শক।

(f) যে বিন্দু থেকে কোন বক্ররেখার দুটি শাখা বিস্তৃত হচ্ছে বা যে বিন্দুতে দুটি শাখা মিলিত হচ্ছে তাকে দ্বিবিন্দু বলে। দ্বিবিন্দুতে দুটি শাখায় দুটি স্পর্শক টানা যায়। দ্বিবিন্দুটি নোড্, কাস্প বা ইন্‌ফ্লেকসন বিন্দু হবে যখন স্পর্শক দুটি বাস্তব এবং পরস্পর ভিন্ন, বাস্তব এবং পরস্পর অভিন্ন বা কাল্পনিক হবে। $F(x,y)=0$ বক্ররেখার (a,b) একটি দ্বিবিন্দু হলে $F_x(a,b) = 0 = F_y(a,b) = 0$ হবে। (a,b) বিন্দুটি নোড্, কাস্প বা ইন্‌ফ্লেক্‌শন বিন্দু হবে তার শর্ত ঃ

$$[(F_{xy})^2 - F_{xx}F_{yy}] \gtreqless 0 \text{ এবং}$$

$$(F_{xx}(a,b), F_{yy}(a,b), F_{xy}(a,b) \neq (0,0,0).$$

(g) $y = f(x)$ বক্ররেখা x-অক্ষের সাপেক্ষে $P(x, y)$ বিন্দুতে অবতল বা উত্তল হবে তার শর্ত যথাক্রমে $yf''(x) < 0$ বা $yf''(x) > 0$. P বিন্দুটি ইন্‌ফ্লেক্‌শন বিন্দু হবে তার শর্ত উক্ত বিন্দুতে $f''(x) > 0$, $f'''(x) \neq 0$, [অথবা $f''(x)$-র চিহ্ন P-র ডান ও বামপাশে বিপরীত চিহ্নযুক্ত হবে] । ইন্‌ফ্লেক্‌শন বিন্দুর সাধারণ শর্ত $f''(x) = f'''(x) = ... = f^{n-1}(x) \neq 0$ এবং $f^n(x) \neq 0$.

মেরু স্থানাঙ্কে $u = F(\theta)$ সমীকরণে, $\theta = \alpha$ বিন্দুটি ইন্‌ফ্লেকশন বিন্দু হবে তার শর্ত $\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right)_{\theta=\alpha} = 0$.

9.21 অনুশীলনী

। $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ (α প্যারামিটার) সরলরেখা পরিবারের পরিস্পর্শক নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান ঃ (9.4) উপপাদ্য অনুসারে $f(x,y,\alpha) = 0$ এবং $\frac{\partial}{\partial\alpha} f(x,y,\alpha) = 0$ সমীকরণদ্বয় হতে α-অপনীতকই হবে নির্ণেয় পরিস্পর্শক। প্রদত্ত প্রশ্নে উক্ত সমীকরণদুটি যথাক্রমে

$$f(x,y,\alpha) \equiv x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \quad \text{(i)}$$

এবং $\frac{\partial}{\partial\alpha} f(x,y,\alpha) \equiv -x\sin\alpha + y\cos\alpha = 0$ (ii)

(ii) হতে $\frac{\cos\alpha}{x} = \frac{\sin\alpha}{y} = \frac{\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

এবং তার ফলে $\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\sin\alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\cos\alpha$ এবং $\sin\alpha$-র মান (i)-এ বসিয়ে নির্ণেয় পরিস্পর্শক

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = p$$

বা, $x^2 + y^2 = p^2$

(পরিস্পর্শকটি একটি বৃত্ত যার কেন্দ্র (0,0) এবং ব্যাসার্ধ $= p$).

2. $y^2 = 4ax$ (a নির্দিষ্ট) অধিবৃত্তের প্রতিটি দ্বি -y স্থানাঙ্ককে (double ordinate কে) ব্যাস ধরে যে বৃত্ত পরিবারটি উৎপন্ন হবে তার পরিস্পর্শক নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ ধরা যাক্ প্রদত্ত অধিবৃত্তের 2b একটি দ্বি-y -স্থানাঙ্ক। 2b ব্যাসরূপে গঠিত বৃত্তের কেন্দ্র $\left(\frac{b^2}{4a}, 0\right)$ এবং ব্যাসার্ধ b. অতএব বৃত্ত পরিবারের সমীকরণ

$$f(x,y,b) \equiv (x-\frac{b^2}{4a}) + (y-0)^2 - b^2 = 0 \qquad \text{(i)}$$

(b এখানে প্যারামিটার)

(i) কে b-সাপেক্ষে অবকলন দ্বারা $f_b(x,y,b) = 0$ সমীকরণটি থেকে আমরা পাই

$$-2(x-\frac{b^2}{4a})\frac{2b}{4a} - 2b = 0$$

বা, $x-\frac{b^2}{4a} = -2a$ বা, $b^2 = 4a(x+2a)$

b^2 -র এই মান (i)-এ বসিয়ে নির্ণেয় পরিস্পর্শকের সমীকরণ হলো

$$[x-x-2a]^2 + y^2 = 4a(x+2a)$$

বা, $4a^2 + y^2 = 4a(x+2a)$.

3. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (a এবং b উভয়েই প্যারামিটার) উপবৃত্ত পরিবারের a ও b প্যারামিটার দুটি $a+b=c$ (c নির্দিষ্ট) সম্বন্ধে সম্বন্ধযুক্ত। পরিস্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $f(x,y,a,b) \equiv \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ .... (i)

এবং $a+b=c$ .... (ii)

(9.1) -র প্রথম পদ্ধতি বা উদাহরণ (9.10) অনুসরণ করে (i) এবং (ii) থেকে আমরা পাই যথাক্রমে

$+\frac{2x^2}{a^3}da+\frac{2y^2}{b^3}db=0$ .... (iii)

এবং $da+db=0$ .... (iv)

(iii) এবং (iv) উভয় সমীকরণ থেকে $\dfrac{da}{db}$ -র মান নির্ণয়ে পাওয়া যায়

$$\frac{y^2}{b^3}\bigg/\frac{x^2}{a^3} = 1$$

বা, $\dfrac{a^3}{x^2} = \dfrac{b^3}{y^2} = k$ (ধরা হলো) .... (v)

অতএব $a = (kx^2)^{1/3}, b = (ky^2)^{1/3}$ এখন a ও b -র মান (ii)-এ বসিয়ে $k^{1/3}x^{2/3} + k^{1/3}y^{2/3} = c$ বা,

$k^{1/3} = \dfrac{c}{x^{2/3} + y^{2/3}}$ সুতরাং (v) হতে আমরা পাচ্ছি

$$a^3 = x^2 \frac{c^3}{\left(x^{2/3} + y^{2/3}\right)^3}, b^3 = y^2 \frac{c^3}{\left(x^{2/3} + y^{2/3}\right)^3}.$$

এবার (i)-এ a ও b -র মান বসিয়ে নির্ণেয় পরিস্পর্শকের সমীকরণ

$$\frac{x^2(x^{2/3} + y^{2/3})}{x^{4/3}c^2} + \frac{y^2(x^{2/3} + y^{2/3})^2}{y^{4/3}c^2} = 1$$

বা, $(x^{2/3} + y^{2/3})^2 [x^{2/3} + y^{2/3}] = c^2$

বা, $x^{2/3} + y^{2/3} = c^{2/3}$.

4. $(x-2)^2 = y(y-1)^2$ বক্ররেখার দ্বিবিন্দুর চরিত্র নির্ণয় করুন।

দ্বিবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ কি তা বার করুন।

সমাধান ঃ প্রদত্ত বক্ররেখা $F(x, y) \equiv (x = 2)^2 - y(y-1)^2 = 0$ (i)

(9.12, 9.13 উপপাদ্য এবং উদাহরণ 9.14 দেখুন)

এখন $F_x \equiv 2(x-1) = 0$ এবং $F_y \equiv -(y-1)^2 - y(y-1) = 0$

সমীকরণদ্বয় হতে দুটি বিন্দু পাওয়া যাচ্ছে যাদের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (2, 1) এবং $\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$.

এদের মধ্যে কেবলমাত্র (2, 1) বিন্দুটি (i) -র উপরিস্থিত। অতএব (2,1) হচ্ছে একমাত্র দ্বিবিন্দু। এখন লক্ষ্য করুন,

$$[(f_{yx})^2 - F_{xx}F_{yy}]_{(2,1)} = [0 - 2(-4y + 3)]_{(2,1)} = (-2)(-1) > 0.$$

অতএব দ্বিবিন্দুটি একটি নোড্। (এখানে $F_{yx}(2,1)=0$, কিন্তু $F_{xx}(2,1)\neq 0$, $F_{yy}(2,1)\neq 0$ হওয়ায় (2,1) বিন্দুটি অবশ্যই দ্বিবিন্দু, বহুবিন্দু নয়, (9.13)-র মন্তব্য দেখুন)।

এবার (9.15.6) সমীকরণ

$$F_{xx}(2,1)+2F_{xy}(2,1)\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(2,1)}+F_{yy}(2,1)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2_{(2,1)}=0$$ হতে আমরা পাই,

$$2-1\left(\frac{dy}{dx}\right)^2_{(2,1)}=0$$

বা, $$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(2,1)}=\pm\sqrt{2}\,.$$

অতএব (2,1)-এ স্পর্শকদুটির সমীকরণ

$(y-1)=\sqrt{2}(x-2)$ এবং $(y-1)=-\sqrt{2}\,(x-2)$.

5. দেখান $y^2=bx^2\sin^{x/a}$-র (0, 0) বিন্দুটি একটি কাস্‌প।

সমাধানঃ $y^2=bx^2\sin^{x/a}$ ....(i)

বক্ররেখাটি (0,0) বিন্দুগামী। (i)-কে x-সাপেক্ষে অবকলন দ্বারা আমরা পাই

$$2y\frac{dy}{dx}=2bx\sin\frac{x}{a}+b/a\,x^2\cos\frac{x}{a}$$

$$\frac{dy}{dx}=\left(2bx\sin\frac{x}{a}+b/a\,x^2\cos\frac{x}{a}\right)\Big/2bx^2\sin\frac{x}{a}.$$

এখন থেকে (0,0) বিন্দুতে স্পর্শকের প্রবণতা বার করা যাচ্ছে না, অসংজ্ঞাত হচ্ছে। (8.7.3) তে আমরা জেনেছি।

m (0, 0) বিন্দুতে স্পর্শকের প্রবণতা $=\displaystyle\operatorname*{Lt}_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x}{y}$ .... (ii)

এখন (i) হতে আমরা লিখতে পারি

$$\frac{y^2}{x^2}=b\sin\frac{x}{a}.$$

অতএব $\quad m^2 = \underset{(xy) \to (0.0)}{Lt} \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \underset{(xy) \to (0.0)}{Lt} b \sin^{x/a} = 0.$

বা $m = 0, 0.$

সুতরাং (0, 0.) বিন্দুতে দুটি স্পর্শক আছে এবং তারা অভিন্ন x অক্ষ তার ফলে আমরা বলতে পারি (0, 0) বিন্দুটি একটি কাস্‌প।

[বিকল্প পদ্ধতি : $F_x(0,0) = 0$, $F_y(0,0) = 0$, $F(0,0) = 0$

$F_{xy}(0,0) = 0$, $F_{yy}(0,0) = 2$, $F_{xx}(0,0) = 0$ এবং $[(F_{xy})^2 - F_{xx}F_{yy}]_{(0,0)} = 0$ হওয়ায় (0,0) বিন্দুটি কাস্‌প।

6. দেখান $x^4 + 2x^2y + 2xy^2 + 3y^2 = 0$ বক্ররেখার (0,0) বিন্দুটি একটি বিচ্ছিন্ন বিন্দু (conjugate point or isolated point).

সমাধান ঃ $F(x, y) = x^4 + 2x^2y + 2xy^2 + 3y^2 = 0$ থেকে $F_x = 4x^3 + 4xy + 2y^2$,

$F_{xx} = 12x^2 + 4y$, $F_{yx} = 4x + 4y$, $F_y = 2x^2 + 4xy$, $F_{yy} = 4x + 6$

এবং $F(0, 0) = 0 = F_x(0,0) = F_y(0,0)$, $F_{xx}(0,0) = 0$, $F_{yx}(0,0) = 0$, $F_{yy}(0,0) = 6 \,(\neq 0)$,

$[(F_{xy})^2 - F_{xx}F_{yy}]_{(0,0)} = 6 < 0$, অতএব (0, 0) বিন্দুটি 9.13 উপপাদ্য অনুসারে, দ্বিবিন্দু এবং বিচ্ছিন্ন বিন্দু।

7. প্রমাণ করুন $y = \log x$ বক্ররেখাকে x অক্ষের সাপেক্ষে অবতল $x > 1$ এবং উত্তল যখন $0 < x < 1$.

সমাধান ঃ $y = \cos x$ বক্ররেখার সমীকরণ। x সাপেক্ষে অবকলনদ্বারা $dy/dx = 1/x$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2}$ এবং

$y\frac{dy}{dx^2} = -\frac{\log x}{x^2}$ আমরা জানি $\log x > 0$, যখন $x > 1$ এবং $\log x < 0$ যখন $0 < x < 1$. অতএব $y\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ যখন $x > 1$ এবং $y = \frac{d^2y}{dx^2} > 0$ যখন $0 < x < 1$. সুতরাং (9.17.9) অনুসারে বক্ররেখাটি অবতল যখন $x > 1$ এবং উত্তল যখন $0 < x < 1$:

8. $a^2y^2 = x^2(a^2 - y^2)$ বক্ররেখাটির ইনফ্লেক্‌শন বিন্দু নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\quad a^2y^2 = x^2(a^2 - x^2)$ কে x -সাপেক্ষে অবকলন দ্বারা

$$a^2 2y\frac{dy}{dx} = 2x(a^2 - x^2) - 2x^3 = 2xa^2 - 4x^3 \quad \text{.......... (ii)}$$

$$a^2 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2ya^2\frac{d^2y}{dx^2} = 2a^2 - 12x^2 \quad \text{.......... (iii)}$$

$$\text{এবং } a^2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} + 2a^2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} + 2a^2y\frac{d^3y}{dx^3} = -24x \quad \text{.......... (iv)}$$

(9.17.12) অনুসারে ইনফ্লেক্শন বিন্দুর ক্ষেত্রে $\frac{d^2y}{dx^2} = 0,\ \frac{d^3y}{dx^3} \neq 0$ এখন (iii) $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ বসিয়ে পাওয়া যায়

বা, $2a^2 - 12x^2 - 2(a^2 - x^2) = 0$ [(i) এবং (ii)-র সাহায্যে y এবং $\frac{dy}{dx}$ -র মানও প্রয়োগ করা হয়েছে]

বা, $x = 0$

অতএব, (i) হতে $y = 0$.

অতএব, (0, 0) বিন্দুটি ইনফ্লেক্শন বিন্দু হতে পারে।

(iv) -র সাহায্যে দেখা যাচ্ছে।

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{(0,0)} = \left(\frac{-24\cancel{x}}{2a\cancel{x}\sqrt{a^2 - x^2}}\right)_{(0,0)} \neq 0$$

অতএব (0, 0) বিন্দুটি ইনফ্লেক্শন বিন্দু।

9.22 প্রশ্নাবলী

1. নিম্নলিখিত সরলরেখা পরিবারের পরিস্পর্শক নির্ণয় করুন।

a) $x\operatorname{cosec}\theta - y\cot\theta = c$ (θ প্যারামিটার)

[সংকেত : উদা 9.8a) বা অনুশীলনী 1 দেখুন, উঃ $x^2 - y^2 = c^2$]

b) $x\cos^n\theta + y\sin^n\theta = a$ (θ প্যারামিটার)

[উঃ $x^{2/(2-n)} + y^{2(2-n)} = a^{2/(2-n)}$]

2. $x/a + y/b = c$ সরলরেখা পরিবারের (যেখানে a এবং b প্যারামিটার) নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে পরিস্পর্শক নির্ণয় করুন।

(a) $a^2 + b^2 = c^2$ (b) $ab = c^2$

[সংকেত : উদাঃ 9.10 এবং অনুশীলনী 3 দেখুন, উঃ (a) $x^{2/3} + y^{2/3} = c^{2/3}$ (b) $4ax = c^2$]

3. (a) $(x-\alpha)^2+y^2=4\alpha$ (α প্যারামিটার) পরিবারের পরিস্পর্শক দেখান $y^2-4x-4=0$.

[সংকেত : উদা ঃ 9.8 (b) অনুসরন করুন]

(b) $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{k^2-\alpha^2}=1$ (α প্যারামিটার) পরিবারের পরিস্পর্শক দেখান $x\pm y=\pm k$ [উদা. 9.8(b) দেখুন]

4. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (a এবং b প্যারামিটার) উপবৃত্ত পরিবারের $\frac{a^2}{\ell^2}+\frac{b^2}{m^2}=1$ শর্ত সাপেক্ষে পরিস্পর্শক দেখান $\pm\frac{x}{\ell}\pm\frac{y}{m}=1$ [অনুশীলনী 3 দেখুন]

5. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ (a প্যারামিটার) পরিবারের যে কোন একটি সদস্যের $x=a\cos\phi,\ 3=6\sin\phi$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ দেখান $x\sin\phi-y\cos\phi+a\cos2\phi=0$. এবার এই অভিলম্বগুলির (a প্যারামিটার) পরিস্পর্শক দেখান

$$(x+y)^{2/3}+(x-y)^{2/3}=2a^{2/3}.$$

6. যে সকল মূলবিন্দুগামী বৃত্তের কেন্দ্র $x^2-y^2=c^2$-র উপর অবস্থিত তাদের সমীকরণ নির্ণয় করে বৃত্ত পরিবারের পরিস্পর্শক দেখান.

$$(x^2+y^2)^2=4c^2(x^2-y^2)$$

[অনুশীলনী 2 দেখুন]

7. a) $r=a(1+\cos\theta)$ বক্ররেখার $\theta=\alpha$ বিন্দুতে দূরকের (on radius vector) লম্বভাবে অবস্থিত সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন। এবার α-কে প্যারামিটার ধরে উক্ত সরলরেখা পরিবারের পরিস্পর্শক দেখান

$r=2a\cos\theta$.

সমাধান ঃ $r=a(1+\cos\theta)$ .... (i)

(i)-র $\theta=\alpha$ বিন্দুতে দূরক $(=OP)=a(1+\cos\alpha)$

P (OP, α) বিন্দুগামী এবং OP-র উপর লম্বভাবে অবস্থিত সরলরেখার সমীকরণ

$r\cos(\theta-\alpha)=OP=a(1+\cos\alpha)$. .... (ii)

(ii)-এ α প্যারামিটার হলে (i)-র বিভিন্ন বিন্দুতে আমরা এ ধরনের সরলরেখা পাব। এই সরলরেখা পরিবারের পরিস্পর্শক নির্ণয় করতে হবে।

(ii)-কে α সাপেক্ষে অবকলন দ্বারা পাওয়া যায়

$r\sin(\theta-\alpha)=-a\sin\alpha$ .... (iii)

(ii) ও (iii) হতে α-অপনীতক হবে পরিস্পর্শক। (ii) এবং (iii)-কে আমরা নিম্নলিখিত আকারে লিখতে পারি ঃ

$$(r\cos\theta - a)\cos\alpha + r\sin\theta\sin\alpha - a = 0 \quad \text{.......................}(iv)$$

$$r\sin\theta\cos\alpha - (r\cos\theta - a)\sin\alpha = 0 \quad \text{.......................}(v)$$

তখন বজ্রগুণন দ্বারা (iv) এবং (v) থেকে পাওয়া যাচ্ছে।

$$\frac{\cos\alpha}{+(r\cos\theta - a)a} = \frac{\sin\alpha}{+ar\sin\theta} = \frac{1}{+[r\cos\theta - a]^2 - r^2\sin^2\theta}$$

অতএব, $\cos\alpha = \dfrac{a(r\cos\theta - a)}{r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta}$, $\sin\alpha = \dfrac{ar\sin\theta}{r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta}$

এখন $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \Rightarrow$

$$\frac{a^2[r\cos\theta - a)^2 + r^2\sin^2\theta]}{(r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta)^2} = 1$$

বা, $r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta = a^2$

বা, $r = 2a\cos\theta$

(b) 7(a)-র অনুরূপ প্রশ্ন $r = ae^{\theta\cot\alpha}$ বক্ররেখার ক্ষেত্রে গঠন করুন এবং দেখান এক্ষেত্রে পরিস্পর্শকটি হচ্ছে

$$r\sin\alpha = ae^{(\alpha - \frac{\pi}{2})\cot\alpha} e^{\theta\cot\alpha}$$

8 (a) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ সরলরেখা পরিবারের পরিস্পর্শক $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{k}$ হলে দেখান $a + b = k$

সমাধান ঃ $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1 \Rightarrow \dfrac{dx}{a} + \dfrac{dy}{b} = 0 \Rightarrow \dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{a}{b}$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{k} \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} + \frac{dy}{\sqrt{y}} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dy} = -\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$$

অতএব $\dfrac{\sqrt{x}}{a} = \dfrac{\sqrt{y}}{b} = \ell$ (ধরি) বা, $\sqrt{x} = la$, $\sqrt{y} = lb$.

এই মান দুটি $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{k}$ তে বসিয়ে $\ell = \dfrac{\sqrt{k}}{a+b}$ এবং $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$-এ বসিয়ে $l^2(a + b) = 1$.

অতএব $\dfrac{k}{(a+b)^2}(a + b) = 1$ বা, $a + b = k$.

(b) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ সরলরেখা পরিবারের পরিস্পর্শক $x^{2/3}+y^{2/3}=c^{2/3}$ হলে দেখান a ও b প্যারামিটার দুটি $a^2+b^2=c^2$ সম্বন্ধযুক্ত।

9. (a) $xy^2-ax^2+2a^2x-a^3=0$ বক্ররেখার দ্বিবিন্দু কোথায় এবং কি তার প্রকৃতি?

[সংকেত : অনুশীলনী 4 দেখুন। উঃ (a, 0) নোড়]

(b) দেখান $y^3=x^3+ax^2$-র (0, 0) বিন্দুটি কাস্প।

[সংকেত : উদা 9.16 দেখুন]

(c) দেখান (0,0) বিন্দুটি $x^4-ax^2y+axy^2+a^2y^2=0$ -র একটি বিচ্ছিন্ন (isolated point) বিন্দু। (অনুশীলনী 6 দেখুন)।

10. $ay^2=(x-a)^2(x-b)$ বক্ররেখাটির ক্ষেত্রে দেখান (a, 0) বিন্দুটি নোড়, কাস্প অথবা একটি বিচ্ছিন্ন বিন্দু যদি $b<a,\ b=a$ অথবা $b>a$ হয়।

11. $y^2(a^2+x^2)=x^2(a^2-x^2)$ বক্ররেখার (0, 0) বিন্দুটি একটি নোড় দেখান এবং উক্ত বিন্দুতে স্পর্শকদুটির সমীকরণ নির্ণয় করে দেখান স্পর্শকদুটি অক্ষদ্বয়ের অন্তর্গত কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করছে। [সংকেত : অনুশীলনী 4 দেখুন]

12. x -র $[0,\ 2\pi]$ পরিসরে $y=(\cos x+\sin x)e^x$ বক্ররেখাটির x -অক্ষের সাপেক্ষে কোথায় অবতল, কোথায় উত্তল তা নির্ণয় করুন। [সংকেত : অনুশীলনী 7 দেখুন, বর্তমান প্রশ্নে $y\frac{d^2y}{dx^2}=2e^{2x}\ .\cos 2x$

অতএব $y\frac{d^2y}{dx^2}<0$ অর্থাৎ বক্ররেখা x অক্ষ সাপেক্ষে অবতল হবে যখন $\cos 2x<0$;

এবং $y\frac{d^2y}{dx^2}>0$ অর্থাৎ বক্ররেখাটি x অক্ষ সাপেক্ষে উত্তল হবে যখন $\cos 2x>0$. এবার $0<x<2\pi$, অর্থাৎ $0<2x<4\pi$ ক্ষেত্রে কোথায় $\cos x>0$ এবং কোথায় $\cos 2x>0$ তা নির্ণয় করুন।]

13. দেখান $y=3x^5-40x^3+3x-20$ বক্ররেখাটির উর্ধ্বমুখী অবতলতা আছে $-2<x<0$ এবং $2<x<\infty$ পরিসরে। আবার দেখান নিম্নমুখী অবতলতা আছে $-\infty<x<-2$ এবং $0<x<2$ পরিসরে। $x=-2,0,2$ বিন্দু তিনটি ইন্‌ফ্লেক্‌শন বিন্দু প্রমাণ করুন। [সংকেত : 9.17 মন্তব্য (b) দেখুন]

14. a) $y^3=(x-a)^3(x-b)$ বক্ররেখার ইন্‌ফ্লেক্‌শন বিন্দুগুলি দেখান $2x+a=3b$ সরলরেখার উপর অবস্থিত। [সংকেত : $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2}{9}\frac{(2x-3b+a)}{(x-b)^{5/3}}$ এবং $\frac{d^2y}{dx^2}=0\Rightarrow 2x+a=3b$]

b) $y^2=(x-a)^2(x-b)$ -র ইন্‌ফ্লেক্‌শন বিন্দুগুলি দেখান $3x+a=4b$-র উপর অবস্থিত।

15. দেখান $r = 29 - 11\cos 2\theta$ বক্ররেখার ইন্‌ফ্লেকশন বিন্দুগুলির ক্ষেত্রে $r = 20,\ \cos 2\theta = \frac{9}{11}$. [সংকেত $u + \frac{d^2u}{d\theta^2} = 0,\ u \equiv \frac{1}{r}$ সমীকরণটি গঠন করুন।]

16. প্রমাণ করুন $y^2 = f(x)$ বক্ররেখার ইন্‌ফ্লেক্‌শন বিন্দুগুলির x-স্থানাঙ্ক $[f'(x)]^2 = 2f(x)f'(x)$ সমীকরণটি সিদ্ধ করে।

সহায়ক পাঠ্যপুস্তকাবলী ঃ

1) Differential Calculus – Santi Narayan, S. Chand & Co.

2) Differntial Calculus – B.C. Das and B.N. Mukherjee, U.N. Dhur and Sons.

3) An Introduction to Analysis, Differential Calculus
Part 1 – R.K.Ghosh and K.C. Maity, Books & Allied (P) Ltd.

4) কলন-বিদ্যা, ১ম ভাগ, অধ্যাপক মহাদেব দত্ত এবং শান্তিকুমার চট্টোপাধ্যায়, পশ্চিমবঙ্গ রাজ্যপুস্তক পর্ষদ।

5) Differential and Integral Calculus vol I, – R. Courant

6) An Introduction to the inifinitesimal calculus with applications to Mechanics and Physics – G.W. Caunt, Oxford, 1955.

একক 10 ☐ রেখার বক্রতা (Curvature of a Curve)

গঠন

10.1 প্রস্তাবনা

একটি সরলরেখার বক্রতা কি ধরনের-প্রশ্নে আপনারা সকলেই স্বাভাবিক ভাবেই উত্তর দেবেন যে সরলরেখার কোনরূপ বক্রতা নেই, কারণ সরলরেখার কোন বিন্দুতে কোন বাঁক নেই। কিন্তু বক্ররেখাগুলির মধ্যে, যথা একটি বৃত্ত ও একটি অধিবৃত্তের মধ্যে, মূলগত পার্থক্য কি হবে বোঝাতে আমরা বক্ররেখাগুলির বক্রতার তুলনা করতে পারি, অর্থাৎ বৃত্ত তার এক-একটি বিন্দুতে যে রূপে বাঁক নিচ্ছে একটি অধিবৃত্ত কিন্তু তার এক – একটি বিন্দুতে একইরূপে বাঁকছে না। অতি পরিচিত বক্ররেখাগুলির লেখচিত্র আমাদের জানা আছে, সেই ধারণা থেকেই একথা আমরা বলছি। বর্তমান এককে আমরা অবকলন বিদ্যার সাহায্যে একটি বক্ররেখার একটি বিন্দুতে বক্রতার সংজ্ঞা

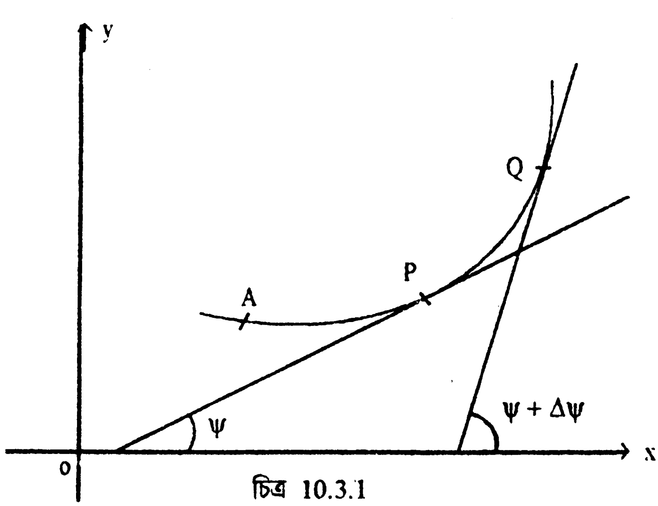
দেব এবং তার ফলে বক্রতা মাপার যে সূত্র পাব তার সাহায্যে সহজেই একটি বক্ররেখার বিভিন্ন বিন্দুতে বিভিন্ন সংখ্যামান দ্বারা বক্রতা মাপতে পারব, সেইসঙ্গে বিভিন্ন বক্ররেখার তুলনামূলক বিচারও করা যাবে। বক্রতা সংক্রান্ত বিভিন্ন আলোচনায় আপনারা ধীরে ধীরে প্রবেশ করবেন।

10.2 উদ্দেশ্য

- এই এককটি পাঠ করে আপনি
- বক্ররেখার যেকোন বিন্দুতে বক্রতা সম্বন্ধীয় গাণিতিক আলোচনা করতে পারবেন,
- বক্ররেখার বিভিন্ন প্রকার সমীকরণের ক্ষেত্রে যেকোন বিন্দুতে বক্রতা নির্ণয়ের সূত্রাবলী গঠন করতে পারবেন,
- বক্ররেখার যে কোন বিন্দুতে বক্রতা-ব্যাসার্ধ কত হবে, বক্রতা কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয়, বক্রতা বৃত্তের সমীকরণ ইত্যাদি বিষয়ক আলোচনা করতে পারবেন।
- বক্রতাকেন্দ্রজ (Evolute) এবং বক্রতা প্রতিকেন্দ্রজ (Involute) সংক্রান্ত বিষয় ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

10.3 সংজ্ঞাবলী (some definitions)

একটি বক্ররেখার উপর P একটি বিন্দু এবং P-এর নিকটবর্তী উক্ত বক্ররেখার উপর অপর একটি বিন্দু Q। A হচ্ছে বক্ররেখাটির উপর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। ধরা যাক্ A থেকে P এবং Q -র চাপদৈর্ঘ্য যথাক্রমে s এবং $s+\Delta s$. P এবং Q বিন্দুতে স্পর্শকদ্বয়ের ধনাত্মক দিক্ যথাক্রমে x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গে ψ এবং $\psi+\Delta\psi$ কোন উৎপন্ন করে। উপরন্তু, আমরা ধরে নিচ্ছি P থেকে Qতে বক্ররেখা বরাবর যেতে কোন ইনফ্লেক্‌শান বিন্দু নেই। অর্থাৎ, আমরা ধরে নিচ্ছি বক্ররেখাটির P থেকে Q যেতে বাঁক একই দিকে অবিচ্ছিন্নভাবে রয়েছে। এই ক্ষেত্রে আমরা নিম্নলিখিত সংজ্ঞাগুলি নিবদ্ধ করছি ঃ



চিত্র 10.3.1

(a) **মোট বক্রতা (total curvature) :** বক্ররেখা বরাবর P থেকে Q -র চাপদূরত্ব, অর্থাৎ Δs দূরত্ব, অতিক্রম করতে যেহেতু স্পর্শকের গতি (x- অক্ষের ধণাত্মক দিকের সঙ্গে উৎপন্ন কোণ) $\Delta\psi$ পরিমাণ ঘুরে যাচ্ছে, সেহেতু $\Delta\psi$ কোণকে ধরা হবে বক্ররেখার $\widehat{PQ} = \Delta s$ অংশের মোট বক্রতা।

(b) **গড় বক্রতা (average curvature) :** $\dfrac{\Delta\psi}{\Delta s}$ কে বলা হবে Δs অংশের গড় বক্রতা।

(c) **P- বিন্দুতে বক্রতা (Curvature at P) :** P- বিন্দুতে বক্রতা, K দ্বারা চিহ্নিত, সংজ্ঞাত হবে নিম্নলিখিত লিমিট দ্বারা

$$K = \operatorname*{Lt}_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\psi}{\Delta s} = \frac{d\psi}{ds} \qquad (10.3.1)$$

(অর্থাৎ K হচ্ছে গড় বক্রতার সীমাস্থ মান (limiting value), অবশ্যই লিমিটের অস্তিত্ব স্বীকৃত হতে হবে)।

(d) **P- বিন্দুতে বক্রতা-ব্যাসার্ধ (redius of curvature at P) :**

P- বিন্দুতে বক্রতার বিপরীত সংখ্যা (reciprocal) দ্বারা, অর্থাৎ $\frac{1}{K}$ দ্বারা, উক্ত বিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্ধ সংজ্ঞাত হয়।

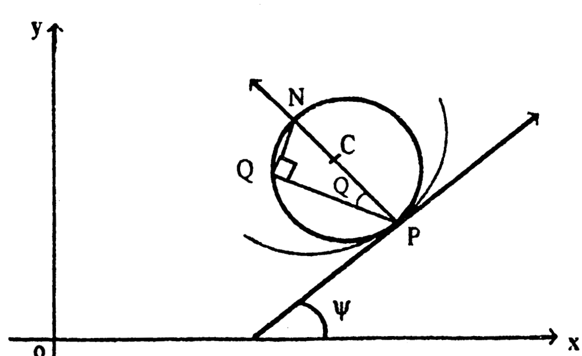
বক্রতা-ব্যাসার্ধ ρ দ্বারা চিহ্নিত হলে,

$$\rho = \frac{1}{K} = \frac{1}{\dfrac{d\psi}{ds}} = \frac{ds}{d\psi} \qquad (10.3.2)$$

(e) **বক্রতা কেন্দ্র (Centre of curvature) :** বক্ররেখার P বিন্দুতে অভিলম্বের ধনাত্মক দিকের উপর C এমন একটি বিন্দু যে PC = ρ (P -তে বক্রতা ব্যাসার্ধ), তাহলে C-কে বলা হবে P-র সাপেক্ষে বক্রতা কেন্দ্র।

(f) **বক্রতা বৃত্ত (Circle of curvature) :** বক্ররেখার P বিন্দুর সাপেক্ষে বক্রতা বৃত্ত এমন একটি বৃত্ত যার কেন্দ্র হচ্ছে C (P- র সাপেক্ষে বক্রতাকেন্দ্র) এবং যার ব্যাসার্ধ হচ্ছে ρ (P-তে বক্রতা ব্যাসার্ধ)।

(g) **বক্রতা জ্যা (Chord of curvature) :** বক্ররেখার P বিন্দুর সাপেক্ষে বক্রতা জ্যা হচ্ছে P- বিন্দুগামী বক্রতাবৃত্তের যে কোন একটি জ্যা যা অবশ্যই P- বিন্দুগামী।



চিত্র 10.3.2

যদি বক্রতা জ্যা P-তে অভিলম্বের সঙ্গে θ কোণ উৎপন্ন করে তবে জ্যার দৈর্ঘ্য $= 2\rho\cos\theta$ (চিত্র দেখুন)

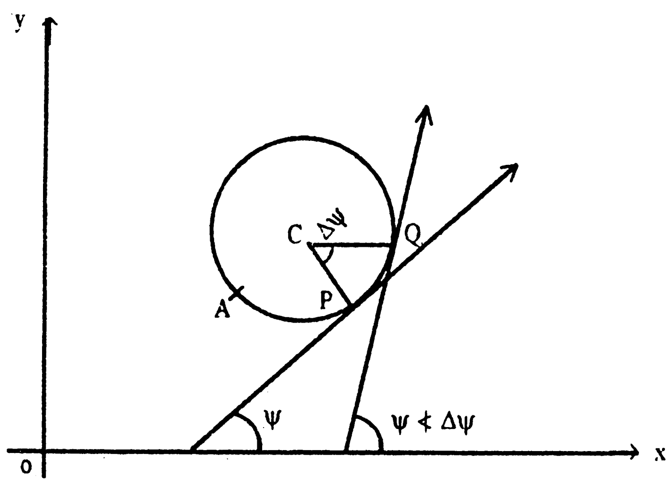
মন্তব্য : যদি বক্রতা কেন্দ্র C অভিলম্বের ধনাত্মক দিকে থাকে, তবে আমরা ρ কে ধনাত্মক ধরব, নচেৎ ঋণাত্মক।

10.4 পর্যবেক্ষণ

সদ্য প্রাপ্ত বক্রতা এবং বক্রতা ব্যাসার্ধের সংজ্ঞার সাপেক্ষে নিম্নলিখিত দুটি ক্ষেত্রে আমরা পাচ্ছি দেখুন।

(A) যে কোন একটি সরলরেখার ক্ষেত্রে যে কোন বিন্দুতে বক্রতা $K=\dfrac{d\psi}{ds}=0$ কারণ, সরলরেখার ক্ষেত্রে s-র সাপেক্ষে ψ এর কোন পরিবর্তন নেই।

(B) **বৃত্তের বক্রতা একটি ধ্রুবক যা বৃত্তের ব্যাসার্ধের বিপরীত** (reciprocal) ঃ



চিত্র 10.4.1

প্রমাণ ঃ চিত্রে বৃত্তের উপর A বিন্দু নির্দিষ্ট, P যে কোন একটি বিন্দু $\widehat{AP} = s$. $\widehat{AQ} = s + \Delta s$, এবং তারফলে $\widehat{PQ} = \Delta s$, P ও Q বিন্দুতে স্পর্শকদ্বয়ের ধনাত্মক দিক্ x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গে যথাক্রমে ψ এবং $\Psi+\Delta\Psi$ কোণ উৎপন্ন করছে। P ও Qতে অভিলম্বদ্বয়ের ধনাত্মক দিক অবশ্যই কেন্দ্র C তে মিলিত হবে, তার ফলে $\angle PCQ = \Delta\Psi$ এখন ত্রিকোণমিতির সাহায্যে আমরা পাচ্ছি

$\Delta s = r\Delta\Psi$ (r= বৃত্তের ব্যাসার্ধ) ।

অতএব P- বিন্দুতে বক্রতা

$$K = \underset{\Delta s\to 0}{Lt}\frac{\Delta\psi}{\Delta s} = \underset{\Delta s\to 0}{Lt}\frac{1}{r} = \frac{1}{r} \qquad (10.4.1)$$

= ব্যাসার্ধের বিপরীত।

P-তে বক্রতা ব্যাসার্ধ (ρ) $\frac{ds}{d\psi} = r$ (বৃত্তের ব্যাসার্ধ) P -তে বক্রতা কেন্দ্র হচ্ছে বৃত্তের কেন্দ্র C, P-তেবক্রতা বৃত্ত হচ্ছে প্রদত্ত বৃত্ত, বক্রতা জ্যা প্রদত্ত বৃত্তেরই জ্যা।

10.5 বক্ররেখার বিভিন্ন আকারের সমীকরণের ক্ষেত্রে বক্রতা ব্যাসার্ধ নির্ধারণের সূত্রাবলী ঃ

(A) **ইন্‌ট্রিনসিক্ আকার** ঃ $s = f(\psi)$ (Intrinsic equation)

বক্ররেখার উপর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে যে কোন একটি বিন্দুর চাপদৈর্ঘ্য (arc length) s এবং উক্ত বিন্দুতে স্পর্শকের ধনাত্মক দিক্ x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গে ψ কোণে নত হলে বক্ররেখার সমীকরণ $s = f(\psi)$ আকারে যখন প্রকাশিত হয় তখন উক্ত সমীকরণকে ইন্‌ট্রিক্সিক্ সমীকরণ বলে। এক্ষেত্রে সংজ্ঞানুসারে

$$K = \frac{d\psi}{ds} \text{ এবং } \rho = \frac{ds}{d\psi} \qquad (10.5.1)$$

উদাহরণ ঃ ক্যাটিন্যারী (catenary)-র ইনট্রিনসিক সমীকরণ $s = c\tan\psi$ অতএব এক্ষেত্রে বক্ররেখার যে কোন বিন্দুতে

$$\rho = c\sec^2\psi, \qquad K = \frac{1}{c}\cos^2\psi \qquad (10.5.2)$$

(B) **কার্তিয় স্থানাঙ্কে বক্ররেখার সমীকরণ $y = f(x)$** আকারে ঃ

(এক্স্‌প্লিসিট আকার, explicit form)

সংজ্ঞানুসারে $\rho = \frac{ds}{d\psi}$ আমরা (8.13.8) এ জেনেছি $\tan\psi = \frac{dy}{dx}$. অতএব $\frac{d^2y}{dx^2} = \sec^2\psi\frac{d\psi}{dx}$

$$= \sec^2\psi\frac{d\psi}{ds}\frac{ds}{dx} = \sec^3\psi\frac{d\psi}{ds} \ [\text{ since (8.13.7) এ } \cos\psi = \frac{dx}{ds}]$$

এবং তার ফলে

$$\rho = \frac{ds}{d\psi} = \frac{\sec^3\psi}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{(1+\sin^2\psi)^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$= \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2x}{dx^2}} = \frac{(1+y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{y_2} \qquad (10.5.3)$$

$$\left[y_1 \equiv \frac{dy}{dx}, \quad y_2 \equiv \frac{d^2y}{dx^2}\right]$$

মন্তব্যঃ (a) $y = f(x)$ আকারে বক্ররেখার ক্ষেত্রে বক্ররেখার উপর একটি বিন্দুতে ρ সংজ্ঞাত হবে যদি উক্ত বিন্দুতে $\frac{d^2y}{dx} \neq 0$ হয়। অতএব বক্ররেখার যে বিন্দুটি ইনফ্লেক্‌শনশিপ, যে বিন্দুতে $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, যে বিন্দুতে ρ অসংজ্ঞাত হবে।

(b) ρ নির্ণয়ের ক্ষেত্রে $\left(1+y_1^2\right)^{\frac{3}{2}} = \left[\left(1+y_1^2\right)^3\right]^{\frac{1}{2}}$ বর্গমূলের ধনাত্মক মানটি আমরা নিয়ে থাকি। সুতরাং একটি বিন্দুতে $\rho \gtrless 0$ হবে যদি সেই বিন্দুতে $\frac{d^2y}{dx^2} \gtrless 0$ হয়, অর্থাৎ যখন সেই বিন্দুতে ($y>0$ ক্ষেত্রে) x অক্ষ সাপেক্ষে বক্ররেখাটি উত্তল ও অবতল হবে [$y < 0$ ক্ষেত্রে x অক্ষসাপেক্ষে অবতল বা উত্তল হবে]।

বাস্তবে আমরা ρ -র সাংখ্যমানই সাধারণভাবে দেখে থাকি। সাংখ্যমান দ্বারা বক্রতা ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যকে বোঝায়।

(c) যে বিন্দুতে $y_1 \equiv \frac{dy}{dx}$ অসংজ্ঞাত, অর্থাৎ যে বিন্দুতে স্পর্শক y অক্ষের সমান্তরাল, সে বিন্দুর ক্ষেত্রে উপরে লেখা সূত্রটি কার্যকরী হবে না। এই বিশেষ ক্ষেত্রে x অক্ষকে y-অক্ষ এবং y অক্ষকে x অক্ষ ধরে ρ নির্ণয়ের সূত্রটি হবে

$$\rho = \left[1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{3/2} \Big/ \frac{d^2x}{dy^2} \tag{10.5.4}$$

এই সূত্রটি নির্ণয়ে আমরা বক্ররেখার সমীকরণ ধরেছি $x = \phi(y)$.

উদাহরণ : $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের $P(x,y)$ বিন্দুতে $\rho = -\frac{2(a+x)^{3/2}}{a^{1/2}}$ কারণ $\frac{dy}{dx} = \sqrt{a}x^{-1/2}$ এবং $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\sqrt{a}}{2}x^{-3/2} = \frac{\sqrt{a}}{2}x^{-3/2}$ (সাংখ্যমান) অতএব $\rho_{(0,0)} = 2a$.

(C) কার্তিয় স্থানাঙ্কে বক্ররেখার সমীকরণ ইম্‌প্লিসিট আকারে $F(x,y) = 0$ **ঃ**

এক্ষেত্রে আমরা জানি $y_1 \equiv \frac{dy}{dx} = -\frac{Fx}{Fy}$, এবং $y_2 \equiv \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3}$

অতএব $Fy \neq 0$ ধরে (10.5.3) অনুসারে

$$\rho = (1+y_1^2)^{\frac{3}{2}} \Big/ y_2$$

$$= \frac{(F_y{}^2 + F_x{}^2)^{\frac{3}{2}}}{F_{xx}F_y{}^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x{}^2} \text{ (সাংখ্যমান)}$$

$$(F_{xx}F_y^{\,2} - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^{\,2} \neq 0) \qquad (10.5.5)$$

$F_{xy} = F_yx$. ধরা হয়েছে।

উদাহরণ $x^{1/3} + y^{1/3} = 1$ -র $(\frac{1}{8}, \frac{1}{8})$ বিন্দুতে

$$(\rho)_{\left(\frac{1}{8},\frac{1}{8}\right)} = \frac{\left[\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}_{\left(\frac{1}{8},\frac{1}{8}\right)}}{\left[-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}\left(\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}\right)^2 - 0 - \frac{2}{9}y^{-\frac{5}{3}}\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right)^2\right]_{\left(\frac{1}{8},\frac{1}{8}\right)}}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{16} \text{ (সাংখ্যমান)}$$

(D) **বক্ররেখার সমীকরণ প্যারামেট্রিক আকারে** $x = \phi\ (t)$, $y = \psi\ (t)$

এক্ষেত্রে $y_1 \equiv \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt} = \dfrac{\psi'(t)}{\phi'(t)}$

এবং $y_2 \equiv \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\psi''(t)\,\phi'(t) - \psi'(t)\,\phi''(t)}{[\phi'(t)]^3}$

অতএব $\qquad \rho = \left(1+y_1^2\right)^{\frac{3}{2}} \Big/ y_2$

$$= \frac{\left([\phi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2\right)}{\psi''(t)\phi'(t) - \psi'(t)\phi''(t)} \qquad (10.5.6)$$

$$[\psi''(t)\phi'(t) - \psi'(t)\phi''(t) \neq 0]$$

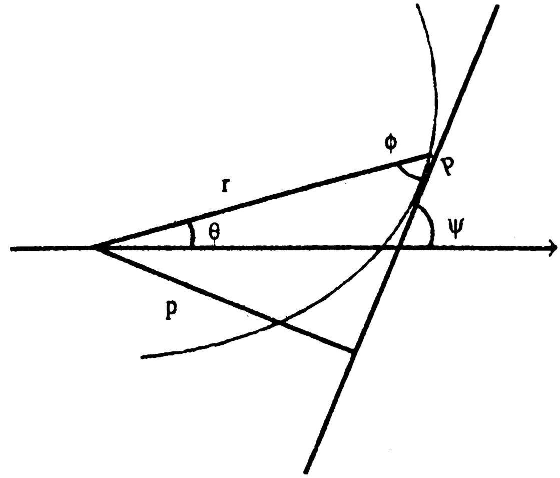
উদাহরণ $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$ উপবৃত্তের 'θ' বিন্দুতে

$$\rho = \frac{\left[(-a\sin\theta)^2 + (b\cos\theta)^2\right]^{3/2}}{(-b\sin\theta)(-a\sin\theta) - (-b\cos\theta)(-a\cos\theta)}$$

$$= \frac{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}}{ab} \text{ (সাংখ্যমান)}$$

(E) মেরুস্থানাঙ্কেবক্ররেখার সমীকরণ $r = f(\theta)$ আকারে ঃ

$$\text{এক্ষেত্রে } \rho = \frac{ds}{d\psi} = \frac{\frac{ds}{d\theta}}{\frac{d\psi}{d\theta}}$$



চিত্র 10.5.1

$$\text{চিত্রানুসারে } \psi = \theta + \phi$$

$$= \theta + \tan^{-1}\frac{r}{r_1}$$

$\left[8.5.5 \text{ অনুসারে } \tan\phi = \frac{rd\theta}{dr}, \qquad r_1 \equiv \frac{dr}{d\theta} \right]$

$$\text{অতএব } \frac{d\psi}{d\theta} = 1 + \frac{\frac{r_1^2 - rr_2}{r_1^2}}{1 + \left(\frac{r}{r_1}\right)^2} = \frac{r^2 + 2r_1^2 - rr_2}{r^2 + r_1^2}$$

$$\left[r^2 \equiv \frac{d^2r}{d\theta^2} \right]$$

এবং (8.13.10) অনুসারে

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + r_1^2}$$

$$\text{সুতরাং } \rho = \frac{(r^2 + r_1^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r_1^2 - rr_2} \tag{10.5.7}$$

(অবশ্যই $r^2 + 2r_1^2 - rr_2 \neq 0$)

মন্তব্য (a) 10.5(B) এর মন্তব্য (b) এর অনুরূপ $(r^2 + r_1^2)^{\frac{3}{2}} = \left((r^2 + r_1^2)^3\right)^{\frac{1}{2}}$ এর মান ধনাত্মক ধরা হবে এবং তার ফলে $\rho \gtrless 0$ হবে যখন $r^2 + 2r_1^2 - rr_2 \gtrless 0$ হবে।

(b) $r = \frac{1}{u}$ ধরে বক্ররেখার সমীকরণ হয়

$$u \equiv \frac{1}{r} = \frac{1}{f(\theta)} \equiv F(\theta). \text{ এখন } r_1 = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}, \qquad r_2 = -\frac{u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} - 2u\left(\frac{du}{d\theta}\right)}{u^4}$$

অতএব উপরে লেখা সূত্রটি (10.5.7) নিম্নলিখিত আকারে প্রকাশিত হয় ঃ

$$\rho = \frac{\left[u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{u^3\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right)} \qquad (10.5.8)$$

উদাহরণ ঃ $r = a(1+\cos\theta)$ (কার্ডিঅয়েড cardioid) -এর (r,θ) বিন্দুতে

$$\rho = \frac{\{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta\}^{\frac{3}{2}}}{a^2(1+\cos\theta)^2 + 2a^2\sin^2\theta + a(1+\cos\theta)a\cos\theta}$$

((10.5.7) অনুসারে)

$$= \frac{2}{3}\sqrt{2a}\{a(1+\cos\theta)\}^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{2a}\sqrt{r}\ \alpha\ \sqrt{r}\,.$$

(F) **বক্ররেখার সমীকরণ পেডাল সমীকরণ** (Pedal equation) $p = f(r)$ **এর আকারে ঃ**

চিত্র (10.5.1) অনুসারে

$$\psi = \theta + \phi \qquad p = r\sin\phi\,.$$

[p= (0,0) মূলবিন্দু থেকে (r,θ) বিন্দুতে স্পর্শকের লম্ব-দূরত্ব

ϕ = দূরক (radius vector) এবং স্পর্শকের অর্ন্তগত কোণ]।

অতএব

$$\frac{dp}{dr} = \sin\phi + r\cos\phi\frac{\phi d}{dr}$$

$$= r\frac{d\theta}{ds} + r\frac{dr}{ds}\frac{d\phi}{dr} \qquad [(8.13.11) \text{ অনুসারে}]$$

$$= r\frac{d\theta}{ds} + r\frac{d\theta}{ds}$$

$$r = \frac{d}{ds}(\theta+\phi) = r\frac{d\psi}{ds}$$

$$\rho = \frac{ds}{d\psi} = r\frac{dr}{dp} \tag{10.5.9}$$

উদাহরণ ঃ উপবৃত্তের কেন্দ্রের সাপেক্ষে পেডাল সমীকরণ

$$a^2 + b^2 - r^2 = \frac{a^2b^2}{p^2}.$$

অতএব উপবৃত্তের যে কোন বিন্দুতে

$$\rho = r\frac{dr}{dp} = r\left[-\frac{a^2b^2}{rp^3}\right] = \frac{a^2b^2}{p^3} \text{ (সাংখ্যমান)}$$

(G) **বক্ররেখার সমীকরণ স্পর্শকীয় মেরু সমীকরণ**

(Tangential-polar equation) $p = f(\psi)$ **আকারে ঃ**

এক্ষেত্রে $\dfrac{dp}{d\psi} = \dfrac{dp}{dr}\dfrac{dr}{ds}\dfrac{ds}{d\psi}$

$$= \frac{dp}{dr}\cos\phi\ \rho \qquad \left[(8.3.11) \text{ অনুসারে } \frac{dr}{ds}\cos\phi\right]$$

$$= \frac{dp}{dr}\cos\phi\ r\frac{dr}{dp} \qquad [\text{ সূত্র } (10.5.9) \text{ অনুসারে}]$$

$$= r\ \cos\phi.$$

অতএব

$$p^2 + \left(\frac{dp}{d\psi}\right)^2 = r^2\sin^2\phi + r^2\cos^2\phi = r^2.$$

এখন উভয়পক্ষকে p- র সাপেক্ষে অবকলন দ্বারা

$$2p + 2\frac{dp}{d\psi}\frac{d^2p}{d\psi^2}\frac{d\psi}{dp} = 2r\frac{dr}{dp}$$

বা, $$p+\frac{d^2p}{d\psi^2}=r\frac{dr}{dp}$$

বা, $$\rho = p+\frac{d^2p}{d\psi^2}. \qquad [\text{যেহেতু } (10.5.9) \text{ অনুসারে } \rho = r\frac{dr}{dp}] \quad (10.5.10)$$

উদাহরণ ঃ হাইপোসাইক্লয়েড (hypocycloid) $p = A\sin B\psi$ র ক্ষেত্রে $\rho = p+\frac{d^2p}{d\psi^2}=(1+B^2)p$.

(4) ρ **নির্ণয়ের অপর তিনটি সূত্র ঃ**

(i) $$\frac{1}{\rho}=\frac{-\frac{d^2x}{ds^2}}{\frac{dy}{ds}}=\frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\frac{dx}{ds}} \quad (10.5.11)$$

(ii) $$\frac{1}{\rho^2}=\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right) \quad (10.5.12)$$

(iii) $$\rho=\frac{r}{\sin\phi\left(r+\frac{d\phi}{dr}\right)} \quad (10.5.13)$$

প্রমাণ ঃ আমরা জানি

$$\cos\psi=\frac{dx}{ds}, \qquad \sin\psi=\frac{dy}{ds}. \quad (08.13.8 \text{ দেখুন})$$

অতএব $$-\sin\psi\frac{dy}{ds}=\frac{d^2x}{ds^2}$$

বা $$\frac{1}{\rho}=-\frac{\frac{d^2x}{ds^2}}{\frac{dy}{ds}}$$

অনুরূপে $\sin\psi=\frac{dy}{ds}$ কে অবকলন দ্বারা (10.5.11) -র দ্বিতীয় অংশটি পাওয়া যাবে।

পুনরায় $\sin\psi=\frac{dx}{ds}$ এবং $\sin\psi=\frac{dy}{ds}$ কে s সাপেক্ষে অবকলন দ্বারা আমরা পাই,

$$-\sin\psi\frac{d\psi}{ds}=\frac{d^2x}{ds^2}\quad \text{এবং}\quad \cos\psi\frac{d\psi}{ds}=\frac{d^2y}{ds^2}$$

বা, $$\frac{1}{\rho^2}=\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2$$

সর্বশেষে

$$\sin\phi\left(1+\frac{\phi\phi}{d\theta}\right)=\sin\phi+\frac{\phi\phi}{d\theta}\sin\phi$$

$$=r\frac{d\theta}{ds}+\frac{d\phi}{d\theta}r\frac{d\theta}{ds}$$ [সূত্র 8.13.11 অনুসারে]

$$=r\left[\frac{d\theta}{ds}+\frac{d\phi}{ds}\right]$$

$$=r\frac{d\psi}{ds}$$ $[\text{since}\,\psi=\theta+\phi$, চিত্র 10.5.1 দেখুন]

বা, $$\rho=\frac{ds}{d\psi}=\frac{r}{\sin\phi\left(1+\dfrac{d\phi}{d\theta}\right)}$$

10.6 মূল বিন্দুতে বক্রতা-ব্যাসার্ধ নির্ণয় (radius of curvature at origin) ঃ

(A) অপেক্ষকের বিস্তৃতি দ্বারা ঃ

যদি বক্ররেখাটি (0,0) বিন্দুগামী এবং বক্ররেখার সমীকরণ $y = f(x)$ আকারের হয়,তবে সাধারণ ভাবে $(y_1)_{(0.0)}$ এবং $(y_2)_{(0,0)}$ বের করে (10.5.3) সূত্র

$$\rho=\frac{(1+y_1^2)^{3/2}}{y^2}$$

অনুসারে $(\rho)_{(0,0)}$ নির্ণয় করা যায়। কিন্তু, কিছু কিছু বক্ররেখার ক্ষেত্রে এই পদ্ধতি অনুসরণ বেশ জটিল আকার ধারণ করে বা কখনও কখনও $(y_1)_{(0,0)}$ এবং $(y_2)_{(0,0)}$ নির্ণয় করা কঠিন হয়ে ওঠে। সেইসব ক্ষেত্রে (0,0)

বিন্দুতে y_1 এবং y_2 -র মান নির্ণয়ের জন্য বক্ররেখার সমীকরণ $y = f(x)$ আকারে আছে ধরে নিয়ে ম্যাক্‌লরিন্‌সের বিস্তৃতি (Maclaurin's expansion) সাহায্যে আমরা লিখতে পারি

$$y = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{\underline{|2}} f''(0) + \frac{x^3}{\underline{|3}} f'''(0) + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= xf'(0) + \frac{x^2}{\underline{|2}} f''(0) + \frac{x^3}{\underline{|3}} f'''(0) + \ldots\ldots\ldots \qquad (10.6.1)$$

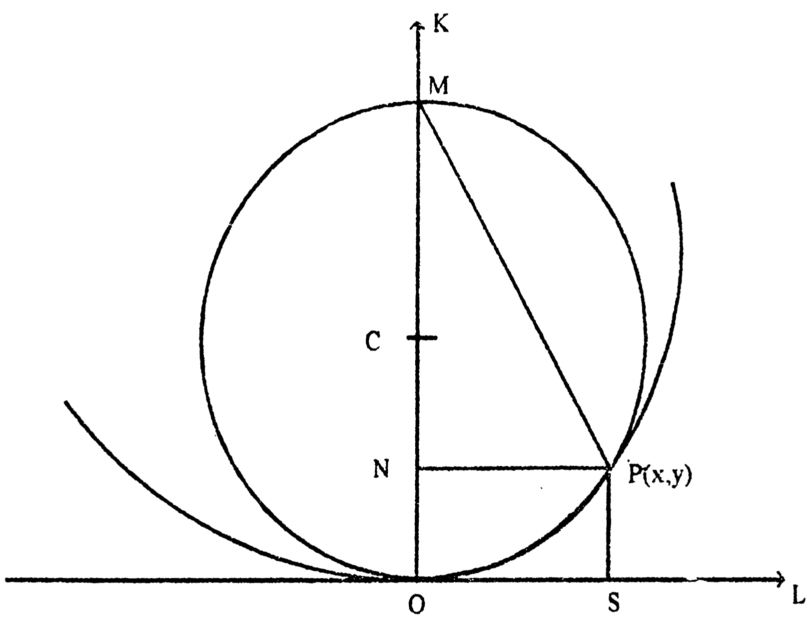
[বক্ররেখাটি (0,0) বিন্দুগামী রেখায় $f(0)=0$].

এখন, যেহেতু এই বিস্তৃতিতে x- এর সহগ $f'(0) = (y_1)_{(0,0)}$ এবং $\frac{x^2}{\underline{|2}}$ -র সহগ $f''_{(0)} = (y_2)_{(0,0)}$, সেহেতু

$$(\rho)_{(0,0)} = \frac{\left[1 + (f'(0))^2\right]^{\frac{3}{2}}}{f''(0)} \qquad (10.6.2)$$

(B) **নিউটনের সূত্র ঃ**

বক্ররেখাটি (0,0) বিন্দুগামী এবং (0,0) বিন্দুতে স্পর্শক $ax + by = 0$ সরলরেখা হলে,



চিত্র 10.6.1

$$(\rho)_{(0,0)} = \underset{(x,y)\to(0,0)}{\mathrm{Lt}} \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{x^2+y^2}{ax+by} \qquad (10.6.3)$$

প্রমাণ ঃ মূলবিন্দু $0_{(0,0)}$ এর নিকটবর্তী $P(x,y)$ বক্ররেখার উপর একটি বিন্দু। এবার এমন একটি বৃত্ত আঁকা হলো যা P দিয়ে যাচ্ছে এবং 0 তে বক্ররেখাকে স্পর্শ করছে। অর্থাৎ $ax+by=0$ সরলরেখাটি বৃত্ত ও বক্ররেখা উভয়েরই 0 বিন্দুতে স্পর্শক। অতএব 0 বিন্দুতে উভয়েরই অভিলম্ব OK এবং OK -র OM অংশ বৃত্তটির ব্যাস। বৃত্তটির কেন্দ্র C, $PN \perp OM$, $PS \perp OL$ (OL হচ্ছে $ax+by=0$ সরলরেখা)। এখন লক্ষ্য করা যাচ্ছে যখন P বিন্দুটি বক্ররেখার উপর দিয়ে O বিন্দুর দিকে অগ্রসর হবে অর্থাৎ যখন $(x,y)\to(0,0)$ লিমিট নেওয়া হবে, তখন উক্ত বৃত্তটি অবশ্যই O বিন্দুতে বক্রতা-বৃত্ত এবং ব্যাসার্ধ OC বক্রতা ব্যাসার্ধে পরিণত হবে। সুতরাং OC বা $\frac{1}{2}$OM -র মান নির্ণয় করে $(x,y)\to(0,0)$ লিমিট নিলে (ρ)-র মান বার করা যাবে।

প্রাথমিক জ্যামিতিক ধারণা থেকে

$$ON.NM = NP^2$$

বা $$NM = \frac{NP^2}{ON} \qquad \text{বা } OM - ON = \frac{NP^2}{ON}$$

বা $$OM = \frac{PN^2+ON^2}{ON} = \frac{OP^2}{PS} = \frac{x^2+y^2}{\frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

অতএব $$(\rho)_{(0,0)} = \underset{(x,y)\to(0,0)}{\mathrm{Lt}} \frac{1}{2}OM = \frac{1}{2}\underset{(x,y)\to(0,0)}{\mathrm{Lt}} \sqrt{a^2+b^2}\,\frac{x^2+y^2}{ax+by}$$

বিশেষ ক্ষেত্রে (1) যখন x অক্ষ অর্থাৎ $y=0$ সরলরেখা (0,0) বিন্দুতে স্পর্শক, তখন (10.6.3) অনুসারে

$$(\rho)_{(0,0)} = \underset{(x,y)\to(0,0)}{\mathrm{Lt}} \frac{1}{2}\sqrt{0+1}\,\frac{x^2+y^2}{y} \qquad [\text{ এখানে } a=0,\ b=1]$$

$$= \underset{(x,y)\to(0,0)}{\mathrm{Lt}} \frac{x^2}{2y} \qquad (10.6.4)$$

(2) যখন y -অক্ষ, অর্থাৎ $x=0$ **সরলরেখা (0,0) বিন্দুতে স্পর্শক,**

তখন $$(\rho)_{(0,0)} = \underset{(x,y)\to(0,0)}{\mathrm{Lt}} \frac{1}{2}\sqrt{0+1}\,\frac{x^2+y^2}{x} = \underset{(x,y)\to(0,0)}{\mathrm{Lt}} \frac{y^2}{2x} \qquad (10.6.5)$$

মন্তব্য ঃ (10.6.3), (10.6.4), (10.6.5) এ উল্লেখিত লিমিটগুলি বার করার সময় আপনারা খেয়াল রাখবেন

$\underset{(x,y)\to(0,0)}{\mathrm{Lt}} \dfrac{y}{x} = (0,0)$ বিন্দুতে স্পর্শকের প্রবণতা।

10.7 উদাহরণ ঃ

(a) $x^3+y^3=3axy$ বক্ররেখার (0,0) বিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্ধ হবে $\dfrac{3a}{2}$.

সমাধান ঃ (10.6) A **পদ্ধতি অনুসারে ঃ**

ম্যাক্‌লরিন্‌সের (Maclaurin's) বিস্তৃতি সাহায্যে

$$y = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{\lfloor 2}f''(0) + \frac{x^2}{\lfloor 3}f'''(0)+\ldots\ldots\ldots$$

$$= xf'(0) + \frac{x^2}{\lfloor 2}f''(0) + \frac{x^3}{\lfloor 3}f'''(0)+\ldots\ldots\ldots$$

[যেহেতু, (0,0) বিন্দুগামী বক্ররেখার ক্ষেত্র f(0)=0 এখানে ধরা হয়েছে $y = f(x)$]

y-র এই বিস্তৃত মানটি বক্ররেখার সমীকরণে বসিয়ে পাওয়া যাচ্ছে

$$x^3 + \left[xf'(0) + \frac{x^2}{\lfloor 2}f''(0)+\ldots\ldots\right]^3$$

$$= 3ax\left[xf'(0) + \frac{x^2}{\lfloor 2}f''(0)+\ldots\ldots\right]$$

উভয় পক্ষ হতে x^2 এবং x^3 -র সঙ্গে সমান ধরে

$$f'(0) = 0, \quad f''(0) = \frac{2}{3a}.$$

অতএব $(\rho)_{(0,0)} = \dfrac{\left[1+(f'(0))^2\right]^{\frac{3}{2}}}{f''(0)} = \dfrac{3a}{2}$

(10.6)B **পদ্ধতি, অর্থাৎ নিউসূত্রানুসারে ঃ**

লক্ষ্য করুন (0,0) বিন্দুতে প্রদত্ত বক্ররেখার স্পর্শকদ্বয় $xy = 0$ অর্থাৎ $x = 0$ এবং $y = 0$ উভয়েই স্পর্শক।

$y = 0$ স্পর্শক হওয়ায় (10.6.4) অনুসারে

$$(\rho)_{(0,0)} = \underset{(x,y)\to(0,0)}{\mathrm{Lt}} \frac{x^2}{2y} = \underset{(x,y)\to(0,0)}{\mathrm{Lt}} = \frac{x^3}{2xy}$$

$$= \underset{(x,y)\to(0,0)}{\mathrm{Lt}} \frac{3axy - y^3}{2xy}$$ [বক্ররেখার সমীকরণ থেকে $x^3=3axy-y^3$]

$$= \frac{3a}{2} - \underset{(x,y)\to(0,0)}{\mathrm{Lt}} \frac{1}{2}\frac{y}{x}y.$$

$$= \frac{3a}{2} - \frac{1}{2}.0.0 = \frac{3a}{2}$$ [যেহেতু $\underset{(x,y)\to(0,0)}{\mathrm{Lt}} \frac{y}{x}$ স্পর্শকের প্রবণতা $= 0$]

একই ভাবে $x = 0$ কে স্পর্শক ধরে (10.6.5) অনুসারে $(\rho)_{(0,0)} = \frac{3a}{2}$ হবে, শুধু খেয়াল রাখবেন $\underset{(x,y)\to(0,0)}{\mathrm{Lt}} \frac{x}{y} = 0$.

মন্তব্য ঃ বক্ররেখার সমীকরণ নিম্নলিখিত প্যারামেট্রিক আকারে

$$x = \frac{3am}{1+m^3}, \qquad y = \frac{3am^2}{1+m^3}$$

প্রকাশ করে আমরা (10.5.6) সূত্রটিও প্রয়োগ করতে পারি $(\rho)_{(0,0)}$ নির্ণয় করার জন্য।

(b) $y = x + 3x^2 - x^3$ বক্ররেখার (0,0) বিন্দুতে স্পর্শক নির্ণয় করা যাক্।

সমাধান ঃ বক্ররেখাটি (0,0) বিন্দুগামী এবং উক্ত বিন্দুতে স্পর্শক $y - x = 0$.....(i) [8.7 দেখুন]

অতএব (10.6.3) অনুসারে

$$(\rho)_{(0,0)} = \frac{1}{2} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\mathrm{Lt}} \frac{x^2+y^2}{\frac{y-x}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\mathrm{Lt}} \frac{x^2+y^2}{3x^2-x^3}$$ [(i) -র সাহায্যে]

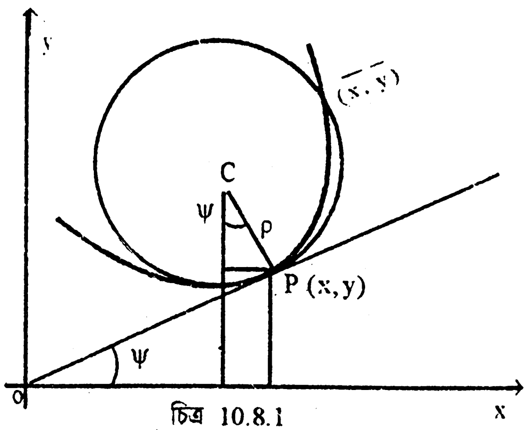
$$= \underset{(x,y)\to(0,0)}{\mathrm{Lt}} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1+\frac{y^2}{x^2}}{3-x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1+1}{3-0} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

[যেহেতু, $\underset{(x,y)\to(0,0)}{\mathrm{Lt}} \frac{y}{x} =$ স্পর্শক $y - x = 0$ -র প্রবণতা $=1$] ।

10.8 বক্রতা কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং বক্রতা বৃত্তের সমীকরণ ঃ

চিত্রে বক্ররেখার উপর P(x,y). বিন্দুর সাপেক্ষে বক্রতা কেন্দ্র $C \equiv (\bar{x}, \bar{y})$, $CP = \rho = \left(1+b_1^{\,2}\right)^{\frac{3}{2}} / y_2$.
P বিন্দুতে PT স্পর্শকের প্রবণতা = $\tan\psi$ চিত্রানুসারে



চিত্র 10.8.1

$$\bar{x} = x - \rho\sin\psi$$

$$= x - \frac{(1+y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{y_2}\frac{y_1}{(1+y_1^2)^{\frac{1}{2}}} = x - \frac{y_1}{y_2}(1+y_1^2)$$

$$\bar{y} = y + \rho\cos\psi = y + \frac{(1+y_1^2)^{3/2}}{y_2}\frac{1}{(1+y_1^2)^{1/2}} = y + \frac{1+y_1^2}{y_2}, \tag{10.8.1}$$

কারণ, $\tan\psi = \frac{dy}{dx} = y_1$, $\sin\psi = \frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}}$, $\cos\psi = \frac{1}{\sqrt{1+y_1^2}}$

P(x, y) বিন্দুতে বক্রতাবৃত্তের সমীকরণ

$$(X-\bar{x})^2 + (Y-\bar{y})^2 = \rho^2$$

বা, $$\left[X - x + \frac{y_1}{y_2}(1+y_1^2)^2\right]^2 + \left[Y - y - \frac{1+y_1^2}{y_2}\right]^2 = \rho^2, \tag{10.8.2}$$

(X,Y) হচ্ছে বক্রতা বৃত্তের উপর যে কোন একটি বিন্দু।

মন্তব্য ঃ (a) (10.8.1) এবং (10.8.2) সূত্রগুলি সত্য কেবলমাত্র তখনই সত্য যখন P-তে স্পর্শক y অক্ষের সমান্তরাল নয়, অর্থাৎ যখন $\frac{dy}{dx}$ সংজ্ঞাত।

যখন স্পর্শক PT, y- অক্ষের সমান্তরাল হবে, তখন (10.5)B -র মন্তব্য (b) অনুসারে

$$\rho = \frac{(1+x_1^2)^{3/2}}{x_2}.\ x_1 \equiv \frac{dx}{dy}, x_2 \equiv \frac{d^2x}{dy^2}$$

এবং একই পদ্ধতি অনুসরণক্রমে দেখা যাবে

$$\bar{x} = x + \frac{1+x_1^{\,2}}{x_2},\quad \bar{y} = y - \frac{x_1}{x_2}(1+x_1^{\,2})$$

(b) জ্যামিতির সাহায্য ব্যাতিরেকে C $(\bar{x}, \bar{y})$ নির্ণয় (যখন স্পর্শক y অক্ষের সমান্তরাল নয়)ঃ

P (x, y) বিন্দুতে অভিলম্ব

$$(X - x) + (Y - y)\, y_1 = 0.$$

যেহেতু c $(\bar{x}, \bar{y})$ এই অভিলম্বের উপর অবস্থিত, সেহেতু

$$(\bar{x}, x)^2 + (\bar{y} - y)y_1 = 0 \qquad \text{............... (i)}$$

পুনরায় CP = ρ হওয়ায় আমরা পাই

$$\left\{(\bar{x} - x)^2 + (\bar{y} - y)^2 = \rho^2 = \frac{(1 + y_1^2)^3}{(y_2)^2}\right\} \qquad \text{..........(ii)}$$

(i) এবং (ii) কে সমাধান করে আমরা পাব

$$\bar{x} = x - \frac{y_1}{y_2}(1 + y_1^2), \quad \bar{y} = y + \frac{1 + y_1^2}{y_2}$$

10.9 উদাহরণঃ

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$-র P(x, y) বিন্দুতে বক্রতাকেন্দ্র এবং বক্রতা বৃত্তের সমীকরণ বার করতে হবে।

সমাধান ঃ বক্ররেখার সমীকরণ থেকে

$$y_1 \equiv \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}, \quad y_2 \equiv \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2 y^3} \quad [\text{ যেহেতু, } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1]।$$

অতএব (10.8.1) অনুসারে বক্রতা -কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (10.9.1)

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= x - \frac{y_1}{y_2}(1 + y_1{}^2) = \frac{(a^2 - b^2)x^3}{a^4} \\ \bar{y} &= y + \frac{1 + y_1^2}{y^2} = -\frac{(a^2 - b^2)y^3}{b^4} \end{aligned}\right\} \qquad (10.9.2)$$

[যেহেতু $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$]

বক্রতাবৃত্তের সমীকরণ

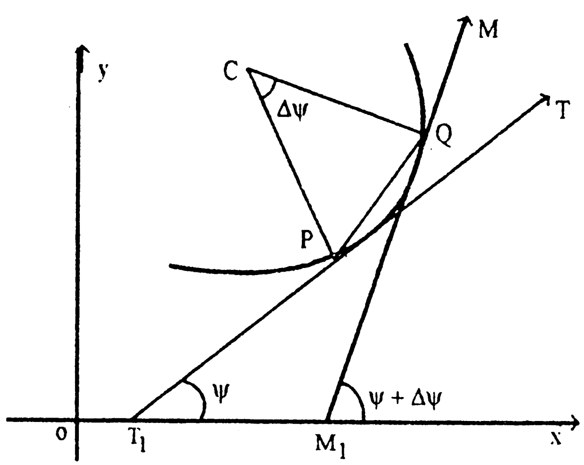
$$(X-\bar{x})^2+(Y-\bar{y})^2=\frac{(1+y_1^2)^3}{(y_2)^2}$$

(10.9.1) এবং (10.9.2) র সাহায্যে এই সমীকরণ হবে

$$\left(X-\frac{(a^2-b^2)x^3}{a^4}\right)^2+\left(Y+\frac{(a^2+b^2)y^3}{b^4}\right)=\frac{y^2}{a^4b^8}(a^4y^2+b^4x^2).$$

10.10 উপপাদ্য ঃ

বক্ররেখার উপর নিকটতম দুটি বিন্দু P ও Q তে অভিলম্বের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $Q\to P$ লিমিটে (বক্ররেখা বরাবর) P বিন্দুতে বক্রতা কেন্দ্রের স্থানঙ্কে পরিণত হয়।



চিত্র 10.10.1

প্রমাণ ঃ বক্ররেখার উপর নিকটতম $P(x,y)$ এবং $Q(x+\Delta x, y+\Delta y)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ধনাত্মক দিক্ x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গে যথাক্রমে ψ এবং $\psi+\Delta\psi$ কোণ উৎপন্ন করছে। $\widehat{AP}=s$ এবং $\widehat{AQ}=s+\Delta s$, A একটি উক্ত বক্ররেখার উপর নির্দিষ্ট বিন্দু। P ও Q বিন্দুতে অভিলম্বদ্বয় পরস্পর C বিন্দুতে ছেদ করে। আমরা প্রমাণ করব $Q\to P$ লিমিটে (বক্ররেখা বরাবর) C-র স্থানাঙ্কে সীমাস্থ (limiting value) মানই হবে P-র সাপেক্ষে বক্রতা কেন্দ্র, অর্থাৎ আমরা প্রমাণ করব

$$\underset{Q\to P}{\mathrm{Lt}}\, PC=\rho \quad \text{(P-তে বক্রতা ব্যাসার্ধ)}$$

ΔCPQ র $\angle PCQ=\Delta\psi$ অতএব ত্রিকোনমিতির সূত্রানুসারে

$$\frac{CP}{\sin\angle CQP}=\frac{PQ}{\sin\angle PCQ} \qquad \text{বা,}\quad CP=PQ\frac{\sin\angle CQP}{\sin\angle PCQ}$$

বা, $$CP=\frac{PQ}{\Delta s}\frac{\Delta s}{\Delta\psi}\cdot\frac{\Delta\psi}{\sin\Delta\psi}\sin\angle CQP \qquad [\text{যেহেতু, } \angle PCQ=\Delta\psi]$$

অতএব $$\underset{Q\to P}{\mathrm{Lt}}=\underset{Q\to P}{\mathrm{Lt}}\frac{PQ}{\Delta s}\underset{\Delta\psi\to 0}{\mathrm{Lt}}\frac{\Delta s}{\Delta\psi}\underset{\psi\to 0}{\mathrm{Lt}}\frac{\Delta\psi}{\sin\Delta\psi}\underset{Q\to P}{\mathrm{Lt}}\sin\angle CQP$$

(বক্ররেখা বরাবর)

$$= 1.\rho.1.\sin\frac{\pi}{2} = \rho$$

[কারণ আমরা (8,13.1) উল্লেখ করেছি $\underset{Q \to P}{Lt} \frac{PQ}{\overline{PQ}} = 1$

$Q \to P$ লিমিটে $\angle CQP \to \angle CPT = \frac{\pi}{2}$ (স্পর্শক ও অভিলম্বের অর্ন্তগত কোন এবং $\underset{\Delta\psi \to 0}{Lt} \frac{\sin\Delta\psi}{\Delta\psi} = 1$].

10.11 বক্রতা কেন্দ্রজ এবং বক্রতাপ্রতি কেন্দ্রজ (Evolute and Involute) ঃ

বক্ররেখা $y = f(x)$ এর $P(x,y)$ বিন্দুর সাপেক্ষে বক্রতাকেন্দ্রে স্থানাঙ্ক (10.৪)

$$\bar{x} = x - \frac{y_1}{y_2}(1 + y_1^2), \ \bar{y} = y + \frac{1 + y_1^2}{y_2}$$

বক্ররেখা বরাবর P সঞ্চারিত হলে (সামনে বা পিছনে) $(\bar{x}, \bar{y})$-র মান পরিবর্তিত হবে, অর্থাৎ বক্ররেখার উপর বিভিন্ন বিন্দুর জন্য বিভিন্ন বক্রতা কেন্দ্র পাওয়া যাবে। এভাবে উৎপন্ন হবে বক্রতা কেন্দ্রের সঞ্চারপথ। এই সঞ্চারপথই হলে উক্ত বক্ররেখার বক্রতাকেন্দ্রজ (evolute).

$y = f(x)$ বক্ররেখাকে Γ দ্বারা এবং এই বক্ররেখার বক্রতা কেন্দ্রজকে Γ_1 দ্বারা চিহ্নত করা হলো। এখন Γ-কে বলা হবে Γ_1 -র বক্রতা প্রতিকেন্দ্রজ।

10.12 উদাহরণ

a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের বক্রতাকেন্দ্রজ (evolute) নির্ণয় করা যাক্।

সমাধান ঃ (10.9.2) তে প্রদত্ত উপবৃত্তের $P(x,y)$ বিন্দুর সাপেক্ষে বক্রতা কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(\bar{x}, \bar{y})$ -র মান বার করা হয়েছে। সুতরাং $\bar{x} = (a^2 - b^2)\frac{x^3}{a^4}$, $\bar{y} = \frac{(a^2 - b^2)y^3}{b^4}$ এই দুই সমীকরণ থেকে x এবং y-র মান $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$-র বসিয়ে দিলে আমরা পাই

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{a^4\bar{x}}{a^2 - b^2}\right)^{2/3} + \frac{1}{b^2}\left(\frac{b^4\bar{y}}{a^2 - b^2}\right)^{2/3} = 1$$

বা, $\quad (a\bar{x})^{2/3} + (b\bar{y})^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$

অতএব নির্ণেয় সঞ্চারপথ,

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}.$$

b) $y^2 = 4ax$ -র বক্রতা কেন্দ্রজ নির্ণয় করা যাক্।

সমাধান ঃ প্রদত্ত অধিবৃত্তের প্যারামেট্রিক সমীকরণ $x = at^2,\ y = 2at.$

অতএব $\bar{x} =$ বক্রতা কেন্দ্রের x- স্থানাঙ্ক $= x - \dfrac{y_1}{y_2}(1 + y_1)^2$

$$= 2a + 3at^2 \quad \left[\text{কারণ}\ \ y_1 = \frac{1}{t},\ \ y_2 = -\frac{1}{2at^3} \right]$$

$\bar{y} =$ বক্রতা কেন্দ্রের y-স্থানাঙ্ক $= y + \dfrac{1 + y_1^2}{y_2}$

$$= -2at^3$$

তখন t অপনীত হলে আমরা পাই

$$(\bar{x} - 2a)^3 = 27a^3t^6 = 27a^3\frac{\bar{y}^2}{4a^2}$$

বা $\qquad 27a\bar{y}^2 = 4(\bar{x} - 2a)^3.$

অতএব $(\bar{x}, \bar{y})$ -র সঞ্চারপথ বা বক্রতাকেন্দ্রজ হচ্ছে,

$$27ay^2 = 4(x - 2a)^3$$

10.13 উপপাদ্য ঃ

যে কোন বক্ররেখার বিভিন্ন বিন্দুতে অভিলম্বগুলি যে সরলরেখা পরিবার সৃষ্টি করে তাদের পরিস্পর্শক হচ্ছে প্রদত্ত বক্ররেখার বক্রতা কেন্দ্রজ (evolute).

প্রমাণ ঃ (9.6) B -তে আমরা দেখেছি সরলরেখা বা বক্ররেখা পরিবারের দুটি নিকটবর্তী রেখার চরমছেদবিন্দুর সঞ্চারপথই উক্ত পরিবারের পরিস্পর্শক। (10.10) উপপাদ্যে লক্ষ্য করলাম বক্ররেখার নিকটতম দুটি বিন্দু P এবং Q -র অভিলম্বের চরম ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $Q \to P$ লিমিটে উক্ত বক্ররেখার P-বিন্দুর সাপেক্ষে বক্রতাকেন্দ্র।

এই দুই সিদ্ধান্তের পরিপ্রেক্ষিতে এটাই প্রমাণ হচ্ছে যে একটি বক্ররেখার বিভিন্ন বিন্দুতে অভিলম্ব পরিবারের পরিস্পর্শকই হবে প্রদত্ত বক্ররেখার বক্রতা-কেন্দ্রজ।

উদাহরণ (10.12) b তে দেখা গেল $b^2 = 4ax$-র বক্রতাকেন্দ্রজ হচ্ছে $27ay^2 = 4(x - 2y)^3$.

আবার $y^2 = 4ax$ -র $(am^2, 2am)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ,

$y = mx - 2am - am^3$ (m প্যারামিটার) হতে m সাপেক্ষে অবকলন দ্বারা আমরা পাই,

$$x - 2a = 3am^2, y = 2am^3.$$

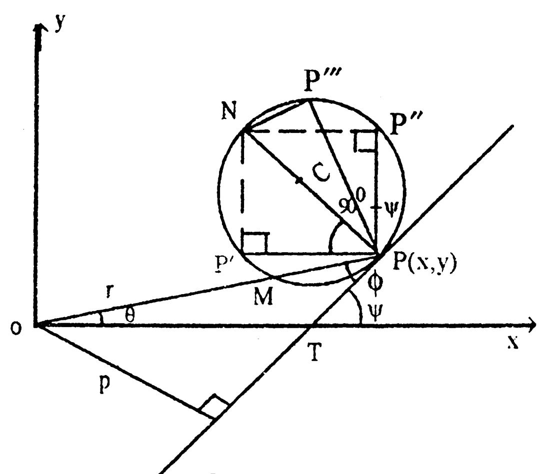
এখন $y = 2am$ এবং $x - 2a = 3am^2$ হতে m অপনীতকটি অর্থাৎ অভিলম্ব পরিবারের পরিস্পর্শকটি হচ্ছে

$$27ay^2 = 4(x-2a)^3.$$

অতএব উপপাদ্য 10.13 -র সত্যতা পরীক্ষিত হলো।

10.14 মূলবিন্দুগামী বা মেরুগামী বক্রতা-জ্যার দৈর্ঘ্য নির্ণয় ঃ

(A) চিত্রে বক্ররেখার P(x,y) বিন্দুতে অংকিত বৃত্তটি বক্রতাবৃত্ত, C = বক্রতাকেন্দ্র, CP = ρ (বক্রতা ব্যাসার্ধ)। উক্তবৃত্তে PM জ্যাটি মূলবিন্দুগামী। আমরা PM -র দৈর্ঘ্য বার করব। চিত্রানুসারে।



চিত্র 10.14.1

$$PM = PN\cos\angle MPN = 2\rho\cos(90^0 - \phi)$$

$$= 2\rho\sin\phi = 2p\frac{dr}{dp}\frac{p}{r} \quad (10.5.9 \text{ অনুসারে } \rho = p\frac{dr}{dp})$$

$$= 2p\frac{dr}{dp}$$

(B) x -অক্ষের সমান্তরাল বক্রতা-জ্যার দৈর্ঘ্য = PP′

$$= 2\rho\cos(90^0 - \psi) = 2\rho\sin\psi \; [\; \Delta PP'N \text{ হতে }]$$

(C) y -অক্ষের সমান্তরাল বক্রতা-জ্যার দৈর্ঘ্য $= PP''$

$$= 2\rho \cos\psi \ [\Delta NPP'' \text{ হতে}]$$

(D) P তে দূরক OP -র লম্বভাবে অবস্থিত বক্রতা-জ্যার দৈর্ঘ্য $= PP''' = 2\rho\cos\phi \ (\Delta PNP''' \text{ হতে})$

10.15 উদাহরণ ঃ

$y = a\log\sec\frac{x}{a}$ বক্ররেখার (x, y) বিন্দুতে y অক্ষের সমান্তরাল বক্রতা জ্যার দৈর্ঘ্য = একটি ধ্রুবক।

সমাধান : (10.14) B অনুসারে নির্ণেয় দৈর্ঘ্য $= 2\rho\cos\psi$

$$= 2\frac{(1+y_1^2)^{3/2}}{y} \ \frac{1}{(1+y_1^2)^{1/2}} \qquad [\because \tan\psi = y_1 \equiv \frac{dy}{dx}]$$

$$= \frac{2(1+y_1^2)}{y_2} \qquad [\because y_1 = \tan x/a, \ y_2 = \tfrac{1}{a}\sec^2 x/a]$$

$$= 2a$$

= ধ্রুবক।

10.16 সারাংশ ঃ

(a) বক্ররেখার একটি বিন্দুতে K (বক্রতা) $\underset{\Delta s\to 0}{\text{Lt}} \frac{\Delta\psi}{\Delta s} = \frac{d\psi}{ds}$, বক্ররেখার একটি বিন্দুতে ρ (বক্রতা ব্যাসার্ধ) $= \frac{ds}{d\psi}$'

(b) বক্ররেখার P বিন্দুতে অভিলম্বের ধনাত্মক দিকে $PC = \rho$ হলে, C হবে বক্রতা কেন্দ্র। C কে কেন্দ্র করে ρ ব্যাসার্দ্ধ নিয়ে যে বৃত্তটি উৎপন্ন হবে তাকে P -র সাপেক্ষে বক্রতাবৃত্ত বলে। P বিন্দুগামী বক্রতাবৃত্তের যে কোন জ্যাকে বক্রতা-জ্যা বলে।

(c) সরলরেখার বক্রতা = 0, বৃত্তের বক্রতা = ধ্রুবক = $\frac{1}{\text{ব্যাসার্ধ}}$

(d) ρ (কার্তিয় স্থানাঙ্কে) $= (1+y_1^2)^{\frac{3}{2}} \big/ y_2$

ρ (মেরু স্থানাঙ্কে) $= (r^2+r_1^2)^{\frac{3}{2}} \big/ r^2 + 2r_1^2 - rr_2)$

ρ (পেডাল স্থানাঙ্কে) $= r\dfrac{dr}{d\beta}$ ।

(c) মূলবিন্দুগামী বক্ররেখার মূলবিন্দুতে স্পর্শক $ax + by = 0$ হলে

$$(\rho)_{(0,0)} = \underset{(x,y)\to(0,0)}{\mathrm{Lt}} \frac{1}{2}(x^2+y^2) \Big/ \left(\frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

বক্ররেখার সমীকরণের সহায়তায় এই লিমিট বার করতে হবে এবং খেয়াল রাখতে হবে

$$\underset{(x,y)\to(0,0)}{\mathrm{Lt}} \frac{y}{x} = \text{মূলবিন্দুতে স্পর্শকের প্রবণতা ।}$$

(f) $(\bar{x}, \bar{y})$ বক্রতা কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক হলে,

$$\bar{x} = x - \frac{y_1}{y_2}(1+y_1^2),\ \bar{y} = y + \frac{1+y_1^2}{y_2}$$

[(x,y) হচ্ছে বক্ররেখার উপর সেই বিন্দুটি যে বিন্দুর সাপেক্ষে $(\bar{x}, \bar{y})$ নির্ণয় করা হচ্ছে]।

(g) বক্ররেখার বিভিন্ন বিন্দুর সাপেক্ষে বিভিন্ন বক্রতা কেন্দ্র পাওয়া যাবে। এই বক্রতা কেন্দ্রগুলি যে বক্ররেখা রচনা করবে তাকে বক্রতাকেন্দ্র বলে। বক্রতাকেন্দ্রের সঞ্চারপথই **বক্রতাকেন্দ্রজ** (evolute).

বক্ররেখার উপরিস্থিত দুটি নিকটতম বিন্দু P এবং Q বিন্দুতে অভিলম্বদ্বয়ের ছেদবিন্দুর সীমাস্থ অবস্থান $(Q \to P$ লিমিট নিলে) হবে P সাপেক্ষে বক্রতা-কেন্দ্র C.

(h) মেরু বা মূলবিন্দুগামী বক্রতা-জ্যার দৈর্ঘ্য $= 2\rho \sin\phi$, দূরকের (radius vector) উপর লম্বভাবে অবস্থিত বক্রতা-জ্যার দৈর্ঘ্য $= 2\rho\cos\phi$, x -অক্ষের সমান্তরাল বক্রতা-জ্যার দৈর্ঘ্য $= 2\rho\sin\psi$, b -অক্ষের সমান্তরাল বক্রতা-জ্যার দৈর্ঘ্য $= 2\rho\cos\psi$.

10.17 অনুশীলনী

1. $y^2 = 4ax$ এবং $x^2 = 4ay$ অধিবৃত্ত দুটি যে বিন্দুতে ছেদ করছে (মূলবিন্দু ব্যাতীত) সেইবিন্দুতে উভয়ের বক্রতা-ব্যাসার্ধ নির্ণয় করে বলুন উক্ত বিন্দুর সাপেক্ষে বক্ররেখাদুটির কে অবতল, কে উত্তল?

সমাধান $y^2 = 4ax$ ....(i) $\qquad$ $x^2 = 4ay$......... (ii)

(i) এবং (ii), (0,0) বিন্দু ব্যাতীত, ছেদ বিন্দুটি (4a, 4a).

(i) -র ক্ষেত্রে $(\rho)_{(4a,4a)} = \left[\frac{(1+y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{y_2}\right]_{(4a,4a)} = \left\{\frac{\left[1+\left(\frac{2a}{y}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{-\frac{2a}{y^2}}\right\}_{(4a,4a)} < 0$

(ii) -র ক্ষেত্রে $(\rho)_{(4a,4a)} = \left\{\frac{\left[1+\left(\frac{2x}{4a}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2a}}\right\}_{(4a,4a)} > 0.$

অতএব (10.5) B মন্তব্য (b) অনুসারে (i), উক্ত বিন্দুতে, x -অক্ষ সাপেক্ষে অবতল এবং (ii), উক্ত বিন্দুতে, x - অক্ষ সাপেক্ষে উত্তল। চিত্র অংকন করে অবতল বা উত্তলের যে ধারণা আপনারা 9.18-এ পেয়েছেন তা এই ক্ষেত্রে পরীক্ষা করে দেখুন।

2. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ -র প্যারামেট্রিক সমীকরণ $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$. t -বিন্দুতে দেখান

$$\rho = 3a(\sin t\cos t)$$

সমাধান ঃ আমরা (10.5) এ (C) অথবা (D) -র সূত্র লাগাতে পারি। এখানে আমরা y_1 এবং y_2 বার করে (10.5) এ (B) -র সূত্র লাগাব।

$$y_1 \equiv \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t(-\sin t)} = -\tan t$$

$$y_2 \equiv \frac{d^2y}{dx^2} = -\sec^2 t\frac{dt}{dx} = \frac{-\sec^2 t}{-3a\sin t\cos^2 t}$$

$$= \frac{1}{3a\sin t\cos^4 t}$$

অতএব, $\rho = \frac{(1+y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{y_2} = \frac{(1+\tan^2 t)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{3a\sin t\cos^4 t}}$

$$= 3a\sin t\cos t.$$

3. দেখান স্পাইরাল $p^2 = \frac{r^4}{r^2+a^2}$ - র যে কোন বিন্দুতে

$$\rho = (r^2+a^2)^{\frac{3}{2}} / (r^2+2a^2)$$

সমাধান ঃ প্রদত্ত বক্ররেখার সমীকরণ থেকে r সাপেক্ষে অবকলন দ্বারা

$$2p\frac{dp}{dr} = \frac{4r^3(r^2+a^2)-r^4.2r}{(r^2+a^2)^2} = \frac{2r^5+4r^3a^2}{(r^2+a^2)^2}$$

এখন (10.5) এ (F) -র সূত্রানুসারে

$$\rho = r\frac{dr}{dp} = r2p\frac{(r^2+a^2)^2}{2r^3(r^2+2a^2)} = \frac{1}{r^2}\frac{(r^2+a^2)^2}{(r^2+2a^2)}\frac{r^2}{(r^2+a^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{(r^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}{(r^2+2a^2)}.$$

4. $\frac{2a}{r} = 1+\cos\theta$ -র (r,θ) বিন্দুতে বক্রতা-ব্যাসার্ধ দেখান $\frac{2pr}{a}$, p হচ্ছে মূলবিন্দু থেকে (r,θ) বিন্দুতে স্পর্শকের লম্ব দূরত্ব।

সমাধান ঃ আমরা জানি $\tan\phi = r\frac{d\theta}{dr}$ (8.5.5 অনুসারে)

$$= \frac{2a}{r\sin\theta} \qquad [\text{ কারণ, } \frac{-2a}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -\sin\theta]$$

$$= \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\frac{\theta}{2}$$

অতএব $\phi = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$

আবার $p = r\sin\phi = r\cos\frac{\theta}{2}$

$$\Rightarrow p^2 = r^2 \cos\frac{\theta}{2} = r^2 \frac{a}{r} = ar \qquad [\text{কারণ } \frac{2a}{r} = 2\cos^2\frac{\theta}{2}]$$

সুতরাং (10.5.9) অনুসারে,

$$\rho = r\frac{dr}{dp} = r\frac{2p}{a} = \frac{2pr}{a}.$$

5. $x = a(\theta - \sin\theta)$, $x = a(1-\cos\theta)$, বক্ররেখার P ও Q বিন্দুতে স্পর্শকদ্বয় পরস্পর লম্ব। এই দুটি বিন্দুতে বক্রতা-ব্যাসার্ধ যথাক্রমে ρ_1 এবং ρ_2 হলে দেখান

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 = 16a^2.$$

সমাধান ঃ ধরা যাক্ P ও Q বিন্দুতে যথাক্রমে $\theta = \theta_1$ এবং $\theta = \theta_2$.

বক্ররেখার সমীকরণ থেকে যে কোন বিন্দুতে স্পর্শকের প্রবণতা,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{a\sin\theta}{a(1-\cos\theta)} = \cot\frac{\theta}{2} \quad \text{...(i)}$$

এখন যেহেতু $\theta = \theta_1$ এবং $\theta = \theta_2$ তে স্পর্শকদ্বয় পরস্পর লম্ব,

আমরা পাই $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\theta=\theta_1}, \left(\frac{dy}{d\theta}\right)_{\theta=\theta_2} = -1$

বা, $\cot\frac{\theta_1}{2}\cot\frac{\theta_2}{2} = -1$ ....(ii)

পুনরায় (i) হতে $\frac{d^2y}{dx^2} = -\operatorname{cosec}^2\frac{\theta}{2}\frac{1}{2}\frac{d\theta}{dx} = -\operatorname{cosec}^2\frac{\theta}{2}\frac{1}{2a\sin^2\frac{\theta}{2}}\frac{1}{2}$

$$= \frac{-1}{4a}\operatorname{cosec}^4\frac{\theta}{2}.$$

$$\rho_1 \equiv (\rho)_{\theta=\theta_1} = \left[\frac{(1+y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{y_2}\right]_{\theta=\theta_1} = \left(\frac{\left(\operatorname{cosec}^2\frac{\theta}{2}\right)^3}{\frac{-1}{4a}\operatorname{cosec}^4\frac{\theta}{2}}\right)_{\theta=\theta_1} = -4a\sin\frac{\theta}{2}$$

অনুরূপে $\rho_2 \equiv (\rho)_{\theta=\theta_2} = -4a\sin\dfrac{\theta_2}{2}$

অতএব $\rho_1^2+\rho_2^2 = 16a^2\left(\sin^2\dfrac{\theta_1}{2}+\sin^2\dfrac{\theta_2}{2}\right)$

$$= 16a^2\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta_2}{2}\right)+\sin^2\frac{\theta_2}{2}\right]$$

[কারণ, (i) হতে $\cos\left(\dfrac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)=0=\cos\dfrac{\pi}{2}$]

$$= 16a^2\left[\cos^2\frac{\theta_2}{2}+\sin^2\frac{\theta_2}{2}\right]=16a^2$$

6. $x+y=ax^2+by^2+cx^3$ বক্ররেখার (0,0) বিন্দুতে বক্রতা-ব্যাসার্ধ, উক্ত বিন্দু সাপেক্ষে বক্রতা-কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং সবশেষে বক্রতাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ প্রদত্ত বক্ররেখা $x+y=ax^2+by^2+cx^3$ .... (i)

(i) -র (0, 0) বিন্দুতে স্পর্শক $x+y=0$ [8.7 দেখুন]

অতএব নিউটনের সূত্রানুসারে (10.6.3 অনুসারে)

$$(\rho)_{(0,0)} = \frac{1}{2}\underset{(x,y)\to(0,0)}{\mathrm{Lt}}\frac{x^2+y^2}{\dfrac{x+y}{\sqrt{1^2+1^2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\underset{(x,y)\to(0,0)}{\mathrm{Lt}}\frac{(x^2+y^2)}{ax^2+by^2+cx^3} \qquad \text{[(i) -র সাহায্যে]}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\underset{(x,y)\to(0,0)}{\mathrm{Lt}}\frac{1+\dfrac{y^2}{x^2}}{a+b\dfrac{y^2}{x^2}+cx}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1+(-1)^2}{a+b(-1)^2} \qquad \left[\text{কারণ, } \underset{(x,y)\to(0,0)}{\mathrm{Lt}} \frac{y}{x} = \text{স্পর্শকের প্রবণতা } = -1\right]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{a+b}$$

(0, 0) বিন্দু সাপেক্ষে বক্রতাকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক, (10.8.1) অনুসারে,

$$\bar{x}=0-\frac{(y_1)_{(0,0)}}{(y_2)_{(0,0)}}\left[1+(y_1)^2_{(0,0)}\right]=\frac{1}{a+b}$$

$$\bar{y}=0+\frac{1+(y_1)^2_{(0,0)}}{(y_2)_{(0,0)}}=\frac{1}{a+b}.$$

[কারণ, (i) হতে $(y_1)_{(0,0)}=-1,\ (y_2)_{(0,0)}=2a+2b$]

অতএব বক্ররেখার (0,0) বিন্দুতে বক্রতা-বৃত্তের সমীকরণ

$$(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2=\rho^2$$

বা, $$\left(x-\frac{1}{a+b}\right)^2+\left(y-\frac{1}{a+b}\right)^2=\frac{2}{(a+b)^2}$$

বা, $$(a+b)(x^2+y^2)=2(x+y).$$

7. $r=ae^{\theta\cot\alpha}$ বক্ররেখার মেরুগামী বক্রতা-জ্যার দৈর্ঘ্য দেখান 2r.

সমাধান : (10.14) অনুসারে মূলবিন্দু বা মেরুগামী বক্রতা-জ্যার দৈর্ঘ্য $=2p\dfrac{dr}{dp}$

আমরা জানি $\tan\phi=r\dfrac{d\theta}{dr}=r\dfrac{1}{ae^{\theta\cot\alpha}.\cot\alpha}=\dfrac{r\tan\alpha}{r}=\tan\alpha$

অতএব $\phi=\alpha$.

এখন $p=r\sin\phi=r\sin\alpha$ হতে আমরা পাচ্ছি।

নির্ণেয় বক্রতা-জ্যার দৈর্ঘ্য $=2p\dfrac{dr}{dp}=2r\sin\alpha\dfrac{1}{\sin\alpha}=2r$.

10.18 প্রশ্নাবলী

1. (a) দেখান $y = c\cosh\frac{x}{c}$ ক্যাটিনারির (catenary -র) যে কোন বিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্ধ $= \frac{y^2}{c}$.

(b) দেখান $x^3 + y^3 = 3axy$ -র $\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$ বিন্দু বক্রতা-ব্যাসার্ধ $= -\frac{3\sqrt{2}}{16}a$.

(c) $s = c\log\sin\psi$ -র যে কোন বিন্দুতে বক্রতা দেখান $\frac{1}{c}\tan\psi$.

(d) $xy = c^2$ -র যে কোন বিন্দুতে প্রমাণ করুন $K = \frac{2c^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

(e) $y^2 = 4ax$ -র যে কোন বিন্দুতে দেখান $\rho = 2(a+x)^{\frac{3}{2}}/\sqrt{a}$

(f) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তের $P(x,y)$ বিন্দুতে দেখান

$K = ab/(a^2 - e^2x^2)^{3/2}$.

(g) $y = 4\cos x + \cos 2x$ বক্ররেখার $x = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে দেখান $\rho = \frac{17\sqrt{17}}{4}$

(h) প্রমান করুন $e^{\frac{y}{a}} = \sec\frac{x}{a}$ বক্ররেখার ক্ষেত্রে যে কোন বিন্দুতে $\rho = a\sec\frac{x}{a}$

(i) $x = a\cos\theta(1+\sin\theta)$, $y = a\sin\theta(1+\cos\theta)$ বক্ররেখাটির $\theta = -\frac{\pi}{4}$ বিন্দুতে দেখান $\rho = a$

(j) $r = \frac{\ell}{1+e\cos\theta}$ -র $\theta = \pi$ বিন্দুতে দেখান $\rho = \ell$ [সংকেত =10.5-র উদাহরণ ও অনুশীলনী দেখুন]

2. (a) প্রমাণ করুন $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$-র (Lemniscate-র) যে বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল সে বিন্দু $\rho = \sqrt{2}a/3$.

(b) প্রমাণ করুন $r = a\sec 3\theta$ -র (r,θ) বিন্দুতে $\rho = -\frac{r^4}{8p^3}$

(c) $r = a\theta$ এবং $r\theta = a$ বক্ররেখাদ্বয় যে বিন্দুতে ছেদ করে সে বিন্দুতে বক্রদ্বয়ের বক্রতা ব্যাসার্ধ 1 : 3 অনুপাতে আছে দেখান।

3. কার্ডিঅয়েড $r = a(1+\cos\theta)$ -র মেরু বিন্দুগামী যে কোন জ্যার প্রান্তবিন্দুদ্বয়ে বক্রতা-ব্যাসার্ধ দুটি ρ_1 এবং ρ_2 হলে প্রমাণ করুন $\rho_1^2 + \rho_2^2 = 16a^{2/9}$

[সংকেত ঃ $P'OP$ একটি মেরুগামী জ্যা হলে $P \equiv (OP, \theta_1), = P' \equiv (OP', 180^\circ - \theta_1)$.

(10.5)E-র উদাহরণ দেখুন $\rho_1 = (\rho)_{\theta=\theta_1}$ এবং $\rho_1 = (\rho)_{\theta=180^\circ-\theta_1}$ বার করুন]

4. নিম্নলিখিত বক্ররেখাগুলির ক্ষেত্রে (0,0) বিন্দুতে বক্রতা-ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন ঃ

(a) $y^2 - 6xy - 7x^2 + 2x^3 + x^4y - y^5 = 0$ [উঃ $4\sqrt{2}$, $-500\sqrt{2}$]

(b) $(a-x)y^2 = x^2(a+x)$ [উঃ $\neq a\sqrt{2}$]

(c) $x^3 - 2x^2y + 3xy^2 - 4y^3 + 5x^2 - 6xy + 7y^2 - 8y = 0$ [উঃ $\frac{4}{5}$]

(d) $x^4 - y^4 + x^3 - y^3 + x^2 - y^2 + y = 0$ [উঃ $-\frac{1}{2}$]

[10.6-এর পদ্ধতি দুটি এবং অসংলগ্ন উদাহরণ (10.7) দেখুন]

5. প্রমাণ করুন $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$ বক্ররেখাটির বক্রতাকেন্দ্রজ (evolute) হচ্ছে $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

[সংকেত ঃ 10.12 -র উদাহরণদুটি দেখুন]

6. দেখান $y^2 = 4ax$ -র $(am^2, 2am)$ বিন্দুতে বক্রতা-বৃত্তের সমীকরণ হবে

$x^2 + y^2 - 6am^2x - 4ax + 4am^3y = 3a^2m^4$.

[সংকেত ঃ অনুশীলনী 6 দেখুন]

7. (a) $r = a(1+\cos\theta)$ কার্ডিঅয়েড-র মেরুগামী বক্রতা-জ্যার দৈর্ঘ্য দেখান $\frac{4r}{3}$

(b) যদি C_x এবং C_y যথাক্রমে অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল বক্রতা-জ্যার দৈর্ঘ্য নির্দেশ করে, তবে

$y = \cosh\left(\frac{x}{c}\right)$-র (catenary -র) ক্ষেত্রে প্রমাণ করুন $4C^2(C_x^2+C_y^2) = C_y^4$.

(c) $r = ae^{b\theta}$-র (equi-angular spiral -র) ক্ষেত্রে প্রমাণ করুন মেরুগামী বক্রতা-জ্যা মেরুতে সমদ্বিখণ্ডিত হচ্ছে। [সংকেত ঃ (10.14) সূত্রাবলী, (10.15) উদাহরণ এবং অনুশীলনী 7 দেখুন]

□ **সহায়ক পাঠ্যপুস্তকাবলী ঃ**

1. **Elementary Treatise on the Calculas–George A. Gibson,** Macmillan & Co Ltd,
2. **An Elementary Treatise on the Differential Calculas –Joseph** Edwards, Macmillan & co, 1950
3. **Modern Differential Calculas – S.C. Mitra, The Indian Press (Pubs) Privatc Ltd (Allahabad)**
4. **An Introduction to Analysis, Differential Calculas, Part–1** R.K.Ghosh & K.C.Maity, Books & Allied (P) Ltd, 1997
5. **কলনবিদ্যা,** প্রথম ভাগ-অধ্যাপক মহাদেব দত্ত এবং শান্তি কুমার চট্টোপাধ্যায়, পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষদ, ১৯৮২।
6. **Differential Calculas–Santi Narayan,** S. Chand & Co. 1959.

একক 11 □ কতিপয় আদর্শ বক্ররেখা

গঠন

11.01 প্রস্তাবনা

বৃত্তীয় অপেক্ষক $\sin x, \cos x, \tan x$ ও তাদের অন্যোন্যক, এইসব ফাংশনের লেখচিত্রের সঙ্গে আপনারা পরিচিত হয়েছেন। বৃত্ত, উপবৃত্ত, অধিবৃত্ত, পরাবৃত্ত প্রভৃতি বক্ররেখার সঙ্গে উচ্চমাধ্যমিক স্তরে আপনাদের পরিচয় ঘটেছে। কিন্তু আরো অনেক ফাংশনের লেখচিত্র ও বক্ররেখার সম্পর্কে সম্যক জ্ঞান কলনবিদ্যার আলোচনায় অপরিহার্য।

11.02 উদ্দেশ্য

- এই এককটি পাঠ করে আপনি

  কলনবিদ্যা এবং গণিতের বিভিন্ন শাখায় বহুল প্রয়োগ আছে এমন কতগুলি বক্ররেখার সমীকরণ ও চিত্র বিষয়ে ধারণা করতে পারবেন।
- বক্ররেখাগুলির বৈশিষ্ট্যমূলক ধর্মসমূহ্ নির্দেশ করতে পারবেন।
- বক্ররেখার সীমিত অংশের দৈর্ঘ্য, বদ্ধ বক্ররেখার পরিসীমা, বক্ররেখা দ্বারা বদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ে প্রয়োজনীয় প্রাথমিক ধারণা করতে পারবেন।
- বক্ররেখার অসীম পথ, (Asymptotes), চ্যুতিবিন্দু (Points of inflection), সূঁচালবিন্দু (cuspps), পাত (Nodes) প্রভৃতি ধারণাগুলি বিশদভাবে ব্যাখ্যা করতে সক্ষম হবেন।

একক 11

কতিপয় আদর্শ বক্ররেখা

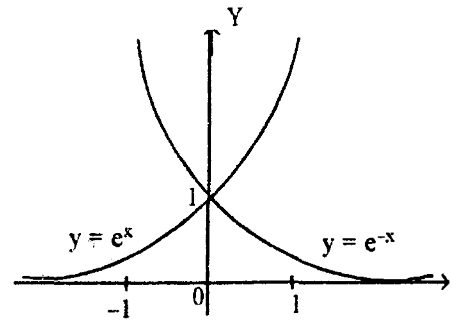
11.1 সূচক অপেক্ষকের লেখচিত্র

সমীকরণ $y = e^{x}, e^{-x}$

x ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক উভয়ই হতে পারে কিন্তু y সর্বদাই ধনাত্মক।

(i) $y = e^{x}$ অপেক্ষকের ক্ষেত্রে যেহেতু $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$, x অক্ষের ঋণাত্মক অংশটি $y = e^{x}$ বক্ররেখার অসীমপথ।

(ii) $y = e^{-x}$ অপেক্ষকের ক্ষেত্রে অনুরূপভাবে আমরা দেখি যে, x অক্ষের ধনাত্মক অংশটি $y = e^{-x}$ বক্ররেখার অসীমপথ।



চিত্র 11·1

11.2 পরাবৃত্তীয় অপেক্ষক—Hyperbolic functions

(i) $\sinh x = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})$

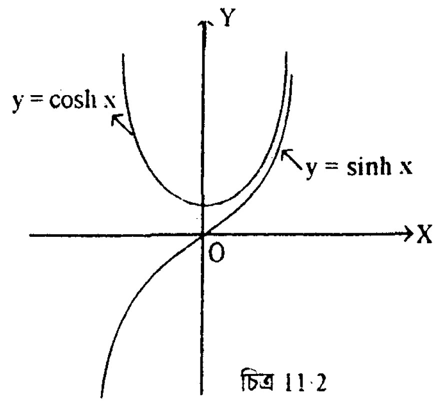
(ii) $\cosh x = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})$

functions : $y = \sinh x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

$y = \cosh x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$

$y = \cosh x$ বক্ররেখা y- অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম।

$y = \sinh x$ বক্ররেখাটি মূলবিন্দু 0 এর সাপেক্ষে প্রতিসম।

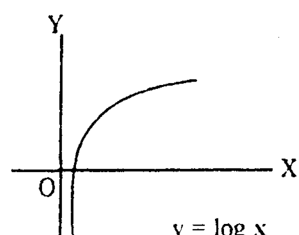


চিত্র 11·2

11.3 লগারিদমিক বক্ররেখা—Logarithmic Curve

সমীকরণ $y = \log_{e}^{x}$

এখানে x সর্বদা ধনাত্মক। y ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক উভয়ই হতে পারে। বক্ররেখাটি x অক্ষকে (1,0) বিন্দুতে ছেদ করে। যেহেতু $\lim\limits_{x \to 0+} y = -\infty$, y অক্ষের ঋণাত্মক অংশটি এই বক্ররেখার অসীমপথ।



চিত্র 11·3

11.4 সম্ভাবনা বক্ররেখা—Probability Curve

এর সমীকরণটি হল $y = e^{-x^2}$

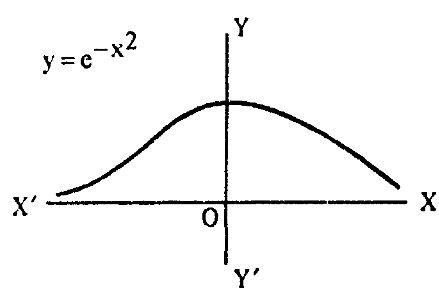
x অক্ষ এই বক্ররেখাটির অসীমপথ।

y এর মান সর্বদা ধনাত্মক, এর পরম মান হল 1, যেটি y, x = 0 বিন্দুতে গ্রহণ করে।

y-অক্ষটি এই বক্ররেখাটির প্রতিসাম্য রেখা।

$y = e^{-x^2}$ বক্ররেখা এবং এর অসীমপথ x = অক্ষের মধ্যে বিস্তৃত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$= 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = 2.\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}$$

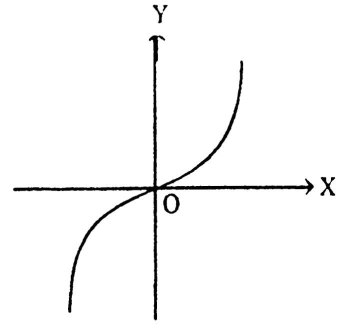


চিত্র 11·4

$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ বিন্দু দুটি এই বক্ররেখার চ্যুতিবিন্দু বা ইনফ্লেকশন বিন্দু।

11.5 ত্রিঘাত অধিবৃত্ত Cubical parabola

11.5 Cubical parabola $y = ax^3$



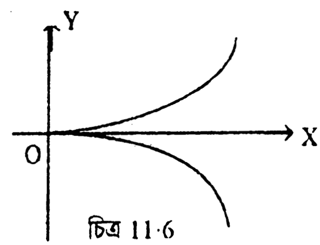
চিত্র 11·5

এই বক্ররেখাটির সমীকরণ হল $y = ax^3$

বক্ররেখাটি $x=0$ এর অর্থাৎ (0, 0) এর বামদিকে উপরের দিকে উত্তাল (convex) এবং ডানদিকে উপরের দিকে অবতল (concave) তাহলে (0, 0) বিন্দুটি বক্ররেখার উত্তল ও অবতল অংশের মধ্যে বিরাজমান এবং এই বিন্দুটি বক্ররেখার উত্তল এবং অবতল অংশকে পৃথক করে দিয়েছে। এই বিন্দুটি এই বক্ররেখার চ্যুতিবিন্দু (Point of inflection)। এই চ্যুতিবিন্দুতে স্পর্শক বক্ররেখাকে ছেদ করেছে। স্পর্শক x অক্ষ মূলবিন্দুর বাঁদিকে বক্ররেখার উপরে এবং মূল বিন্দুর ডানদিকে বক্ররেখার নীচে রয়েছে।

11.6 অর্ধত্রিঘাত অধিবৃত্ত

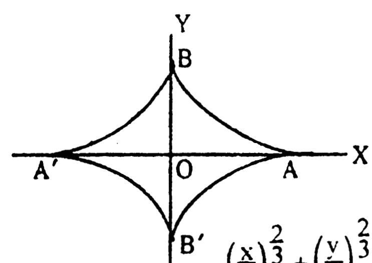
11.6 Semi-cubical parabola $ay^2 = x^3$



চিত্র 11·6

এই বক্ররেখার সমীকরণ $ay^2 = x^3$, বক্ররেখার দুটি শাখা মূলবিন্দুতে মিলিত হয়েছে। এবং মূলবিন্দুতে দুটি শাখার স্পর্শক অভিন্ন। মূলবিন্দুটি এই বক্ররেখার একটি কাস্প (Cusp) বা সূঁচাল বিন্দু।

11.7 চারটি সূঁচালবিন্দু বিশিষ্ট হাইপোসাইক্লয়েড় (Four Cusped Hypocycloid)



$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$

চিত্র 11·7

এর সমীকরণ হল $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$

প্রাচল সমীকরণ $x = a\cos^3\phi,\ y = b\sin^3\phi$

বক্ররেখাটি উভয় অক্ষ এবং মূলবিন্দুর সাপেক্ষে প্রতিসম। এখানে,

$OA = a,\ OA' = -a, OB = b, OB' = -b.$ (a,o), $(-a,o)(o,b),(o,-b)$ বিন্দুগুলি বক্ররেখাটির সূঁচাল বিন্দু (কাস্প)।

এটি একটি বদ্ধ বক্ররেখা (closed curve). এর পরিসীমা $= 4\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$

11.8 আস্ট্রয়েড্ (Astroid)

চারটি সূঁচাল বিন্দুবিশিষ্ট হাইপোসাইক্লয়েডের এটি একটি বিশেষ ক্ষেত্র—এর সমীকরণ

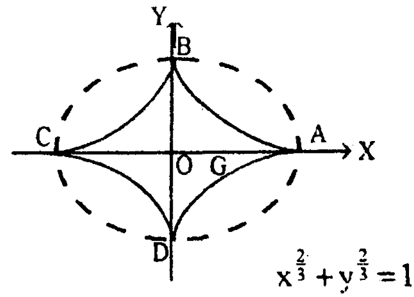
$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

প্রাচল সমীকরণ $x = a\cos^3\theta,\ y = a\sin^3\theta$

এটি একটি বদ্ধ বক্ররেখা যার সমস্ত অংশটাই $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের মধ্যে অবস্থিত।

A, B, C, D বিন্দুগুলি এই বক্ররেখাটির সূঁচাল বিন্দু বা কাস্প।

এর বৈশিষ্ট্যমূলক ধর্ম হল, যে কোন বিন্দুতে স্পর্শকের অক্ষদ্বয় দ্বারা ছিন্ন অংশের দৈর্ঘ্য ধ্রুবক।



চিত্র 11·8

11.9 অধিবৃত্ত এবং উপবৃত্তের বক্রতা-কেন্দ্রজ (Evolutes of a parabola and an ellipse)

(a) অধিবৃত্তের বক্রতা-কেন্দ্রজ।

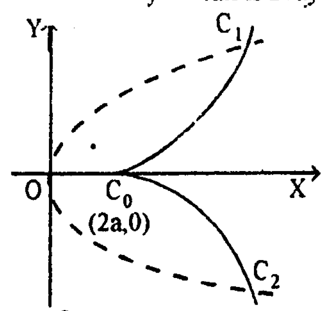
এর সমীকরণ $27ay^2 = 4(x-2a)^3$

অক্ষদ্বয়কে সমান্তরাল রেখে মূলবিন্দুকে $(2a,0)$ বিন্দুতে সরিয়ে দিলে এর সমীকরণ হবে $y^2 = Kx^3$

যেখানে $K = \frac{4}{27}a$. এটি একটি অর্ধত্রিঘাত অধিবৃত্তের সমীকরণ।

$C_o(2a, o)$ বিন্দুটি এর শীর্ষ বিন্দু।

11.9 Evolute of the parabola
$y^2 = 4ax$ is $27ay^2 = 4(x-2a)^3$



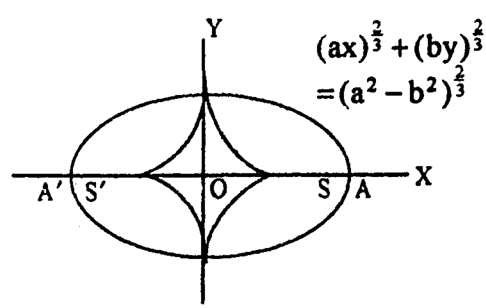
চিত্র 11·9 (a)

(b) **উপবৃত্তের বক্রতা-কেন্দ্রজ।** (Evolute of the ellipse)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

এই বক্ররেখাটির সমীকরণ হল

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$$



চিত্র 11·9 (b)

$\frac{a^2-b^2}{a}=\alpha$ এবং $\frac{a^2-b^2}{b}=\beta$ বসিয়ে উপরের সমীকরণটিকে নীচের আকারে লেখা যাবে।

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{\beta}\right)^{\frac{2}{3}}=1$$

অতএব, দেখা যাচ্ছে যে এটি চারটি সূঁচাল বিন্দুযুক্ত হাইপোসাইক্লয়েড্।

11.10 ডাইয়োক্লিসের সিসয়েড্ (Cissoid of Diocles)

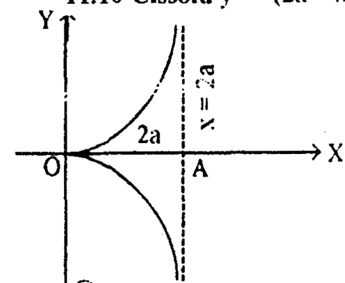
এই বক্ররেখাটির কার্তিয় সমীকরণ

$$y^2=(2a-x)=x^3$$

OA = 2a, x = 2a এই বক্ররেখাটির অসীমপথ। এর মেরুজ সমীকরণ হল

$$r=\frac{2a\sin^2\theta}{\cos\theta}$$

11.10 Cissoid $y^2=(2a-x)=x^3$



চিত্র 11·10

11.11 ষ্ট্রফয়েড্

কার্তিয় সমীকরণ $y^2=x^2\frac{a+x}{a-x}$

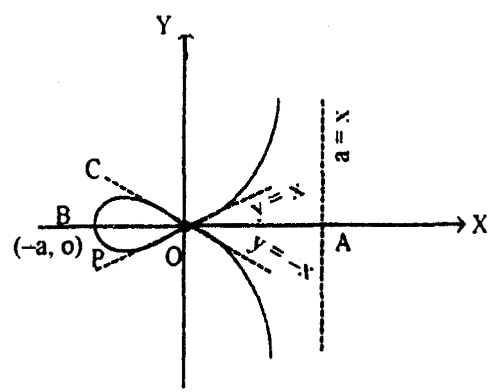
এখানে OA=OB=a

OCBPO একটি ফাঁস বা লুপ্ (Loop)।

x = a এই বক্ররেখাটির অসীমপথ।

$y^2=x^2\frac{a-x}{a+x}$ বক্ররেখাটি ষ্ট্রফয়েডের অনুরূপ কিন্তু এর অসীমপথ y অক্ষের বাঁদিকে এবং ফাঁস বা লুপ্টি y অক্ষের ডানদিকে।

11.11 Strophiod : $y^2=(a-x)=x^2=(a+x)$



চিত্র 11·11

11.12 দে' কার্তের ফলিয়াম (Folium of Descartes)

কার্তিয় সমীকরণ : $x^3+y^3=3axy$

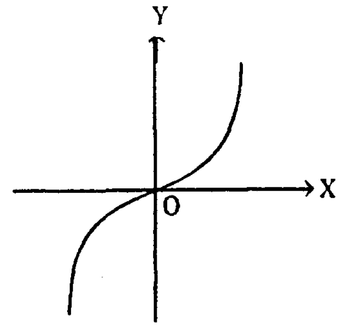
বক্ররেখাটি y = x সরলরেখার সাপেক্ষে প্রতিসম। x-অক্ষ এবং y-অক্ষ হল মূল বিন্দুতে বক্ররেখাটির স্পর্শক

11.5 ত্রিঘাত অধিবৃত্ত Cubical parabola

এই বক্ররেখাটির সমীকরণ হল $y = ax^3$

বক্ররেখাটি x=0 এর অর্থাৎ (0, 0) এর বামদিকে উপরের দিকে উত্তাল (convex) এবং ডানদিকে উপরের দিকে অবতল (concave) তাহলে (0, 0) বিন্দুটি বক্ররেখার উত্তল ও অবতল অংশের মধ্যে বিরাজমান এবং এই বিন্দুটি বক্ররেখার উত্তল এবং অবতল অংশকে পৃথক করে দিয়েছে। এই বিন্দুটি এই বক্ররেখার চ্যুতিবিন্দু (Point of inflection)। এই চ্যুতিবিন্দুতে স্পর্শক বক্ররেখাকে ছেদ করেছে। স্পর্শক x অক্ষ মূলবিন্দুর বাঁদিকে বক্ররেখার উপরে এবং মূল বিন্দুর ডানদিকে বক্ররেখার নীচে রয়েছে।

11.5 Cubical parabola $y = ax^3$

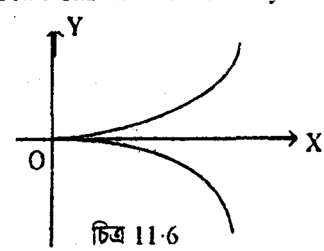


চিত্র 11·5

11.6 অর্ধত্রিঘাত অধিবৃত্ত

এই বক্ররেখার সমীকরণ $ay^2 = x^3$, বক্ররেখার দুটি শাখা মূলবিন্দুতে মিলিত হয়েছে। এবং মূলবিন্দুতে দুটি শাখার স্পর্শক অভিন্ন। মূলবিন্দুটি এই বক্ররেখার একটি কাস্প (Cusp) বা সূঁচাল বিন্দু।

11.6 Semi-cubical oarabola $ay^2 = x^3$



চিত্র 11·6

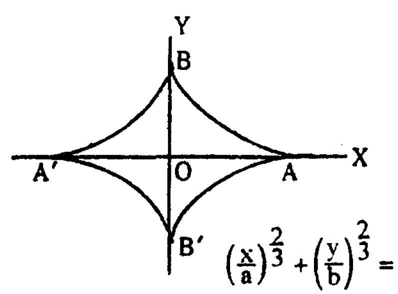
11.7 চারটি সূঁচালবিন্দু বিশিষ্ট হাইপোসাইক্লয়েড় (Four Cusped Hypocycloid)

এর সমীকরণ হল $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$

প্রাচল সমীকরণ $x = a\cos^3\phi,\ y = b\sin^3\phi$

বক্ররেখাটি উভয় অক্ষ এবং মূলবিন্দুর সাপেক্ষে প্রতিসম। এখানে,

$OA = a,\ \ OA' = -a, OB = b, OB' = -b.$ (a, o), $(-a, o)(o, b), (o, -b)$ বিন্দুগুলি বক্ররেখাটির সূঁচাল বিন্দু (কাম্প)।



চিত্র 11·7

এটি একটি বদ্ধ বক্ররেখা (closed curve). এর পরিসীমা $= 4\frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}$

ভূমি থেকে সর্বোচ্চ দূরত্বে অবস্থিত A বিন্দুটিকে শীর্ষবিন্দু বলা হয়। সাইক্লয়েডের শীর্ষের স্থানাঙ্ক $(a\pi, 2a)$

বৃত্তটি যতই ঘোরে ততই OAB এর ন্যায় খিলান আকৃতির বক্ররেখা বরাবর উৎপন্ন হয় এবং এই রূপ একটি খিলান আকৃতির বক্ররেখাকেই সাইক্লয়েড বলা হয়।

11.14 (a) চিত্রের ন্যায় অক্ষদ্বয় স্থাপন করলে সাইক্লয়েডের সমীকরণ হবে

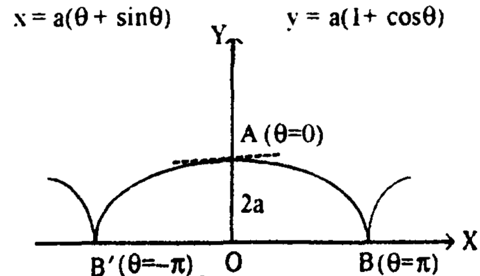
$x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 + \cos\theta)$

আবার, যদি শীর্ষবিন্দুকে মূলবিন্দু এবং শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শককে x অক্ষ এবং অক্ষদ্বয়কে π কোনে আবর্তিত করি তাহ'লে সাইক্লয়েডের সমীকরণ হবে

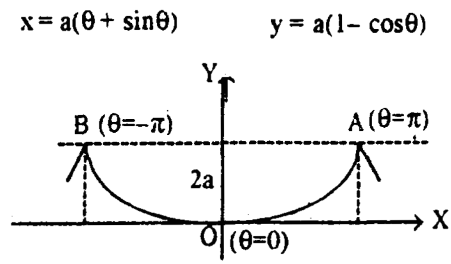
$$x = a(\theta + \sin\theta)$$

$$y = a(1 - \cos\theta)$$

(চিত্র 11.14 (b) দেখুন)



চিত্র 11·14 (a)



চিত্র 11·14 (b)

বৈশিষ্ট্যমূলক ধর্ম

1. $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ সাইক্লয়েডের বক্রতা ব্যাসার্ধ = অভিলম্বের দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণ।
2. $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ সাইক্লয়েডের

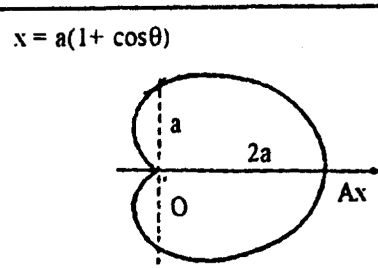
   $\psi = \frac{1}{2}\theta$, $s^2 = 8ay$ (s শীর্ষবিন্দু থেকে মাপা হলে)
3. একটি খিলান আকৃতি অংশের দৈর্ঘ্য [অর্থাৎ চিত্র 11.14(b)-তে BOB′ -এর দৈর্ঘ্য) = 8a
4. 11.14 (b) চিত্রে প্রদর্শিত অক্ষদ্বয় নিলে, সাইক্লয়েডের 'ইনট্রিন্‌সিক্' সমীকরণ $S = 4a\sin\psi$.

11.15 কার্ডিঅয়েড় (cardioid)

এই বক্ররেখাটির সমীকরণ

(1) $r = a(1 + \cos\theta)$ (চিত্র 11.15(a) দেখুন)

অথবা



চিত্র 11·15 (a)

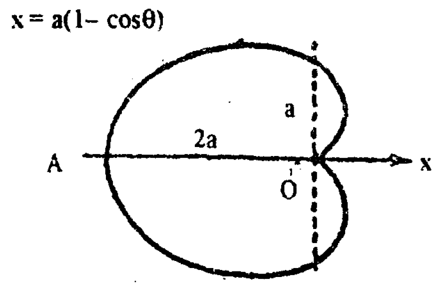
(2) $r = a(1-\cos\theta)$ (চিত্র 11.15(b) দেখুন)

এই বক্ররেখাটির নামকরণ ল্যাটিন শব্দ Kardia (যার মানে হৃৎপিন্ড) থেকে হয়েছে।

প্রথম চিত্রে A বিন্দুতে $\theta = 0$ এবং 0 বিন্দুতে $\theta = \pi$

দ্বিতীয় চিত্রে A বিন্দুতে $\theta = \pi$ এবং 0 বিন্দুতে $\theta = 0$.

উভয়ক্ষেত্রেই বক্ররেখাটি আদি রেখা সাপেক্ষে প্রতিসম। আদিরেখা বক্ররেখাটিকে দুটি সমান অংশে বিভক্ত করেছে। উপরের অংশে $0 \le \theta \le \pi$ এবং $OA = 2a$.



চিত্র 11·15 (b)

প্রথম চিত্রটির বক্ররেখাকে 180° কোণে ঘূর্ণিত করলে দ্বিতীয় চিত্রের বক্ররেখাটি পাওয়া যায়। উভয়ক্ষেত্রেই বক্ররেখাটি মূল বিন্দুগামী। আদিরেখাটি মূল বিন্দুতে বক্ররেখাটির স্পর্শক। A বিন্দুতে স্পর্শকটি আদিরেখার উপর লম্ব।

কার্ডিঅয়েডের বক্রতা কেন্দ্রজ আর একটি কার্ডিঅয়েড্। কার্ডিঅয়েড্ একটি বদ্ধ বক্ররেখা যার পরিসীমা 8a.

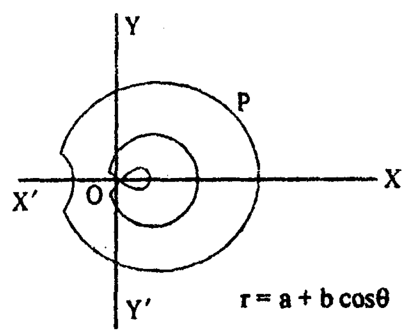
11.16 লিমাকন (Limacon)

এই বক্ররেখাটির সমীকরণ

$r = a + b\cos\theta$

যখন $a > b$, তখন XPYX′Y′X এই বহিঃস্থ বদ্ধ বক্ররেখাটি পাওয়া যায়। আবার $a < b$ হলে লুপ্ বা ফাঁস সহ ভিতরের বক্ররেখাটি পাওয়া যাবে।

$a = b$ হলে, লিমাকনটি (চিত্র 11.15(a)-এর অনুরূপ একটি কার্ডিঅয়েডে পরিণত হয়।



চিত্র 11·16

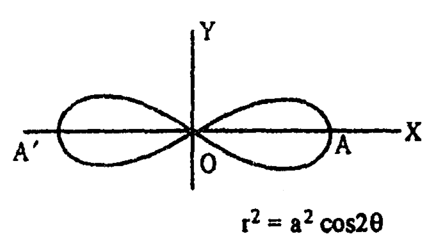
11.17 বারনৌলির লেম্নিস্কেট (Lemniscate of Bernoulli)

এই বক্ররেখাটির মেরুজ সমীকরণ

$r^2 = a^2\cos 2\theta$

এবং কার্তিয় সমীকরণ

$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$



চিত্র 11·17

আদিরেখার সাপেক্ষে প্রতিসম দুটি সমান আকৃতির ফাঁস (বা লুপ্) নিয়ে এই বক্ররেখাটি গঠিত। বক্ররেখাটি মূলবিন্দুর সাপেক্ষেও প্রতিসম। আদিরেখা উভয় ফাঁসকেই দুটি সমান অংশে বিভক্ত করেছে।

মূলবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $\theta = \pm\dfrac{\pi}{4}$

অথবা $y = \pm x$

ডানদিকের লুপ্‌টির উপরের অংশে $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{4}$

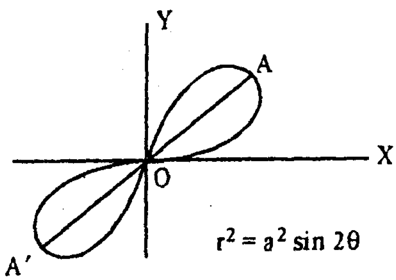
একটি বৈশিষ্ট্যমূলক ধর্ম ঃ $\left(\pm\dfrac{a}{\sqrt{2}}, 0\right)$ বিন্দুদ্বয় থেকে এই বক্ররেখার উপরিস্থ কোন বিন্দুর দূরত্বের গুণফল ধ্রুবক।

11.17.1 **রোজ্ লেমনিস্‌কেট্** (Rose Lemniscate)

এই বক্ররেখাটির সমীকরণ

$$r^2 = a^2 \sin 2\theta$$

প্রথম ও তৃতীয় পাদে অবস্থিত দুটি সমান আকৃতির লুপ্ নিয়ে এই বক্ররেখাটি গঠিত।



চিত্র 11·17.1

লুপ্ দুটি $y = x$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম। বারনৌলির লেমনিস্‌কেটকে 45^0 ডিগ্রী কোণে ঘুরালে এই বক্ররেখাটি পাওয়া যায়।

x এবং y অক্ষদ্বয় মূলবিন্দুতে এই বক্ররেখার স্পর্শক।

11.18 লগারিদ্‌মিক অথবা ধ্রুবকোণী কুন্ডলী (Logarithmic or Equiangular Spiral)

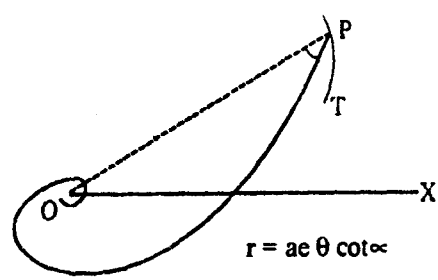
এই বক্ররেখাটির সমীকরণ

$$r = ae^{\theta \cot\alpha} \text{ বা}$$

$$r = ae^{m\theta}$$

এখানে $\cot\alpha$ অথবা m ধ্রুবক।

এর বৈশিষ্ট্যমূলক ধর্ম হল



চিত্র 11·18

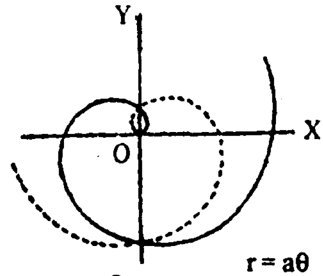
(i) এর যে কোন বিন্দুতে স্পর্শক ঐ বিন্দুতে দূরকের (radius vector) সঙ্গে ধ্রুবক কোণে নত $(\phi = \alpha)$

এই বৈশিষ্ট্যের জন্যই এই বক্ররেখাটিকে ধ্রুবকোণী কুন্ডলী বলা হয়। লক্ষণীয় যে, মূলবিন্দুটি এই বক্ররেখার পরিস্থ বিন্দু নয়।

11.19 আর্কিমিডিসের কুন্ডলী (Spiral of Archimedes)

বক্ররেখাটির সমীকরণ $r = a\theta$

এর বৈশিষ্ট্যমূলক ধর্ম হল যে কোন বিন্দুতে মেরু উপ-অভিলম্ব (Polar Subnormal) ধ্রুবক।



চিত্র 11·19

11.20 গোলাপ পুষ্পদল (গোলাপের পাঁপড়ি) Rose Petals

$r = a\cos 3\theta$ অথবা $r = a\sin 3\theta$ সমীকরণ দুটি যে বক্ররেখা দুটিকে নির্দেশ করে তাদের ত্রিপত্র গোলাপ বা Three leaved rose বলা হয়।

এদের উভয়েই তিনটি সমান আকারের লুপ্ নিয়ে গঠিত।

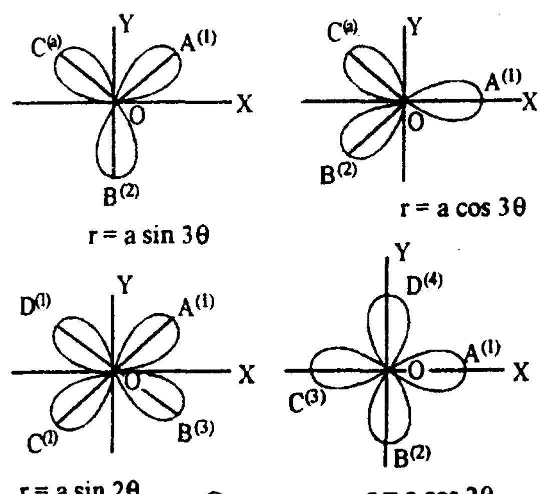
চিত্রে (1), (2), (3) সংখ্যা দিয়ে লুপগুলি গঠিত হবার ক্রম নির্দেশ করা হয়েছে।

উভয়ক্ষেত্রেই

$OA = OB = OC = a$

এবং $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 120^0$

$r = a\cos 2\theta$ বা $r = a\sin 2\theta$ সমীকরণ দ্বারা নির্দেশিত বক্ররেখা দুটিকে চতুষ্পত্র গোলাপ বা Four leaved rose বলা হয়। উভয় বক্ররেখাই চারিটি সমান আকারের লুপ্ নিয়ে গঠিত। উভয়ক্ষেত্রেই



চিত্র 11·20

$OA = OB = OC = OD = a$ এবং $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = \angle AOD = 90^0$

একক 12 ☐ একচল ফাংশনের অবম, পরম বা স্টেশনারী মান

গঠন :

12.1 প্রস্তাবনা :

আমাদের দৈনন্দিন কথাবার্তায় ম্যাক্সিমাম ও মিনিমাম শব্দ দুটি প্রায়ই ব্যবহৃত হয়। শীতকালে যখন খুব ঠাণ্ডা পড়ে তখন আমরা সেই দিনের মিনিমাম টেম্পারেচারের (সর্বনিম্ন তাপমাত্রা) খোঁজ নিই আবার যখন গ্রীষ্মকালে প্রচণ্ড গরমে কষ্ট পাই তখন সেই দিনের (সর্ব্বোচ্চ তাপমাত্রা) ম্যাক্সিমাম টেম্পারেচার কত জানতে চাই। দৈনিক সংবাদপত্রে প্রতিদিন এই দুইটি সংখ্যা বিজ্ঞাপিত হয়।

কোন দিনের ম্যাক্সিমাম তাপমাত্রা 40° সেলসিয়াস বলতে বুঝায় ঐ দিনে কোন নির্দিষ্ট সময়ে তাপমাত্রা 40° সেলসিয়াস্ উঠেছে—তার কিছুক্ষণ আগে তাপমাত্রা 40° সেলসিয়াস এর চেয়ে কম ছিল এবং কিছুক্ষণ পরে আবার তাপমাত্রা 40° সেলসিয়াস এর চেয়ে কমে গেছে। ম্যাক্সিমাম ও মিনিমাম কথা দুটির বাংলা প্রতিশব্দ হল পরম ও অবম, শিথিলভাবে আমরা গরিষ্ঠ ও লঘিষ্ঠ কথা দুটিও এই অর্থে ব্যবহার করি। পরম ও অবমকে একসঙ্গে চরম বলা হয়।

12.2 উদ্দেশ্য :

এই এককটি পাঠ করে আপনি

- ফাংশনের পরম ও অবম মানের সংজ্ঞা, অন্তরকলনীয় ফাংশনের চরম মানের আবশ্যকীয় ও পর্যাপ্ত শর্ত উদাহরণ সহযোগে উল্লেখ ও ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- কোন বদ্ধ অন্তরালে ফাংশনের গরিষ্ঠ ও লঘিষ্ঠ মানের সংজ্ঞা, সার্বভৌম ও আপেক্ষিক চরম মানের মধ্যে সম্পর্ক ও পার্থক্য উদাহরণের মাধ্যমে বুঝিয়ে দিতে পারবেন।
- কোন ফাংশনের ইন্‌ফ্লেকশন বিন্দুর (যেখানে ফাংশনটির কোন চরম মান নেই) সংজ্ঞা চিত্র ও উদাহরণ সহযোগে বুঝিয়ে দিতে পারবেন।
- এক দলীয় ফাংশনের পরম অবম বা স্টেশনারী মান সংক্রান্ত বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে পারবেন এবং প্রদত্ত প্রশ্নাবলীর সমাধান অন্য কারো সাহায্য ছাড়াই নিজে করতে পারবেন।

12.3 ফাংশনের পরম ও অবম মানের সংজ্ঞা

ধরি $f(x)$ ফাংশনটি $[a,b]$ বদ্ধ অন্তরালে সংজ্ঞাত এবং $c \in (a,b)$ । এখন $f(x)$ এর মান c বিন্দুতে পরম বলা হয় যদি আমরা এমন একটি ধনাত্মক সংখ্যা δ নির্ণয় করতে পারি যে c ব্যতীত $c-\delta < x < c+\delta$ অন্তরালে x এর সকল মানের জন্য $f(c) > f(x)$ অর্থাৎ

(1) ---------- $f(c+h)-f(c) < 0$, যখন $0 < |h| < \delta$ ।

অনুরূপভাবে $f(x)$ এর মান c বিন্দতে অবম বলা হয় যদি আমরা এমন একটি ধনাত্মক সংখ্যা δ নির্ণয় করতে পারি যে c ব্যতীত $c-\delta < x < c+\delta$ অন্তরালে x এর সকল মানের জন্য $f(c)<f(x)$ অর্থাৎ

(2) ---------- $f(c+h)-f(c)>0$, যখন $0 < |h| < \delta$ ।

(1) থেকে লক্ষ্য করা যেতে পারে যে $f(c)$ পরম মান যদি

(3) ---------- $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} < 0$ যখন $h > 0$ এবং

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} > 0 \text{ যখন } h < 0$$

অনুরূপভাবে (2) থেকে লক্ষ্য করা যেতে পারে যে $f(c)$ অবম মান যদি

(4) ---------- $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} > 0$ যখন $h > 0$ এবং

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} < 0 \text{ যখন } h < 0 \text{ ।}$$

উদাহরণ 1.6 সংজ্ঞা থেকে প্রমাণ করুন যে $x = \frac{1}{2}$ বিন্দুতে f ফাংশনটির পরম মান আছে যেখানে

$$f(x) = k, \qquad 0 \le x \le \frac{1}{2}$$

$$= 1-x \qquad \frac{1}{2} < x \le 1$$

প্রমাণ : পর্য্যাপ্ত ছোট সংখ্যা h এর জন্য (h>0)

$$f\left(\frac{1}{2}-h\right) = \frac{1}{2}-h < \frac{1}{2} = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \; f\left(\frac{1}{2}-h\right) < f\left(\frac{1}{2}\right)$$

আবার $f\left(\frac{1}{2}+h\right) = 1-\left(\frac{1}{2}+h\right)$

$$= \frac{1}{2}-h < f\left(\frac{1}{2}\right)$$

অতএব f ফাংশনটির $x = \frac{1}{2}$ বিন্দুতে একটি পরম মান আছে।

(চিত্র 1 দেখুন)

সংজ্ঞা : চরম মান (Extreme Values)।

অবম ও পরম মানকে একত্রে চরমমান বলা হয়। অর্থাৎ কোন ফাংশন f এর c বিন্দুতে চরম মান থাকবে যদি f(c) ফাংশনটির পরম বা অবম মান হয়।

12.4 অন্তরকলনীয় ফাংশনের চরম মানের আবশ্যকীয় শর্ত

উপপাদ্য ঃ যদি কোন ফাংশন f বদ্ধ অন্তরাল [a,b] তে অবিচ্ছিন্ন থাকে এবং $x = c \in (a, b)$ বিন্দুতে ফাংশনের চরম মানের অস্তিত্ব থাকে তাহলে $f'(c) = 0$ আর নয়ত $f'(c)$ এর অস্তিত্ব নেই।

প্রমাণ : ধরি f(c), f ফাংশনটির একটি পরম মান। তাহলে একটি মুক্ত অন্তরাল $(c-\delta, c+\delta)$ পাওয়া যাবে যেটি এমন যে, যদি c+h এই অন্তরালেব একটি সংখ্যা হয় তাহলে $f(c+h)-f(c) < 0$, h ধনাত্মক কিংবা ঋণাত্মক যাই হোক্ না কেন। এর ফলে

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} > 0 \text{ যখন } h < 0 \text{ এবং } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

এবং $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} < 0$ যখন $h > 0$ এবং ....(ii)

(i) এবং (ii) থেকে পাই

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0 \text{ এবং } \lim_{h\to 0+}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0 \quad\text{.........................(iii)}$$

(iii) সম্পর্ক দুটি একসঙ্গে সিদ্ধ হবে যখন $f'(c) = 0$ (যদি $f'(c)$ এর অস্তিত্ব থাকে)।

f(c) f এর একটি অবম মান হলে আমরা একই রকমভাবে প্রমাণ করতে পারব যে $f'(c) = 0$ (যদি $f'(c)$ এর অস্তিত্ব থাকে)।

মন্তব্য : (1) উপপাদ্য 1 এর জ্যামিতিক ব্যাখ্যা হিসাবে বলা যেতে পারে যে যদি চরম মানের বিন্দুগুলিতে f(x) এর অন্তর কলজ বিদ্যমান থাকে, তবে $y= f(x)$ এর লেখচিত্রের সেই বিন্দুতে স্পর্শক x – অক্ষরেখার সমান্তরাল হবে।

(2) **উপপাদ্য** 1 এর শর্তটি অর্থাৎ $f'(c) = 0$ অন্তরকলনযোগ্য ফাংশনের চরম মানের অস্তিত্বের জন্য আবশ্যকীয় শর্ত, কিন্তু এই শর্ত পর্য্যাপ্ত নয়। উদাহরণ হিসাবে $f(x) = x^3$ ফাংশনটি নেওয়া যায়। এই ফাংশনটির অন্তর কলজ $f'(x) = 3x^2$। এবং $f'(0) = 0$। আবার, যখন $x>0$, $f(x)>f(0)$ এবং যখন $x<0$, $f(x) <f(0)$, অতএব f(0) মানটি চরম মান নয় যদিও $f'(0) = 0$. (চিত্র 2 দেখুন)

(3) $f'(c)$ এর অস্তিত্ব নেই অথচ f(c) একটি চরম মান এরকম ফাংশনের উদাহরণ হিসাবে $f(x)=|x|$ ফাংশনটিকে নেওয়া যেতে পারে। এই ফাংশনটির $x = 0$ বিন্দুতে অন্তর কলজের অস্তিত্ব নেই। কিন্তু

$f(x) = -x > 0 = f(0)$ যখন $x < 0$ এবং

$f(x) = x > 0 = f(0)$ যখন $x > 0$।

অর্থাৎ $x = 0$ বিন্দুতে ফাংশনটির অবম মান আছে। (চিত্র 3 দেখুন)।

12.5 অন্তরকলনীয় ফাংশনের চরম মানের পর্য্যাপ্ত শর্ত।

উপপাদ্য 2. যদি f ফাংশনটি c বিন্দুর একটি অঞ্চলে সংজ্ঞাত হয় এবং যদি এমন কোন অন্তরাল থাকে যার একটি প্রান্তিক বিন্দু c এবং অপর প্রান্তিক বিন্দু ঐ অঞ্চলের যে কোন একটি বিন্দু, যেখানে লাগরাঞ্জের মধ্যমমান উপপাদ্যটি সিদ্ধ হয় তবে

f(c) এর মান (i) অবম যদি $f'(x) < 0$ যখন $x < c$ (ঐ অঞ্চলে)

এবং $f'(x) > 0$ যখন $x > c$ (ঐ অঞ্চলে)

(ii) পরম যদি $f'(x) > 0$ যখন $x < c$ (ঐ অঞ্চলে)

এবং $f'(x) < 0$ যখন $x > c$ (ঐ অঞ্চলে)

প্রমাণ (i) মধ্যমমান উপপাদ্যের সাহয্যে পাই

$f(x) - f(c) = (x-c)\, f'(K)$

যেখানে K সংখ্যাটি c এবং x এর মধ্যবর্তী।

এখন মনে করি $x < c$, তাহলে $K < c\ f'(K) < 0$

$\therefore (x-c) f'(K) > 0$

সুতরাং $f(x) - f(c) > 0$ অর্থাৎ $f(x) > f(c)$ যখন $x > c$ (1)

পুনরায় মনে করি $x > c$ তাহলে $K > c$, $f'(K) > 0$

$\therefore (x-c) f'(K) > 0 \Rightarrow f(x) - f(c) > 0$

সুতরাং $f(x) - f(c) > 0$ অর্থাৎ $f(x) > f(c)$ যখন $x > c$ (2)

(1) এবং (2) থেকে প্রমাণিত হল $x = c$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অবম মান আছে।

অনুরূপভাবে (ii) অংশটি প্রমাণ করা যেতে পারে।

মন্তব্য। এই উপপাদ্যটির প্রমাণের জন্য $f'(c)$ এর অস্তিত্বের প্রয়োজন নেই।

উদাহরণ 1. $f(x) = x - \frac{1}{2}x^2$ ফাংশনটির পরম ও অবম মানগুলি নির্ণয় করুন।

সমাধান। f ফাংশনটি সর্বত্র অন্তরকলনযোগ্য। এর অন্তর কলজ হল

$f'(x) = 1 - x$, $f'(x) = 0$ অর্থাৎ $1 - x = 0$ সমীকরণের বীজটি হল $x = 1$

$f'(x) = 1 - x > 0$ যখন $x < 1$ এবং

$f'(x) < 0$ যখন $x > 1$। অতএব উপপাদ্য 2 অনুসারে $f(x)$এর $x = 1$ বিন্দুতে পরম মান আছে। এই ফাংশনের আর কোন চরম মান নেই। (চিত্র 4 দেখুন)।

উদাহরণ 2. উপপাদ্য 2 এর সাহায্যে প্রমাণ করুন যে $f(x) = 1 - x^{\frac{2}{3}}$ ফাংশনটির

$x = 0$ বিন্দুতে একটি পরম মান আছে।

প্রমাণ : $f(x) = 1 - x^{\frac{2}{3}}$

$\therefore f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$, $x = 0$ বিন্দুতে সংজ্ঞাত নয়।

কিন্তু, $f'(x) > 0$ যখন $(x) < 0$

এবং $f'(x) < 0$ যখন $x > 0$

সুতরাং উপপাদ্য 2 অনুসারে f ফাংশনটির $x = 0$ বিন্দুতে একটি পরম মান আছে।

সংজ্ঞা : f ফাংশনটির যে সকল x বিন্দুতে অন্তরকলজ শূন্য বা বিচ্ছিন্ন হয় সে সকল বিন্দুকে **সঙ্কট বিন্দু** (critical points) বলে।

মন্তব্য : অন্তরকলনযোগ্য ফাংশনের প্রথম অন্তরকলজের সাহায্যে চরম মান নির্ণয় করার পদ্ধতি।

উপপাদ্য 1 এবং 2 থেকে আমরা অন্তরকলনযোগ্য ফাংশনের প্রথম অন্তরকলজের সাহায্যে **চরম মান নির্ণয়** করার জন্য নিম্নলিখিত পদ্ধতি '

(1) প্রথমে $f'(x)$ নির্ণয় করতে হবে

(2) ফাংশনটির সঙ্কট বিন্দুগুলি নির্ণয় করতে হবে — এরা হল (i) $f'(x)=0$

সমীকরণটির বীজগুলি অথবা (ii) যে সকল x বিন্দুতে $f'(x)$ বিচ্ছিন্ন সেই বিন্দুগুলি।

(3) প্রতিটি সঙ্কট বিন্দু c এর জন্য উপপাদ্য 2 প্রয়োগ করে দেখতে হবে

(i) $f'(x)>0$ যখন $x<c$ এবং

$f'(x)<0$ যখন $x>c$

শর্তগুলি সিদ্ধ হচ্ছে না কি

(ii) $f'(x)<0$ যখন $x<c$ এবং

$f'(x)>0$ যখন $x>c$

শর্তগুলি সিদ্ধ হচ্ছে। প্রথম ক্ষেত্রে $f(c)$ একটি পরম মান এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে $f(c)$ হবে অবম মান। পুণরায়

(iii) (a) $f'(x)>0$ যখন $x<c$ এবং $f'(x)>0$ যখন $x>c$

অথবা (b) $f'(x)<0$ যখন $x<c$ এবং $f'(x)<0$ যখন $x>c$

শর্তগুলি সিদ্ধ হলে $f(c)$ চরম মান নয়।

উদাহরণ। $f(x)=2x+3\sqrt[3]{x^2}$ ফাংশনটির চরম মান নির্ণয় করুন।

সমাধান। $f'(x)=2+3\times\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}=\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x}+1)$

অতএব (i) $x=-1$ বিন্দুটি (যেখানে $f'(x)=0$) এবং

(ii) $x=0$ বিন্দুটি (যেখানে $f'(x)$ বিচ্ছিন্ন)

হল $f(x)$ এর সঙ্কট বিন্দু।

(i) যদি $x=-1-h$ (যেখানে h পর্য্যাপ্ত ছোট ধনাত্মক সংখ্যা) বসাই তাহলে

$$f'(x)=f'(-1-h)=\frac{2}{(-)}\times(-)>0$$

অনুরূপভাবে $f'(-1+h)=\frac{2}{(-)}\times(+)<0$

অতএব $x=-1$ বিন্দুতে f ফাংশনটির পরম মান আছে। এই পরম মানটি হল $-2+3=1$

(ii) $f'(-h)<0$ এবং $f'(h)>0$ অতএব $x=0$ বিন্দুতে f ফাংশটির অবম মান আছে এবং এই অবম মানটি হল 0।

12.6 অন্তরকলনীয় ফাংশনের চরম মানের দ্বিতীয় পর্য্যাপ্ত শর্ত

উপপাদ্য 3. ধরি f ফাংশনটি [a,b] বদ্ধ অন্তরালে সংজ্ঞাত, $c\in(a,b)$ এই অন্তরালের একটি অন্তঃস্থ বিন্দু। এবং

(i) $f^n(c)$ এর অস্তিত্ব বর্তমান এবং $f^n(c)\neq 0$.

(ii) $f'(c)=f''(c)= \qquad\qquad =f^{n-1}(c)=0$

তাহলে f এর $x=c$ বিন্দুতে চরম মান থাকবে যদি n যুগ্ম পূর্ণসংখ্যা হয় এবং f এর $x=c$ বিন্দুতে কোন চরম মানের অস্তিত্ব থাকবে না যদি n বিযুগ্ম পূর্ণ সংখ্যা হয়। প্রথম ক্ষেত্রে f(c) এর মান (i) পরম হবে যদি $f^{(n)}(c)<0$ হয় এবং (ii) অবম হবে যদি $f^{(n)}(c)>0$

প্রমাণ। প্রথম শর্ত থেকে এটা স্পষ্ট যে c বিন্দুর সামীপ্যে একটা অন্তরাল $(c-\delta_1, c+\delta_1)$ [যেখানে δ_1 পর্য্যাপ্ত ছোট ধনাত্মক সংখ্যা] পাওয়া যাবে যার প্রতি বিন্দুতে $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$................$f^{n-1}(x)$ এর অস্তিত্ব বর্তমান। আবার যেহেতু $f^n(c)\neq 0$, c বিন্দুর সামীপ্যে একটি অন্তরাল $(c-\delta, c+\delta)$ বর্তমান $(0<\delta<\delta_1)$ যেখানে $f^{n-1}(x)$ ফাংশনটি আরোহী হবে যদি $f^n(c)>0$ হয় অথবা অবরোহী হবে যদি $f^{(n)}(c)<0$ হয়।

এবারে ল্যাগরাঞ্জের অবশিষ্টাংশ সহ টেলরের উপপাদ্য প্রয়োগ করে পাই

(যখন $|h|\leq\delta$ এবং $0<\theta<1$)

$$f(c+h)=f(c)+hf'(c)+\frac{h^2}{2!}f''(c)+..........+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(c+\theta h)$$

$$=f(c)+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(c+\theta h) \quad .... (1)$$

(দ্বিতীয় শর্তাবলী প্রয়োগ করে এবং $c+\theta h(c-\delta, c+\delta)$ অন্তরালের অন্তঃস্থ বিন্দু লক্ষ্য করে)

প্রথম ক্ষেত্র। n যুগ্ম পূর্ণসংখ্যা, $f^n(c)<0$। এক্ষেত্রে $f^{n-1}(x)(c-\delta, c+\delta)$

অন্তরালে অবরোহী। অর্থাৎ $f^{n-1}(x)<f^{n-1}(c)=0$ যখন $c<x<c+\delta$

এবং $f^{n-1}(x) > f^{n-1}(c) = 0$ যখন $c-\delta < x < c$

অর্থাৎ, $f^{n-1}(c+\theta h) < 0$ যখন $h>0$ এবং

$f^{n-1}(c+\theta h) > 0$ যখন $h<0$........................(2)

অতএব $f(c+h)-f(c) = \dfrac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(c+\theta h) < 0$ h ধনাত্মক এব ঋণাত্মক উভয়ক্ষেত্রেই

সুতরাং f(x) এর c বিন্দুতে পরম মান আছে।

অনুরূপভাবে, n যুগ্ম পূর্ণসংখ্যা, $f^{n}(c) > 0$ ক্ষেত্রে প্রমাণ করা যায় যে f(x) এর c বিন্দুতে অবম মান আছে।

দ্বিতীয় ক্ষেত্র। n অযুগ্ম পূর্ণসংখ্যা। $f^{n}(c) < 0$

এক্ষেত্রে $h^{n-1}>0$, h ধনাত্মক বা ঋণাত্মক উভয় ক্ষেত্রেই।

অতএব (2) থেকে পাই

$$f(c+h)-f(c) = \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(c+\theta h) < 0 \text{ যখন } h>0$$

এবং $$f(c+h)-f(c) = \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(c+\theta h) > 0 \text{ যখন } h<0$$

অর্থাৎ $f(c+h) > f(c)$ যখন $c < x = c+h < c+\delta$

এবং $f(c+h) < f(c)$ যখন $c-\delta < x = c+h < c$

সুতরাং f(x) এর c বিন্দুতে চরম মান নেই।

অনুরূপভাবে, n অযুগ্ম পূর্ণসংখ্যা এবং $f^{n}(c) > 0$ হলে প্রমাণ করা যায় যে f(c) f এর চরম মান নয়।

উদাহরণ 1. $f(x) = 1 - x^6$ ফাংশনটির চরম মান নির্ণয় করুন।

সমাধান। $f'(x) = -6x^5$, $f'(x) = 0$ সমীকরণ সমাধান করে পাই

$x = 0$। উত্তরোত্তর অন্তরকলন করে পাই।

$$f''(0)=0,\ f'''(0)=0\ f^4(0)=0,\ f^5(0)=0$$

কিন্তু $f^{(6)}(o) = -6! < 0$

অতএব উপপাদ্য 3 প্রয়োগ করে পাই $f(0)=1$ ফাংশনটির পরম মান।

উদাহরণ 2. $f(x) = \sin 3x - 3\sin x$ ফাংশনটির চরম মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : $f'(x) = 3\cos 3x - 3\cos x$

$f'(x) = 0$ সমীকরণটি সমাধান করে পাই $\cos 3x - \cos x = 0$

বা, $4\cos^3 x - 4\cos x = 0$

বা, $4\cos x\left(\cos^2 x - 1\right) = 0$

বা, $\cos x = 0 \Rightarrow x = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$

$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2m\pi$

$\cos x = -1 \Rightarrow x = (2k+1)\pi$

m,n,k শূন্য অথবা অখণ্ড সংখ্যা।

যেহেতু f ফাংশনটি পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক এবং এর পর্যায় 2π, তাই নিচের চারটি বিন্দুতে এর চরম মান অনুসন্ধান করছি।

$x_1 = 0,\qquad x_2 = \dfrac{\pi}{2},\qquad x_3 = \pi,\qquad x_4 = 3\dfrac{\pi}{2}$ ।

f এর দ্বিতীয়ক্রমের অন্তরকলজ হল

$f''(x) = -9\sin 3x + 3\sin x$

x_1, x_2, x_3, x_4 সঙ্কট বিন্দুগুলিতে এর মানগুলি

$$f''(0) = 0,\qquad f''(\tfrac{\pi}{2}) = 12,\qquad f''(3\tfrac{\pi}{2}) = -12,\qquad f''(\pi) = 0$$

অতএব উপপাদ্য 3 এর প্রয়োগে পাই $\dfrac{\pi}{2}$ বিন্দুতে f এর অবম মান এবং $3\dfrac{\pi}{2}$ বিন্দুতে পরম মান আছে। অবম মানটি হল $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \sin 3\dfrac{\pi}{2} - 3\sin\dfrac{\pi}{2}$

$= -1 - 3 = -4$

আর পরম মান $f(3\frac{\pi}{2}) = \sin 9\dfrac{\pi}{2} - 3\sin^3\dfrac{\pi}{2} = 1 - (-3)$

$= 1 + 3 = 4$

সঙ্কট বিন্দু $x_1 = 0$ এবং $x_3 = \pi$ অনুসন্ধানের জন্য তৃতীয় ক্রমের অন্তর কলজ নির্ণয় করি।

$$f'''(x) = -27\cos 3x + 3\cos x$$

$\therefore f'''(0) = -27 + 3 = -24$ এবং $f'''(\pi) = 27 - 3 = 24$

যেহেতু x = 0 এবং x = π বিন্দুতে প্রথম ও দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরকলজগুলির মান শূন্য কিন্তু তৃতীয় ক্রমের

অন্তরকলজের মান অশূণ্য তাই এ দুটি বিন্দুতে ফাংশনটির চরম মানের অস্থিত্ব নেই।

উপপাদ্য 3 এ $n = z$ বসিয়ে আমরা পাই

অনুসিদ্ধান্ত।

f ফাংশনটি [a,b] বদ্ধ অন্তরালে সংজ্ঞাত।

c ঐ অন্তরালের একটি অন্তঃস্থ বিন্দু।

(i) $f''(c)$এর অস্তিত্ব বর্তমান এবং $f''(c) \neq 0$

(ii) $f'(c) = 0$

তাহলে $f(c)$হবে ফাংশনটির চরম মান এবং এটি হবে অবম যদি $f''(c) > 0$ হয় এবং পরম যদি $f''(c) < 0$ হয়।

উদাহরণ। $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 36x - 20$ ফাংশনটির পরম ও অবম মান নির্ণয় করুন।

সমাধান।

$$f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 36x - 20$$

$$f'(x) = 6x^2 - 42x + 36$$

$$= 6(x^2 - 7x + 6)$$

$$= 6(x-1)(x-6)$$

ফাংশনটির চরম মানের অস্তিত্বের আবশ্যকীয় শর্ত

$$f'(x) = 0$$

অর্থাৎ $x = 1$ অথবা $x = 6$

$x = 1$ বিন্দুতে ফাংশনটির চরম মানের অস্তিত্বের পরীক্ষা করা যাক।

$f''(x) = 12x - 42 \Rightarrow f''(1) = 12 \times 1 - 42 = -30 < 0$

সুতরাং $x = 1$ বিন্দুতে ফাংশনটির একটি পরম মান আছে এবং এই পরম মান

$[f(x)]_{x=1} = 2 - 21 + 36 - 20 = -3$

আবার যেহেতু $[f''(x)]_{x=6} = 12 \times 6 - 42 = 72 - 42 = 30 > 0,$

$x = 6$ বিন্দুতে ফাংশনটির অবম মান আছে এবং এই অবম মানটি হল

$[f(x)]_{x=6} = 2 \times 6^3 - 21 \times 6^2 + 36 \times 6 - 20$

$= 2 \times 216 - 21 \times 36 + 216 - 20$

$= 648 - 776$

$= -128$

12.7 ফাংশনের ষ্টেশনারী মান, লঘিষ্ঠ ও গরিষ্ঠ মান, সার্বভৌম চরম মান ও ইনফ্লেক্‌শন বিন্দু

12.7.1 ষ্টেশনারী মান। কোন বিন্দুতে ফাংশনের পরিবর্তনের হার শূন্য হলে সেই বিন্দুতে ফাংশনটির ষ্টেশনারী মান আছে বলা হয়।

সংজ্ঞা। একটি ফাংশন f, c বিন্দুতে ষ্টেশনারী এবং $f(c)$ f এর একটি ষ্টেশনারী মান হবে যদি $f'(c) = 0$ হয়।

মন্তব্য। কোন ফাংশনের পরম ও অবম মান গুলি ঐ ফাংশনের ষ্টেশনারী মান কিন্তু সব ষ্টেশনারী মান ফাংশনের চরম মান নয়।

উদাহরণ $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ ফাংশনটির ষ্টেশনারী মানগুলি নির্ণয় করুন।

সমাধান $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$

$$= 3(x-2)^2$$

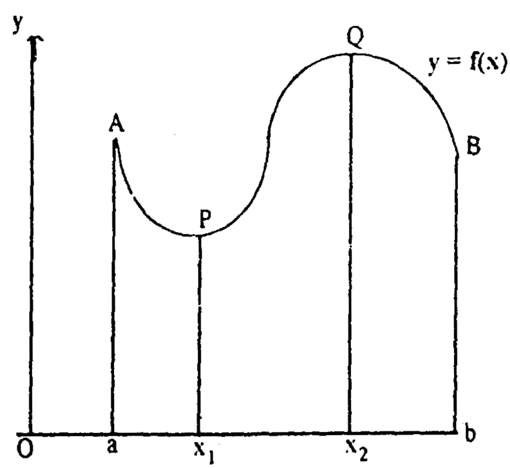
$\therefore f'(x) = 0$ যখন $x = 2$, সুতরাং $x = 2$ বিন্দুটিই ফাংশনটির একমাত্র ষ্টেশনারী বিন্দু। যেহেতু

$f'(x) = 3(x-2)^2 > 0$ যখন $x > 2$ এবং $f'(x) = 3(x-2)^2 > 0$ যখন $x<2$; $f'(x)$ $x = 2$ বিন্দুর দুদিকে একই চিহ্ন বজায় রাখে। অতএব $x = 2$ এই ষ্টেশনারী বিন্দুটি কোন চরম বিন্দু নয়।

12.7.2 কোন বদ্ধ অন্তরালে ফাংশনের লঘিষ্ঠ ও গরিষ্ঠ মান।

ধরি f ফাংশনটি $[a,b]$ বদ্ধ অন্তরালে সংজ্ঞাত এবং অবিচ্ছিন্ন। তাহলে f এর লঘিষ্ঠ ও গরিষ্ঠ মানগুলি হয় এর প্রান্তবিন্দুতে আর নয়ত এর সঙ্কট বিন্দুতে লব্ধ হয়।

পার্শ্ববর্তী চিত্রে $y = f(x)$ হল একটি ফাংশনের লেখচিত্র। এই ফাংশনটি $[a,b]$ বদ্ধ অন্তরালে অবিচ্ছিন্ন। $x = x_1$ বিন্দুতে এর অবম মান আছে। এই মানটি $[a,b]$ বদ্ধ অন্তরালে লঘিষ্ঠ। আবার $x = x_2$ বিন্দুতে এর পরম মান আছে এই মানটি $[a,b]$ বদ্ধ অন্তরালে গরিষ্ঠ।



চিত্র 5

ধরি $f'(x) = 0$ সমীকরণের যে বীজগুলি $[a,b]$ মুক্ত অন্তরালের অন্তর্গত তারা হল $c_1, c_2 \ldots\ldots\ldots\ldots c_k$ তাহলে f ফাংশনটির $[a,b]$ অন্তরালে গরিষ্ঠ ও লঘিষ্ঠ মান হবে নিম্নলিখিত সেটের যথাক্রমে গরিষ্ঠ ও লঘিষ্ঠ সংখ্যা

$$\{f(a), f(c_1), f(c_2) \ldots\ldots\ldots\ldots f(c_k), f(b)\}$$

উদাহরণ। $[0,2]$ বদ্ধ অন্তরালে $f(x)=3x^4-2x^3-6x^2+6x+1$ ফাংশনটির গরিষ্ঠ ও লঘিষ্ঠ মান নির্ণয় করুন।

সমাধান। $f(x)=3x^4-2x^3-6x^2+6x+1$

$$\Rightarrow f'(x)=12x^3-6x^2-12x+6$$

$$=6(x-1)(x+1)(2x-1)$$

$$\Rightarrow f'(x)=0 \text{ যখন } x=1,-1,\tfrac{1}{2}$$

এদের মধ্যে -1 $[0,2]$ অন্তরালের অন্তর্গত নয়। তাই আমরা এটি বাদ দিয়ে 0, $\frac{1}{2}$, 1 এবং 2 বিন্দুতে f ফাংশনটির মানগুলি পরীক্ষা করব।

$$f(0)=1, f(\tfrac{1}{2})=\frac{39}{16}, f(1)=2,\ f(2)=21$$

ফলে ফাংশনটির $[0, 2]$ অন্তরালে লঘিষ্ঠ মান 1 এবং গরিষ্ঠমান 21.

12.7.3 ফাংশনের সার্বভৌম চরমমান।

ধরি f ফাংশনটির $[a,b]$ বদ্ধ অন্তরালের অন্তঃস্থ c বিন্দুতে চরম মান আছে। তাহ'লে c এর নিকটবর্তী অঞ্চল (c-h, c+h) অন্তরালে (h>0 পর্য্যাপ্ত ছোট সংখ্যা)

$f(x)\le f(c)$ যখন $c-h<x<c+h$

(যদি f(c) f এর পরম মান হয়) এবং

$f(x)\ge f(c)$ যখন $c-h<x<c+h$

(যদি $f(c)$ f এর অবম মান হয়)। অর্থাৎ চরম মানেব শর্ত দুটি h এর উপর নির্ভরশীল। কিন্তু কোন সঙ্কট বিন্দুতে পরম অথবা অবম মানের শর্ত যদি h নিরপেক্ষ হয় অর্থাৎ

$f(x)\le f(c)$ অথবা

$f(x)\ge f(c)$ অসমতা দুটি

যদি কোন অন্তরালের সমস্ত x এর জন্য সিদ্ধ হয় তাহলে f(c) চরম মানটিকে সার্বভৌম চরম মান বলা হবে।

উদাহরন 1. $f(x)=x^2$

এখানে $f(x)=x^2\ge 0 \qquad \forall x\in R$

অর্থাৎ f(x) সমস্ত বাস্তব সংখ্যা x এর জন্য অঋণাত্মক এবং এর সবচাইতে কম মানটি হল 0 যেটি f ফাংশনটি x = 0 বিন্দুতে গ্রহণ করে। অতএব $f(0)$ মানটি f এর সার্বভৌম অবম মান।

উদাহরণ 2. $[0,\pi]$ বদ্ধ অন্তরালে $f(x)=\sin x+\cos x$ ফাংশনটির সার্বভৌম পরম ও অবম মান নির্ণয় করুন।

সমাধান। $f(x) = \sin x + \cos x \Rightarrow f'(x) = \cos x - \sin x$

চরম মানের আবশ্যকীয় শর্ত $f'(x) = 0$ থেকে পাই $\cos x = \sin x$

বা $x = \dfrac{\pi}{4}$

$f''(x) = -\sin x - \cos x \Rightarrow f''(\frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2}$ অর্থাৎ $x = \dfrac{\pi}{4}$ বিন্দুতে f ফাংশনটির পরম মান আছে। এখন বদ্ধ অন্তরাল $[0, \pi]$ এর প্রান্ত বিন্দু দুটিতে f এর মান হল 1, -1 এবং $f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$ তাহলে ফাংশনটির $[0, \pi]$ বদ্ধ অন্তরালে সার্বভৌম পরম মান হল $\sqrt{2}$

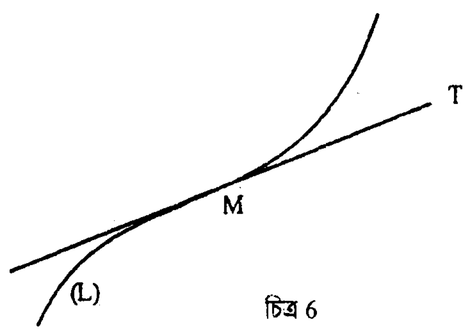
এবং সার্বভৌম অবম মান হল -1

কারণ এখানে $f(x) \le \sqrt{2}$ শর্তটি $[0, \pi]$ অন্তরালের সব বিন্দুর জন্য সত্য।

এবং অনুরূপভাবে $f(x) \ge -1$ শর্তটি $[0, \pi]$ অন্তরালের সব বিন্দুর জন্য সত্য।

12.7.4 ফাংশনের ইনফ্লেকশন বিন্দু

কোন বক্ররেখা যে বিন্দুতে তার স্পর্শককে অতিক্রম করে সেই বিন্দুকে ঐ বক্ররেখার ইন্‌ফ্লেকশন বিন্দু বলে। চিত্রে L একটি বক্ররেখা। M বিন্দুতে MT L বক্ররেখার একটি স্পর্শক। L বক্ররেখাটি M বিন্দুতে MT স্পর্শককে অতিক্রম করেছে। অর্থাৎ M বিন্দুর নিকটবর্তী অঞ্চলে L বক্ররেখাটি MT স্পর্শকের উভয় পার্শ্বে অবস্থান করছে। M বিন্দুটি হল L বক্ররেখার একটি ইন্‌ফ্লেকশন বিন্দু।



চিত্র 6

L বক্ররেখার সমীকরণ $y = f(x)$ হলে কোন বিন্দু $x = c$ ঐ ফাংশনের ইনফ্লেক্‌শন বিন্দু হবে যদি

$$f''(c) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots = f^{n-1}(c) = 0$$

কিন্তু $f^{n}(c) \neq 0$ এবং n অযুগ্ম ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

উদাহরণ। প্রমাণ করুন যে $y = x^3 - 3x^2$ বক্ররেখাটি (1,-2) বিন্দুটি একটি ইনফ্লেকশন বিন্দু।

প্রমাণ $y = x^3 - 3x^2 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x = 0$ যখন $x = 2$ অথবা 0

এখন $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 6x - 6, \quad \left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=6} = 6 > 0$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0} = -6$$

অর্থাৎ $x = 2$ বিন্দুতে y এর অবম মান আছে।

$x = 0$ বিন্দুতে y এর পরম মান আছে।

আবার $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 6 = 0$ যখন $x = 1$ ($x = 1$ হলে $y = -2$)

এবং $\frac{d^3y}{dx^3} = 6$, x এর সকল মানের জন্য।

$\therefore \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=1} = 0$ এবং $\left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_{x=1} \neq 0$

অর্থাৎ $x = 1$ বিন্দুটি y এর একটি ইনফ্লেকশন বিন্দু।

$\Rightarrow (1, -2)$ বিন্দুটি $y = x^3 - 3x^2$ বক্ররেখার একটি ইনফ্লেকশন বিন্দু।

12.8 দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণাবলী

1. $f(x) = \sqrt{ex^2} - 1$ হলে f ফাংশনটির চরম মান নির্ণয় করুন।

সমাধান। লক্ষ্য করুন যে $f(x) = \sqrt{e^{x^2} - 1}$ এবং $g(x) = e^{x^2} - 1$ এর সঙ্কট বিন্দুগুলি এক।

$(g(x) = [f(x)]^2$ অতএব $g'(x) = 2f(x)f'(x)$ । সুতরাং $f'(x)$ এর মান যখন শূন্য তখন $g'(x)$ এর মান শূন্য হবে।

এখন $g'(x) = 2e^{x^2}x = 0$ যখন $x = 0$

$$\therefore g''(x) = 2xe^{x^2} * 2x + 2e^{x^2}$$
$$= 2e^{x^2}(1 + 2x^2)$$

$$g''(0) = 2 > 0$$

অতএব x=0 বিন্দুতে f এর অবম মান আছে। এবং এই অবম মানটি হল f(0) = O.

2. প্রমাণ করুন যে $y = \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 + 3x + 4}$ এর অবম মান $\frac{1}{7}$ এবং পরম মান 7

প্রমাণ : $\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 + 3x + 4)(2x - 3) - (x^2 - 3x + 4)(2x + 3)}{(x^2 + 3x + 4)^2}$

$$= \frac{6x^2 - 24}{(x^2 + 3x + 4)^2} = \frac{6(x^2 - 4)}{(x^2 + 3x + 4)^2} = \frac{6(x + 2)(x - 2)}{(x^2 + 3x + 4)^2}$$

চরম মানের আবশ্যকীয় শর্ত $\frac{dy}{dx}=0$ থেকে পাই

$$x = 2 \text{ অথবা } -2$$

এখন –2 এবং 2 এই সঙ্কট বিন্দু দুটিতে y এর চরম মানের অস্তিত্বের পরীক্ষা করতে হবে।

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(-2-h)} = \frac{6(-h)(-4-h)}{[(-2-h)^2+3(-2-h)+4]} > 0$$

এবং $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(-2+h)} = \frac{6(h)(-4+h)}{\left[-(-2+h)^2+3(-2+h)+4\right]^2} < 0$

অতএব x যখন -2 বিন্দু অতিক্রম করে তখন $\frac{dy}{dx}$ এর চিহ্ন ধনাত্মক থেকে ঋণাত্মকে পরিবর্তিত হয়। অর্থাৎ $x = -2$ বিন্দুতে y এর পরমমান আছে। এই পরম মানটি হল

$$(y)_{x=-2} = \frac{(-2)^2-3(-2)+4}{(-2)^2+3(-2)+4} = \frac{14}{2} = 7$$

আবার

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=2-h} = \frac{6(4-h)(-h)}{\left[(2-h)^2+3(2-h)+4\right]^2} < 0$$

এবং $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{2+h} = \frac{6(4+h)(h)}{\left[(2+h)^2+3(2+h)+4\right]^2} > 0$

ফলে x যখন 2 বিন্দু অতিক্রম করে তখন $\frac{dy}{dx}$ এর চিহ্ন ঋণাত্মক থেকে ধনাত্মকে পরিবর্তিত হয়। সুতরাং $x = 2$ বিন্দুতে y এর অবম মান আছে। এই অবম মানটি হল

$$(y)_{x=2} = \frac{4-6+4}{4+6+4} = \frac{1}{7}$$

3. $0 < x < \infty$ অন্তরালে $f(x) = \frac{\log x}{x}$ ফাংশনটির পরম মান নির্ণয় করুন।

সমাধান। $f(x) = \frac{\log x}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{x\frac{1}{x} - 1.\log x}{x^2}$

$$= \frac{1-\log x}{x^2}$$

চরম মানের আবশ্যকীয় শর্ত $f'(x)=0$

অথবা $1-\log x=0$

বা, $x=e$

এখন $x=e$ বিন্দুতে চরম মানের অস্তিত্বের পরীক্ষা করা যাক।

$$f'(e-h)=\frac{1-\log(e-h)}{(e-h)^2}=\frac{\log e-\log(e-h)}{(e-h)^2}$$

$$=-\frac{\log(e-h)-\log e}{(e-h)^2}$$

$$=-\log\frac{\frac{(e-h)}{e}}{(e-h)^2}$$

$$=-\frac{1}{(e-h)^2}\log\left(1-\frac{h}{e}\right)>0$$ (h পর্য্যাপ্ত ছোট ধনাত্মক সংখ্যা)

অনুরূপভাবে

$$f'(e+h)=-\frac{1}{(e+h)^2}\log(1+\frac{h}{e})<0$$

অতএব x=e বিন্দুতে প্রদত্ত ফাংশনটির পরম মান আছে। এবং এই পরম মানটি হল $\frac{1}{e}$

উদাহরণ 4. প্রমাণ করুন যে sin mx cosec x ফাংশনটির পরম ও অবম মান

$\tan mx = m\tan x$ (m = অখণ্ড সংখ্যা)

সমীকরণ সমাধান করে পাওয়া যায়। এ থেকে প্রমাণ করুন যে

$\sin^2 mx \le m^2 \sin x$

সমাধান। $f(x)=\sin mx \operatorname{cosec} x = \dfrac{\sin mx}{\sin x}$

অতএব $f'(x)=\dfrac{\sin x\,(m\cos mx)-\cos x\sin mx}{\sin^2 x}$

চরম মানের আবশ্যকীয় শর্ত $f'(x)=0$ থেকে পাই

$m\sin x\cos mx=\cos x\sin mx$

বা, $\tan mx = m \tan x$....................(i)

বা, $\frac{\sin mx}{\sin x} = m\frac{\cos mx}{\cos x}$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2 mx}{\sin^2 x} = m^2\frac{\cos^2 mx}{\cos^2 x} = \frac{m^2 \sec^2 x}{\sec^2 mx}$$

$$= \frac{m^2[1+\tan^2 x]}{1+\tan^2 mx}$$

$$= m^2\frac{1+\tan^2 x}{1+m^2\tan^2 x} \text{ .... (2) } [\because \tan mx = m\tan x]$$

যেহেতু m একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা $m \geq 1 \Rightarrow 1 \leq m$

$$\Rightarrow \tan^2 x \leq m^2 \tan^2 x$$

$$\Rightarrow 1+\tan^2 x \leq 1+m^2\tan^2 x$$

$$\Rightarrow \frac{1+\tan^2 x}{1+m^2\tan^2 x} \leq 1 \text{ .... (3)}$$

(2) ও (3) থেকে পাই $\frac{\sin^2 mx}{\sin^2 x} \leq m^2$

বা, $\sin^2 mx \leq m^2 \sin^2 x$

উদাহরণ 5

প্রমাণ করুন যে $y = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{3}\cos 3x$ ফাংশনটির গরিষ্ঠ এবং লঘিষ্ঠ মানদ্বয়ের অন্তর $\frac{9}{4}$

প্রমাণ : y একটি পর্য্যাবৃত্ত অপেক্ষক এবং এর পর্য্যায় 2π। অতএব এর লঘিষ্ঠ ও গরিষ্ঠ মানদ্বয়ের অন্তর $[0, 2\pi]$ অন্তরালে y এর লঘিষ্ঠ ও গরিষ্ঠ মানদ্বয়ের অন্তরের সমান। y এর অন্তর কলজ হল

$$\frac{dy}{dx} = -(\sin x + \sin 2x - \sin 3x) = -4\sin x \sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}$$

$\frac{dy}{dx} = 0$ যখন $x = 0, \frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{4}{3}\pi, 2\pi$

$\therefore$ সঙ্কট বিন্দুগুলি হল $0, \frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{4}{3}\pi, 2\pi$

আবার $\frac{d^2y}{dx^2} = -(\cos x + 2\cos 2x - 3\cos 3x)$.

সঙ্কট বিন্দুগুলিতে $\frac{d^2y}{dx^2}$ এর মান নির্ণয় করি।

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0} = -(1+2-3) = 0$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=\frac{2}{3}\pi} = -\left(-\frac{1}{2}-1-3\right) = \frac{9}{2} > 0$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=\pi} = -(-1+2+3) = -4 < 0$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=\frac{4}{3}\pi} = -\left(-\frac{1}{2}-1-3\right) = \frac{9}{2} > 0$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=2\pi} = -(1+2-3) = 0$$

তাহলে y ফাংশনটির $\frac{2}{3}\pi$ বিন্দুতে ও $\frac{3}{4}\pi$ বিন্দুতে অবম মান এবং π বিন্দুতে পরম মান আছে। এই সঙ্কট বিন্দুগুলিতে y এর মানগুলি হল

$$y|_{x=0} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{7}{6} = y|_{x=2\pi}$$

$$y|_{x=\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = -\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right) = -\frac{13}{12}$$

$$y|_{x=\pi} = -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$$

$$y|_{x=\frac{4}{3}\pi} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{13}{12}$$

অতএব $[0, 2\pi]$ অন্তরালে y এর গরিষ্ঠমান $\frac{7}{6}$ এবং লঘিষ্ঠমান $-\frac{13}{12}$

এদের অন্তর $\frac{7}{6} - \left(-\frac{13}{12}\right) = \frac{27}{12} = \frac{9}{4}$

উদাহরণ 6। $9x^2+25y^2=225$ উপবৃত্তটির উপরিস্থ কোন বিন্দুটি (4,0) বিন্দুটির নিকটতম নির্ণয় করুন।

$9x^2+25y^2=225$ সমীকরণটিকে নিচের আকারে লিখে

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

পাই এই উপবৃত্তটির উপরিস্থ যে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(5\cos\theta, 3\sin\theta)$

(4,0) বিন্দু থেকে এই বিন্দুর দূরত্ব হল

$$z=[(5\cos\theta-4)^2+(3\sin\theta-0)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$=[(5\cos\theta-4)^2+9\sin^2\theta]^{\frac{1}{2}}$$

z এবং z^2 ফাংশন দ্বয়ের সঙ্কট বিন্দুগুলি অভিন্ন বলে আমরা $s=z^2$ এর সঙ্কট বিন্দুগুলি নির্ণয় করছি।

$$s=(5\cos\theta-4)^2+9\sin^2\theta$$

$$\frac{ds}{d\theta}=-2(5\cos\theta-4)(5\sin\theta)+18\sin\theta\cos\theta$$

$$=-2\sin\theta[25\cos\theta-9\cos\theta-20]$$

$$=-2\sin\theta[16\cos\theta-20]$$

$$=-8\sin\theta[4\cos\theta-5]=8\sin\theta[5-4\cos\theta]=40\sin\theta-16\sin z\theta$$

$\therefore \frac{ds}{d\theta}=0$ যখন $\sin\theta=0$ অথবা $\cos\theta=\frac{5}{4}$

কিন্তু $\cos\theta=\frac{5}{4}$ সমীকরণটির বীজ বাস্তব রাশি নয়।

$\therefore \sin\theta=0 \Rightarrow \cos\theta=\pm 1$

$\Rightarrow \theta=0$ অথবা π

$$\frac{d^2s}{d\theta^2}=4\cos\theta-32\cos z\theta$$

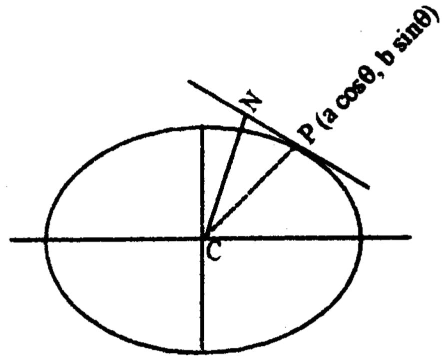
$$\left.\frac{d^2s}{d\theta^2}\right|_{\theta=0}=40-32=+8>0$$

$$\left.\frac{d^2s}{d\theta^2}\right|_{\theta=\pi}=-40-32=-72<0$$

অতএব $\theta=0$ হলে s এর মান অবম। এখন $\theta=0$ হলে $x=5, y=0$ অতএব উপবৃত্তের উপর (5, 0) বিন্দুটি (4, 0) বিন্দুটির নিকটবর্তী।

উদাহরণ 7. একটি উপবৃত্তের কেন্দ্র C। P ঐ উপবৃত্তের উপর একটি বিন্দু। P বিন্দুতে স্পর্শকের উপর C বিন্দু থেকে অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দু N ; PN এর পরম মান এবং CPN ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের পরম মান নির্ণয় করুন।

সমাধান।



চিত্র 7

ধরি $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের কেন্দ্র C

$P(a\cos\theta, b\sin\theta)$ ঐ উপবৃত্তের উপর কোন বিন্দু।

P বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$\frac{x\cos\theta}{a}+\frac{y\sin\theta}{b}=1$$

C বিন্দু থেকে ঐ স্পর্শকের উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দু N হলে

$$CN = p = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}}}$$

অর্থাৎ $\frac{1}{p^2}=\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}$

বা, $\frac{a^2b^2}{p^2}=b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta$

$$=b^2(1-\sin^2\theta)+a^2(1-\cos^2\theta)$$

$$=a^2+b^2-(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)\text{...........(i)}$$

এখন C বিন্দু থেকে P বিন্দুর দূরত্ব r হলে

$$CP^2=r^2=a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta\text{............................(ii)}$$

(i) এবং (ii) থেকে পাই

$$\frac{a^2b^2}{p^2}=a^2+b^2-r^2$$

অর্থাৎ $r^2=a^2+b^2-\frac{a^2b^2}{p^2}$

এখন $PN^2=CP^2-CN^2$

$$=r^2-p^2$$

$$=a^2+b^2-\frac{a^2b^2}{p^2}-p^2$$

PN এবং PN^2 এর সঙ্কট বিন্দু অভিন্ন।। তাই PN এর পর[illegible] মান নির্ণয় করতে আমরা PN^2 এর পরম মান নির্ণয় করছি।

PN^2 এর সঙ্কট বিন্দু নির্ণায়ক সমীকরণ হল

$$\frac{d}{dp}(PN^2) = 0 \text{ অথবা } \frac{2a^2b^2}{p^3} = -2p = 0$$

$$\Rightarrow p^2 = ab,$$

$$\text{এখন } \frac{d^2}{dp^2}(PN^2) = -\frac{6a^2b^2}{p^4} - 2$$

$$= -\frac{6a^2b^2}{a^2b^2} - 2 = -8 < 0 \text{ যখন } p^2 = ab$$

$\therefore PN^2$ পরম যখন $p^2 = ab$

$$\therefore (PN^2)_{\text{পরম}} = a^2 + b^2 - \frac{a^2b^2}{ab} - ab = a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$$

$$\therefore (PN)_{\text{পরম}} = a - b$$

দ্বিতীয় অংশ। CPN ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল

$$s = \tfrac{1}{2} CN.PN$$

$$= \tfrac{1}{2} p\sqrt{a^2 + b^2 - \tfrac{a^2b^2}{p^2} - p^2}$$

$$\therefore s^2 = \tfrac{1}{4} p^2(a^2 + b^2 - \tfrac{a^2b^2}{p^2} - p^2)$$

s এবং s^2 এর সঙ্কটবিন্দু অভিন্ন। তাই আমরা s^2 এর সঙ্কট বিন্দু নির্ণয় করছি।

$$\frac{d}{dp}(s^2) = \frac{1}{4}.2p(a^2 + b^2 - \frac{a^2b^2}{p^2} - p^2) + \frac{p^2}{4}[2\tfrac{a^2b^2}{p^3} - 2p]$$

$$= \frac{1}{2}[p(a^2 + b^2) - \frac{a^2b^2}{p} - p^3] + \frac{1}{2}[\tfrac{a^2b^2}{p} - p^3]$$

$$= \frac{1}{2}[p(a^2 + b^2) - 2p^3]$$

$$= \frac{p}{2}[(a^2 + b^2) - 2p^2]$$

$$= 0 \text{ যখন } p = 0 \text{ অথবা } p^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$$

এখন $\frac{d^2}{dp^2}(s^2) = \frac{1}{2}[(a^2+b^2)-6p^2]$

$$\left.\frac{d^2(s)^2}{dp^2}\right|_{p^2=\frac{a^2+b^2}{2}} = \frac{1}{2}\left[(a^2+b^2)-3(a^2+b^2)\right] = -(a^2+b^2) < 0$$

অতএব ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল পরম হবে যখন $p^2 = \frac{a^2+b^2}{2}$

সুতরাং CPN ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের পরম মান

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\sqrt{(a^2+b^2)-2\frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)}-\frac{1}{2}(a^2+b^2)}$$

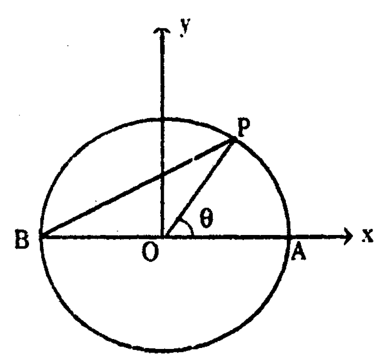
$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\cdot\sqrt{\frac{(a^2+b^2)^2-4a^2b^2}{2(a^2+b^2)}}$$

$$=\frac{1}{4}(a^2-b^2)$$

8. এক ব্যক্তি যত বেগে সাঁতার কাটিতে পারেন তার দ্বিগুণ বেগে হাঁটতে পারেন। একটি বৃত্তাকার সুইমিং পুলের ধারের কোন বিন্দু থেকে ব্যাস বরাবর বিপরীত বিন্দুতে যাবার জন্য তিনি সুইমিং পুলের ধার দিয়ে সমস্ত পথ হাঁটতে পারেন অথবা ব্যাস বরাবর সাঁতার কাটতে পারেন আর নয়ত ধার বরাবর খানিকটা হাঁটবার পর বাকী পথটুকু সরলরেখায় সাঁতার কাটতে পারেন। সব চাইতে কম সময়ে তিনি কিভাবে ঐ পথটুকু অতিক্রম করবেন? সব চাইতে বেশী সময়ে?

সমাধান : ধরি, O বৃত্তাকার সুইমিং পুলের কেন্দ্র। তাঁকে A বিন্দু থেকে AOB ব্যাসের B বিন্দুতে যেতে হবে। ধরি A থেকে P পর্যন্ত তিনি AP জ্যা বরাবর হেঁটে যান এবং P থেকে B বিন্দুতে যাবার জন্য PB সরলরেখা বরাবর সাঁতার কাটেন। তিনি ঘন্টায় v মিটার বেগে সাঁতার কাটতে পারেন এবং $2v$ মিটার বেগে হাঁটতে পারেন।



চিত্র ৪

AP জ্যা বৃত্তের কেন্দ্রে θ কোণ উৎপন্ন করলে AP জ্যার দৈর্ঘ্য $a\theta$ মিটার যেখানে a মিটার হল বৃত্তাকার সুইমিং পুলের ব্যাসার্ধ।

P বিন্দুর স্থানাঙ্ক এ $(a\cos\theta, a\sin\theta)$, A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (a,o) এবং B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-a,o)$।

BP সরলরেখার দৈর্ঘ্য $\sqrt{[a\cos\theta-(-a)]^2+(a\sin\theta-0)^2}$

$$= a\sqrt{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta}$$

$$= a\sqrt{1+\cos^2\theta+2\cos\theta+\sin^2\theta}$$

$$= \sqrt{2}a(1+\cos\theta)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{2}a\sqrt{2}\cos\tfrac{\theta}{2}$$

$$= 2a\cos\tfrac{\theta}{2} \qquad 0\le\theta\le\pi$$

A থেকে P পর্যন্ত AP জ্যা বরাবর হেঁটে যেতে সময় লাগে $\dfrac{a\theta}{2v}$ ঘন্টা আবার PB সরলরেখা বরাবর সাঁতার কেটে যেতে সময় লাগছে $\dfrac{2a\cos\frac{\theta}{2}}{v}$ ঘন্টা। তাহলে মোট সময় লাগছে

$$T=\left[\frac{a\theta}{2v}+\frac{2a\cos\frac{\theta}{2}}{v}\right]=\frac{a}{v}\left[\frac{\theta}{2}+2\cos\frac{\theta}{2}\right] \text{ ঘন্টা} \qquad 0\le\theta\le\pi$$

$[0,\pi]$ বদ্ধ অন্তরালে T এর লঘিষ্ঠ এবং গরিষ্ঠ মান নির্ণয় করতে হবে।

$$\frac{dT}{d\theta}=\frac{a}{v}\left[\frac{1}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right]=0 \text{ যখন } \sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2} \text{ বা}, \theta=\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{d^2T}{d\theta^2}=-\frac{a}{2v}\cos\frac{\theta}{2}<0 \text{ যখন } \theta=\frac{\pi}{3}$$

অতএব $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ বিন্দুতে T এর মান পরম। এবং এই পরম মানটি হল

$$(T)_{\text{পরম}}=\frac{a}{v}\left[\frac{\pi}{6}+2\cos\frac{\pi}{6}\right] \text{ ঘন্টা}$$

$$=\frac{a}{v}\left[\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right] \text{ ঘন্টা}$$

$$=\frac{a}{v}\left[\frac{3\cdot1416}{6}+1\cdot732\right]=2\cdot2556\frac{a}{v} \text{ ঘন্টা।}\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

এবার $[0,\pi]$ বদ্ধ অন্তরালের প্রান্ত বিন্দু দুটিতে T এর মান নির্ণয় করি।

$[T]_{\theta=0} = \frac{2a}{v}$ ঘণ্টা

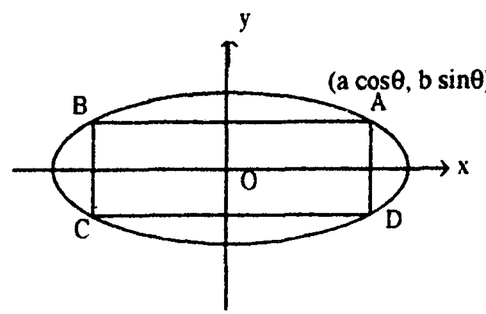
$[T]_{\theta=\pi} = \frac{a}{v}\frac{\pi}{2}$ ঘণ্টা $= 1 \cdot 5708 \frac{a}{v}$ ঘণ্টা।

$\therefore$ T এর লঘিষ্ঠমান $1 \cdot 5708 \frac{a}{v}$ ঘণ্টা যখন $\theta = \pi$ অর্থাৎ যখন সমস্ত পথটাই হেঁটে যাওয়া হয়।

আবার যদি $\frac{\pi}{3} = 60^{\circ}$ পরিমিতি জ্যা হেঁটে যাওয়া যায় এবং বাকী পথটুকু সাঁতার কেটে যাওয়া হয় তাহলে T এর মান গরিষ্ঠ অর্থাৎ সবচাইতে বেশী সময় লাগছে।

9. প্রদত্ত একটি উপবৃত্তে এমন একটি আয়তক্ষেত্র অন্তর্লিখিত করুন যার বাহুগুলি উপবৃত্তের অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল এবং যার ক্ষেত্রফল বৃহত্তম।

সমাধান।



চিত্র 9

ধরি উপবৃত্তটির সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

এবং ABCD এই উপবৃত্তে অন্তর্লিখিত আয়তক্ষেত্র; A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ হলে এই আয়তক্ষেত্রের বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য হবে যথাক্রমে

$2a\cos\theta$ এবং $2b\sin\theta$

সুতরাং এর ক্ষেত্রফল $s = 4ab \sin\theta \cos\theta = 2ab \sin 2\theta$

ক্ষেত্রফল বৃহত্তম হবার আবশ্যকীয় শর্ত $\frac{ds}{d\theta} = 0$ থেকে পাই

$2ab\cos 2\theta = 0 \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

$\frac{d^2s}{d\theta^2} = -2ab.2\sin 2\theta = -4ab\sin 2\theta$

$\left.\frac{d^2s}{d\theta^2}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = -4ab < 0$

অতএব s এর বৃহত্তম মান হল $2ab\sin\frac{\pi}{2} = 2ab$

এবং এর বাহুদ্বয়ের পরিমাপ হবে $2\frac{a}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$ এবং

$$2\frac{b}{\sqrt{2}} = b\sqrt{2}$$

10. দেখান যে নির্দিষ্ট পরিসীমা বিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল বৃহত্তম হবে যখন উহা বর্গাকৃতি হবে।

সমাধান। ধরি আয়ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে x এবং y একক।

তাহলে এর পরিসীমা $= 2(x + y) = s$ .... (প্রদত্ত।) .... (1)

এবং এর ক্ষেত্রফল $A= xy$..................................(2)

(1) থেকে পাই $y = \frac{s}{2} - x$, y এর এই মান (2) তে বসিয়ে পাই

$A=x(\frac{s}{2}-x)$

A এর চরম মানের আবশ্যকীয় শর্ত $\frac{dA}{dx} = 0$

$$\text{বা, } \frac{s}{2} - x + x(-1) = 0$$

$$\text{বা, } \frac{s}{2} - 2x = 0$$

$$\text{বা, } x = \frac{s}{4}$$

আবার, $\frac{d^2A}{dx^2} = -2 < 0$ সকল x এর জন্য।

$\therefore \frac{d^2A}{dx^2} < 0$ যখন $x = \frac{s}{4}$ । অর্থাৎ ক্ষেত্রফল বৃহত্তম হবে

যখন $x = \frac{s}{4}$, $y = \frac{s}{2} - \frac{s}{4} = \frac{s}{4} \Rightarrow$ আয়তক্ষেত্রটি যখন বর্গাকৃতি হবে।

12.9 সারাংশ

ফাংশনের পরম ও অবম মানের সংজ্ঞা

$f(x)$ ফাংশনটি $[a,b]$ বদ্ধ অন্তরালে সংজ্ঞাত এবং c ঐ অন্তরালের একটি অন্তঃস্থ বিন্দু হলে $f(x)$ এর মান c বিন্দুতে পরম বলা হয় যদি আমরা এমন একটি ধনাত্মক পর্য্যাপ্ত ছোট সংখ্যা h নির্ণয় করতে পারি যে c ব্যতীত $c-h<x<c+h$ অন্তরালে x এর সকল মানের জন্য $f(c)>f(x)$ অর্থাৎ

$$f(c + k) - f(c)<0 \text{ যখন } 0 < |k| < h$$

$f(x)$ ফাংশনটি $[a,b]$ বদ্ধ অন্তরালে সংজ্ঞাত এবং c ঐ অন্তরালের একটি অন্তঃস্থ বিন্দু হলে $f(x)$ এর মান c বিন্দুতে অবম বলা হয় যদি আমরা এমন একটি ধনাত্মক পর্য্যাপ্ত ছোট সংখ্যা h নির্ণয় করতে পারি যে c ব্যতীত $c-h<x<c+h$ অন্তরালে x এর সকল মানের জন্য $f(c) < f(x)$ অর্থাৎ

$$f(c + K) - f(c)>0 \text{ যখন } 0 < |K| < h$$

পরম ও অবম মানকে একত্রে চরম মান বলা হয়। f ফাংশনটির যে বিন্দুগুলিতে চরম মানের অস্তিত্ব বর্তমান সেই বিন্দুগুলিকে f এর সঙ্কট বিন্দু বলা হয়। এই বিন্দুগুলিতে f এর অন্তরকলজ শূন্য **অথবা বিচ্ছিন্ন**। **সার্বভৌম চরম মান**। ধরি f ফাংশনটি [a,b] বদ্ধ অন্তরালে সংজ্ঞাত। এর কোন অন্তঃস্থ বিন্দু c, f এর একটি সঙ্কট বিন্দু। যদি

$f(x) \leqq f(c)$ অথবা

$f(x) \geqq f(c)$

অসমতা দুটি [a,b] অন্তরালের সকল বিন্দুর জন্য সিদ্ধ হয় তাহলে f(c) চরম মানটিকে সার্বভৌম চরম মান বলা হয়।

অন্তরকলনীয় ফাংশনের চরম মানের আবশ্যকীয় শর্ত।

যদি কোন ফাংশন f বদ্ধ অন্তরালে সংজ্ঞাত হয় এবং ঐ বদ্ধ অন্তরালের কোন অন্তঃস্থ বিন্দু c তে f এর চরম মানের অস্তিত্ব থাকে তাহলে হয় $f'(c) = 0$ আর নয়ত $f'(x) = c$ বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন।

অন্তরকলনীয় ফাংশনের চরম মানের পর্য্যাপ্ত শর্ত।

$y = f(x)$ f ফাংশনটির লেখচিত্র এবং [c,f(c)] ঐ লেখচিত্রের উপর f ফাংশনের সঙ্কট বিন্দু হলে f(c) এর মান অবম যদি [c,f(c)] এর বামদিকে (c-h,c) অন্তরালে (h পর্যাপ্ত ছোট ধনাত্মক সংখ্যা) $f'(x)$ এর চিহ্ন ঋণাত্মক এবং ডানদিকে (c,c+h) অন্তরালে এই চিহ্ন ধনাত্মক হয়। আবার $f'(x)$ এর চিহ্ন যদি ধনাত্মক থেকে ঋণাত্মকে পরিবর্তিত হয় অর্থাৎ [c, f(c)] এর বামদিকে ধনাত্মক এবং ডানদিকে ঋণাত্মক হয় তাহলে f(c) এর মান হবে পরম।

অন্তরকলনীয় ফাংশনের চরম মানের দ্বিতীয় পর্য্যাপ্ত শর্ত।

1. $f(x),\ f'(x), \ldots\ldots\ldots\ldots\ f^{(2n)}(x)$ [a,b] বদ্ধ অন্তরালে অবিচ্ছিন্ন।

2. $f^{K}(c)=0,$ $K=1, 2 \ldots\ldots\ldots\ldots (2n-1),\quad a<c<b,$

3. (a) $f^{(2n)}(x) < 0$ অথবা (b) $f^{(2n)}(x) > 0$

তাহলে c বিন্দুতে প্রথম ক্ষেত্রে $f(x)$ এর পরম মান থাকবে এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে অবম মান থাকবে।

12.10 প্রশ্নাবলী

1. নিম্নলিখিত ফাংশনগুলির অন্তরকলজ ব্যবহার না করে পরম অথবা অবম মান নির্ণয় করুন।

(a) $9x^2 + 12x + 2$ (b) $|x + 2|$ (c) $|\sin 4x + 3|$

2. $f(x) = \sin x - \cos x,\quad 0<x<2\pi$ ফাংশনটির চরম মান নির্ণয় করুন। (দ্বিতীয় ক্রমের অন্তর কলজ ব্যবহার না করে)

3. দেখান যে নিম্নলিখিত ফাংশনগুলির পরম অথবা অবম মান নেই

(i) e^x (ii) $\log x$ (iii) $x^3 + x^2 + x + 1$

4. $f(x)=e^x-(1+x)$ ফাংশনটির অবম মান নির্ণয় করুন এবং দেখান যে এই অবম মানটি সার্বভৌম। এর থেকে দেখান যে

$$e^x > 1+x \qquad \text{যখন } x \neq 0$$

5. $f(x)=ax+\dfrac{b}{x,}$ $(a,b,x>0)$ ফাংশনটির লঘিষ্ঠ মান নির্ণয় করুন।

6. কোন অজ্ঞাত রাশি x এর মান নির্ণায়ক পরীক্ষায় n বার পর্যবেক্ষণের ফলে নিম্নলিখিত মানগুলি পাওয়া যায়।

$x_1, x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots x_n$

x এর কোন্ মানের জন্য নিম্নলিখিত বিচ্যুতিগুলির বর্গের সমষ্টি

$$f(x)=(x-x_1)^2+(x-\tfrac{x}{2})^2+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+(x-\tfrac{x}{n})^2$$

লঘিষ্ঠ হবে নির্ণয় করুন।

7. কোন ফাংশনের প্রচলিক সমীকরণ $x=\phi(t)$ এবং $y=\psi(t)$ হলে প্রমাণ করুন যে ফাংশনটির সঙ্কট বিন্দুগুলি হল $\psi'(t)=0$ সমীকরণের বীজসমূহ, এবং ফাংশনটির মান কোন সঙ্কট বিন্দুতে পরম হবে যদি ঐ বিন্দুতে $\psi''(t)<0$ হয় এবং অবম হবে যদি $\psi''(t)>0$ হয়।

এই সূত্রটি প্রয়োগ করে

$$x=a(\theta-\sin\theta), \qquad y=a(1-\cos\theta)$$

ফাংশনটির পরম মান নির্ণয় করুন।

8. দেখান যে $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{(x+3)^3}$ ফাংশনটির পরম মান $\dfrac{2}{27}$ এবং অবমমান 0।

9. একটি a ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট গোলকে অন্তর্লিখিত লম্ববৃত্তীয় শঙ্কুর আয়তন পরম হলে উহার উচ্চতা নির্ণয় করুন।

10. নৌকারোহী এক ব্যক্তি নদীতীরের সব চাইতে নিকটবর্তী বিন্দু থেকে $\underline{a}$ মাইল দূরে অবস্থান করছেন এবং তাঁকে তীর বরাবর ঐ বিন্দু থেকে $\underline{b}$ মাইল দূরে একটি গ্রামে যেতে হবে। তাঁর হাঁটার এবং দাঁড় টানার গতিবেগের অনুপাত $\sec\alpha$। প্রমাণ করুন যে তাঁকে সব চাইতে কম সময়ে গ্রামে পৌঁছতে হলে তীর বরাবর গ্রাম থেকে $b-a\cot\alpha$ দূরত্বে নৌকা ভিড়াতে হবে।

11. প্রদত্ত পরিসীমা বিশিষ্ট কোন্ সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল বৃহত্তম হবে নির্ণয় করুন।

12. $x+y=a$ হলে x^p+y^q এর অবম মান নির্ণয় করুন।

13. প্রমাণ করুন যে একটি লম্ব বৃত্তীয় শঙ্কুতে অন্তর্লিখিত কোন চোঙের আয়তন পরম হবে যখন চোঙের উচ্চতা ও শঙ্কুর উচ্চতার অনুপাত 1 : 3।

12.11 উত্তর মালা

1. (a) অবম মান -2; $[9x^2+12x+2=-2+(3x+2)^2]$

   (b) অবম মান 0

   (c) পরম মান 4, অবম মান 2

2. $f'(x)=\cos x+\sin x \Rightarrow$ সঙ্কট বিন্দু $3\frac{\pi}{4}, 7\frac{\pi}{4}$

   $=\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4}) \Rightarrow f'(3\frac{\pi}{4}-h)=\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{2}-h)=\sqrt{2}\sin h>0$

   এবং $f'(3\frac{\pi}{4}+h)=\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{h}+h)=-\sqrt{2}\sin h<0$

$\therefore 3\frac{\pi}{4}$ বিন্দুতে পরম মান। অনুরূপভাবে $7\frac{\pi}{4}$ বিন্দুতে অবম মান।

4. $x=0$ সঙ্কট বিন্দু। $f''(x)=e^x>0 \quad \forall x \in R$ সুতরাং x=0 বিন্দুতে অবম মানটি সার্বভৌম অবম মান।

5. $\frac{a^2+b^2}{\sqrt{ab}}$

6. $x=\frac{1}{n}\sum_{c=1}^{n} xi$

7. চরম মান 2a, যখন $\theta=(2m+1)\pi$, m অখণ্ড সংখ্যা।

8. $y=\frac{u(x)}{v(x)}$ হলে সঙ্কটমান নির্ণয়ের সমীকরণ হল $vu'-uv'=0$।

   এভাবে সঙ্কট বিন্দু তিনটি হবে $x=-1, x=-3, x=3$। এদের মধ্যে $x=-1$ বিন্দুতে অবম মান এবং $x=3$ বিন্দুতে পরম মান আছে।

9. উচ্চতা $4\frac{a}{3}$

11. সমদ্বিবাহু

12. সঙ্কট বিন্দু হল $px^{p-1}=q(a-x)^{q-1}$ সমীকরণের বীজ। p=q হলে বীজটি হল $x=\frac{a}{2} \Rightarrow y=\frac{a}{2}$

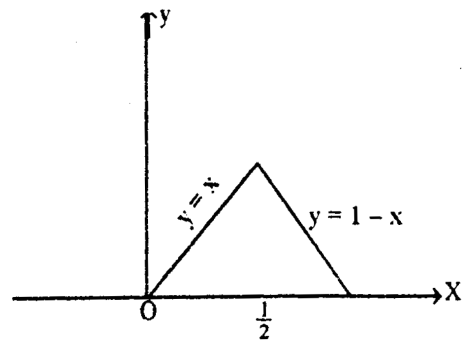
12.12. চিত্রমালা

চিত্র 1

$$f(x) = x \qquad 0 \le x \le \tfrac{1}{2}$$

$$= 1 - x \qquad \tfrac{1}{2} < x \le 1$$

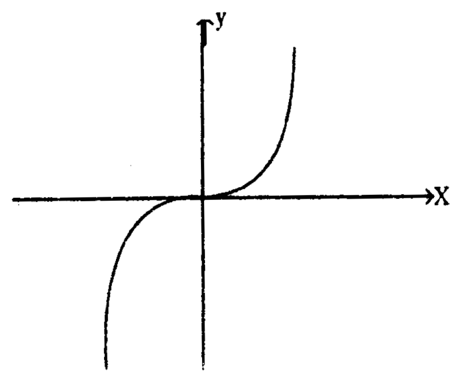
ফাংশনটির লেখচিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে $x = \frac{1}{2}$ বিন্দুতে f ফাংশনটির পরম মান আছে। কিন্তু $x = \frac{1}{2}$ বিন্দুতে $f'(x)$ এর অস্তিত্ব নেই। এই পরম মানটি সার্বভৌম পরম মান।



চিত্র 1

চিত্র 2

$f(x) = x^3$ এর লেখচিত্রে দেখা যাচ্ছে x-অক্ষ মূলবিন্দুতে বক্ররেখাটির স্পর্শক। অর্থাৎ $f'(0) = 0$ কিন্তু x=0 বিন্দুতে f(x) এর চরম মান নেই।

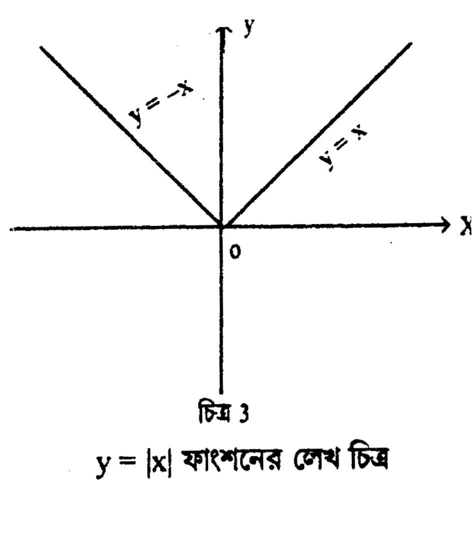


চিত্র 2

$y = x^3$ ফাংশনের লেখ চিত্র

চিত্র 3

$f(x) = |x|$ এর লেখাচিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে x=0 বিন্দুতে f ফাংশনটির অবম মান আছে অথচ ঐ বিন্দুতে $f'(x)$ এর অস্তিত্ব নেই। এই অবম মানটি সার্বভৌম অবম মান।

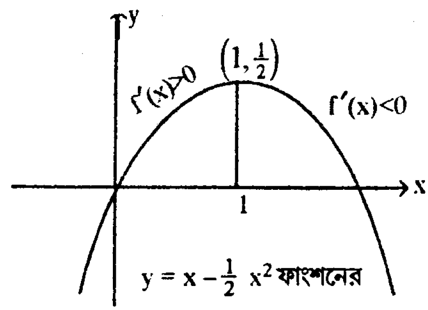


চিত্র 3

$y = |x|$ ফাংশনের লেখ চিত্র

চিত্র 4

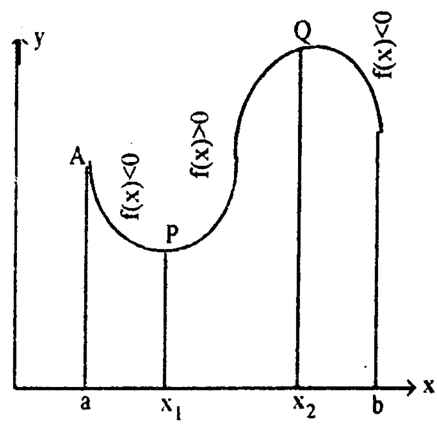
$f(x)=x-\frac{1}{2}x^2$ এর লেখচিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে $(1,\frac{1}{2})$ বিন্দুতে এর পরম মান আছে। ঐ বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল অর্থাৎ $f'(x)=0$ কিন্তু ঐ বিন্দুর বামদিকে $f'(x)>0$ এবং ডানদিকে $f'(x)<0$.



চিত্র 4

চিত্র 5

$y=f(x)$ ফাংশনটি $[a,b]$ বদ্ধ অন্তরালে সংজ্ঞাত এবং অবিচ্ছিন্ন। এর x_1 বিন্দুতে অবম মান আছে এবং $x=x_2$ বিন্দুতে এর পরম মান আছে এই মান দুটি $[a,b]$ বদ্ধ অন্তরালে যথাক্রমে $f(x)$ এর লঘিষ্ঠ এবং গরিষ্ঠ মান।

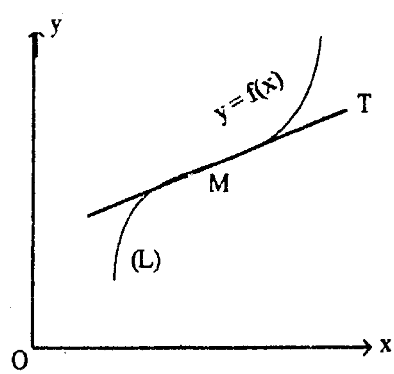


চিত্র 5

চিত্র 6

$y=f(x)$ (L) বক্ররেখার লেখচিত্র। M বিন্দুতে MT (L) বক্ররেখার একটি স্পর্শক। বক্ররেখাটি M বিন্দুতে MT স্পর্শককে অতিক্রম করেছে।

M বিন্দুটি হল L বক্ররেখার একটি ইন্‌ফ্লেকশান বিন্দু।



চিত্র 6

একক 13 ❑ বহুচল ফাংশনের অবম, পরম বা স্টেশনারী মান

গঠন

13.1 প্রস্তাবনা

দ্বিচলীয় ফাংশনের পরম ও অবম মানের সংজ্ঞা একচলীয় ফাংশনের অনুরূপ সংজ্ঞার সামান্যীকরণ। দুটি স্বাধীন চল x, y এর ফাংশন f(x,y) এর (a,b) বিন্দুতে মানকে পরম বলা হয় যদি (a,b) বিন্দুর অতি নিকটবর্তী অঞ্চলে f(x,y) এর অন্য সব মানের চাইতে f(a,b) মানটি বড় হয়।

অনুরূপভাবে f(x, y) দ্বিতল ফাংশনের f(a, b) মানটিকে অবম বলা হবে যদি এই মানটি (a, b) বিন্দুর অতি নিকটবর্তী অঞ্চলে f(x, y) এর অন্য সব মানের চাইতে ছোট হয়।

তিন অথবা ততোধিক চলের ফাংশনের পরম ও অবম মানের সংজ্ঞা, পরম ও অবম মানের অস্তিত্বের আবশ্যকীয় ও পর্যাপ্ত শর্ত। পরম ও অবম মান নির্ণয়ের পদ্ধতি সমস্তই দ্বিচলীয় ফাংশনের চরম মানের সংজ্ঞা, অস্তিত্বের আবশ্যকীয় ও পর্যাপ্ত শর্ত, ও নির্ণয়ের পদ্ধতির সামান্যীকরণ।

13.2 উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করে আপনি

- দ্বিচল ফাংশনের সার্বভৌম ও আপেক্ষিক পরম এবং অবম মানের সংজ্ঞা নির্দেশ করতে পারবেন, চরম মানের অস্তিত্বের আবশ্যকীয় শর্ত উদাহরণসহ আলোচনা করতে পারবেন এবং কোন দ্বিচল ফাংশনের সঙ্কট বিন্দুগুলি নির্ণয় করতে পারবেন।

- পরম ও অবম মানের পর্যাপ্ত শর্ত থেকে ফাংশনটির সঙ্কট বিন্দুগুলির কোন্‌টিতে পরম এবং কোন্‌টিতে অবম মান আছে তা নির্ণয় করতে পারবেন।
- স্যাডল্ পয়েন্টের সংজ্ঞা নির্দেশ করতে পারবেন এবং দ্বিচল ফাংশনের প্রথম ও দ্বিতীয় অন্তরকলের সাহায্যে ফাংশনটির চরমমান নির্ণয়ের বিকল্প পদ্ধতি বর্ণনা করতে পারবেন এবং দ্বিতীয় অন্তরকল যা একটি দ্বিঘাত-আকার (Quadratic Form)-এর চিহ্ন বিচার করে কোন্ সঙ্কটবিন্দুতে ফাংশটির পরম বা অবম মান অথবা স্যাডল্ পয়েন্ট আছে সেটি নির্ণয় করতে পারবেন।
- ত্রিচলীয় চরম মানের পর্যাপ্ত ও আবশ্যকীয় শর্ত বিষয়ে আলোচনা করতে প্যারবেন এবং দেখতে পারবেন যে এটি ফাংশনের চরম মান নির্ণয়ের বিকল্প পদ্ধতির সামান্যীকরণ।
- উদাহরণের সাহায্যে চারটি চল বিশিষ্ট ফাংশনের পরম অথবা অবম মান কিভাবে নির্ণয় করতে হবে তা দেখাতে পারবেন।
- লাগরাজ্ঞের গুণক পদ্ধতিতে ফাংশনের শর্তাধীন চরম মান নির্ণয় করার নিয়ম বর্ণনা করতে পারবেন এবং একাধিক উদাহরণের সাহায্যে নিয়মটি বুঝিয়ে দিতে পারবেন।
- দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণাবলী অনুসরণ করে বহুচল ফাংশনের চরম মান বিষয়ক নানাবিধ প্রশ্নের সমাধান অন্যের সাহায্য ছাড়াই করতে পারবেন।

13.3 এই পরিচ্ছেদে দ্বিচল ফাংশনের সার্বভৌম ও আপেক্ষিক চরম মানের সংজ্ঞা এবং চরম মানের অস্তিত্বের আবশ্যকীয় শর্তের আলোচনা করা হবে।

সংজ্ঞা 1. দ্বিচল ফাংশন $f(x,y)$ এর কোন দ্বিমাত্রিক অঞ্চল R এর (a,b) বিন্দুতে সার্বভৌম পরম মানের অস্তিত্ব বর্তমান যদি এবং একমাত্র যদি R অঞ্চলের সব বিন্দু (x,y) এর জন্য $f(a,b) \geq f(x,y)$

অসমতাটি সত্য হয়।

সংজ্ঞা 2. দ্বিচল ফাংশন $f(x,y)$ এর কোন দ্বিমাত্রিক অঞ্চল R এর (a,b) বিন্দুতে আপেক্ষিক পরম মানের অস্তিত্ব বর্তমান যদি এবং একমাত্র যদি একটি ধনাত্মক সংখ্যা δ পাওয়া যায় যাতে করে

$f(a,b) > f(x,y)$

অসমতাটি সিদ্ধ হয় R অঞ্চলের সেই সমস্ত (x,y) বিন্দুতে যেখানে

$O < (x-a)^2 + (y-b)^2 < \delta.$

সংজ্ঞা 3. দ্বিচল ফাংশন $f(x,y)$ এর কোন দ্বিমাত্রিক অঞ্চল R এর (a,b) বিন্দুতে সার্বভৌম অবম মানের অস্তিত্ব বর্তমান যদি এবং একমাত্র যদি R অঞ্চলের সব বিন্দু (x, y) এর জন্য

$f(a,b) \leq f(x,y)$

অসমতাটি সিদ্ধ হয়।

সংজ্ঞা 4. দ্বিতল ফাংশন $f(x,y)$ এর কোন দ্বিমাত্রিক অঞ্চল R এর (a,b) বিন্দুতে আপেক্ষিক অবম মানের অস্তিত্ব বর্তমান যদি এবং একমাত্র যদি একটি ধণাত্মক সংখ্যা δ পাওয়া যায় যাতে করে

$f(a,b) < f(x,y)$

অসমতাটি সিদ্ধ হয় R অঞ্চলের সেই সমস্ত (x,y) বিন্দুতে যেখানে

$O < (x-a)^2 + (y-b)^2 < \delta.$

উপপাদ্য। অন্তর কলনীয় ফাংশনের চরম মানের আবশ্যকীয় শর্ত।

f(x,y) ফাংশনটির একমাত্র সেই সব বিন্দুতেই চরম মানের অস্তিত্ব বর্তমান যেখানে $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ প্রথম ক্রমের আংশিক অন্তর কলজ দুটি একসঙ্গে শূন্য হবে অথবা এদের অস্তিত্ব নেই।

প্রমাণ ঃ ধরি (a,b) বিন্দুতে f(x,y) এর চরম মানের অস্তিত্ব বর্তমান। তাহলে f(a,b) , f(x,y) এর একটি চরম মান। অর্থাৎ f(a,b), f(x,y) এই একচল অপেক্ষকের $x = a$ বিন্দুতে একটি চরম মান। ফলে f(x,b) ফাংশনটির $x = a$ বিন্দুতে অন্তর কলজের অস্তিত্ব বর্তমান থাকলে এটি শূন্য হবে। সুতরাং $f_x(a,b) = 0$. অনুরূপ ভাবে দেখান যায় $f_y(a,b) = 0$.

মন্তব্য 1. উপপাদ্য। এ প্রাপ্ত শর্ত দুটি অর্থাৎ $f_x(a,b) = 0, f_y(a,b) = 0$ দ্বিতল ফাংশন f(x,y) এর চরম মানের অস্তিত্বের জন্য আবশ্যকীয় শর্ত কিন্তু এই শর্ত পর্যাপ্ত নয়।

নিচের উদাহরণ লক্ষ্য করুন।

$f(x,y) = 0$ যখন $x = 0$ অথবা $y = 0$

$\quad = 0$ অন্যত্র।

এক্ষেত্রে $f_x(0, 0) = 0,\ f_y(0, 0) = 0$. কিন্তু f(0, 0) f ফাংশনটির চরম মান নয়।

মন্তব্য 2. দ্বিচল ফাংশন f এর প্রথম ক্রমের অন্তর কলজ দুটির কোন বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন হলেও সেই বিন্দুতে f-এর চরম মান থাকতে পারে। নিচের উদাহরণটি লক্ষ্য করুন।

$$f(x,y) = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\ , x^2+y^2 \leq 1$$

এখানে $f_x(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,

$$f_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

অর্থাৎ অন্তর কলজ দুটি (0, 0) বিন্দুতে অবিছিন্ন। কিন্তু f ফাংশনটির (0, 0) বিন্দুতে সার্বভৌম পরম মানের অস্তিত্ব বর্তমান এবং পরমমানটি হল 2.

13.4 দ্বিতল ফাংশনের চরম মানের পর্যাপ্ত শর্ত

এই পরিচ্ছেদে কোন দ্বিতল ফাংশনের আপেক্ষিক চরম মানের পর্যাপ্ত শর্ত নির্ণয় করা হবে। এতে ফাংশনটির দ্বিতীয়ক্রমের অন্তরকলজগুলির প্রয়োগ করতে হবে।

উপপাদ্য 2.

যদি

1. f(x,y) এর দ্বিতীয় ক্রমের আংশিক অন্তরকলজগুলি অবিছিন্ন হয়।

2. $f_x = f_y = 0$ (a,b) বিন্দুতে।

3. $f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy} = 0$ (a,b) বিন্দুতে।

4. $f_{xx} = 0$ (a,b) বিন্দুতে।

তাহলে f(x,y) এর (a,b) বিন্দুতে আপেক্ষিক পরম মান আছে।

প্রমাণ ঃ দুটি পদের পর অবশিষ্টাংশ সহ টেলরের উপপাদ্য প্রয়োগ করে পাই

$$\Delta f = f(a+h, b+K) - f(a, b)$$

$$= \frac{1}{2}\left[h^2 f_{xx}(a+\theta h, b+\theta K) + 2hK\, f_{xy}(a+\theta h, b+\theta K) + K^2\, f_{yy}(a+\theta h, b+\theta K)\right], \quad 0<\theta<1$$

$$= \frac{1}{2}\left[Ah^2 + 2BhK + cK^2\right]$$

যেখানে $A = f_{xx}(a+\theta h, B+\theta K)$

$B = f_{xy}(a+\theta h, B+\theta K)$

$C = f_{yy}(a+\theta h, B+\theta K)$

এখন f(x, y) এর দ্বিতীয় ক্রমের আংশিক অন্তর কলজগুলির অবিচ্ছিন্নতার শর্ত (1) থেকে পাই যে (3) এবং (4) এর অসমতা দুটি (a,b) কেন্দ্র বিশিষ্ট δ ব্যাসার্ধের কোন বৃত্তের অন্তঃস্থবিন্দুতেও সিদ্ধ হবে। $(a+\theta h, b+\theta K)$ এই বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ বিন্দু হবে যদি $h^2 + K^2 < \delta^2$ হয়। এর ফলে

$A < 0$ এবং $B^2 - AC < 0$

তাই $\Delta f = \frac{1}{2A}\left[(Ah+BK)^2 + (AC-B^2)K^2\right] < 0$

অর্থাৎ $f(a+h, b+K) - f(a, b) < 0$

অতএব f(x,y) এর (a,b) বিন্দুতে আপেক্ষিক পরম মান আছে।

মন্তব্য 1. আপেক্ষিক অবম মানের পর্যাপ্ত শর্তগুলি হল উপপাদ্য 2 এর প্রথম তিনটি শর্ত এবং চতুর্থ শর্তের পরিবর্তে $f_{xx} > 0$

অর্থাৎ যদি

1. f(x, y) এর দ্বিতীয় ক্রমের আংশিক অন্তর কলজগুলি অবিচ্ছিন্ন হয়

2. $f_x = f_y = 0$ (a,b) বিন্দুতে

3. $f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy} < 0$ (a,b) বিন্দুতে

4. $f_{xx} > 0$ (a,b) বিন্দুতে

তাহলে (a, b) বিন্দুতে f(x, y) এর আপেক্ষিক অবম মান থাকবে।

মন্তব্য 2. যদি কোণ দ্বিচল ফাংশনের প্রথম ক্রমের আংশিক অন্তর কলজগুলির মান কোন বিন্দুতে শূন্য হয় তাহলে ঐ বিন্দুকে ষ্টেশনারী বিন্দু এবং ঐ বিন্দুতে ফাংশনের মানকে ষ্টেশনারী মান বলা হয়।

দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ।

চরম মানের জন্য নিচের ফাংশনটি পরীক্ষা করুন।

$z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

সমাধান। $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 12$

চরম মানের অস্তিত্বের আবশ্যিক শর্ত থেকে পাই

$3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 5 \ldots\ldots\ldots(1)$

এবং $6xy - 12 = 0 \Rightarrow xy = 2$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

এবার (1) এবং (2) থেকেপাই $x^2 + \dfrac{4}{x^2} = 5$

$$\Rightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0$$

$\therefore x = -1, 1, -2, 2$ ফলে

$y = -2, 2, -1, 1$

অতএব আমরা $(-1,-2)$, $(1,2)$, $(-2,-1)$ এবং $(2,1)$ এই চারটি ষ্টেশনারী বিন্দু পাচ্ছি।

দ্বিতীয় ক্রমের আংশিক অন্তরকলজগুলি হল

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x$$

এখন উপরের প্রত্যেকটি বিন্দুতে $\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} \equiv z^2{}_{xy} - z_{xx} z_{yy} = 36(y^2 - x^2)$ এর মান নির্ণয় করি।

$$\left[z_{xy^2} - z_{xx} z_{yy}\right]_{(-1,-2)} = 36(2^2 - 1^2) = 36 \times 3 = 0$$

$$\left[z_{xy^2} - z_{xx} z_{yy}\right]_{(1,2)} = 36 \times 3 > 0$$

$$\left[z_{xy^2} - z_{xx} z_{yy}\right]_{(2,1)} = -36 \times 3 < 0$$

$$\left[z_{xy^2} - z_{xx}z_{yy}\right]_{(-2,-1)} = -36\times 3 < 0$$

(−1,−2) এবং (1,2) বিন্দু দুটির উপপাদ্য 2 এর তৃতীয় শর্তটি সিদ্ধ হচ্ছে না বলে এই উপপাদ্য প্রয়োগ করা যাচ্ছে না।

(2,1) বিন্দুতে $z_{xx} = 12 >$ এবং (−2, −1) বিন্দুতে $z_{xx} = -12 < 0$. ফলে (2,1) বিন্দুতে z এর অবম মান এবং (−2, −1) বিন্দুতে পরম মান আছে।

13.5 স্যাডল্ পয়েন্টস্ Saddle Points

যদি $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ হয় এবং (a, b) বিন্দুর প্রত্যেক নিকটবর্তী অঞ্চলে $\Delta f \equiv f(x,y) - f(a,b)$ এর ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক উভয় প্রকার মানই বর্তমান থাকে তাহলে (a, b) বিন্দুটিকে f(x, y) এর **একটি স্যাডল্ পয়েন্ট** বলা হয়। উদাহরণ হিসাবে f(x,y) = xy ফাংশনটিকে বিবেচনা করা যেতে পারে। এই ফাংশনটির মূলবিন্দুতে একটি স্যাডল্ পয়েন্ট বর্তমান। কারণ এই ফাংশনটি প্রথম ও তৃতীয় পাদে ধনাত্মক এবং দ্বিতীয় ও চতুর্থ পাদে ঋণাত্মক। ত্রিমাত্রিক দেশে z = xy তলটি একটি পরাবৃত্তীয় অধিবৃত্তক (Hyperbolic Paraboloid). এর বিশেষ আকৃতির জন্যই 'স্যাডল পয়েন্ট' শব্দটির উৎপত্তি।

উপপাদ্য 3.

1. f(x, y) এর দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরকলজগুলি অবিচ্ছিন্ন
2. (a, b) বিন্দুতে $f_x = f_y = 0$
3. (a, b) বিন্দুতে $f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy} > 0$

$\Rightarrow$ **(a, b) বিন্দুটি f(x, y)-এর একটি স্যাডল্ পয়েন্ট।**

প্রমাণ : উপপাদ্য 2-এর অনুরূপ।

এখানে $\Delta f = f(a+h, b+K) - f(a,b)$

$$= \frac{1}{2A}\left[(Ah + BK)^2 + (AC - B^2)K^2\right]$$

$$= \frac{1}{2A}\left[(Ah + BK)^2 - (B^2 - AC)K^2\right]$$

$$= \frac{1}{2A}\left[(Ah + BK)^2 - \lambda^2K^2\right] \quad \text{যেখানে } \lambda^2 = B^2 - AC > 0$$

অতএব A এর চিহ্ন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যাই হোক না কেন ডান দিকের রাশিটির চিহ্ন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক উভয় প্রকার হতে পারে। অর্থাৎ (a, b) বিন্দুটির প্রত্যেক নিকটবর্তী অঞ্চলে $\Delta f \equiv f(x, y) - f(a, b)$ এর ধনাত্মক বা ঋণাত্মক উভয় প্রকার মানই বর্তমান। অতএব (a, b) বিন্দুটি f(x, y) এর একটি স্যাডল্ পয়েন্ট।

মন্তব্য 1. উপরের প্রমাণে $A \neq 0$ ধরা হয়েছে। যদি $A = 0$ হয় এবং $C \neq 0$ হয়

$$\Delta f = \frac{1}{2}\left[Ah^2 + 2BhK + CK^2\right] = \frac{1}{2C}\left[(CK + Bh)^2 - (B^2 - AC)h^2\right]$$

$$= \frac{1}{2C}\left[(CK + Bh)^2 - B^2h^2\right]$$

আবার $A = 0, C = 0$ হলে, $\Delta f = BhK$ (শর্ত (1) এবং সর্ত (3) থেকে পাই $B \neq 0$) উভয়ক্ষেত্রেই দেখা যাচ্ছে (a, b) বিন্দুটির প্রত্যেক নিকটবর্তী অঞ্চলে Δf এর ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক উভয় প্রকার মানই বর্তমান। অতএব প্রতিটি ক্ষেত্রেই (a, b) বিন্দুটি f(x, y) এর স্যাডল্ পয়েন্ট।

মন্তব্য 2. যে সমস্ত বিন্দুতে $f_x = 0 = f_y$ এবং $f_{xy}{}^2 - f_{xx} f_{yy} = 0$ সেই বিন্দুগুলি ফাংশনটির পরম বিন্দু অবম বিন্দু অথবা স্যাডল্ পয়েন্ট হতে পারে। কিন্তু এদের অস্তিত্ব প্রমাণে উপপাদ্য 2 অথবা উপপাদ্য 3 প্রয়োগ করা যায় না।

13.5.1 দ্বিতল ফাংশনের চরম মান নির্ণয়ের বিকল্প নিয়ম।

যেহেতু $df(a, b) = f_x(a, b)\,dx + f_y(a, b)\,dy$

$$= h f_x(a, b) + K f_y(a, b), \qquad h = dx,\ K = dy$$

এবং $= d^2 f(a, b) = h^2 f_{xx}(a, b) + 2hK f_{xy}(a, b) + K^2 f_{yy}(a, b)$

$$= Ah^2 + 2BhK + CK^2,\ A = f_{xx}(a, b),$$

$$B = f_{xy}(a, b) \text{ এবং}$$

$$C = f_{yy}(a, b)$$

কাজেই f(a, b) f(x, y) এর একটি চরম মান হবে যদি (a, b) বিন্দুতে f(x, y) এর প্রথম অন্তরকল্ df শূন্য হয় এবং f(x, y) এর দ্বিতীয় অন্তরকল্ d^2f এর চিহ্ন h, K এর শূন্য ছাড়া সমস্ত মানের জন্য অবিচল (অথবা নির্দিষ্ট) থাকে।

মন্তব্য। কোন ফাংশনের দ্বিতীয় অন্তরকল্ $d^2f(a, b) = Ah^2 + 2BhK + CK^2$ হচ্ছে h, K চল দুটির দ্বিঘাত আকার (quadratic form). এই দ্বিঘাত আকারের ম্যাট্রিক্সটি হল $\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}$

এই ম্যাট্রিক্সের মুখ্য মাইনর দুটি হচ্ছে A এবং $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$

এই দ্বিঘাত আকারের চিহ্ন ধনাত্মক নির্দিষ্ট (Positive definite) হবে যখন মুখ্য মাইনর দুটি উভয়েই ধনাত্মক এবং এটির চিহ্ন ঋণাত্মক নির্দিষ্ট হবে যখন মুখ্য মাইনর দুটি একান্তর ক্রমে ঋণাত্মক এবং ধনাত্মক।

উদাহরণ। $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy + 1$ ফাংশনটির চরম মানগুলি নির্ণয় করুন।

সমাধান। $df = 3x^2dx + 3y^2dy - 3xdy - 3ydx$

$$= 3(x^2 - y)\,dx + 3(y^2 - x)dy$$

এবং $d^2f = 3(2xdx - dy)\,dx + 3(2ydy - dx)dy$

$$= 3\,[2x(dx)^2 - 2dxdy + 2y(dy)^2]$$

$$= 6[x(dx)^2 - dxdy + y(dy)^2] = 6[xh^2 - hK + yK^2]\ (h = dx,\ K = dy)$$

অতএব চরম মানের আবশ্যকীয় শর্ত $df = 0$ থেকে পাই

$x^2 - y = 0$ এবং $y^2 - x = 0$

এই দুটি সমাধান করে পাই $(x, y) = (0, 0)$ অথবা $(1, 1)$

এখন $(d^2f)_{(1,1)} = 6[h^2 - hK + K^2]$

$$= 6\left[\left(h - \frac{1}{2}K\right)^2 + \frac{3}{4}K^2\right] > 0\ [(h, K)(\neq (0, 0)) \text{ এর সমস্ত মানের জন্য}$$

এবং $f_{xx}(1, 1) = 6$

অতএব $(1, 1)$ বিন্দুতে $f(x, y)$ এর অবম মান আছে।

আবার যেহেতু $\left[d^2f\right]_{(0,0)} = -6hK$, h K-এর সমস্ত মানের জন্য d^2f এর চিহ্ন নির্দিষ্ট নয়, $(0, 0)$ বিন্দুতে $f(x,y)$ এর কোন চরম মান নাই। কিন্তু উপপাদ্য 3 থেকে দেখি এর $(0, 0)$ বিন্দুটি স্যাডল্ পয়েন্ট।

উদাহরণ 2. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 63(x + y) + 12xy$ ফাংশনটির পরম ও অবম মানগুলি নির্ণয় করুন।

সমাধান। প্রথম ক্রমের আংশিক অন্তর কলজগুলি হল

$f_x(x, y) = 3x^2 - 63 + 12y$ এবং

$fy(x, y) = 3y^2 - 63 + 12x$

চরম মানের আবশ্যকীয় শর্ত থেকে পাই $3(x^2 - 21 + 4y) = 0$ এবং

$$3(y^2 - 21 + 4y) = 0$$

এ দুটি সমীকরণ থেকে পাই $\quad x^2 - y^2 + 4(y - x) = 0$

অথবা $\quad (x - y)(x + y - 4) = 0 \Rightarrow$ হয় $x - y = 0$

নতুবা $x + y - 4 = 0$

তাহলে x,y নির্ণয় করার জন্যে আমরা পাচ্ছি

$$\left.\begin{aligned} x^2 + 4y - 21 &= 0 \\ x - y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{এবং} \quad \left.\begin{aligned} x^2 + 4y - 21 &= 0 \\ x + y - 4 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

প্রথম দুটি থেকে পাচ্ছি $x^2 + 4x - 21 = 0, \quad x = y$

অর্থাৎ, $(x, y) = (3, 3)$ অথবা $(-7, -7)$

অপর দুটি থেকে $x^2 + 4(4 - x) - 21 = 0, \quad y = 4 - x$

অর্থাৎ, $\quad x^2 - 4x - 5 = 0, \;\; y = 4 - x \;\; \Rightarrow (x, y) = (5, -1)$ অথবা $(-1, 5)$

অর্থাৎ $(3, 3), (-7, -7), (5, -1)$ এবং $(-1, 5)$ এই চারটি ষ্টেশনারী বিন্দু পাওয়া গেল।

এখন $f_{xx} = 6x,\; f_{xy} = 12,\; f_{yy} = 6y$

$$\therefore\; f_{xx}f_{xy} - {f_{xy}}^2 = 36xy - 12^2$$

$$= 36(xy - 4)$$

(i) $(3, 3)$ বিন্দুতে $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}{}^2 = 36\,(3 \times 3 - 4) > 0,\, f_{xx} = 18 > 0$

$\Rightarrow (3, 3)$ বিন্দুতে $f(x, y)$ এর অবম মান আছে।

(ii) $(-7, -7)$ বিন্দুতে $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}{}^2 = 36(49 - 4) > 0,\, f_{xx} = -42 < 0$

$\Rightarrow (-7, -7)$ বিন্দুতে $f(x, y)$ এর চরম মান আছে।

(iii) $(5, -1)$ বিন্দুতে $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}{}^2 = 36(-5 - 4) < 0,\, f_{xx} = 30$

$\Rightarrow (5, -1)$ বিন্দুতে $f(x, y)$ এর একটি স্যাড্ল্ পয়েন্ট

(iv) $(-1, 5)$ বিন্দুতে $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}{}^2 = 36\,(-5, -4) < 0$

$\Rightarrow (-1, 5)$ বিন্দুটি $f(x, y)$ এর একটি স্যাডল্ পয়েন্ট।

13.6 তিন এবং ততোধিক চলের ফাংশনের চরম মান

13.5.1 পরিচ্ছেদে দ্বিচলীয় ফাংশনের চরম মান নির্ণয়ের বিকল্প পদ্ধতি আলোচিত হয়েছে। আমরা দেখেছি যদি (a, b) বিন্দুতে $f(x, y)$ এর প্রথম অন্তরকল $df = 0$ হয় তাহলে,

(i) $f(x,y)$ এর দ্বিতীয় অন্তরকল d^2f, এই দ্বিঘাত আকারটি (a, b) বিন্দুতে ধনাত্মক নির্দিষ্ট হলে $f(a, b)$ মানটি অবম হবে। এবং

(ii) d^2f এর (a, b) বিন্দুতে ঋণাত্মক নির্দিষ্ট আকার হলে $f(a, b)$ পরম হবে।

তিন বা ততোধিক চলের ফাংশনের চরম মান নির্ণয়ের জন্যও আমরা অনুরূপ পদ্ধতি অবলম্বন করব।

ধরি $f(x,y,z)$ একটি ত্রিচলীয় অপেক্ষক। (a,b,c) বিন্দুতে $f(x,y,z)$ এর চরম মান থাকার পর্যাপ্ত সর্তগুলি হল

1. $df(a,b,c) = f_x dx + f_y dy + f_z dz = 0$, dx, dy, dz এর সকল মানের জন্য।

2. $d^2f(a,b,c) = f_{xx}(dx)^2 + f_{yy}(dy)^2 + f_{zz}(dz)^2 + 2f_{xy}\, dxdy + 2f_{yz}dydz + 2f_{zx}\, d_z\, d_x$

এই দ্বিঘাত আকারটি নির্দিষ্ট।

এই শর্তদুটি (a,b,c) বিন্দুতে সিদ্ধ হলে $f(a, b, c)$ মানটি হবে অবম যদি d^2f ধনাত্মক নির্দিষ্ট আকারের হয় এবং $f(a\;\, b\;\, c)$ মানটি হবে পরম যদি এটি ঋণাত্মক নির্দিষ্ট আকারের হয়।

ত্রিচলীয় ফাংশনের দ্বিঘাত আকারের ধনাত্মক নির্দিষ্ট অথবা ধণাত্মক নির্দিষ্ট হবার শর্তগুলি হচ্ছে নিম্নরূপ।

ধরি d^2f এর ম্যাট্রিক্সটি হল

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix}$$

d^2f ধনাত্মক নির্দিষ্ট হবে যখন

$$f_{xx}, \quad \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} \quad \text{এবং} \quad \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix}$$

এই মুখ্য মাইনর তিনটি প্রত্যেকেই ধনাত্মক এবং d^2f ঋণাত্মক নির্দিষ্ট হবে যদি এবং একমাত্র যদি এদের চিহ্নগুলি একান্তর ক্রমে ঋণাত্মক এবং ধনাত্মক হয়।

উদাহরণ 1. চরম মানের জন্য পরীক্ষা করুন।

$2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 3xy + 8z$

সমাধান। ধরি $u = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 3xy + 8z$

তাহলে $du = (4x - 3y)\,dx + (6y - 3x)dy + (8z + 8)dz \ldots\ldots(1)$

এবং $d^2u = (4dx - 3dy)\,dx + (6dy - 3dx)dy + (8dz)dz$

$$= 4dx^2 + 6dy^2 + 8(dz)^2 - 6dydx \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$du = 0$ হলে $4x - 3y = 0$

$6y - 3x = 0$

$8z + 8 = 0$

এদের সমাধান হল $x = 0,\ y = 0,\ z = -1$

অর্থাৎ $(0, 0, -1)$ বিন্দুতে, দ্বিতীয় অন্তকলের চিহ্ন নির্ণয় করতে হবে।

$$\text{এখন } d^2u = 4\left[dx^2 + \frac{3}{2}dy^2 - \frac{3}{2}dydx\right] + 8(dz)^2$$

$$= 4\left[\left(dx - \frac{3}{4}dy\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{9}{16}\right)dy^2\right] + 8(dz)^2$$

$$= 4\left[\left(dx - \frac{3}{4}dy\right)^2\right] + \frac{15}{4}(dy)^2 + 8(dz)^2 > 0$$

অতএব (0,0,-1) বিন্দুতে ফাংশনটির অবম মান আছে।

উদাহরণ 2. প্রমাণ করুন যে,

$$u = (x+y+z)^3 - 3(x+y+z) - 24xyz + a^3$$

ফাংশনটির (1,1,1) বিন্দুতে অবম মান এবং (−1, −1, −1) বিন্দুতে পরম মান আছে।

প্রমাণ ঃ $du = 3(x+y+z)^2\,(dx+dy+dz) - 3(dx+dy+dz) - 24(yzdx + zxdy + xydz)$

$$= \left\{3(x+y+z)^2 - 3 - 24yz\right\} dx + \left\{3(x+y+z)^2 - 3 - 24zx\right\} dy$$

$$+ \left\{3(x+y+z)^2 - 3 - 24xy\right\} dz$$

স্টেশনারী বিন্দুতে $du = 0 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} 3(x+y+z)^2 - 3 - 24yz = 0 \\ 3(x+y+z)^2 - 3 - 24zx = 0 \\ 3(x+y+z)^2 - 3 - 24xy = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 + 8yz = 1 + 8zx = 1 + 8xy = (x+y+z)^2$$

সমাধান করে পাই $x = y = z = \pm 1$,

অর্থাৎ (1, 1, 1) এবং (−1, −1, −1) বিন্দু দুটি ষ্টেশনারী বিন্দু।

এখন $d^2u = \left\{6(x+y+z)\,(dx+dy+dz) - 24ydz - 24zdy\right\} dx$

$$+ \left\{6(x+y+z)\,(dx+dy+dz) - 24zdx - 24xdz\right\} dy$$

$$+ \left\{6(x+y+z)\,(dx+dy+dz) - 24xdy - 24ydx\right\} dz$$

$$= 6(x+y+z)\left[(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2\right] + 12(x+y-3z)dydx$$

$$+ 12(y+z-3x)\,dydz + 12(z+x-3y)\,dzdx$$

অতএব d^2u দ্বিঘাত আকারের ম্যাট্রিক্সটি হল

$$\begin{bmatrix} 6(x+y+z) & 6(x+y-3z) & 6(x+z-3y) \\ 6(x+y-3z) & 6(x+y+z) & 6(y+z-3x) \\ 6(z+x-3y) & 6(y+z-3x) & 6(x+y+z) \end{bmatrix}$$

এখন, (1, 1, 1,) বিন্দুতে

$$d^2u = 18(dx)^2 + 18(dy)^2 + 18(dz)^2 - 12dxdy - 12dydz - 12dzdx$$

এই দ্বিঘাত আকারটির মুখ্য মাইনর তিনটি

$$18, \begin{vmatrix} 18 & -6 \\ -6 & 18 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 18 & -6 & -6 \\ -6 & 18 & -6 \\ -6 & -6 & 18 \end{vmatrix}$$

অর্থাৎ 18, 288 এবং 3456 প্রত্যেকেই ধনাত্মক অতএব $(1, 1, 1)$ বিন্দুতে $u(x, y, z)$ এর অবম মান আছে।

আবার $(-1, -1, -1)$ বিন্দুতে

$$d^2u = -18(dx)^2 - 18(dy)^2 - 18(dz)^2 + 12dxdy + 12dydz + 12dzdx$$

এই দ্বিঘাত আকারটির [illegible]র তিনটি

$$-18 \quad \begin{vmatrix} -18 & 6 \\ 6 & -18 \end{vmatrix} \quad \text{এবং} \quad \begin{vmatrix} -18 & 6 & 6 \\ 6 & -18 & 6 \\ 6 & 6 & -18 \end{vmatrix}$$

অর্থাৎ -18, 288, এবং -3456 একান্তর ক্রমে ঋণাত্মক এবং ধনাত্মক।

অতএব $(-1, -1, -1)$ বিন্দুতে $u(x, y, z)$ এর অবম মান আছে।

উদাহরণ 3.

প্রমাণ করুন যে (i) $u(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ ফাংশনটির $(0, 0, 0, 0)$ বিন্দুতে অবম মান আছে এবং (ii) $v(x, y, z, t) = -(x^2 + y^2 + z^2 + t^2)$ ফাংশনটির $(0, 0, 0, 0)$ বিন্দুতে পরম মান আছে।

সমাধান। (i) $u(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$

অতএব $du = 2xdx + 2ydy + 2zdz + 2tdt$

ষ্টেশনারী বিন্দুতে $du = 0 \Rightarrow x = y = z = t = 0$

অর্থাৎ $(0, 0, 0, 0)$ বিন্দুটি ষ্টেশনারী বিন্দু।

আবার $d^2u = 2(dx)^2 + 2(dy)^2 + 2(dz)^2 + 2(dt)^2$

$$= 2[(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 + (dt)^2] > 0$$

অর্থাৎ d^2u দ্বিঘাত আকারটি ধনাত্মক নির্দিষ্ট। অতএব $u(x,y,z,t)$ ফাংশনটির $(0,0,0,0)$ বিন্দুতে অবম মান আছে।

(ii) অনুরূপভাবে $d^2v = -2[(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 + (dt)^2] < 0 \Rightarrow$

d^2v দ্বিঘাত আকারটি ঋণাত্মক নির্দিষ্ট। অতএব $v(x, y, z, t)$ এর $(0, 0, 0, 0)$

বিন্দুতে পরম মান আছে।

13.7 শর্তাধীন চরম মান এবং লাগরাঞ্জের গুণক

যে বহুচল ফাংশনের চরম মান নির্ণয় করতে হবে তার চলগুলি যদি এক কিংবা ততোধিক শর্তের অধীন হয় তাহলে ফাংশনটির স্বাধীন চলের সংখ্যা কমে যায় ফলে চরম মান নির্ণয়ের সুবিধা হয়। একটি উদাহরণের সাহায্যে এ বিষয়টি বোঝা যেতে পারে।

উদাহরণ। তিনটি ধনাত্মক সংখ্যার যোগফল। সংখ্যা তিনটির গুণফলের পরম মান নির্ণয় করুন।

সমাধান। ধরি ধনাত্মক সংখ্যা তিনটি x, y, z. তাহলে $x + y + z = 1$ এবং আমাদের $P = xyz$ এর পরম মান নির্ণয় করতে হবে। এখানে P ফাংশনটি x, y, z এই তিনটি চলের ফাংশন। কিন্তু এই চল তিনটি স্বাধীন নয়। যেহেতু x, y, z চল তিনটি $x + y + z = 1$ এই শর্তের অধীন, এদের মধ্যে যে কোন একটিকে অন্য দুটির ফাংশন হিসাবে লিখে P কে ঐ দুটি স্বাধীন চলের ফাংশন হিসাবে দেখা যেতে পারে এবং P এর চরম মান নির্ণয় করার জন্য আমরা দ্বিচল ফাংশনের চরম মান নির্ণয়ের পদ্ধতি অবলম্বন করতে পারি।

যেহেতু,

$$x + y + z = 1$$

$$\therefore \quad z = 1 - x - y$$

এবং,

$$P = xyz = xy(1 - x - y) = xy - x^2y - xy^2$$

$$dP = (y - 2xy - y^2)\,dx + (x - 2xy - x^2)\,dy$$

$$d^2P = [dy - 2ydx - 2xdy - 2ydy]\,dx + [dx - 2ydx - 2xdx - 2xdx]dy$$

$$= -2y(dx)^2 + 2(1 - 2x - 2y)dxdy - 2x(dy)^2$$

স্টেশনারী বিন্দুতে $dP = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y - 2xy - y^2 = 0 \\ x - 2xy - x^2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x - y)\,(1 - x - y) = 0$

অর্থাৎ হয় $x = y$ আর নয়ত $x + y = 1$ কিন্তু $x + y = 1$ হলে $z = 0$ কিন্তু x, y, z ধনাত্মক বলে z-এর এ মানটি গ্রাহ্য নয়। অতএব $x = y$ এই মানটি $y - 2xy - y^2 = 0$ সমীকরণে বসিয়ে পাই $x(1 - 3x) = 0$

$$\because\ x \neq 0,\ \ x = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3}$$

x এবং y এর এই মান d^2P তে বসিয়ে পাই

$$d^2p = -\frac{2}{3}(dx)^2 + 2\left(1 - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right)dx\,dy - \frac{2}{3}(dy)^2$$

$$= -\frac{2}{3}\left[(dx)^2 + dxdy + (dy)^2\right]$$

$$= -\frac{2}{3}\left[\left(dx + \frac{1}{2}dy\right)^2 + \frac{3}{4}(dy)^2\right]$$

অতএব d^2P দ্বিঘাত আকারটি ঋণাত্মক নির্দিষ্ট। ফলে $x = \frac{1}{3}$ এবং $y = \frac{1}{3}$ হলে P-এর মান পরম।

অতএব P এর পরম মান $= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{27}$

মন্তব্য। উপরের উদাহরণটিতে আমরা z চলটিকে x এবং y এই দুটি স্বাধীন চলের ফাংশন আকারে প্রকাশ করে P ফাংশনটিকে দ্বিচলীয় ফাংশনে রূপান্তরিত করেছি। এখানে x,y,z এই তিনটি চলের যে কোনটিকে অন্যদুটির ফাংশন আকারে প্রকাশ করা সম্ভব। ফলে x, y, z এই তিনটি চলের যে কোন দুটি P ফাংশনটির স্বাধীন চল। এখন নিচের উদাহরণটি লক্ষ্য করুন।

উদাহরণ। (1,0) বিন্দু থেকে $y^2=4x$ অধিবৃত্তের বৃহত্তম দুরত্ব নির্ণয় করুন।

সমাধান। ধরি (x,y) অধিবৃত্তটির উপর একটি বিন্দু। (1,0) বিন্দু থেকে এর দূরত্বের বর্গ

$u = (x-1)^2 + y^2,$

u এর অবম মান নির্ণয় করতে হবে, প্রদত্ত $y^2 = 4x$. যদি আমরা y অপনয়ন করি (অর্থাৎ x কে স্বাধীন চল নিই) তাহলে,

$u = (x-1)^2 + 4x = (x+1)^2$

$\frac{du}{dx} = 2(x+1) = 0$ যখন $x = -1$. কিন্তু এটা সম্ভব নয় যেহেতু অধিবৃত্তটির কোন বিন্দুর ভূজ ঋণাত্মক হতে পারে না।

যদি x অপনয়ন করি অর্থাৎ (y-কে স্বাধীন চল নিই। তাহলে,

$$u = \left(\frac{y^2}{4}-1\right)^2 + y^2$$

$$\frac{du}{dy} = 2\left(\frac{y^2}{4}-1\right)\frac{2y}{4} + 2y$$

$$= y\left(\frac{y^2}{4}-1\right) + 2y$$

$$= y\left(\frac{y^2}{4}+1\right) = 0 \quad \text{যখন } y = 0$$

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \left(\frac{y^2}{4}+1\right) + y\left(\frac{2y}{4}\right) = \frac{3y^2}{4} + 1$$

$$\therefore \left.\frac{d^2u}{dy^2}\right|_{y=0} = 1$$

অতএব $y = 0$ হলে u এর মান অবম। এখন $y = 0 \Rightarrow x = 0,$

অর্থাৎ (1, 0) বিন্দু থেকে অধিবৃত্ত উপর (0, 0) বিন্দুটি হ্রস্বতম দূরত্বে অবস্থিত।

মন্তব্য। x চলটি u ফাংশনটির উপযুক্ত স্বাধীন চল নয়। এই উদাহরণটি থেকে দেখা যাচ্ছে সর্তাধীন চরম মান নির্ণয়ের ক্ষেত্রে যে ফাংশনের চরম মান নির্ণয় করতে হবে তার উপযুক্ত স্বাধীন চলগুলি চিহ্নিত করা আবশ্যক। কিন্তু অনেক ক্ষেত্রেই এটা অসুবিধা জনক। এই অসুবিধা নিরসনের জন্য লাগরাঞ্জের পদ্ধতি প্রয়োগ করা হয়। লাগরাঞ্জের পদ্ধতিতে কোন্ চলগুলিকে স্বাধীন চল ধরা হবে তা জানার প্রয়োজন হয় না।

13.7.1 লাগরাঞ্জের অনির্ণীত গুণকের পদ্ধতি।

ধরি $u(x_1, x_2 \ldots\ldots\ldots, x_n)$ $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ এই n চলের ফাংশন। $x_1, x_2 \ldots\ldots, x_n$ চলগুলি

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

এই m সংখ্যক শর্তাধীন। ফলে n চলের মধ্যে মাত্র $n - m$ সংখ্যক চল স্বাধীন।

u এর চরম মানের জন্য ষ্টেশনারী বিন্দুতে

$$du = \frac{\delta u}{\delta x_1} dx_1 + \frac{\delta u_1}{\delta x_2} dx_2 + \ldots\ldots\ldots + \frac{\delta u}{\delta x_n} dx_n = 0 \ldots\ldots\ldots (2)$$

এবং (1) এর শর্তগুলির ফলে

$$\left.\begin{array}{l} df_1 = \frac{\delta f_1}{\delta x_1} dx_1 + \frac{\delta f_1}{\delta x_2} dx_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{\delta f_1}{\delta x_n} dx_n = 0 \\ df_2 = \frac{\delta f_2}{\delta x_1} dx_1 + \frac{\delta f_2}{\delta x_2} dx_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{\delta f_2}{\delta x_n} dx_n = 0 \\ df_3 = \frac{\delta f_3}{\delta x_1} dx_1 + \frac{\delta f_3}{\delta x_2} dx_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{\delta f_3}{\delta x_n} dx_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ df_m = \frac{\delta f_m}{\delta x_1} dx_1 + \frac{\delta f_m}{\delta x_2} dx_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{\delta f_m}{\delta x_n} dx_n = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (3)$$

(2) এবং (3) থেকে পাই

$$du + \lambda_1 df_1 + \lambda_2 df_2 + \ldots\ldots\ldots + \lambda_m df_m = 0 \Rightarrow$$

$$P_1 dx_1 + P_2 dx_2 + \ldots\ldots + P_r dx_r + P_n dx_n = 0 \ldots\ldots\ldots (4)$$

যেখানে $P_r = \frac{\delta u}{\delta x_r} + \lambda_1 \frac{\delta f_1}{\delta x_r} + \lambda_2 \frac{\delta f_2}{\delta x_r} + \ldots\ldots\ldots + \lambda_m \frac{\delta f_m}{\delta x_r}$

$\lambda_1, \lambda_2 \ldots\ldots\ldots \lambda_m$ এই অনির্ণীত গুণকগুলি আমাদের ইচ্ছাধীন। আমরা এখন এদের এমন ভাবে নির্ণয় করি যে নিচের সম্পর্কগুলি $P_1 = 0$ $P_2 = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots P_m = 0 \ldots\ldots\ldots$(5) সিদ্ধ হয়।

এবার (4) ও (5) থেকে পাই

$P_{m+1} dx_{m+1}$ $P_{m+2} dx_{m+2} + \ldots\ldots + P_n dx_n = 0 \ldots\ldots$(6)

এখন (n – m) সংখ্যক কোন্ কোন্ চলকে স্বাধীন ধরা হবে সে প্রশ্ন অবান্তর। আমরা

যদি $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots \ldots x_n$ এই চলগুলি কে স্বাধীন জল ধরি তাহলে

$dx_{m+1}, dx_{m+2}, \ldots\ldots dx_n$ এই অন্তর কলগুলির রৈখিক অনির্ভরতা থেকে পাই

$P_{m+1} = 0, P_{m+2} = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots P_n = 0 \ldots\ldots\ldots$(7)

অতএব (1), (5) এবং (7) থেকে মোট m+m+n-m=n+m সংখ্যক সম্পর্ক পাই। এগুলি হল

$f_1 = 0, f_2 = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots f_m = 0,$

এবং $P_1 = 0, P_2 = 0, \ldots\ldots\ldots P_n = 0,$

এই m + n সংখ্যক সম্পর্ক থেকে m সংখ্যক গুণক $\lambda_1, \lambda_2 \ldots\ldots \lambda_m$ এবং $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ এই n সংখ্যক চলের মান পাওয়া যাবে।

মন্তব্য। আমরা যদি $L = u + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots\ldots\ldots + \lambda_m f_m$

$$= u + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k f_k$$

ফাংশনটি গঠন করি L ফাংশনটির $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_n$ চলগুলিকে স্বাধীন চল ধরে নিয়ে L এর চরম মানের আবশ্যকীয় সর্ত প্রয়োগ করি তাহলে পাই,

$$Lx_1 = \frac{\delta L}{\delta x_1} = \frac{\delta u}{\delta x_1} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\delta f_k}{\delta x_1} = 0$$

$$Lx_2 = \frac{\delta L}{\delta x_2} = \frac{\delta u}{\delta x_2} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\delta f_k}{\delta x_2} = 0$$

$$Lx_n = \frac{\delta L}{\delta x_n} = \frac{\delta u}{\delta x_n} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\delta f_k}{\delta x_n} = 0$$

এই সম্পর্কগুলি এবং (5) ও (7) শর্তগুলি অভিন্ন।

এই জন্য আমরা প্রথমেই L ফাংশনটি গঠন করে এর প্রথম ক্রমের আংশিক অন্তর কলজগুলিকে শূন্য ধরি।

কোন স্টেশনারী বিন্দু চরম বিন্দু কিনা নির্ণয় করার জন্য L ফাংশনটির দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরকলের চিহ্ন বিচার করতে হবে। অবশ্য $df_1 = 0$ $df_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots df_m = 0$ শর্তগুলি ব্যবহার করে অধীন চলের অন্তরকলগুলিকে স্বাধীন চলের অন্তরকলের সাহায্যে প্রকাশ করতে হবে। L ফাংশনটিকে লাগরাঞ্জের ফাংশন বলা হয়।

উদাহরণ। $z = 6 - 4x - 3y$ ফাংশনটির চরম মান নির্ণয় করুন। প্রদত্ত, x, y চল দুটি $x^2 + y^2 = 1$ সমীকরণটি সিদ্ধ করে।

সমাধান। $L(x, y) = 6 - 4x - 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ লাগরাঞ্জের ফাংশনটি গঠন করা হল। L এর চরম মানের আবশ্যকীয় শর্ত প্রয়োগ করে পাই,

$$\frac{\delta L}{\delta x} = -4 + 2\lambda x = 0 \quad \ldots (1)$$

$$\frac{\delta L}{\delta y} = -3 + 2\lambda y = 0 \quad \ldots (2)$$

প্রদত্ত শর্ত $x^2 + y^2 = 1 \ldots (3)$

(1), (2) ও (3) সমীকরণ তিনটি থেকে পাই

$$x = \frac{4}{2\lambda}, \; y = \frac{3}{2\lambda}, \; \lambda^2 = \frac{25}{4},$$

অর্থাৎ $\lambda_1 = \frac{5}{2}, \; x_1 = \frac{4}{5}, \; y_1 = \frac{3}{5}$

এবং $\lambda_2 = \frac{-5}{2}, \; x_1 = \frac{-4}{5}, \; y_1 = \frac{-3}{5}$

যেহেতু $\frac{\delta^2 L}{\delta x^2} = z\lambda, \; \frac{\delta^2 L}{\delta x \delta y} = 0 \; \frac{\delta^2 L}{\delta y^2} = 2\lambda,$

অতএব $d^2L = z\lambda\left[(dx)^2 + (dy)^2\right]$

$\therefore \lambda = \frac{5}{2}$ হলে d^2L ধনাত্মক ভাবে নির্দিষ্ট দ্বিঘাত আকার। ফলে z ফাংশটির $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ বিন্দুতে শর্ত সাপেক্ষ অবম মান আছে। আবার $\lambda = \frac{-5}{2}$ হলে d^2L দ্বিঘাত আকারটি ঋণাত্মক ভাবে নির্দিষ্ট। ফলে $\left(\frac{-4}{5}, \frac{-3}{5}\right)$ বিন্দুতে z এর শর্তসাপেক্ষ পরম মান আছে।

13.8 দৃষ্টান্ত মূলক উদাহরণাবলা

$u = \sin x \sin y \sin(x+y)$ ফাংশনটির পরম এবং অবম মান নির্ণয় করুন। যেখানে $0 \le x, y \le 2\pi$

সমাধান। u ফাংশনটির প্রথম ক্রমের আংশিক অন্তরকলজগুলি হল

$$\frac{\delta u}{\delta x} = \cos x \sin y \sin(x+y) + \sin x \sin y \cos(x+y)$$

$$= \sin y\left[\cos x \sin(x+y) + \sin x \cos(x+y)\right] = \sin y \sin(2x+y)$$

$$\frac{\delta u}{\delta x} = \sin x\left[\cos y \sin(x+y) + \sin y \cos(x+y) = \sin x \sin(x+2y)\right]$$

চরম মানের আবশ্যকীয় শর্ত থেকে পাই

$\sin y \sin(2x+y) = 0$............(i)

এবং $\sin x \sin(x+y) = 0$.............(ii)

x ও y এর জন্য সমাধান করে $(0, 0)$, (π, π), $(2\pi, 2\pi)$, $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$

বিন্দুগুলি পাওয়া যায়।

দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরকলজগুলি হল

$$r = \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = \frac{\delta}{\delta x} \sin y \sin(2x+y) = 2\sin y \cos(2x+y)$$

$$t = \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} = \qquad = 2\sin x \cos(x+2y)$$

$$s = \frac{\delta^2 u}{\delta x \delta y} = \cos y \sin(2x+y) + \sin y \cos(2x+y)$$

$$= \sin(2x+2y)$$

প্রথম তিনটি বিন্দু অর্থাৎ $(0, 0)$, (π, π) এবং $(2\pi, 2\pi)$ বিন্দুতে $rt - s^2 = 0$ অর্থাৎ u এর মান সম্পর্কে সংশয় থেকে যাচ্ছে।

$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ বিন্দুতে

$$r = 2 \times \sqrt{\frac{3}{2}}(-1) = -\sqrt{3}$$

$$t = \qquad -\sqrt{3}$$

$$s = -\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore rt - s^2 = 3 - \frac{3}{4} = 0$$

অতএব $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ বিন্দুতে u এর পরম মান আছে। পরম মানটি হল $\frac{3\sqrt{3}}{8}$. আবার $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ বিন্দুতে

$r = \sqrt{3} = t, \quad s = \sqrt{\frac{3}{2}}$ এবং $rt - s^2 = 3 - \frac{3}{4} > 0$

$\therefore \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ বিন্দুতে u এর অবম মান আছে। অবম মানটি হল $\frac{-3\sqrt{3}}{8}$.

13.8.2 উদাহরণ।

$u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$ এই ত্রিচলীয় ফাংশনটির চরম মান নির্ণয় করুন।

সমাধান। u এর প্রথম ও দ্বিতীয় অন্তরকল দুটি হল

$du = (2x - y + 1)\,dx + (2y - x)\,dy + (2z - 2)\,dz$ এবং

$d^2u = (2dx - dy)\,dx + (2dy - dx)\,dy + (2dz)dz$

$= 2(dx)^2 + 2(dy)^2 + 2(dz)^2 - 2dxdy$

অতএব u এর স্টেশনারী বিন্দুগুলিতে

$$\begin{aligned} 2x - y + 1 &= 0 \\ 2y - x &= 0 \\ 2z - 2 &= 0 \end{aligned}$$

সমীকরণ তিনটি থেকে পাই $x = \frac{-2}{3}, y = \frac{-1}{3}, z = 1$

অর্থাৎ u এর স্টেশনারী বিন্দুটি হল $\left(\frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}, 1\right)$

এখন,

$$d^2u = 2[(dx)^2 - dxdy + (dy)^2] + 2(dz)^2$$

$$= 2\left[\left\{\left(dx - \frac{1}{2}dy\right)\right\}^2 + \frac{3}{4}(dy)^2\right] + 2(dz)^2$$

$$= 2\left[\left(dx - \frac{1}{2}dy\right)^2 + \frac{3}{4}(dy)^2 + (dz)^2\right]$$

অতএব দ্বিঘাত আকারটি ধনাত্মক ভাবে নির্দিষ্ট

$\therefore$ u ফাংশনটির $\left(\frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}, 1\right)$ বিন্দুতে অবম মান আছে। এই অবম মানটি হল

$$\left(\frac{-2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 + 1 - \left(\frac{-2}{3}\right)\left(\frac{-1}{3}\right) - \frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3}$$

13.8.3 উদাহরণ।

A, B, C কোন ত্রিভুজের তিনটি কোণ হলে

cos A cos B cos C এর পরম মান নির্ণয় করুন।

সমাধান। ধরি $u = \cos A \cos B \cos C$,

A, B, C কোন ত্রিভুজের তিনটি কোণ বলে, $A + B + C = \pi$.

আমরা তাই লাগরাঞ্জের ফাংশনটি

$L(A,B,C) = \cos A \cos B \cos C + \lambda(A + B + C - \pi)$ আকার নিতে পারি।

চরম মানের আবশ্যকীয় শর্ত থেকে পাই

$$\frac{\delta L}{\delta A} = 0 \Rightarrow \quad -\sin A \cos B \cos C + \lambda = 0$$

$$\frac{\delta L}{\delta B} = 0 \Rightarrow \quad -\cos A \sin B \cos C + \lambda = 0$$

$$\frac{\delta L}{\delta C} = 0 \Rightarrow \quad -\cos A \cos B \sin C + \lambda = 0$$

∴ চরম মানের আবশ্যকীয় শর্ত হচ্ছে

$$\lambda = \sin A \cos B \cos C = \cos A \sin B \cos C = \cos A \cos B \sin C$$

$$\Rightarrow \tan A = \tan B = \tan C$$

$$\Rightarrow A = B = C = \frac{\pi}{3}.$$

L এর দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরকলজগুলি হল

$$\frac{\delta^2 L}{\delta A^2} = -\cos A \cos B \cos C \quad \frac{\delta^2 L}{\delta B^2} = -\cos A \cos B \cos C \quad \frac{\delta^2 L}{\delta C^2} = -\cos A \cos B \cos C$$

$$\frac{\delta^2 L}{\delta A \delta B} = \sin A \sin B \cos C, \quad \frac{\delta^2 L}{\delta B \delta C} = \cos A \sin B \sin C, \quad \frac{\delta^2 L}{\delta C \delta A} = \sin A \cos B \sin C$$

∴ L এর দ্বিতীয় অন্তরকল

$$d^2L = -\cos A \cos B \cos C\ [(dA)^2 + (dB)^2 + (dC)^2]$$

$$+ 2\left[\sin A \sin B \cos C\, dA\, dB + \sin B \sin C \cos A\, dB\, dC + \sin C \sin A \cos B\, dC\, dA\right]$$

অতএব $\left(d^2L\right)_{\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)} = -\frac{1}{8}\left[(dA)^2+(dB)^2+(dC)^2\right]$

$$+2\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\left[dA\,dB+dB\,dC+dC\,dA\right]$$

$$=\frac{-1}{8}\left[(dA)^2+(dB)^2+(dC)^2\right]+\frac{3}{4}\left[dAdB+(dA+dB)\,dC\right]$$

$$=\frac{-1}{8}\left[(dA)^2+(dB)^2+(dC)^2\right]+\frac{3}{4}\left[dAdB+(dA+dB)\,(-dA-dB\right] \quad [\because A+B+C=\pi]$$

$$=\frac{-1}{8}\left[(dA)^2+(dB)^2+(dC)^2\right]-\frac{3}{4}\left[dA^2+dB^2+dAdB\right]$$

$$=\frac{-1}{8}\left[(dA)^2+(dB)^2+(dC)^2\right]-\frac{3}{4}\left[\left(dA+\frac{1}{2}dB\right)^2\frac{3}{4}(dB)^2\right]<0$$

অতএব $A=\frac{\pi}{3}$, $B=\frac{\pi}{3}$, $C=\frac{\pi}{3}$ বিন্দুতে cosA cosB cosC এর পরম মান আছে এবং পরম মানটি হল $\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

13.8.4 উদাহরণ। $u = x^2 + y^2 + z^2$ ফাংশনটির চলগুলি

$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ এবং $lx + my + nz = 0$ শর্তাধীন হলে দেখান যে u-এর ষ্টেশনারী মানগুলি

$$\frac{l^2}{au-1}+\frac{m^2}{bu-1}+\frac{n^2}{cu-1}=0$$

সমীকরণটি সমাধান করে পাওয়া যায়।

সমাধানঃ লাগরাঞ্জের ফাংশনটি হল

$$L(x,y,z\,;\lambda_1,\lambda_2)=x^2+y^2+z^2+\lambda_1(ax^2+by^2+cz^2-1)+\lambda_2(lx+my+nz)$$

চরম মানের আবশ্যাকীয় শর্তগুলি হল ঃ—

$$\frac{\delta L}{\delta x}=2x+2\lambda_1 ax+\lambda_2 l=0\,\ldots\ldots\ldots(i)$$

$$\frac{\delta L}{\delta y}=2y+2\lambda_1 by+\lambda_2 m=0\,\ldots\ldots\ldots(ii)$$

$$\frac{\delta L}{\delta z}=2z+2\lambda_1 cz+\lambda_2 n=0\,\ldots\ldots\ldots(iii)$$

(i), (ii) এবং (iii) থেকে পাই

$$0 = x\frac{\delta L}{\delta x} + y\frac{\delta L}{\delta y} + z\frac{\delta L}{\delta z} = 2(x^2+y^2+z^2) + 2\lambda_1(ax^2+by^2+cz^2) + \lambda_2(lx+my+nz)$$

$$= 2u + 2\lambda_1$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -u$$

λ_1-এর মান (i) এ বসিয়ে পাই $x = \dfrac{\lambda_2 l}{2(au-1)}$

অনুরূপ ভাবে,

$$y = \frac{\lambda_2 m}{2(bu-1)}$$

$$z = \frac{\lambda_2 n}{2(cu-1)}$$

$\because \quad lx + my + nz = 0$

অতএব

$$\frac{\lambda_2}{2}\left[\frac{l^2}{au-1} + \frac{m^2}{bu-1} + \frac{n^2}{cu-1}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{l^2}{au-1} + \frac{m^2}{bu-1} + \frac{n^2}{cu-1} = 0.$$

13.8.5. উদাহরণ। ত্রিমাত্রিক দেশের কোন বিন্দু (x, y, z) এ তাপমাত্রা T হচ্ছে $T = 400\,xyz^2$ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ এই গোলকের পৃষ্ঠে পরম তাপমাত্রা নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ এখানে T(x, y, z) ফাংশনটির পরম মান নির্ণয় করতে হবে যখন এর চলগুলি $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ এই শর্তসাপেক্ষ।

আমরা $L(x, y, z, \lambda) = T(x, y, z) + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ এই লাগরাঞ্জের ফাংশনটি গঠন করি।

অর্থাৎ $L = 400\,xyz^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$

চরম মানের আবশ্যকীয় শর্তগুলি হল

$$\begin{aligned}
L_x &= 400yz^2 + 2\lambda x = 0 \text{..........(i)}\\
L_y &= 400xz^2 + 2\lambda y = 0 \text{..........(ii)}\\
L_z &= 800xyz + 2\lambda z = 0 \text{..........(iii)}\\
L_\lambda &= x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \text{........(iv)}
\end{aligned}$$

(i), (ii) এবং (iii) থেকে λ অপনয়ন করে পাই

$$-200\frac{yz^2}{x}=-200\frac{xz^2}{y}=-400xy=\lambda$$

$$\Rightarrow x^2=y^2=\frac{z^2}{2}\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ (v)$$

(iv) এবং (v) থেকে পাই

$$x=y=\pm\frac{1}{2},\quad z=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

অর্থাৎ দুটি ষ্টেশনারী বিন্দু $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}})$ এবং $(\frac{-1}{2},\frac{-1}{2},\frac{-1}{\sqrt{2}})$ পাওয়া গেল।

L এর দ্বিতীয় অন্তরকল

$$d^2L=2\lambda\left[(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2\right]+800xy(dz)^2+2\times800\left[yzdzdx+xzdzdy\right]+400z^2dxdy$$

$$=2\lambda\left[(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2\right]+800xy(dz)^2+1600zdz(ydx+xdy)+400z^2dxdy$$

$$=2\lambda\left[(dx)^2+(dy)^2\right]+(2\lambda+800xy)(dz)^2+1600(-xdx-ydy)(ydx+xdy)+400z^2dxdy$$

[(iv) থেকে; $x^2+y^2+z^2=1$ হলে $xdx+ydy+zdz=0\Rightarrow zdz=-xdx-ydy$]

$=2\lambda\,[(dx)^2+(dy)^2]+0\dots\dots-1600[xy\{(dx)^2+(dy)^2\}+(x^2+y^2)dxdy]+400z^2dxdy$

[(iii) থেকে, $z(2\lambda+800xy)=0$]

$$=\left[2\lambda-1600xy\right]\left[(dx)^2+(dy)^2\right]-1600\left[x^2+y^2-\frac{z^2}{4}\right]dxdy$$

$$=-2400xy\left[(dx)^2+(dy)^2\right]-1600\left[x^2+y^2+\frac{z^2}{4}\right]dxdy\quad[\because\ \pi=-400xz]$$

$$=-2400\times\frac{1}{4}\left[(dx)^2+(dy)^2\right]-1600\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right]dxdy\ \text{ যখন }\ x=\frac{1}{2}=y,z=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=-600\left[(dx)^2+(dy)^2+dxdy\right]<0\ \text{ যখন }\ x=\frac{1}{2},y=\frac{1}{2},z=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

অতএব $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\sqrt{2})$ বিন্দুতে তাপমাত্রা T পরম মান গ্রহণ করে এবং এই পরম তাপমাত্রাটি হল

$$(T)_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=400\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$$

$$=50$$

13.8.6 উদাহরণ।

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z}{c^2}=1$ এই উপবৃত্তকে অন্তর্লিখিত পরম আয়তনের আয়ত ষড়তলকের আয়তন নির্ণয় করুন।

সমাধান। ধরি উপবৃত্তকে অন্তর্লিখিত আয়ত ষড়তলকটির দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ 2x,2y,2z তাহলে এর আয়তন v = 8xyz এবং আমাদের এই ফাংশনটির চরম মান নির্ণয় করতে হবে যেখানে এর চলগুলি (x,y,z) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ শর্তাধীন।

লাগরাঞ্জের ফাংশন $L=8xyz+\lambda(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1)$ এর প্রথম ক্রমের অন্তরকলগুলি হচ্ছে

$$L_x=8yz+2\lambda\frac{x}{a^2}$$

$$L_y=8zx+2\lambda\frac{y}{b^2}$$

$$L_z=8xy+2\lambda\frac{z}{c^2}$$

$\therefore$ চরম মানের আবশ্যকীয় শর্ত থেকে পাই

$$4yz+\frac{\lambda}{a^2}x=0$$

$$4zx+\frac{\lambda}{b^2}y=0$$

$$4xy+\frac{\lambda}{c^2}z=0$$

$$\Rightarrow\frac{4yz}{x}a^2=-\lambda=\frac{4zx}{y}b^2=4\frac{xy}{z}c^2\Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=\frac{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}{1+1+1}=\frac{1}{3}(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2})=\frac{1}{3}$$ (প্রদত্ত শর্ত থেকে)

$\therefore\ x=\frac{a}{\sqrt{3}},\ y=\frac{b}{\sqrt{3}},\ z=\frac{c}{\sqrt{3}}$ [$\because$ x, y, z ঋণাত্মক হতে পারেনা]

$\therefore$ ষ্টেশনারী বিন্দুটি হচ্ছে $\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}\right)$

L(x,y,z) এর দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরকলজগুলি হচ্ছে

$$L_{xx} = \frac{2\lambda}{a^2}, \quad L_{yy} = \frac{2\lambda}{b^2}, \quad L_{zz} = \frac{2\lambda}{c^2},$$

এবং $L_{yz} = 8x, \quad L_{zx} = 8y, \quad L_{xy} = 8z,$

ফলে $$d^2L = 2\lambda\left[\left(\frac{dx}{a}\right)^2 + \left(\frac{dy}{a}\right)^2 + \left(\frac{dz}{c}\right)^2\right] + 2[8x\,dy\,dz + 8y\,dz\,dx + 8z\,dx\,dy] \ldots\ldots(1)$$

প্রদত্ত শর্ত $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

একে অন্তরকলন করে পাই $\dfrac{x}{a^2}dx + \dfrac{y}{b^2}dy + \dfrac{z}{c^2}dz = 0$

বা, $z\dfrac{dz}{c^2} = -\left(\dfrac{x}{a^2}dx + \dfrac{y}{b^2}dy\right)$

বা, $dz = -\dfrac{c^2}{z}\left[\dfrac{x}{a^2}dx + \dfrac{y}{b^2}dy\right] = -c^2\dfrac{\sqrt{3}}{c}\left[\dfrac{1}{a\sqrt{3}}dx + \dfrac{1}{b\sqrt{3}}dy\right]$ ষ্টেশনারী বিন্দুতে

বা, $dz = -c\left[\dfrac{dx}{a} + \dfrac{dy}{b}\right]$

$$\therefore (x\,dy + y\,dx)dz = -(x\,dy + y\,dx)c\left[\frac{dx}{a} + \frac{dy}{b}\right]$$

$$= -c\left[\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right]dxdy - \frac{c}{a}y\,(dx)^2 - c\frac{x}{b}(dy)^2$$

$$= -\frac{2c}{\sqrt{3}}dxdy - \frac{c}{a}\frac{b}{\sqrt{3}}(dx)^2 - \frac{ca}{b\sqrt{3}}(dy)^2$$

$$= \frac{-c}{\sqrt{3}}\left[2\,dx\,dy + \frac{b}{a}(dx)^2 + \frac{a}{b}(dy)^2\right]$$

আবার $z\,dx\,dy = \dfrac{c}{\sqrt{3}}dx\,dy$

$\therefore x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$

$$=\frac{-c}{\sqrt{3}}\left[\frac{b}{a}(dx)^2+\frac{a}{b}(dy)^2+dxdy\right]$$

$$=\frac{-c}{\sqrt{3}}\left[\left\{\sqrt{\frac{b}{a}}\,dx+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}\,dy\right\}^2+\frac{3}{4}\frac{a}{b}dy^2\right]<0$$

$$\therefore \left(d^2L\right)_{\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}\right)}=\frac{-8abc}{\sqrt{3}}\left[\left(\frac{dx}{a}\right)^2+\left(\frac{dy}{b}\right)^2+\left(\frac{dz}{c}\right)^2\right]\frac{-16c}{\sqrt{3}}\left[\left\{\sqrt{\frac{b}{a}}\,dx+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}\,dy\right\}^2+\frac{3}{4}\frac{a}{b}(dy)^2\right]$$

[(1) সম্পর্কে $\lambda=\frac{-4abc}{\sqrt{3}}$ বসিয়ে]

অর্থাৎ $\left[d^2L\right]_{\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}\right)}<0$

অতএব $x=\frac{a}{\sqrt{3}}$, $y=\frac{b}{\sqrt{3}}$, $z=\frac{c}{\sqrt{3}}$ বিন্দুতে V ফাংশনটির পরম মান আছে। এই পরম মানটি হল

$$[V]_{\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}\right)}=\frac{8abc}{3\sqrt{3}}.$$

13.8.7 উদাহরণ। V আয়তন বিশিষ্ট কোন্ আয়তন ষড়তলকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল লঘিষ্ঠ?

সমাধান। ধরি, আয়তঘনকটির দৈর্ঘ্য, প্রস্থ্য উচ্চতা x,y,z. তাহলে এটির আয়তন = xyz = V (প্রদত্ত)

এবং সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল 2(xy + yz + zx) = s

তাহলে, আমাদের s এর অবম মান নির্ণয় করতে হবে যখন s এর চলগুলি xyz = V শর্তাধীন।

আমরা L= 2(xy + yz + zx) + λ (xyz – V) এই লাগরাঞ্জের ফাংশনটি গঠন করি।

এখন $L_x=[2(y+z)+\lambda yz]dx$

$$L_y=[2(z+x)+\lambda zx]dy$$

$$L_z=[2(x+y)+\lambda xy]dz$$

∴ চরম মানের আবশ্যকীয় শর্ত থেকে পাই

$$2(y+z)+\lambda yz=0$$
$$2(z+x)+\lambda zx=0$$
$$2(x+y)+\lambda xy=0$$

এই সহ সমীকরণগুলি সমাধান করে পাই

$$2\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=-\lambda=2\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)=2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$$

অর্থাৎ, $x=y=z=V^{\frac{1}{3}}\left[\because xyz=V\right]$

$=k$ (ধরি)

এখন,

$$d^2L=L_{xx}(dx)^2+L_{yy}(dy)^2\,L_{zz}(dz)^2+2\left[L_{yz}dydz+L_{zx}dzdx+L_{xy}\,dx\,dy\right]$$

$$=2\left[(2+\lambda x)\,dydz+(2+\lambda y)\,dzdx+(2+\lambda z)dx\,dy\right]$$

$$d^2L_{(k,k,k)}=4\left[dydz+dzdx+dxdy\right]+2\lambda k\left[dydz+dzdx+dxdy\right]$$

$$=(4+2\lambda k)[dydz+dzdx+dxdy]$$

$$=(4-8)\left[dydz+dzdx+dxdy\right]\quad\left[\because\ -\lambda=2\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k}\right)=\frac{4}{k}\right]$$

$$=-4[(dy+dx)dz+dxdy]$$

যেহেতু $xyz=V$

$$yz\,dx+zx\,dy+xy\,dz=0\Rightarrow$$

$$xydz=-(yz\,dx+zx\,dy)\Rightarrow$$

$$dz=-\left(\frac{z}{x}dx+\frac{z}{y}dy\right)$$

$$=-z\left(\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}\right)\Rightarrow$$

$$dz_{(k,k,k)}=-(dx+dy)$$

অতএব $d^2L_{(k,k,k)}=-4\left[-(dx+dy)^2+dxdy\right]$

$$=4[(dx+dy)^2-dxdy]$$

$$=4[(dx)^2+(dy)^2+dxdy]$$

$$=4\left[\left(dx+\frac{1}{2}dy\right)^2+\frac{3}{4}(dy)^2\right]>0$$

d^2L দ্বিঘাত আকারটি $(k,k,k)=\left(V^{1/3},V^{1/3},V^{1/3}\right)$ বিন্দুতে ধনাত্মক ভাবে নির্দিষ্ট।

$\therefore$ s এর এই বিন্দুতে অবম মান আছে। $\therefore$ আয়ত ষড়তলকটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল লঘিষ্ঠ হবে যখন $x=y=z=V^{\frac{1}{3}}$ অর্থাৎ আয়ত ষড়ফলকটির একটি ঘনক।

13.8.8 উদাহরণ।

একটি ধনাত্মক সংখ্যা a কে 4টি ধনাত্মক সংখ্যার গুণফল রূপে প্রকাশ করুন। যেখানে ঐ 4টি ধনাত্মক সংখ্যার সমষ্টি লঘিষ্ঠ।

সমাধান। ধরি $xyzt = a, \Rightarrow x, y, z, t > 0$

তাহলে $s = x + y + z + t$ এর লঘিষ্ঠ মান নির্ণয় করতে হবে যেখানে x, y, z, t চলগুলি $xyzt = a$ এই শর্তাধীন $L(x, y, z, t) = (x + y + z + t) + \lambda(xyzt - a)$ এই লাগরাঞ্জের ফাংশনটি গঠন করা হল।

চরম মানের আবশ্যকীয় শর্ত থেকে পাই

$$0 = L_x = (1+\lambda yzt) \Rightarrow \qquad -\lambda = \frac{1}{yzt}$$

$$0 = L_y = (1+\lambda xzt) \Rightarrow \qquad -\lambda = \frac{1}{xzt}$$

$$0 = L_z = (1+\lambda xyt) \Rightarrow \qquad -\lambda = \frac{1}{xyt}$$

$$0 = L_t = (1+\lambda xyz) \Rightarrow \qquad -\lambda = \frac{1}{xyz}$$

অর্থাৎ স্টেশনারী বিন্দুতে $x = y = z = t = (k$ ধরি)

যেখানে $k^4 = a \Rightarrow \qquad k = a^{\frac{1}{4}}$.

$\Rightarrow$ ষ্টেশনারী বিন্দুটি হল (k,k,k,k), $\left(k = a^{\frac{1}{4}}\right)$ এবং $\lambda = -\frac{1}{k^3}$

L ফাংশনটির দ্বিতীয় ক্রমের আংশিক অন্তরকলজগুলি হল

$L_{xx} = 0 = L_{yy} = L_{zz} = L_{tt}$

এবং $L_{xy} = \lambda zt$, $L_{yz} = \lambda xt$, $L_{zt} = \lambda_{zy}$, $L_{tx} = \lambda yz$

ফলে L এর দ্বিতীয় অন্তরকল

$d^2L = 2\lambda$ [zt dx dy + xt dy dz + xy dz dt + yz dt dx + yt dx dz + xz dy dt]

$d^2L_{(k,k,k,k)} = \{2\lambda k^2$ [dxdy + dxdz + dxdt + dydz + dydt + dzdt]$\}$ [k,k,k,k].......(1)

যেহেতু $xyzt = a$ (প্রদত্ত)

$$\ln x + \ln y + \ln z + \ln t = \ln a \Rightarrow$$

$$\frac{1}{x}dx + \frac{1}{y}dy + \frac{1}{z}dz + \frac{1}{t}dt = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{k}[dx + dy + dz + dt] = 0 \qquad (k,k,k,k) \text{ বিন্দুতে} \ldots (2)$$

আবার (1) থেকে পাই

$$d^2L_{(k,k,k,k)} = 2\lambda k^2[dx(dy + dz + dt) + dydz + dydt + dzdt]$$

$$= 2\lambda k^2[-(dy + dz + dt)^2 + dydz + dydt + dzdt] \quad [(2) \text{ থেকে}]$$

$$\therefore [d^2L]_{(k,k,k,k)} = -2\lambda k^2[(dy)^2 + (dz)^2 + (dt)^2 + dydz + dzdt + dtdy]$$

$$= -2k^2\left(\frac{-1}{k^3}\right)\left[\frac{1}{2}\left\{(dy + dz)^2 + (dz + dt)^2 + (dt + dy)^2\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{k}[(dy + dz)^2 + (dz + dt)^2 + (dt + dy)^2] > 0$$

অতএব $(k,k,k,k) = \left(a^{\frac{1}{4}}, a^{\frac{1}{4}}, a^{\frac{1}{4}}, a^{\frac{1}{4}}\right)$ বিন্দুতে $s = x + y + z + t$ এর অবম মান আছে।

13.9 সারাংশ

দ্বিচল ফাংশনের পরম মানের সংজ্ঞা।

ধরি $f(x, y)$ দ্বিচল ফাংশনটি একটি দ্বিমাত্রিক অঞ্চল R-এ সংজ্ঞাত। (a, b) ঐ R অঞ্চলের একটি অন্তঃস্থ বিন্দু। যদি এবং একমাত্র যদি একটি ধণাত্মক সংখ্যা δ পাওয়া যায় যাতে করে

$f(a, b) > f(x, y)$

অসমতাটি সিদ্ধ হয় R অঞ্চলের সেই সমস্ত (x, y) বিন্দুতে যেখানে

$$0 < (x - a)^2 + (y - b)^2 < \delta$$

তবে $f(x,y)$ এর (a,b) বিন্দুতে আপেক্ষিক পরম মানের অস্তিত্ব বর্তমান।

দ্বিচল ফাংশনের অবম মানের সংজ্ঞা ঃ দ্বিচল ফাংশন $f(x,y)$ এর কোন দ্বিমাত্রিক অঞ্চল R এর (a,b) বিন্দুতে আপেক্ষিক অবম মানের অস্তিত্ব বর্তমান যদি এবং একমাত্র যদি একটি ধনাত্মক সংখ্যা δ পাওয়া যায় যাতে করে

$$f(a, b) < f(x, y)$$

অসমতাটি সিদ্ধ হয়, R অঞ্চলের সেই সমস্ত (x, y) বিন্দুতে যেখানে

$$0<(x-a)^2+(y-b)^2<\delta$$

ষ্টেশনারী বিন্দু ও ষ্টেশনারী মান।

যদি কোন দ্বিচল ফাংশনের প্রথম ক্রমের আংশিক অন্তরকলজগুলির মান কোন বিন্দুতে শূন্য হয় তাহলে ঐ বিন্দুকে ষ্টেশনারী বিন্দু এবং ঐ বিন্দুতে ফাংশনের মানকে ষ্টেশনারী মান বলা হয়।

দ্বিচল ফাংশনের চরম মান নির্ণয়ের সূত্র।

$f(a, b)$, $f(x, y)$ এই দ্বিচল ফাংশনের চরম মান হবে যদি (a,b) বিন্দুতে f এর প্রথম অন্তরকল df এর মান শূন্য হয় এবং এর দ্বিতীয় অন্তরকল d^2f এর চিহ্ন অবিচল (অথবা নির্দিষ্ট) থাকে (dx, dy এর অশূন্য মানের জন্য)।

d^2f এর চিহ্নটি ধনাত্মক ভাবে নির্দিষ্ট হলে (a, b) বিন্দুতে $f(x, y)$ এর অবম মান এবং চিহ্নটি ঋণাত্মক ভাবে নির্দিষ্ট হলে (a, b) বিন্দুতে $f(x, y)$ এর পরম মান আছে।

তিন বা ততোধিক চলের ফাংশনের চরম মান নির্ণয়ের নিয়ম।

$(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n)$ বিন্দুটি $f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ ফাংশনটির ষ্টেশনারী বিন্দু হবে যদি এবং একমাত্র যদি

$$df(a_1, a_2, \ldots a_n) = 0 \text{ হয়।}$$

আবার কোন ষ্টেশনারী বিন্দুতে d^2f এই দ্বিঘাত আকারটি ধণাত্মক ভাবে নির্দিষ্ট হলে $f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ এর ঐ বিন্দুতে অবম মান থাকবে এবং d^2f ঋণাত্মকভাবে নির্দিষ্ট হলে f ফাংশনটির ঐ ষ্টেশনারী বিন্দুতে পরম মান থাকবে।

শর্তসাপেক্ষ চরম মান ও লাগরাঞ্জের গুণক পদ্ধতি।

যদি $f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ ফাংশনটির চরম মান নির্ণয় করতে হয়, যেখানে f ফাংশনের চলগুলি

$$f_1(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = 0$$
$$f_2(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_m(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = 0$$

এই m সংখ্যক শর্তের অধীন তাহলে নিম্নে বর্ণিত লাগরাঞ্জের পদ্ধতি অবলম্বন করা যেতে পারে।

1. $$L(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots \lambda_m) = f(x_1, x_2 \ldots\ldots, x_n) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k f_k(x_1, x_2 \ldots, x_n)$$

এই লাগরাঞ্জের ফাংশনটি গঠন করতে হবে।

2. ষ্টেশনারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ এবং অনির্ণীত গুণক সমূহ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_m$ এর মান নির্ণয়ের জন্য L ফাংশনটির

প্রথম ক্রমের আংশিক অন্তরকলজগুলিকে শূন্যের সঙ্গে সমীকৃত করতে হবে।

অর্থাৎ

$$Lx_1 = 0, \quad Lx_2 = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots Lx_n = 0$$
$$L\lambda_1 = 0, \quad L\lambda_2 = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots L\lambda_m = 0$$

এই $(n + m)$ টি সমীকরণ থেকে $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ এবং $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ এর মান নির্ণয় করতে হবে।

3. যেহেতু $d^2L = d^2f$ ষ্টেশনারী মানটি অবম না পরম নির্ণয়ের জন্য d^2L এর চিহ্ন পরীক্ষা করতে হবে। d^2L এই দ্বিঘাত আকারটি ধনাত্মক ভাবে নির্দিষ্ট হলে f এর ষ্টেশনারী মানটি অবম হবে অন্যথায় এটি ঋণাত্মক ভাবে নির্দিষ্ট হলে ষ্টেশনারী মানটি হবে পরম।

13.10 প্রশ্নাবলী

1. $f(x, y) = y^2 + 4xy + 3x^2 + x^3$ ফাংশনটিকে চরম মানের জন্য পরীক্ষা করুন।
2. $2(x^2 + y^2) - x^4 + y^4$ ফাংশনটির ষ্টেশনারী বিন্দু এবং চরম মান নির্ণয় করুন।
3. $xyz=8$ হলে x,y,z এর কোন মানের জন্য $u = \dfrac{5xyz}{x+2y+4z}$ এর মান পরম, নির্ণয় করুন।
4. $x + y + z = a$ হলে $x^m y^n z^p$ এর পরম মান নির্ণয় করুন।
5. $z^2 = xy + 1$ তলের উপরিস্থ যে বিন্দুটিমূলবিন্দু (0,0,0) এর নিকটতম তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।
6. একটি গরিষ্ঠ আয়তনের আয়তাকার খোলা বাক্সের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা নির্ণয় করুন যেখানে বাক্সটির তলগুলির ক্ষেত্রফল 432 বর্গ সেন্টিমিটার।
7. মূলবিন্দু থেকে $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0$ বক্ররেখার গরিষ্ঠ এবং লঘিষ্ঠ দূরত্ব নির্ণয় করুন।
8. কোন নির্দিষ্ট বিন্দু (x_0, y_0, z_0) থেকে $ax + by + cz + d = 0$ সমতলটির ক্ষুদ্রতম দূরত্ব নির্ণয় করুন।
9. $y^2 = zx$, $z = 0$ এই অধিবৃত্তের যে বিন্দুটি $z = x + zy + 8$ সমতলের সর্বাপেক্ষা নিকটবর্তী তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন। দেখান যে এই ক্ষুদ্রতম দূরত্বটি হল $\sqrt{6}$

13.11 উত্তরমালা

1. $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ বিন্দুতে অবম মান।
2. $(\pm 1, 0)$ বিন্দুতে পরমমান এবং $(0, \pm 1)$ বিন্দুতে অবম মান আছে।
3. 4, 2, 1
4. $l_n^m\, n^n\, p^p \left(\dfrac{a}{m+n+p}\right)^{m+n+p}$
5. $(0, 0, \pm 1)$
6. 12, 12, 6
7. 2 এবং 1
8. $\left|\dfrac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right|$
9. (2, -2, 0)